Corrigé de l'examen partiel

Exercice

1. (a) Si f n'est pas continue en a, comme les $B(a,1/(n+1))$ forment une base de voisinages de a, il existe V voisinage ouvert de $f(a)$ et x_n point de $B(a,1/(n+1))$ tel que $f(x_n) \notin V$.
   (b) Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de la question (a). Posons $z_0 = x_0$. Supposons construits $n_0 = 0 < n_1 < \cdots < n_p$ tels que les points $z_j = x_{n_j}$ vérifient $f(z_i) \neq f(z_j)$ pour tous $0 \leq i < j \leq p$. D'après l'hypothèse et le fait que $f(x_n) \notin V$ pour tout n, on ne peut extraire de la suite $(x_n)_n$ de sous-suite constante. Il existe donc $n_{p+1} > n_p$ tel que $f(x_{n_{p+1}}) \neq f(z_j)$ pour tout $j \leq p$. On pose donc $z_{p+1} = x_{n_{p+1}}$.
   (c) Soit pour tout $\ell \geq 0$, $K_\ell = \{f(z_k); k \geq \ell\}$. Comme la suite $(z_n)_n$ converge vers a, l'ensemble $\{z_k; k \geq \ell\} \cup \{a\}$ est compact. Son image par f, $K_\ell \cup \{f(a)\}$ également, grâce à l'hypothèse. Comme $K_\ell \subset X - V$, et que $X - V$ est fermé, $K_\ell = (K_\ell \cup \{f(a)\}) \cap (X - V)$ est également compact (et non vide). Alors $\bigcap_\ell K_\ell$ est non vide. Ceci est une contradiction, puisque tout élément b de cette intersection doit s'écrire pour tout ℓ sous la forme $f(z_{n_\ell})$ pour un entier $n_\ell \geq \ell$. Alors la suite de terme général $y_\ell = z_{n_\ell}$ converge vers a, et est telle que $f(y_\ell) = b \neq f(a)$, puisque $b \notin V$. C'est la contradiction cherchée avec l'hypothèse de (b).
2. Supposons que f n'est pas continue en un point a. D'après (b) et (c) de la question précédente, il existe une suite $(y_n)_n$ convergeant vers a, telle que la suite $(f(y_n))_n$ soit constante, égale à b pour un $b \neq f(a)$. Donc $y_n \in f^{-1}(b)$, qui est fermé. On en déduit la contradiction $a \in f^{-1}(b)$.

Problème

I.

1. Il suffit de voir que tout ensemble de la forme $\langle \mathcal{U} \rangle$ s'écrit comme intersection finie d'éléments de la prébase, et que toute intersection finie d'éléments de la prébase peut s'écrire sous la forme $\langle \mathcal{U} \rangle$. Or si $\mathcal{U} = (U_1, \ldots, U_N)$, $\langle \mathcal{U} \rangle = s(\bigcup_i U_i) \cap m(U_1) \cap \cdots \cap m(U_N)$. Réciproquement on peut écrire pour tous ouverts $U_1, \ldots, U_N$, $s(U_1) \cap \cdots \cap s(U_N) = s(U_1 \cap \cdots \cap U_N)$ et si $U, V_1, \ldots, V_N$ sont des ouverts, $s(U) \cap m(V_1) \cap \cdots \cap m(V_N) = \langle U, V_1 \cap U, \ldots, V_N \cap U \rangle$.
2. On peut écrire $\mathcal{F}(X) - \mathcal{G} = \{F; F \cap (X - A) \neq \emptyset\} = m(X - A)$ et $\mathcal{F}(X) - \mathcal{H} = \{F; F \subset X - A\} = s(X - A)$.
3. Il suffit de voir que $\mathcal{I}$ rencontre tout ouvert de la base, soit tout $\mathcal{U}$ de la forme $\mathcal{U} = \{F; F \subset \bigcup_{i\in I} U_i;\ F \cap U_i \neq \emptyset\}$, ou I est un ensemble fini. Choisissons $x_i \in U_i$ pour tout i. Alors $\{x_i; i \in I\}$ est un élément de $\mathcal{I} \cap \mathcal{U}$.
   Montrons d'autre part que $\mathcal{F}(X) - \mathcal{I}_n$ est ouvert. Tout élément de $\mathcal{F}(X) - \mathcal{I}_n$ est un fermé F de X contenant au moins $n+1$ éléments distincts, soit $x_0, \ldots, x_n$. Comme X est séparé, il existe des voisinages ouverts U_i de x_i tels que pour $i \neq j$, $U_i \cap U_j = \emptyset$. Alors $\langle X, U_0, \ldots, U_n \rangle$ est un voisinage de F, qui est bien contenu dans le complémentaire de $\mathcal{I}_n$, puisque tout $G \in \langle X, U_0, \ldots, U_n \rangle$ contient au moins $n+1$ éléments puisqu'il rencontre chacun des U_i.

