# Dynamique des polynômes dans $\mathbb{C}^k$

Vigny Gabriel

## 1 Introduction

L'itération des applications polynomiales de $\mathbb{C}$ est une théorie beaucoup plus poussée que celle de $\mathbb{C}^k$. Pourtant, l'itération de polynômes ou de fractions rationnelles de $\mathbb{C}^2$ (par exemple) est un problème naturel.

En effet, soit $F = (P, Q)$ une application polynomiale de $\mathbb{C}^2$ dont on cherche à localiser les zéros. On doit résoudre :

$$\begin{cases} P(z,w) = 0 \\ Q(z,w) = 0 \end{cases}$$

Et la méthode de Newton (cf [4]) consiste à itérer l'application (rationnelle) :

$$G : (z,w) \mapsto (z,w) - (F'(z,w))^{-1}F(z,w)$$

où $F'(z,w)$ désigne la matrice de la differentielle complexe de $F$.

On peut supposer $G$ de degré au moins 2 car la dynamique des applications linéaires est parfaitement comprise.

Par ailleurs, il apparaît en dimension $\geq 2$ des phénomènes dynamiques nouveaux et intéressants. Les outils employés à une dimension (notamment le théorème de Montel : tout famille d'applications holomorphes du disque unité de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{P}^1 \backslash \{0, 1, \infty\}$ est équicontinue) ne se généralisent pas.

On s'intéresse ici aux techniques de théorie du potentiel.

Dans la suite, $k$ désignera un entier supérieur ou égal à 2.

## 2 Notions principales.

J'ai repris les notes de [9] jusqu'à la partie 5 du mémoire.

Sur$\mathbb{P}^k$, l'espace projectif de dimension $k$, on note

$$z = [z_0 : z_1 : \ldots : z_k]$$

les coordonnées homogènes d'un point $z \in \mathbb{P}^k$. Par homogénéisation, toute application polynomiale $F$ de $\mathbb{C}^k$ dans $\mathbb{C}^k$ s'étend en une application polynomiale de $\mathbb{P}^k$ dans lui-même (par exemple $g(z,w) = (z^2 + w + 1, w^3 + z)$, est la restriction à $\mathbb{C}^2$ de $\tilde{g} = [tz^2 + wt^2 + t^3 : w^3 + zt^2 : t^3]$).

On est donc naturellement amené à se placer dans $\mathbb{P}^k$. On définit une application rationnelle de degré $d$ par $f = [F_0, \ldots, F_k]$ où les $F_i$ sont des polynômes homogènes de degré $d$ sans facteurs communs.

Mais, comme le montre l'exemple ci-dessus pour $[1:0:0]$, une telle application n'est pas définie partout, car $[0:0:0]$ n'a aucun sens. Considérons $F : \mathbb{C}^{k+1} \to \mathbb{C}^{k+1}$ et $\pi : \mathbb{C}^{k+1} \backslash \{0\} \to \mathbb{P}^k$ la projection canonique avec $\pi \circ F = f \circ \pi$. On appelle alors *ensemble d'indetermination* de $f$ l'ensemble noté $I_f$ (ou $I$ s'il n'y a pas de confusion) et défini par $I = \pi(F^{-1}(0))$. L'ensemble $I$ est alors un ensemble analytique de codimension $\geq 2$ car les $F_j$ n'ont pas de facteurs communs. Quand $I = \varnothing$, on dit que $f$ est holomorphe. Dans $\mathbb{P}^1$, on a donc toujours $I = \varnothing$.

On dira que $f$ est *dominante* si elle est génériquement de rang complexe $k$ (i.e : si le jacobien de $F$ n'est pas identiquement nul). On note $\mathcal{M}_d$ (resp. $\mathcal{H}_d$) l'espace des fonctions rationnelles (resp. holomorphes) dominantes de degré $d$. On montre que toute application méromorphe de $\mathbb{P}^k$ dans $\mathbb{P}^k$ est rationnelle (la terminologie utilisée est cohérente).

Pour $f \in \mathcal{M}_d$, on introduit $\mathcal{B}(p)$ l'éclaté de $f$ en $p$. Pour $B(p, \epsilon)$ la boule de centre $p$ et de rayon $\epsilon$ pour une distance fixée de $\mathbb{P}^k$, on note :

$$\mathcal{B}(p) = \bigcap_{\epsilon > 0} \overline{f(B(p, \epsilon) \backslash I)}$$

On prouve ([9]) que $\mathcal{B}(p)$ est un sous-ensemble analytique connexe, qui est réduit à un point si et seulement si $p$ n'est pas un point d'indétermination.

