Texte d'introduction au domaine de recherche
MMFAI - ENS Paris

Mesures quasi-stationnaires et systèmes de particules du type Fleming-Viot

Denis Villemonais

Octobre 2007

Table des matières

1 Introduction

Une approche classique des chaînes de Markov consiste à étudier la convergence de la distribution du processus lorsque le temps tend vers l'infini. Or, dans le cadre d'une chaîne avec états absorbants et sous certaines conditions, la distribution limite est concentrée sur l'ensemble des états absorbants, ne nous fournissant aucune information sur le comportement avant extinction de la chaîne. L'étude de la distribution d'un processus conditionné à la non-extinction répond à ce manquement, avec pour objet limite recherché les distributions quasi-stationnaires (DQS) : ce sont les distributions initiales invariantes pour le processus conditionné à la non-extinction.

L'idée d'étudier le comportement avant extinction d'un processus stochastique est assez ancienne, portée par une interaction forte avec l'étude des populations en biologie ou en écologie. L'étude des DQS peut être ramenée à un problème de théorie spectrale complexe, ne permettant de les calculer que dans les cas les plus simples. En 1996, K. Burdzy, R. Holyst, D. Ingerman et P. March [2] ont proposé à travers des conjectures une nouvelle méthode d'approche des DQS utilisant des objets du type Fleming-Viot : ce sont des processus à plusieurs particules basés sur un algoritme facile à implémenter. En faisant tendre le nombre de particules vers l'infini, on s'aperçoit que, dans le cadre d'un mouvement brownien tué à une frontière, la mesure empirique des distributions stationnaires tend vers la DQS du système. Cette méthode a été reprise avec succès par P.A. Ferrari et N. Mariè [8] en 2006 dans le cadre d'une chaîne de Markov à espace d'états discret montrant alors l'existence d'une DQS.

2 Les distributions quasi-stationnaires

2.1 Le théorème de Yaglom

La pensée à l'origine de l'étude des DQS peut être attribuée au travail du mathématicien russe A.M. Yaglom, qui a montré en 1947 que la distribution conditionnée à la non-extinction du nombre d'individus de $n^{ème}$ génération d'un arbre de Galton-Watson admet toujours une limite dans le cas sous-critique :

Définition 2.1 *Un processus de Galton-Watson* $(Z_n)_{n\geq 0}$ *est une chaîne de Markov sur les entiers positifs. Sa fonction de transition est définie en fonction d'une probabilité* $\{p_k; k = 0,1,2,..\}$*, avec* $p_k \geq 0$*,* $\sum p_k = 1$*, par*

$$P(i,j) = P(Z_{n+1} = j | Z_n = i) = \begin{cases} p_j^{*i} & si\ i \geq 1, \quad j \geq 0 \\ \delta_{0j} & si\ i = 0, \quad j \geq 0 \end{cases} \qquad (1)$$

où δ_{ij} est le symbole de Kronecker et $\{p_k^{*i}; k = 0,1,2,..\}$ est la i-ème convolution de $\{p_k; k = 0,1,2,..\}$.

Théorème 2.1 *(Théorème de Yaglom)*

Soit (Z_n) un arbre de Galton-Watson, tel que $m = \sum_{n=0}^{\infty} np_n \leq 1$. On a alors extinction presque-sûre du processus, c'est à dire, avec probabilité 1, il existe $n \geq 1$ tel que $Z_n = 0$.

Dans le cas sous-critique, c'est à dire $m < 1$, la suite $P(Z_n = j | Z_n > 0)$ converge quand $n \to \infty$ vers une mesure de probabilité b dont la fonction génératrice $\mathcal{B}$ vérifie

$$\mathcal{B}(f(s)) = m\mathcal{B}(s) + (1 - m) \tag{2}$$

où f est la fonction génératrice de la mesure de probabilité $\{p_k,\, k = 0,1,2...\}$.

