Corrigé de l'examen de rattrapage

Exercice 1

1. Puisque U est voisinage de $\pi(n)$, il existe $V \subset U$ ouvert pour la topologie quotient contenant $\pi(n)$. Par conséquent, $\pi^{-1}(V)$ est un ouvert saturé de $\mathbb{R}$ contenant n. Si $\epsilon > 0$ est assez petit, $n-\epsilon$ est dans $\pi^{-1}(V)$ et $(n-\epsilon)\mathcal{R}(n-1)$, donc $n-1 \in \pi^{-1}(V)$, soit $\pi(n-1) \in V \subset U$.
2. Comme ensemble, $\mathbb{R}/\mathcal{R}$ s'identifie à $\mathbb{Z}$. Si U est un ouvert du quotient et si $\pi(n) \in U$ pour un certain $n \in \mathbb{Z}$, alors, par la question précédente, $\pi(k) \in U$ pour tout $k \in \mathbb{Z}, k \leq n$. Les ouverts de $\mathbb{R}/\mathcal{R}$ sont donc $\emptyset$, $\mathbb{R}/\mathcal{R}$ et tous les ensembles de la forme $\{\pi(k); k \in \mathbb{Z}, k \leq n\}$ pour n décrivant $\mathbb{Z}$.

Exercice 2

1. Par le théorème de Tychonoff, $[0,1]^{\mathbb{N}}$ est compact. De plus $f_{n,P}$ est la composée $P \circ q_n$, où q_n est la projection naturelle (continue) de X sur $[0,1]^{n+1}$. Il en résulte que $f_{n,P}$ est continue sur X.
2. On peut appliquer le théorème de Stone-Weiestrasse à la famille $\mathcal{A}$ formée par les fonctions continues ayant la forme indiquée dans l'énoncé. La densité sera établie dès que l'on aura vérifié que $\mathcal{A}$ est une algèbre unitaire séparante. Le fait que $\mathcal{A}$ est une algèbre résulte du fait que $f_{n,P} + f_{m,Q} = f_{\max(n,m),P+Q}$ et que $f_{n,P} \cdot f_{m,Q} = f_{\max(n,m),P \cdot Q}$. Il est évident que $\mathcal{A}$ est unitaire. Il reste à vérifier la séparation. Or si $y = (y_n)_n$ et $z = (z_n)_n$ sont deux points distincts de $[0,1]^{\mathbb{N}}$, il existe $j \in \mathbb{N}$ avec $y_j \neq z_j$, et la fonction $(x_n)_n \to x_j$ est dans l'algèbre et sépare les deux points.

Exercice 3

1. Comme U est un ouvert d'un espace de Baire, U est de Baire. Soit pour tout $n \in \mathbb{N}$ $F_n = \{x \in U; f(x) \leq n\}$. Comme f est s.c.i., F_n est fermé. De plus $\bigcup_n F_n$ est égal à U. Il existe donc un entier n_0 tel que F_{n_0} soit d'intérieur non vide. On prend pour ouvert V cet intérieur.
2. L'ensemble est ouvert par définition. Il est dense puisque tout ouvert non vide U de Ω rencontre l'ensemble le long de l'ouvert V de la question précédente.
3. L'implication $(i) \Rightarrow (ii)$ est triviale. Pour la réciproque, supposons, quitte à effectuer une translation, que $x_0 = 0$. Soient $r > 0, M > 0$ tels que $f(x) \leq M$ pour tout x dans $\overline{B(0,r)}$. Pour tout ω de norme $r/2$, tout $y \in \overline{B(0,r/4)}$, tout $t \in [0,1]$ on a
$$f(y + t\omega) = f(t(y+\omega) + (1-t)y) \leq tf(y+\omega) + (1-t)f(y).$$
On en déduit que, si $x \in \overline{B(0,r/4)}$, et si on applique l'inégalité précédente avec $\omega = (x-y)/t, t = 2|x-y|/r$
$$f(x) - f(y) \leq t \sup_{z \in \overline{B(0,r)}} f(z) \leq \frac{2M}{r}|x-y|.$$

La continuité en résulte sur $\overline{B(0, r/4)}$.