En dimension 1, composer deux polynômes de degré $d_1$ et $d_2$ donne un polynôme de degré $d_1 + d_2$. Ce n'est plus vrai pour $k \geq 2$ (par exemple $f([z : w : t]) = [w^2 : zt : t^2] \in \mathcal{M}_2$ vérifie $f^2([z : w : t]) = [z^2 : w^2 : t^2]$). On a le résultat :

**proposition 2.1** *Soient $f \in \mathcal{M}_d$ et $g \in \mathcal{M}_{d'}$. Le degré algébrique de $f \circ g$ vaut $d.d'$ si et seulement s'il n'existe pas d'hypersurface $V$ telle que $g(V \backslash I_g) \subset I_f$.*

Ceci amène la définition :

**definition 2.2** *Un élément $f \in \mathcal{M}_d$ est* algébriquement stable *s'il n'existe pas d'entier $n$ ni d'hypersurface $V$ tels que toutes les composantes de $F^n$ soient nulles sur $V$.*

On en déduit que pour $f$ algébriquement stable, on a $\deg f^n = (\deg f)^n$.

# 3 Ensembles liés à la dynamique

On notera $E = \overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \pi((F^n)^{-1}(0))}$, l'adhérence de l'ensemble des points d'indétermination des itérés de $f$.

Soit $f \in \mathcal{M}_d$ algébriquement stable. On définit l'*ensemble de Fatou* de $f$ comme l'ensemble des points $p$ tels que, pour un voisinage assez petit de $p$, la famille des itérées de $f$ restreintes à ce voisinage soit équicontinue.

L'*ensemble de Julia* $J$ est le complémentaire de l'ensemble de Fatou.

Un point $p$ est dit *normal* s'il existe un voisinage $U$ de $p$ et un voisinage $V$ de $I$ tels que $f^n(U) \cap V = \varnothing$ pour tout $n$ de $\mathbb{N}$. Si $I$ est vide, tout point est normal.

Par définition, l'ensemble de Fatou est ouvert et disjoint de $E$ (et donc, $J$ contient toujours $E$). L'ensemble des points normaux est un ouvert de $\mathbb{P}^k \backslash E$. On dit qu'une application est normale si $N$, l'ensemble de ses points normaux, vérifie $N = \mathbb{P}^k \backslash E$.

Un de nos buts est de comprendre ces différents ensembles. Montrons comment des méthodes de théorie du potentiel nous le permettent.

# 4 Courant de Green

Soit $(dx_1, dy_1, \dots, dx_n, dy_n)$ la base duale canonique de $\mathbb{C}^n$ vu comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Notons $(dz_1, d\bar{z}_1, \dots, dz_n, d\bar{z}_n)$, où $dz_j := dx_j + idy_j$ et $d\bar{z}_j := dx_j - idy_j$, une base de $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C})$.

Pour $J = (j_1, \dots, j_p)$ et $K = (k_1, \dots, k_q)$, notons $dz_J := dz_{j_1} \wedge \dots \wedge dz_{j_p}$ et $\overline{dz_K} := d\bar{z}_{k_1} \wedge \cdots \wedge d\bar{z}_{k_q}$. Une forme différentielle lisse $f$ est dite de *bidegré* $(p, q)$ si elle est de la forme $f = \sum_{|J|=p,|K|=q} f_{J,K} dz_J \wedge \overline{dz_K}$ où les $f_{J,K}$ sont des fonctions lisses. On voit que $df$ s'écrit $g_1 + g_2$ où $g_1$ est de bidegré $(p+1, q)$ et $g_2$ de bidegré $(p, q+1)$ ; on pose alors $g_1 = \partial f$ et $g_2 = \bar{\partial} f$. Remarquons qu'une forme de degré $m$ se décompose en formes de bidegré $(p, q)$ pour $p + q = m$. Enfin, on dit qu'une $(p, p)$-forme est fortement positive si elle est une combinaison linéaire de forme de bidegré $(p, p)$ de la forme $f idz_{j_1} \wedge d\bar{z}_{j_1} \wedge \cdots \wedge idz_{j_p} \wedge d\bar{z}_{j_p}$ où $f$ est une fonction lisse positive. Notons que ces notions passent aux variétés complexes, on note $\mathcal{D}^{p,q}(M)$ l'ensemble des formes différentielles lisses à support compact de bidegré $(p, q)$ sur une variété complexe $M$ (voir [6]).

