CORRIGÉ DE L'EXAMEN

PROBLÈME 1

1. (a) Montrons que c_0 est fermé. Si $x = (x_n)_n$ est dans l'adhérence de c_0, on considère une suite $x^k = (x_n^k)_n$ de c_0 convergeant dans ℓ^∞ vers x. Pour tout $\epsilon > 0$ fixé, choisissons k tel que $\sup_n |x_n^k - x_n| < \epsilon/2$. Il existe n_0 tel que pour $n \geq n_0$, $|x_n^k| < \epsilon/2$. La conclusion en résulte.
   (b) Il est évident que tout élément de ℓ^1 détermine une forme linéaire continue sur c_0. Réciproquement, soit $\ell \in c_0'$. Si e_n désigne l'élément de c_0 dont toutes les composantes sont nulles, sauf la n-ème qui est égale à 1, posons $a_n = \ell(e_n)$. Alors $\sum_{n=0}^N |a_n| = |\ell(\sum_{n=0}^N \epsilon_n e_n)| \leq \|\ell\|_{c_0'}$, où ϵ_n désigne un nombre complexe de module 1 tel que $\epsilon_n a_n = |a_n|$. On obtient donc un élément de ℓ^1, qui détermine une forme linéaire continue sur c_0, coïncidant avec la forme donnée sur le sous-espace de c_0 donné par les suites à support fini. Comme ce sous-espace est dense dans c_0, on obtient l'égalité entre ℓ et la forme linéaire déterminée par a. La démonstration montrant en outre que Φ est isométrique, la conclusion en découle.
2. On sait que $(\ell^1)' = \ell^\infty$, donc $c_0'' = \ell^\infty$. Si $x = (x_n)_n$ est dans la boule unité de ℓ^∞, et si on pose $x^N = (x_n \mathbb{1}_{n \leq N})_n$, on obtient une suite de la boule unité de c_0 telle que pour toute suite $a \in \ell^1$, $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x_n^N \to \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x_n$ lorsque $N \to +\infty$. Donc x^N converge vers x pour la topologie faible-$*$ lorsque $N \to +\infty$.
3. Le sous-espace G est de codimension finie p. On peut toujours supposer que $\theta_1, \ldots, \theta_p$ est une base de $\mathrm{Vect}\,(\theta_1, \ldots, \theta_N) \subset F^*$. On note $\pi : F \to F/G$ la projection naturelle et $\bar{\theta}_j : F/G \to \mathbb{R}$ l'unique application telle que $\theta_j = \bar{\theta}_j \circ \pi$. Alors $(\bar{\theta}_1, \ldots, \bar{\theta}_p)$ est base de $(F/G)^*$, donc il existe des scalaires λ_j tels que $\bar{\theta} = \sum_{j=1}^p \lambda_j \bar{\theta}_j$. Alors $\theta - \sum_{j=1}^p \lambda_j \theta_j \equiv 0$ puisqu'elle est nulle par hypothèse sur G, et sur un supplémentaire de G par construction.
4. (a) Si $x \in F$ vérifie $j_\sigma(x) = 0$, on a $\ell(x) = 0$ pour tout $\ell \in F'$. Par le théorème de Hahn-Banach (ou l'un de ses corollaires), on sait que cela entraîne $x = 0$.
   (b) Soit $\varphi \in (F_\sigma')'$. Alors φ est une forme linéaire continue sur F' muni de la topologie $\sigma(F', F)$. Il existe donc un voisinage de 0 pour cette topologie contenu dans $\varphi^{-1}(]-1,1[)$ i.e. il existe $\delta > 0$ et $x_1, \ldots, x_N \in F$ tels que
   $$\{\ell \in F'; |\ell(x_j)| < \delta\} \subset \varphi^{-1}(]-1,1[).$$
   Alors $\bigcap_{j=1}^N \mathrm{Ker}\,\varphi_{x_j} \subset \{\ell \in F'; |\varphi(\ell)| < 1\}$.
   (c) Comme le membre de gauche dans l'inclusion précédente est un espace vectoriel, on a $\bigcap_{j=1}^N \mathrm{Ker}\,\varphi_{x_j} \subset \mathrm{Ker}\,\varphi$. D'après la question 3., φ est combinaison linéaire des φ_{x_j} i.e. $\varphi = j_\sigma(\sum_{j=1}^N \lambda_j x_j)$.
5. Comme on peut écrire $E'' = (E')'$, $B_{E''}$ est la boule unité du dual d'un espace vectoriel normé. Elle est donc compacte pour la topologie faible-$*$ par le théorème de Banach-Alaoglu. Or $B_E \subset B_{E''}$, donc V est un fermé du compact $B_{E''}$ pour la topologie $\sigma(E'', E')$, donc V est compact pour cette topologie.

