FIMFA ENS Ulm — Lundi 24 novembre 2008 — Durée : 2 heures

Examen partiel de topologie, analyse et calcul différentiel

Documents et calculatrices interdits

Les deux exercices sont indépendants.

Exercice I Notons $\mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes réels en une indéterminée X, et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $\mathbb{R}_n[X]$ son sous-espace vectoriel des polynômes de degré au plus n. Pour tout $k \in \mathbb{Z}$ et tout $P \in \mathbb{R}[X]$, notons

$$||P||_k = |P(k)| \ .$$

(1) a) Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, montrer que $|| \cdot ||_k$ est une semi-norme sur $\mathbb{R}[X]$. Dans la suite de la question (1), nous munissons $\mathbb{R}[X]$ de la topologie $\mathcal{T}_1$ définie par la famille de semi-normes $(|| \cdot ||_k)_{k\in\mathbb{Z}}$.

b) Montrer que l'espace vectoriel topologique $\mathbb{R}[X]$ est métrisable séparable, non séquentiellement complet.

c) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}^{n+1}$ définie par $P \mapsto (P(0), P(1), \dots, P(n))$ est continue.

d) Montrer que le sous-espace topologique $\mathbb{R}_n[X]$ est localement compact, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

e) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, considérons le sous-espace vectoriel $Q_n\mathbb{R}[X]$ de $\mathbb{R}[X]$ des multiples du polynôme $Q_n = X(X-1)\dots(X-n)$. Montrer que la topologie quotient sur $\mathbb{R}[X]/Q_n\mathbb{R}[X]$ de la topologie $\mathcal{T}_1$ est la topologie usuelle d'un espace vectoriel réel de dimension finie.

(2) Pour tout $i \in \mathbb{N}$ et tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, notons $a_i(P) \in \mathbb{R}$ le coefficient de X^i dans P (qui est nul si i est strictement supérieur au degré de P). Munissons $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ de la topologie produit, et notons $\mathcal{T}_2$ la topologie sur $\mathbb{R}[X]$ telle que l'application $\Phi : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ définie par $P \mapsto (a_i(P))_{i\in\mathbb{N}}$ soit un homéomorphisme sur son image.

a) Montrer qu'il existe une suite dans $\mathbb{R}[X]$ qui converge vers le polynôme nul 0 pour la topologie $\mathcal{T}_2$, mais pas pour la topologie $\mathcal{T}_1$.

b) Montrer qu'il existe une suite dans $\mathbb{R}[X]$ qui converge vers le polynôme nul 0 pour la topologie $\mathcal{T}_1$, mais pas pour la topologie $\mathcal{T}_2$.

c) Montrer que l'adhérence de l'image par Φ du sous-ensemble de $\mathbb{R}[X]$ des polynômes P tels que $|a_i(P)| \leq i$ pour tout $i \in \mathbb{N}$ est compact.

Exercice II Soit X l'ensemble des sous-groupes fermés de $\mathbb{R}^2$ (pour l'addition et le produit scalaire usuel).

(1) Soit F un sous-groupe fermé de $\mathbb{R}^2$, différent de $\mathbb{R}^2$ et non contenu dans une droite vectorielle.

Montrer que si F contient une droite vectorielle D, alors F est isomorphe (en tant que groupe topologique) à $D \times (F \cap D^\perp)$ où $D^\perp$ est l'orthogonal de D dans $\mathbb{R}^2$.

Montrer que si F ne contient pas de droite vectorielle D, alors il existe deux éléments e_1, e_2 de F non colinéaires, tels que $||e_1|| = \inf_{x\in F,\, x\neq 0} ||x||$ et $||e_2|| = \inf_{x\in F,\, x\notin \mathbb{R}e_1} ||x||$, et en déduire que $F = \mathbb{Z}e_1 + \mathbb{Z}e_2$.

En déduire que tout sous-groupe fermé de $\mathbb{R}^2$ est isomorphe (en tant que groupe topologique) à un groupe topologique produit $\mathbb{Z}^p \times \mathbb{R}^q$ où $p, q \in \mathbb{N}$ et $p + q \leq 2$.

(2) Pour tout $\epsilon > 0$, notons $B_\epsilon = {}^c B(0, \frac{1}{\epsilon})$ le complémentaire dans $\mathbb{R}^2$ de la boule ouverte de centre 0 et de rayon $\frac{1}{\epsilon}$. Pour tout $\epsilon > 0$, notons $V_\epsilon(A) = \{x \in \mathbb{R}^2 \ :\ d(x, A) < \epsilon\}$ le ϵ-voisinage ouvert d'une partie A de $\mathbb{R}^2$; montrer que $V_\epsilon(V_\eta(A) \subset V_{\epsilon+\eta}(A)$. Pour tous $F, F' \in X$, posons

$$\delta(F, F') = \inf\{\epsilon > 0 \ :\ F \ \subset\ V_\epsilon(F' \cup B_\epsilon) \quad \text{et} \quad F' \ \subset\ V_\epsilon(F \cup B_\epsilon)\ \}\ .$$

Montrer que δ est une distance sur X. Dans la suite de cet exercice, on munit X de cette distance.

(3) Soient $F \in X$ et $(F_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite dans X. Montrer que la suite $(F_i)_{i\in\mathbb{N}}$ converge vers F si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

a) pour tout $x \in F$, il existe $x_i \in F_i$ pour tout $i \in \mathbb{N}$ tels que $x_i \underset{i\to+\infty}{\longrightarrow} x$ dans $\mathbb{R}^2$;

b) si $(i_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite strictement croissante dans $\mathbb{N}$, si x_{i_k} est un élément de F_{i_k} pour tout $k \in \mathbb{N}$, si $x \in \mathbb{R}^2$ et si $x_{i_k} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} x$ dans $\mathbb{R}^2$, alors $x \in F$.

(Pour le sens « si », on pourra commencer par montrer que si $F \in X$ et $\epsilon > 0$, alors il existe $y_1, \dots y_m$ dans $F \cap \overline{B}(0, \frac{1}{\epsilon})$ tels que, pour tout x dans $F \cap \overline{B}(0, \frac{1}{\epsilon})$, on ait $d(x, \{y_1, \dots y_m\}) < \frac{\epsilon}{2}$).

(4) Notons G le groupe topologique $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ des isomorphismes linéaires de $\mathbb{R}^2$. Montrer que l'application de $G \times X$ dans X définie par $(g, F) \mapsto g(F)$ est une action continue de G sur X.

(5) Montrer que le sous-espace Z de X formé des sous-groupes isomorphes à $\mathbb{R}$ est homéomorphe à un cercle.

(6) Montrer que X est compact.