Rappelons que les courants sur une variété complexe $M$ de dimension $k$ sont l'équivalent des distributions pour les formes différentielles à support compact. Plus précisément, on appelle courant de bidimension $(p, q)$ un élément de $\mathcal{D}_{p,q}(M)$, le dual topologique pour la topologie limite inductive classique de $\mathcal{D}^{p,q}(M)$. Dans un ouvert de carte, un courant de bidimension $(p, q)$ peut-être vu comme une forme différentielle de bidegré $(k-p, k-q)$ avec des distributions pour coefficients, on appelle *bidegré* du courant le bidegré de cette forme différentielle. Par dualité, on définit la notion de différentielle d'un courant et donc de courant fermé et la notion de courant positif. Un courant positif $T$ a des mesures pour coefficients. (voir [6]) L'exemple de type de courant positif fermé est le courant d'intégration sur une sous-variété analytique.

Enfin, une fonction pluri-sousharmonique $\varphi$ est une fonction semi-continue supérieurement telle que $dd^c\varphi$ est positif au sens des courants ($d^c$ est l'opérateur défini par $\frac{1}{2i\pi}(\partial - \bar{\partial})$).

Notons $Z = (z, w, t)$ les coordonnées d'un point de $\mathbb{C}^3$ et $|Z|^2 := |z|^2 + |w|^2 + |t|^2$ le carré de sa norme. Soit $\omega$ la forme de Kähler sur $\mathbb{P}^k$ définie par $\pi^*\omega = dd^c \log |Z|$ ; elle est lisse et pour un courant $T$ positif fermé, on note $||T|| :=< T, \omega >= \int T \wedge \omega^{k-1}$ la masse de $T$ (remarquons que le produit exterieur d'une forme lisse par une mesure est bien défini).

Soit $f \in \mathcal{M}_d$ $(d > 2)$ algébriquement stable. Rappelons la proposition :

**proposition 4.1 ([9])** *Pour tout courant $S$ positif fermé de bidegré $(1, 1)$ dans $\mathbb{P}^k$, il existe une fonction $u$ pluri-sousharmonique dans $\mathbb{C}^{k+1}$ et une constante $c$ telle que :*

$$\forall \lambda \in \mathbb{C}^*, \quad u(\lambda z) = c \log |\lambda| + u(z) \quad \text{et } \pi^* S = dd^c u \ .$$

*De plus, on a $||S|| = \int S \wedge \omega^{k-1} = c$ et $u$ est unique si l'on impose la normalisation $\int_{\partial B} u = 0$ où $B$ est la boule unité de $\mathbb{C}^{k+1}$.*

On dira que $u$ est le potentiel de $S$.

Pour $f \in \mathcal{M}_d$ et $S$ un courant positif fermé de bidegré $(1, 1)$ dans $\mathbb{P}^k$ de potentiel $u$, $f^*S$ est bien définie par $\pi^*(f^*(S)) = dd^c(u \circ F)$ ($f^*S$ est le courant de potentiel $dd^c(u \circ F)$). L'opération $S \mapsto f^*S$ est continue pour la topologie des courants. On a le théorème suivant :

**theorème 4.2 ([9])** *La suite des courants $\{\frac{1}{d^n}(f^n)^*(w)\}$ converge vers un courant positif fermé $T$ de bidegré (1,1) qui vérifie :*

$$f^*(T) = d.T \ .$$

*Si $F = (F_0, \ldots, F_k)$ est un relèvement de $f$, $T$ admet un potentiel pluri-sousharmonique $G$ dans $\mathbb{C}^{k+1}$ vérifiant :*

$$\begin{cases} G(\lambda z) = \log |\lambda| + G(z) \\ G(F(z)) = d.G(z) \ . \end{cases}$$

*De plus toute fonction $v$ vérifiant les propriétés ci-dessus est telle que $v \leq G$.*

On appelle *courant de Green* de $f$ le courant $T$ ainsi défini et $G$ *fonction de Green* de $f$. Il apparaît comme corollaire de la preuve que $G$ est la limite décroissante des $\lim G_n$ où $G_n = \frac{1}{d^n} \log |F^n|$ (en particulier, cela ne dépend pas du relèvement choisi). Notons que $T$ est extrémal dans le convexe compact des courants positifs fermés $S$ de bidegré (1,1) vérifiant $f^*(S) = d.S$ et $||S|| = 1$. Voyons l'utilité de ces objets :