6. On vient de voir que V est compacte pour la topologie $\sigma(E'', E')$. D'autre part, $\{\varphi\}$ est fermé puisque cette topologie est séparée. Comme de plus la topologie $\sigma(E'', E')$ est localement convexe, on peut appliquer le théorème de Hahn-Banach géométrique qui affirme qu'il existe θ forme linéaire continue sur E'' muni de la topologie faible-$*$ qui sépare strictement V et $\{\varphi\}$.
7. Posons $F = E'$. Alors θ est une forme linéaire continue sur F' muni de la topologie faible-$*$, i.e. un élément de $(F'_\sigma)'$. Par la question 4., il existe un élément ℓ de $F = E'$ tel que $\theta = j_\sigma(\ell)$. Alors $\theta(\varphi) = j_\sigma(\ell)(\varphi) = \varphi(\ell)$. En outre, pour tout $v \in V$, $\theta(v) = v(\ell)$. On a donc pour tout $v \in V$ l'inégalité $\varphi(\ell) > \alpha > v(\ell)$. En particulier, pour tout $x \in B_E \subset V$, $\ell(x) < \alpha < \varphi(\ell)$. On en déduit $\|\ell\|_{E'} = \sup_{x \in B_E} \ell(x) \leq \alpha < \varphi(\ell)$.
8. Puisque $\varphi \in B_{E''}$, on a l'inégalité $\varphi(\ell) \leq \|\varphi\|_{E''} \|\ell\|_{E'} \leq \|\ell\|_{E'}$, qui contredit la conclusion de la question précédente. L'hypothèse de la question 6. $V \neq B_{E''}$ est donc absurde.

Problème 2

I.

1. Soit $\gamma \in \Gamma$. Comme $\|\gamma(0)\| = 0$ et $\|\gamma(1)\| > \rho$, par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\sigma \in [0,1]$ avec $\|\gamma(\sigma)\| = \rho$ d'où $F(\gamma(\sigma)) \geq \alpha$ et la conclusion cherchée.
2. Le dénominateur de g ne s'annule jamais puisque si $x \in H - N$ on a nécessairement $|F(x) - c| \geq 2\epsilon$ ou $\|\nabla F(x)\| \leq \epsilon$. La fonction est donc bien définie, et est localement lipschitzienne puisque $x \to d(x, H - N)$ et $x \to d(x, M)$ le sont.
3. Pour obtenir l'existence locale et l'unicité du flot, il suffit de vérifier que le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique. Or $g(x)\frac{\nabla F(x)}{\|\nabla F(x)\|}$ est bien défini puisque si $g(x) \neq 0$, on a $x \in N$, donc $\|\nabla F(x)\| > \epsilon$. Comme $\frac{\nabla F(x)}{\|\nabla F(x)\|}$ est localement lipschitzienne au voisinage de $\overline{N}$, $X(x)$ également. Sur l'ouvert $H - \overline{N}$, on a $X(x) = 0$. Pour vérifier que les solutions sont globales, il suffit de remarquer que le champ $X(x)$ est borné par définition.
4. Soit γ un élément de Γ. Pour vérifier que pour tout réel t, $\Phi(t, \gamma(\cdot))$ est dans Γ, on doit montrer que $\Phi(t, 0) = 0, \Phi(t, v) = v$. Comme $F(0) = 0$ et $c > 2\epsilon$, on a $0 \notin N$. Par conséquent $g(0) = 0$, donc la fonction identiquement nulle est solution de l'équation différentielle avec condition initiale nulle. Par unicité, elle doit coïncider avec $\Phi(t, 0)$. De même, comme $F(v) < 0$, on a $|F(v) - c| > 2\epsilon$, d'où $v \notin N$, ce qui entraîne $X(v) = 0$ et encore par unicité $\Phi(t, v) \equiv v$.
5. On a