4. On remarque que Ω' coïncide avec l'ensemble des x dans Ω tels que f soit majorée au voisinage de x. En effet, si f est continue en x, f est bornée au voisinage de x. La question précédente montre que la réciproque est vraie. Il reste à voir que Ω' est ouvert (ce qui est trivial) et convexe, ce qui résulte de la convexité de f.

5. (a) Soit $r > 0$ tel que $B(a, r)$ soit contenu dans C. Comme A est dense, il existe $b_0 \in B(0, r)$ tel que $a + b_0 \in A$. Comme A est ouvert, il existe $\rho > 0$ tel que $B(a + b_0, \rho) \subset A$. Si la conclusion était fausse, l'ensemble $\{a - \alpha b; b \in B(b_0, \rho), \alpha < 0\}$ ne rencontrerait pas A. Or cet ensemble est un ouvert non vide, qui rencontre l'intérieur de C puisque a est dans son adhérence, et A est dense dans C.
   (b) Soit $a \in \mathring{C} - A$. Alors a est sur le segment joignant le point $a + b$ au point $a - \alpha b$, donc est dans A par convexité.

6. D'après 4. et 2., Ω' est un ouvert convexe et dense dans Ω. La question précédente entraîne que $\Omega' = \Omega$, donc que la fonction est continue en tout point.

Exercice 4

1. Soit $(s_k)_k$ une suite de Cauchy de $\mathscr{S}$. C'est en particulier une suite de Cauchy de ℓ^∞. Elle converge donc dans ℓ^∞ vers une limite s. Comme $(s_k)_k$ est de Cauchy dans $\mathscr{S}$, pour tout N et tout $\epsilon > 0$, il existe k_0 tel que si $k, \ell \geq k_0$, $p_N(s_k - s_\ell) < \epsilon$. On a donc pour tout n, $|s_{k,n} - s_{\ell,n}| < \epsilon(1 + |n|)^{-N}$. On en déduit lorsque $\ell \to +\infty$ que $|s_{k,n} - s_n| \leq \epsilon(1 + |n|)^{-N}$. Cela implique que s est dans $\mathscr{S}$ et que s_k converge vers s dans $\mathscr{S}$.

2. Soit ℓ forme linéaire continue sur $\mathscr{S}$. Soit $a_n = \ell(e_n)$ où $e_n = (\delta_{k,n})_k$. Il existe une semi-norme p_N et $C > 0$ tels que pour tout n, $|\ell(e_n)| \leq Cp_N(e_n)$. Il en résulte que $(a_n)_n$ est une suite à croissance lente et que pour tout $s \in \mathscr{S}$, $\ell(s) = \sum_k a_k s_k$ (puisque les suites à support fini sont denses dans $\mathscr{S}$). Donc tout élément de $\mathscr{S}'$ détermine une suite à croissance lente. Réciproquement, il est évident que toute suite à croissance lente définit un élément de $\mathscr{S}'$.

3. Il est clair que $T : s \to \alpha_s$ est linéaire. Pour voir la continuité, on remarque que $(T_j)_j$ est une suite de formes linéaires continues sur un espace de Fréchet telles que pour tout $s \in \mathscr{S}$, la suite $(T_j(s))_j$ soit bornée (puisque convergente). On peut donc appliquer le théorème de Banach-Steinhauss, qui affirme que la suite des T_j est équicontinue. Il existe donc V voisinage de zéro dans $\mathscr{S}$ tel que pour tout $s \in V$ et tout j, $|T_j(s)| \leq 1$. Par définition de la topologie, il existe $N \in \mathbb{N}, r > 0$ tels que la pseudo-boule pour la semi-norme p_N de centre 0 de rayon r soit contenue dans V. On a donc pour tout $s \in \mathscr{S}$, $|T_j(s)| \leq \frac{1}{r} p_N(s)$. Passant à la limite en j, on conclut que T est dans $\mathscr{S}'$.