**theorème 4.3 ([9])** *On a :*

1. *Le courant $T$ est à support contenu dans l'ensemble de Julia qui est donc non vide ;*

2. *si $N$ désigne l'ensemble des points normaux, alors pour tout compact $K$ de $N$, il existe $C_K \geq 0$, tel que pour tout $z$ dans $K$ :*

$$\forall j \geq 1, \quad |G_{n+j}(z) - G_n(z)| \leq \frac{C_K}{d^n}$$

*et $N \cup (\mathbb{P}^k \backslash (\mathrm{Supp}\ T)$ est contenu dans l'ensemble de Fatou ; en particulier, $G$ est continue sur $\pi^{-1}(N)$.*

**corollaire 4.4 ([9])** *Si, dans un ouvert $U$ contenu dans $N$, une sous suite $f^{n_i}$ est équicontinue, alors $U$ est dans l'ensemble de Fatou. Si $f$ est normale, le support de $T$ est égal à $J$ qui est connexe.*

*Remarque.* Dans le cas des applications normales, l'ensemble de Fatou est caractérisé par l'harmonicité de $G$, ce qui est un simple calcul de Laplacien complexe. Bien sûr, dans la pratique, il est très difficile d'avoir une écriture de $G$.
*Exemple*[4] Sans l'hypothèse de normalité, la situation peut-être plus compliquée. En effet, soit $R = [z^d : w^d : t^{d-1}w]$, $d \geq 3$. $R$ a $I = [0 : 0 : 1]$ comme seul point d'indétermination et $I$ n'a pas de préimage. Donc $E = I$. Par ailleurs, la seule hypersurface envoyée sur un point est $(w = 0)$ qui est envoyé sur le point fixe $[1 : 0 : 0]$. L'application est donc algébriquement stable. Un calcul montre que $R^n = [z^{d^n} : w^{d^n} : t^{(d-1)^n} w^{d^n-(d-1)^n}]$ et on en déduit :

$$G = \max\{\log|z|, \log|w|\}.$$

Considérons le domaine $\Omega := \{|z| < |w| < |t| = 1\}$, on a que $(R^n)_n$ tend (uniformément sur les compacts) vers $I$. Donc $R$ n'est pas normale.

Mais pour $|z| < 1 = |t| < |w|$, cette fois, $R^n$ tend vers $[0 : 1 : 0]$. En particulier, les points où $|z| < |w| = |t|$ sont dans l'ensemble de Julia. Or, $G$ est clairement pluriharmonique sur ce domaine et donc le support de $T$ est strictement inclu dans l'ensemble de Julia.

# 5 Exemples

La richesse des systèmes dynamiques de $\mathbb{P}^k$ provient de la variété de comportements différents possibles. Voici quelques exemples.

## 5.1 Applications holomorphes

Tout élément $f$ de $\mathcal{H}_d$ est normal, les résultats précédents s'appliquent donc. Intéressons-nous aux points fixes de $f$ (notons que les résultats obtenus n'utilisent pas de théorie du potentiel). On sait :

**theorème 5.1 (Théorème de Bezout)** *Soient $P_1, \ldots, P_k$ des polynômes homogènes de $\mathbb{P}^k$. Si l'ensemble de leurs zéros communs est discret, alors le nombre de ces zéros, en tenant compte de leurs multiplicités, est égal au produit $d_1 \ldots d_k$ des polynômes $P_1, \ldots, P_k$.*

On en déduit les corollaires suivants :

**corollaire 5.2 ([9])** *Soit $f \in \mathcal{H}_d$. Alors, pour tout $a \in \mathbb{P}^k$, le cardinal de $\{f^{-1}(a)\}$, compté avec multiplicité, est égal à $d^k$.*

*Remarque* Le cardinal de $\{f^{-1}(a)\}$ (compté avec multiplicité) est par définition $d_t$ le degré topologique de $f$ (normalement, il faut pondérer par le signe du jacobien en chacune des préimages, mais dans le cas méromorphe, les applications préservent l'orientation). On a donc, pour $d \leq 2$, que $d_t > d$. En particulier, $h_{top}(f) \leq \log |d_t|$ ([7]). En fait, il y a égalité ([8]).