$$(**) \qquad \begin{aligned} F(\Phi(1,x)) - F(\Phi(t,x)) &= \int_t^1 \frac{d}{d\tau} F(\Phi(\tau,x))\, d\tau = \int_t^1 DF(\Phi(\tau,x))\dot{\Phi}(\tau,x)\, d\tau \\ &= -\int_t^1 \|\nabla F(\Phi(\tau,x))\| g(\Phi(\tau,x))\, d\tau. \end{aligned}$$

L'hypothèse $F(x) < c + \epsilon$ et l'inégalité précédente avec $t = 0$ entraînent $F(\Phi(1,x)) < c + \epsilon$. Supposons $F(\Phi(1,x)) > c - \epsilon$, donc $|F(\Phi(1,x)) - c| < \epsilon$ et montrons que l'on aboutit à une contradiction. Soit t_0 la borne inférieure des $t \in [0,1]$ tels que pour tout $\tau \in [t,1]$ on ait $|F(\Phi(\tau,x)) - c| < \epsilon$. Pour tout $\tau \in]t_0, 1]$, on a $|F(\Phi(\tau,x)) - c| < \epsilon$, donc grâce à l'hypothèse $\|\nabla F(\Phi(\tau,x))\| \geq 2\epsilon$. En particulier, $\Phi(\tau,x) \in M$ donc $g(\Phi(\tau,x)) = 1$. L'inégalité $(**)$ donne donc $F(\Phi(1,x)) \leq F(\Phi(t_0,x)) - 2\epsilon(1 - t_0)$. Si $t_0 > 0$, on a $F(\Phi(t_0,x)) = c - \epsilon$ et l'inégalité que l'on vient d'obtenir contredit l'hypothèse. Si $t_0 = 0$, on obtient $F(\Phi(1,x)) \leq F(\Phi(0,x)) - 2\epsilon < c - \epsilon$ puisque $F(x) < c + \epsilon$, d'où encore une contradiction. La conclusion en résulte.

6. Si la conclusion est fausse, pour tout x dans H, soit $|F(x) - c| \geq \epsilon$, soit $\|\nabla F(x)\| \geq 2\epsilon$, donc l'hypothèse de la question 5. est satisfaite. Par définition de c, il existe $\gamma \in \Gamma$ tel que pour tout $s \in [0,1]$, on ait $F(\gamma(s)) < c + \epsilon$. On a donc pour tout $s \in [0,1]$ soit $F(\gamma(s)) \leq c - \epsilon$, soit $\|\nabla F(\gamma(s))\| \geq 2\epsilon$. D'après 5., on a alors $F(\Phi(1,\gamma(s)) \leq c - \epsilon$ pour tout s. Soit $\tilde{\gamma}(\cdot) = \Phi(1,\gamma(\cdot))$. D'après la question 4., c'est un élément de Γ. On en déduit la contradiction $\sup_{s\in[0,1]} F(\tilde{\gamma}(s)) \leq c - \epsilon < c$.
7. Il suffit d'appliquer la question précédente avec $\epsilon = 1/(n+1)$.

II.