2.2 Le cas de marches aléatoires sur N

Les résultats présentés dans cette partie sont dus à J.A. Cavender [5] et concernent les processus de naissance et de mort. Nous considérons un processus de naissance et de mort sur $\mathbf{N}$ de taux de naissance λ_i et de mort μ_i strictement positifs, excepté $\lambda_0 = 0$ (l'état 0 est absorbant). L'étude de ce type de processus nous permettra d'étudier le cas des marches aléatoires sur $\mathbf{N}$, pour lesquelles le nombre de distributions quasi-stationnaires est infini ou nul suivant le paramètre choisi. Nous noterons $p_n(t), n \in \mathbf{N}$ la distribution au temps t du processus, où l'on suppose

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n(0) = 1,\ p_0(0) < 1 \text{ et } p_n \geq 0. \tag{3}$$

Cette distribution vérifie l'équation

$$\begin{aligned} &\tfrac{d}{dt} p_0(t) = \mu_1 p_1(t) \\ &\tfrac{d}{dt} p_n(t) = \lambda_{n-1} p_{n-1}(t) - (\lambda_n + \mu_n) p_n(t) + \mu_{n+1} p_{n+1}(t),\ n = 1,2,.. \end{aligned} \tag{4}$$

Définissons maintenant $q_n(t)$ la distribution conditionnée à la non-extinction du processus,

$$q_n(t) = \frac{p_n(t)}{1 - p_0(t)},\ n = 1,2,.. \tag{5}$$

D'après l'équation (4), nous obtenons l'équation différentielle suivante,

$$\frac{d}{dt} q_n(t) = \lambda_{n-1} q_{n-1}(t) - (\lambda_n + \mu_n) q_n(t) + \mu_{n+1} q_{n+1}(t) + \mu_1 q_1(t) q_n(t). \tag{6}$$

Une famille vérifiant cette équation permet de reconstituer de manière univoque une solution de (4) vérifiant (3) et (5), mais l'on n'est pas assuré alors de trouver une famille $p_n(t)$ vérifiant, pour tout $t \geq 0$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n(t) = 1. \tag{7}$$

L'étude des solutions de (4) vérifiant (3), montre qu'il existe des conditions sur les familles (μ_n) et (λ_n) telles que (7) soit satisfait.

Les distributions quasi-stationnaires sont définies à partir de la relation $\frac{d}{dt} q_n(t) = 0$:

Définition 2.2 *Une distribution quasi-stationnaire est une famille $(q_n)_{n\geq 1}$ telle que*

$$\lambda_{n-1} q_{n-1} - (\lambda_n + \mu_n) q_n + \mu_{n+1} q_{n+1} + \mu_1 q_1 q_n = 0 \tag{8}$$

pour tout $n \geq 1$ (on suppose ici $q_0 = 0$).

Remarquons que l'on n'exige pas pour l'instant de ces distributions d'être des probabilités et qu'il existe donc toujours au moins la solution identiquement nulle.

Nous définissons la famille de polynômes $(f_n(x))_{n\geq 1}$ qui va nous permettre de paramètriser l'ensemble des distributions quasi-stationnaires :

$$\begin{aligned} f_1(x) &= x \\ f_n(x) &= \frac{\lambda_{n-1} f_{n-1}(x) + \mu_1 x \left(1 - \sum_{k=1}^{n-1} f_k(x)\right)}{\mu_n} \end{aligned}$$

Théorème 2.2 *Il existe un réel $a \geq 0$ tel que*

$$\left\{ (f_n(x))_{n\geq 1} \, , \, 0 \leq x \leq a \right\}$$

soit l'ensemble de toutes les distributions quasi-stationnaires.