**corollaire 5.3 ([9])** *Soit $f \in \mathcal{H}_d$, $d \geq 2$. Alors, le nombre de points périodiques de période $n$ de $f$ (avec multiplicité) est $\frac{d^{n(k+1)}-1}{d^n-1}$.*

On montre même que $f$ admet une infinité d'orbites périodiques distinctes ([[9]]).

### 5.2 Applications de Hénon

Contrairement à $\mathbb{C}$, les automorphismes polynomiaux de $\mathbb{C}^k$ ne sont pas nécessairement affines. Par exemple pour $p$ un polynôme de degré $d$ et $a \in \mathbb{C}^*$, on définit l'automorphisme $h(z,w) = (p(z) - aw, z)$ qui convient. Une composée de telles applications est dite *application de Hénon*. Leur étude a été très poussée depuis [1].

On se ramène au morphisme de $\mathbb{P}^2$,

$$h_+([z:w:t]) = [t^d p(\frac{z}{t}) - awt^{d-1} : zt^{d-1} : t^d]$$

d'inverse (hors de l'hyperplan à l'infini) :

$$h_-([z:w:t]) = [wt^{d-1} : \frac{1}{a}(t^d p(\frac{w}{t}) - zt^{d-1}) : t^d]$$

Les points d'indétermination $I_+ = [0:1:0]$ et $I_- = [1:0:0]$ de respectivement $h_+$ et $h_-$ vérifient $h_+(I_-) = I_-$ et $h_-(I_+) = I_+$ (ce sont d'ailleurs des points fixes super-attractifs, donc ces applications sont normales). L'application $h_+$ est algébriquement stable car $h_+(t=0) = I_-$, on peut donc lui appliquer les résultats précédents.

Notons $U^+$ le bassin d'attraction de $I_-$ pour $h_+$ (de même pour $h_-$). Enfin, soit $K^+ = \mathbb{C}^2 \backslash U^+$ qui est fermé. On peut montrer, comme $(t=0)\backslash I_+$ est attractif , que les points de $K^+$ sont d'orbites bornées ([4]).

Soit $K = K^+ \cap K^-$ qui est compact dans $\mathbb{C}^2$ non vide (il contient les points fixes). On définit :

$$G^+(z,w) = \lim \frac{1}{2^n} \log^+ |f^n(z,w)| = \sup(G(z,w,1), 0)$$

où $\log^+ := \sup(\log, 0)$ (où $f$ est la restriction de $h^+$ à $\mathbb{C}$). On déduit des résultats précedents que $G^+$ est continue et que $K^+ = \{G^+ = 0\}$. On a même que la famille $(f^n)$ est équicontinue sur l'intérieur de $K^+$, qui est donc dans l'ensemble de Fatou. En notant $T^+ = dd^c G^+$, on montre que ce courant a pour support l'ensemble de Julia qui est égal à $\partial K^+$.

# 6 Un exemple de calcul de vitesse de divergence.

Dans [3], on s'intéresse à la dynamique d'applications polynomiales $f$ de $\mathbb{C}^2$ dans $\mathbb{C}^2$ telles que l'infini soit $f$-attirant et que le prolongement homogène de $f$ envoie la droite à l'infini $L_\infty = \{t = 0\}$ sur un unique point de $L_\infty \backslash I$. On calcule notamment la *vitesse de divergence* d'un point $p$ donné par :

$$\log l(p) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log^+ \log^+ ||f^n(p)||.$$

Dans les exemples étudiés jusqu'ici, on avait toujours obtenu des valeurs finies pour la fonction $l$. On obtient ici un segment de valeurs possibles. Il faut introduire la notion d'applications quasi-horizontales (horizontal-like mappings) qui permet de comprendre la géométrie de $f$ à l'infini.

## 6.1 Fonctions méromorphes quasi-horizontales

Notons $\mathbb{B}$ le disque unité de $\mathbb{C}^2$ et respectivement $\partial_v\mathbb{B}$ et $\partial_h\mathbb{B}$ les parties verticales et horizontales de la frontière. C'est-à-dire $\partial_v\mathbb{B} = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2,\ |z| = 1,\ |w| < 1\}$ (de même pour $\partial_h\mathbb{B}$).