1. (a) On a $\|u'\|_0 \leq \|u\|_1$ pour tout $u \in \mathcal{P}$. Comme E^0 est complet, comme fermé du complet L^2, et que $\mathcal{P}$ est dense dans E^1 par définition du complété, le résultat découle du théorème de prolongement des applications linéaires continues définies sur un sous-espace dense.
(b) Si $u \in \mathcal{P}$, on peut écrire puisque $u(0) = u(2\pi)$, $u(x) = \frac{1}{2}\Big[\int_0^x u'(t)\,dt - \int_x^{2\pi} u'(t)\,dt\Big]$, d'où l'inégalité $\sup_{x\in\mathbb{S}^1}|u| \leq \int_0^{2\pi}|u'(t)|\,dt \leq \sqrt{2\pi}\|u'\|_0 \leq \sqrt{2\pi}\|u'\|_1$. On applique encore le théorème de prolongement.
(c) On doit d'abord vérifier que si $u \in \mathcal{P}$, $\partial_x^{-1}u$ est 2π-périodique de moyenne nulle. Or $\partial_x^{-1}u(x) = \int_0^x u(y)\,dy + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} yu(y)\,dy$. La 2π-périodicité en résulte puisque u est de moyenne nulle. De plus, par calcul direct, $\int_0^{2\pi}\partial_x^{-1}u(x)\,dx = \int_0^{2\pi}(2\pi - y)u(y)\,dy + \int_0^{2\pi} yu(y)\,dy = 0$. Enfin, par Cauchy-Schwartz, on a pour tout x, $|\partial_x^{-1}u(x)| \leq C\|u\|_0$ d'où $\|\partial_x^{-1}u\|_1 \leq C'\|u\|_0$.
2. Compte-tenu de la continuité de ∂_x^{-1} de E^0 dans E^1, il suffit de vérifier que l'injection de E^1 dans E^0 est compacte. Or, si $n \neq n' \in \mathbb{Z}$, il est immédiat que e^{inx} et $e^{in'x}$ sont orthogonaux, aussi bien pour le produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle_0$ que pour le produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle_1$. Si P_N désigne la projection orthogonale sur le sous-espace de E^0 ou de E^1 engendré par $\operatorname{Re} e^{inx}, 0 < |n| \leq N$, on a pour tout élément $u = \sum_{0<n\leq M}\operatorname{Re} a_n e^{inx}$ de $\mathcal{P}$, $\|(I - P_N)u\|_0^2 = 4\pi\sum_{N<n\leq M}|a_n|^2 \leq \frac{4\pi}{N^2+1}\sum_{N<n\leq M}(1+|n|^2)|a_n|^2 = \frac{1}{N^2+1}\|u\|_1^2$. Donc I est la limite dans $\mathcal{L}(E^1,E^0)$ de la suite d'opérateurs de rang fini $(P_N)_N$, donc est compacte.
3. On a $\|v+h\|_0^2 = \langle v+h, v+h\rangle_0 = \|v\|_0^2 + 2\langle v,h\rangle_0 + \|h\|_0^2$. Comme $h \to \langle v,h\rangle_0$ est linéaire continue et que $\|h\|_0^2 = o(\|h\|_0)$, $h \to 0$, on voit que $F_1(v) = \frac{1}{2}\|v\|_0^2$ est dérivable sur E^0 de dérivée $DF_1(v)\cdot h = \int_0^{2\pi} v(x)h(x)\,dx$. Comme ∂_x^{-1} est linéaire continue de E^0 dans E^1 elle est différentiable en tout point de E^0. Il reste donc à voir que $w \to \int_0^{2\pi} a(x)w^M\,dx$ est différentiable sur E^1. Soit $h \in E^1$, de norme majorée par 1 dans cet espace. Posons $q(x,z) = a(x)z^M$. Par la formule de Taylor, on a pour tout x
$$q(x,u(x)+h(x)) - q(x,u(x)) = \frac{\partial q}{\partial z}(x,u(x))\cdot h(x) + \int_0^1 \frac{\partial^2 q}{\partial z^2}(x,u(x)+th(x))(1-t)\,dt\cdot h(x)^2.$$
Comme d'après 1. (b) E^1 s'injecte continûment dans C_0^0, on a pour tout x $|u(x)| \leq \|u\|_1, |h(x)| \leq \|h\|_1$. Si on intègre l'égalité précédente de 0 à 2π, on obtient
$$\left|\int_0^{2\pi} q(x,u(x)+h(x))\,dx - \int_0^{2\pi} q(x,u(x))\,dx - \int_0^{2\pi}\frac{\partial q}{\partial z}(x,u(x))\cdot h(x)\,dx\right| \leq C\|h\|_1^2.$$
Par conséquent, F est différentiable et
$$DF(v)\cdot h = \int_0^{2\pi} v(x)h(x)\,dx - \int_0^{2\pi} Ma(x)(\partial_x^{-1}v(x))^{M-1}\partial_x^{-1}h(x)\,dx$$