4. Soit $(x_0, \dots, x_n)$ un élément de X^{n+1}. Une base de voisinages de son image $\{x_0, \dots, x_n\}$ par Φ_n est fournie par les $\langle U_0, \dots, U_n \rangle$, où U_j décrit le filtre des voisinages de x_j. Alors $U_0 \times \cdots \times U_N$ est voisinage de $(x_1, \dots, x_N)$ pour la topologie produit, dont l'image par Φ_n est incluse dans $\langle U_0, \dots, U_n \rangle$.

II.

1. Si la conclusion est fausse, pour tout $a \in Y$, tout ouvert U appartenant à $\mathcal{U}$, toute famille finie $A_1, \dots, A_N$ d'éléments de $\mathcal{A}$ vérifiant $a \in A_1 \cap \cdots \cap A_N \subset U$, il existe j avec $A_j \in \mathcal{U} \cap \mathcal{A}$. Or $\mathcal{U}$ est un recouvrement ouvert de Y. Pour tout point a de Y, il existe donc $U \in \mathcal{U}$ tel que $a \in U$. Comme $\mathcal{A}$ est une prébase, il existe $A_1, \dots, A_N$ dans $\mathcal{A}$ tels que $a \in A_1 \cap \cdots \cap A_N \subset U$. Par conséquent, d'après l'hypothèse, il existe un indice j tel que $A_j \in \mathcal{A} \cap \mathcal{U}$. Comme $a \in A_j$, cela montre que l'on peut construire un recouvrement de Y par des éléments de $\mathcal{A} \cap \mathcal{U}$. On peut, par hypothèse, extraire de ce recouvrement un sous-recouvrement fini. Comme les A_j sont aussi des éléments de $\mathcal{U}$, on a une contradiction avec l'hypothèse de la question 1.
2. Si la conclusion est fausse, il existe un recouvrement ouvert de Y duquel on ne peut extraire aucun recouvrement fini. Comme ces recouvrements sont inductivement ordonnés par l'inclusion, il existe par le théorème de Zorn un recouvrement maximal $\mathcal{U}$. La question précédente détermine alors une famille $(A_j)_j$ d'éléments non vides de $\mathcal{A}$. Comme les A_j ne sont pas dans $\mathcal{U}$, le recouvrement formé par $\mathcal{U}$ auquel on adjoint l'un quelconque des A_j n'est plus maximal. On peut donc en extraire un recouvrement fini $U_1^j \cup \cdots \cup U_{k_j}^j \cup A_j$. Alors $\bigcup_{j=1}^N \bigcup_{\ell=1}^{k_j} U_\ell^j \cup (A_1 \cap \cdots \cap A_N)$ est un recouvrement fini de Y. Mais comme $A_1 \cap \cdots \cap A_N \subset U$ et que $U \in \mathcal{U}$, on a donc trouvé un recouvrement fini extrait de $\mathcal{U}$. C'est la contradiction cherchée.

III.