**definition 6.1** *Soient $(\mathbb{B}_i \subset M_i)_{i\in\{1,2\}}$ deux domaines biholomorphes à $\mathbb{B}$ dans deux variétés complexes . Soit $f$ une application méromorphe dominante définie sur un voisinage de $\overline{\mathbb{B}_1}$ à valeurs dans $M_2$. Le triplet $(f, \mathbb{B}_1, \mathbb{B}_2)$ définit une fonction quasi-horizontale si :*

1. *$f$ n'a pas de points d'indétermination dans $\partial_v\mathbb{B}_1$ et $f(\partial_v\mathbb{B}_1) \cap \overline{\mathbb{B}_2} = \varnothing$ ;*
2. *$f(\overline{\mathbb{B}_1}) \cap \partial\mathbb{B}_2 \subset \partial_v\mathbb{B}_2$ ;*
3. *$f(\mathbb{B}_1) \cap \mathbb{B}_2 \neq \varnothing$.*

On définit aussi les courants horizontaux comme les courants de bidegré (1,1) positifs, fermés dans $\mathbb{B}$ qui vérifient :

$$Supp(T) \subset \mathbb{D} \times \mathbb{D}_{1-\epsilon}$$

pour un $\epsilon > 0$ ($\mathbb{D}$ désigne le disque unité de $\mathbb{C}$, $\mathbb{D}_{1-\epsilon}$ le disque de rayon $1 - \epsilon$).

Pour de tels courants, on peut définir la *mesure tranche* (slice measure) par $m^z = T \wedge [\{z\} \times \mathbb{D}]$ (il n'est a priori pas clair que de tels objets existent, on renvoie à [5] sur ce sujet). Ces mesures ont la même masse (cf [10]). Un courant horizontal est normalisé si cette masse vaut 1.

On peut alors définir un potentiel pluri-sousharmonique *canonique* pour un courant horizontal $T$ par :

$$u(z,w) = \int_{\{z\}\times\mathbb{D}} \log|w-s|\, dm^z(s).$$

On vérifie que $dd^c u = T$.

On peut définir la notion d'image directe et d'image réciproque d'un courant $T$ pour $f$ quasi-horizontale par $f^*T = (\pi_1)_*(\pi_2^*T \wedge [\Gamma])$ et $f_*T = (\pi_2)_*(\pi_1^*T \wedge [\Gamma])$ où $\Gamma$ est le graphe de $f$ et $\pi_1$ et $\pi_2$ les projections. On a alors la proposition :

**proposition 6.2 ([3])** *Soit $f : \mathbb{B}_1 \to \mathbb{B}_2$ une application quasi-horizontale. Il existe alors un entier $d \geq 1$, appellé degré de $f$, tel que :*

1. *Pour tout courant horizontal normalisé $T$ dans $\mathbb{B}_1$, $\frac{1}{d}1_{\mathbb{B}_2}f_*T$ est horizontal, normalisé dans $\mathbb{B}_2$.*
2. *Pour tout courant vertical normalisé $T$ dans $\mathbb{B}_2$, $\frac{1}{d}1_{\mathbb{B}_1}f^*T$ est vertical, normalisé dans $\mathbb{B}_1$.*

L'entier $d$ a une interprétation géométrique, c'est le cardinal de l'intersection (avec multiplicité) d'une droite verticale de $\mathbb{B}_2$ avec l'image directe d'une droite horizontale de $\mathbb{B}_1$.

## 6.2 Vitesse de divergence

On se donne une application polynomiale $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ de degré $d \geq 2$ telle que l'infini soit $f$-attirant, c'est-à-dire que pour $||p||$ assez grand, on a $||f(p)|| \geq c||p||$ pour $c$ une constante supérieure à 1. On suppose que $f$ possède $m \geq 1$ points d'indétermination $I_1, \ldots, I_m$ sur $L_\infty$ et que $f(L_\infty) = X \subset (L_\infty \backslash I_f)$. On en déduit que $f$ est algébriquement stable.

Par ailleurs, l'image d'un point d'indétermination étant un ensemble analytique non trivial, on a $f(I_j) = L_\infty$ pour tout $j$. Quitte à effectuer un changement de variable linéaire, on peut se ramener au cas où $X = [1:0:0]$ et $f = (f_1, f_2)$ avec $d = \deg(f_1) > \deg(f_2) \geq 1$. On se donne alors un voisinage $V(X)$ de $X$ tel que $I_f \cap V(X) = \varnothing$ et $f(V(X)) \Subset V(X)$ (où "$\Subset$" veut dire "relativement compact").