pour tout $h \in E^0$.

4. On applique la partie I. Comme F est C^2, $v \to \nabla F(v)$ est lipschitzienne. Par construction, $F(0) = 0$, et comme $M \geq 4$ et que par 1. (b) et (c) $\sup|\partial_x^{-1} v(x)| \leq C\|v\|_0$, on a $\int_0^{2\pi} a(x)(\partial_x^{-1} v(x))^M \, dx = O(\|v\|_0^3)$ lorsque $\|v\|_0 \to 0$. Si $\rho = \|v\|_0$ est assez petit, on a donc $F(v) \geq \frac{1}{2}\rho^2 - O(\rho^3) \geq \frac{1}{4}\rho^2$. De plus, si v_0 est fixé non nul et si $R \to +\infty$,

$$F(Rv_0) = -R^M \int_0^{2\pi} a(x)(\partial_x^{-1} v_0)^M \, dx + O(R^2),$$

donc pour R assez grand, $F(Rv_0) < 0$ (puisqu'on suppose a strictement positif et M pair). La condition $(*)$ de la partie I. est donc satisfaite, ce qui permet d'applique la question 7. de cette partie.

5. On a les égalités

$$F(v_n) = \frac{1}{2}\|v_n\|_0^2 - \int_0^{2\pi} a(x)(\partial_x^{-1} v_n(x))^M \, dx$$

$$DF(v_n) \cdot v_n = \|v_n\|_0^2 - M \int_0^{2\pi} a(x)(\partial_x^{-1} v_n(x))^M \, dx.$$

De plus $F(v_n) \to c$ et $\|DF(v_n)\|_{\mathcal{L}(E^0, E^0)} \to 0$. Alors, pour tout $\epsilon > 0$, il existe n_0 tel que si $n \geq n_0$

$$\int_0^{2\pi} a(x)(\partial_x^{-1} v_n(x))^M \, dx \leq \frac{1}{M}\|v_n\|_0^2 + \frac{\epsilon}{M}\|v_n\|_0.$$

Comme $F(v_n)$ est majorée par une constante C, on en déduit

$$\frac{1}{2}\|v_n\|_0^2 \leq C + \frac{1}{M}\|v_n\|_0^2 + \frac{\epsilon}{M}\|v_n\|_0.$$

On peut touours supposer $\|v_n\|_0 \geq 1$ (sinon la conclusion est triviale) et déduire de l'inégalité précédente $\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{M} - \frac{\epsilon}{M}\right)\|v_n\|_0^2 \leq C$, qui donne le résultat si ϵ est assez petit, puisque $M > 2$.

6. D'après la question précédente la suite $(v_n)_n$ est bornée dans E^0 et d'après la question 2. ∂_x^{-1} est compacte de E^0 dans lui-même. On peut donc extraire de $(v_n)_n$ une suite telle que $(\partial_x^{-1} v_n)_n$ converge.