1. Soit x un point qui n'appartient pas à $F \overset{\text{déf}}{=} \bigcup_{E \in \mathcal{B}} E$. Pour tout E dans $\mathcal{B}$, x n'est pas dans E. Comme X est supposé régulier, il existe donc des voisinages ouverts U_E de E et V_E de x tels que $U_E \cap V_E = \emptyset$. Alors $\bigcup_{E \in \mathcal{B}} s(U_E)$ est un recouvrement ouvert de $\mathcal{B}$ pour la topologie $\mathcal{T}$. On en extrait un sous-recouvrement fini $s(U_{E_1}) \cup \cdots \cup s(U_{E_n})$. Soit $V = V_{E_1} \cap \cdots \cap V_{E_n}$. C'est un voisinage de x et $V \cap (U_{E_1} \cup \cdots \cup U_{E_n}) = \emptyset$. Or, si $y \in F$, il existe $E \in \mathcal{B}$ avec $y \in E$. Comme $s(U_{E_1}) \cup \cdots \cup s(U_{E_n})$ recouvre $\mathcal{B}$, il existe j avec $E \subset U_{E_j}$. Donc $U_{E_1} \cup \cdots \cup U_{E_n}$ recouvre F. Par conséquent, le voisinage V de x ne rencontre pas F, donc F est fermé.
2. Par hypothèse, X est séparé. Soit $(U_j)_{j \in I}$ un recouvrement ouvert de X. Alors $(m(U_j))_{j \in I}$ est un recouvrement ouvert de $\mathcal{F}(X)$. On en extrait un recouvrement fini $(m(U_j))_{j \in J}$. Si $x \in X$, $\{x\}$ est ans l'un des $m(U_j)$, donc $x \in U_j$. Donc $(U_j)_{j \in J}$ est un recouvrement fini extrait du recouvrement donné.
3. Soient F, G deux éléments de $\mathcal{F}(X)$ avec $F \neq G$. Il existe alors (par exemple) un point x qui est dans $F - G$. Comme X est séparé, pour tout point y de G, il existe V_y voisinage ouvert de y, et U_y voisinage ouvert de x, avec $U_y \cap V_y = \emptyset$. Par compacité du fermé G de X, on peut extraire du recouvrement par les V_y un sous recouvrement fini $(V_{y_j})_{j=1,\dots,N}$. Si on pose $U = \bigcap_{j=1}^N U_{y_j}$ et $V = \bigcup_{j=1}^N V_{y_j}$, on obtient deux ouverts d'intersection vide. Alors $s(V)$ (resp. $m(U)$) est un voisinage ouvert de G (resp. F) pour la topologie $\mathcal{T}$ avec $s(V) \cap m(U) = \emptyset$.

4. (a) Montrons d'abord qu'il existe i_0 tel que $X - U_{i_0} \subset \bigcup_{j \in J} V_j$. Si c'est faux, pour tout $i \in I$, $(X - U_i) \cap \bigcap_{j \in J}(X - V_j) \neq \emptyset$. Cela signifie que pour tout $i \in I$, $\bigcap_{j \in J}(X - V_j) \notin s(U_i)$, donc d'après l'hypothèse de la question, $\bigcap_{j \in J}(X - V_j) \in \bigcup_{j \in J} m(V_j)$, ce qui est absurde. Il existe donc i_0 tel que $X - U_{i_0} \subset \bigcup_{j \in J} V_j$. Par compacité de $X - U_{i_0}$, on en extrait un sous-recouvrement fini.
(b) Si $F \in \mathcal{F}(X)$ et $F \notin \bigcup_{j \in J'} m(V_j)$, alors $F \cap (\bigcup_{j \in J'} V_j) = \emptyset$, donc par la question précédente $F \subset U_{i_0}$ soit $F \in s(U_{i_0})$.
5. La question précédente montre que l'on peut extraire de tout recouvrement par une famille d'ouverts de la prébase de la topologie $\mathcal{T}$ un sous-recouvrement fini. D'après la partie **II.** et la question 3, il en résulte que $\mathcal{F}(X)$ est compact.