On fait par ailleurs l'hypothèse que pour tout $j$, il existe des constantes $C_1$, $C_2$, $l_j \geq 1$ et des voisinages $V(I_j)$ tels que :

$$\forall p \in V(I_j), \text{ si } f(p) \notin V(X), \text{ alors } C_1||p||^{l_j} \leq ||f(p)|| \leq C_2||p||^{l_j} \tag{1}$$

*Remarque.* On peut toujours supposer $C_1 \geq 1$.

Par ailleurs, on semble faire beaucoup trop d'hypothèses et s'intéresser finalement à un problème très peu général. En fait, il est dans la "nature des choses" de devoir s'intéresser à des cas particuliers car on peut observer des phénomènes très différents selon les exemples (voir sur le même problème de vitesse de divergence [2], où l'on obtient un nombre fini de vitesses).

On montre le lemme suivant qui donne le comportement de $f$ au voisinage de chaque $I_j$.

**lemme 6.3 ([3])** *Il existe une famille de bidisque $\mathbb{B}_i$ avec $I_i \in \mathbb{B}_i$ pour $i = 1, \ldots, m$ telle que pour tout paire $(i, j)$, $(f, \mathbb{B}_i, \mathbb{B}_j)$ est quasi-horizontale, de degré $d_i$ ne dépendant que de $i$. De plus, $\sum d_i = d$.*

*Remarque* En utilisant des méthodes de théorie du potentiel, on peut prouver que le degré topologique $d_t$ vérifie $d_t = \sum l_i d_i$. Et donc $d \leq d_t$.

Dès lors, notons $\mathcal{K}$ l'adhérence dans $\mathbb{P}^k$ du complémentaire du bassin d'attraction de $X$ et $N = \mathbb{B}_1 \cup \cdots \cup \mathbb{B}_m$. Dans un voisinage de $L_\infty$, on a $\mathcal{K} \subset N$. Pour tout $\alpha = (\alpha(j))_{j \in \mathbb{N}} \in \{1, \ldots, m\}^{\mathbb{N}}$, on définit :

$$\mathcal{K}_\alpha = \{p \in \mathcal{K} \cap N,\ f^j(p) \in \mathbb{B}_{\alpha(j)}\}$$

On admet le résultat technique ([3]) qui donne que $\mathcal{K}_\alpha$ est un ensemble vertical *non vide*, portant un courant positif fermé.

Pour tout itinéraire dans les $\mathbb{B}_j$, on va alors pouvoir trouver un point qui suit cet itinéraire. Par ailleurs, pour $z \in \mathcal{K}_\alpha$, on a un lien entre $l(z)$ et $\alpha$ comme le donne le lemme suivant :

**lemme 6.4 ([3])** *Soit $\alpha \in \{1, \ldots, m\}^{mathbbN}$, pour $p \in \mathcal{K}_\alpha$, on a :*

$$\frac{1}{n} \log \log ||f^n(p)|| =_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log(l_{\alpha(0)} \ldots l_{\alpha(n-1)}) + o(1).$$

Et on peut prouver le théorème principal :

**theorème 6.5 ([3])** *Soit $f$ satisfaisant les hypothèses précédentes, alors le spectre des valeurs possibles pour la fonction $l$ est exactement $[\min l_i, \max l_j] \cup \{d\}$ avec $\max l_i \leq d - 1$.*

*Par ailleurs, un point $p$ vérifie $l(p) = d$ si et seulement s'il est dans le bassin de $X$.*

## 6.3 Exemple

Donnons une classe d'exemples de fonctions vérifiant les propriétés précédentes. Elle est simple et montre bien qu'il ne s'agit pas d'objets "farfelus" auxquels on s'intéresse.

Soit donc $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ définie par :

$$f(z, w) = (z^c(w - z)^d, w^a + z^b)$$

avec $c + d > b > a \geq 2$. L'application $f$ est alors de degré $c + d$ et on a $I_f = \{I_1 = [0 : 1 : 0], I_2 = [1 : 1 : 0]\}$ alors que $f(L_\infty \backslash I) = [1 : 0 : 0]$. Par ailleurs, on a que $f$ est propre et que l'infini est bien $f$-attirant.

On peut calculer les entiers $d_1$, $d_2$, $l_1$ et $l_2$, on trouve dans l'ordre $c$, $d$, $a$ et $b$. Et donc, d'après ce qui précède, on trouve que l'image de $l$ vaut $[a, b] \cup \{c + d\}$.

Notons par ailleurs qu'il est possible de trouver des exemples comprenant de nombreux points d'indétermination.

# 7 Mes projets

L'étude de la dynamique des polynômes dans $\mathbb{C}^k$ fait depuis dix ans l'objet d'une étude systématique, notamment grâce aux techniques de théorie du potentiel exposées. Certains cas sont désormais parfaitement compris (comme ceux exposés), d'autres restent à comprendre. C'est le cas des applications polynomiales $f$ de $\mathbb{C}^2$ dans $\mathbb{C}^2$ qui ont des points d'indétermination à l'infini, une dynamique non triviale à l'infini (i.e : $f_{|\infty}$ n'est pas constante), et pour lesquelles l'infini est $f$-attirant.

C'est ce cas là que je vais essayer de comprendre. Dans un premier temps, il faut s'assurer que l'on travaille sur une famille non vide d'applications. C'est le cas ici comme le montre l'exemple :

$$f(z, w) = 3(z(z - w)(z + w) + 2(z - w), w(z - w)(z + w) + 2(z + w))$$

Mais l'exemple ci-dessus relève trop du bricolage, et il faudrait trouver un critère générique. Une application qui marche doit être de la forme :

$$f(z, w) = (Q_1(z, w)P(z, w) + R_1(z, w), Q_2(z, w)P(z, w) + R_2(z, w))$$

avec $P$ homogène de degré $c$, $Q_1$ et $Q_2$ homogènes de degré $d$ et $R_1$ et $R_2$ de degré $\leq c + d - 1$ (au moins égal à 1). Pour $Q_1 \neq Q_2$ et $P(z, w) = \Pi_j(a_j z - b_j w)$, on aura alors une dynamique à l'infini et les points $[b_j : a_j : 0]$ comme points d'indétermination. Il reste à trouver $R_1$ et $R_2$ pour que l'infini soit $f$-attirant.

Dinh propose de s'intéresser, aux voisinages des points d'indétermination (puisqu'ailleurs, le résultat est clair), au polynôme $\Phi = Q_2.R_1 - Q_1.R_2$. On peut en effet vérifier facilement que si $\Phi$ est de degré $c + 2d - 1$ (ce qui est une propriété générique) ne s'annulant pas sur $I_j$ alors $f$ convient. On remarque qu'alors on dispose d'un ouvert de solutions à notre problème puisque notre condition suffisante est ouverte.

Malheureusement, la situation se complique en dimension supérieure (pour des raisons d'anneaux principaux) puisque $f$ n'est plus forcément de la forme $(Q_1 P + R_1, \ldots, Q_k P + R_k)$ comme le montre l'exemple simple :

$$f(z_1, z_2, z_3) = (z_1 z_2 - z_2 z_1, z_2 z_3 - z_3 z_2, z_1 z_3 - z_3 z_1)$$

qui admet $[1:1:1:0]$, $[1:0:0:0]$, $[0:1:0:0]$ et $[0:0:1:0]$ comme points d'indétermination. On peut naturellement se demander si l'on peut toujours trouver un critère générique simple et si les comportements seront toujours les mêmes (ce dont on peut douter).

## Références


[1] Smillie J. Bedford E. Polynomial diffeomorphisms of $\mathbb{C}^2$ : Currents, equilibrium measure and hyperbolicity. *Invent. math*, 103, 1991.

[2] Sibony N. Dinh T.C. Dynamiques des applications polynomiales semi-régulières. *Ark.Math*, 42.

[3] Sibony N. Dinh T.C, Dujardin R. On the dynamics near infinity of some polynomial mappings in $\mathbb{C}^2$. *A paraître*, 2004.

[4] Sibony N. Fornaess J.E. Complex dynamics in higher dimension II. *Ann.Math.Studies*, 137, 1.

[5] Demailly J.P. Regularization of closed positive currents and Intersection Theory. *J. Alg. Geom.*, 1, 1992.

[6] Demailly J.P. *Complex analytic and differential geometry.* 1997.

[7] Hasselblat B. Katok A. *Introduction to the modern thory of dynamical systems.* Cambridge university Press, 1995.

[8] Gromov M. Entropy, homology and semi-algebraic geometry. *Seminaire bourbaki*, 1985.

[9] Sibony N. *Dynamique et géométrie complexes.* Panoramas et synthèses, 1999.

[10] Dujardin R. Hénon-like mappings in $\mathbb{C}^2$. *Amer.J.Math.*, 126, 2004.