Pour finir, et avant de passer à l'exemple, on établit un lien entre le processus réfléchi (c'est à dire le processus de naissance et de mort pour lequel l'état 0 est effacé, ainsi que λ_0 et μ_1) et l'existence de distributions quasi-stationnaires qui soient des probabilités :

Théorème 2.3 *Si le processus réfléchi n'est pas récurrent positif, c'est à dire s'il existe une distribution initiale $(p_n(0))$ telle que $p_n(t) \to 0$ lorsque $t \to +\infty$, alors il n'existe pas de distribution quasi-stationnaire telle que*

$$\sum_{n=1}^{\infty} q_n = 1.$$

Exemple Nous considérons ici un processus de naissance et de mort particulier : une marche aléatoire sur **N**. C'est à dire $\lambda_i = \lambda$ et $\mu_i = 1$, $\forall i \geq 1$. Cet exemple de processus, proposé par J.A. Cavender, présente l'intérêt d'avoir des distributions quasi-stationnaires explicitement calculables. Dans le cas $\lambda \geq 1$, le processus réfléchi n'est pas positif récurrent, et il n'existe alors pas de distribution quasi-stationnaire qui soit une probabilité. Supposons maintenant $\lambda < 1$. L'équation (8) devient

$$\lambda q_n + (q_1 - \lambda - 1)q_{n+1} + q_{n+2} = 0,\ n \geq 1$$

On obtient donc

$$q_n = \frac{q_1}{c}\left[\left(\frac{\lambda + 1 - q_1 + c}{2}\right)^n - \left(\frac{\lambda + 1 - q_1 - c}{2}\right)^n\right]$$

où $c = [(q_1 - \lambda - 1)^2 - 4\lambda]^{1/2}$. Pour $0 < q_1 < \lambda + 1 - 2\lambda^{1/2}$, c est réel, donc q_n>0 pour tout $n \geq 1$. De plus, $0 < (\lambda + 1 - q_1 \pm c)/2 < 1$, donc

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} q_n &= \frac{q_1}{c}\left(\frac{2}{1 - \lambda + q_1 - c} - \frac{2}{1 - \lambda + q_1 + c}\right) \\ &= 1\end{aligned}$$

En définitive, dans le cas d'une marche aléatoire sur **N**, il existe une infinité de distributions quasi-stationnaire pour $\lambda < 1$ et aucune lorsque $\lambda \geq 1$.

3 Les processus de Fleming-Viot

Nous venons de voir un exemple où l'ensemble des DQS du processus peut être explicité. C'est un cas de figure qui se présente rarement. Le type de processus dont on cherche la distribution quasi-stationnaire peut par exemple se présenter sous la forme d'une solution à une équation différentielle stochastique correspondant à l'évolution dune population, cas où l'existence même de DQS pose problème, or les démographes, biologistes et écologistes ont besoin de leurs valeurs numériques. La suite présente une nouvelle méthode qui permet d'obtenir dans certains cas la DQS comme limite hydrodynamique d'un processus à plusieurs particules..

Considérons un processus markovien qui s'éteint en temps fini presque sûrement. Le processus de Fleming-Viot à N particules associé est un systèmes de N particules évoluant indépendamment selon la loi du processus Y jusqu'à l'extinction de l'une d'entre elles. A chaque absorbtion, la particule tuée saute à la position d'une des $N - 1$ particules restantes. Entre les absorbtions, les particules se déplacent indépendamment selon la loi de Y.

Les processus de Fleming-Viot ont été introduits en 1996 dans le cadre de l'étude des distributions quasi-stationnaires par K. Burdzy, R. Holyst, D. Ingerman et P. March [2]. Certaines conjectures établies dans cet article ont été démontrées en 2000 par K. Burdzy, R. Holyst et P. March [3].

3.1 Cas continu

3.1.1 Construction du processus de Fleming-Viot

Soit un ouvert $D \subset \mathbf{R}^d$ et $N \geq 2$. Soit $\mathbf{X}_t = \left(X_t^1, X_t^2, .., X_t^N\right)$ un processus à valeurs dans D^N et dont l'évolution est construite de la manière suivante. Au temps initial, $\mathbf{X}_0 \in D^N$. Les processus $X_t^1, .., X_t^N$ évoluent comme N mouvements browniens avant le premier temps τ_1 auquel une particule, disons X^j, atteint D^c. À ce moment, l'une des particules restantes est choisie au hasard, de manière uniforme et, en notant X^k cette particule, le processus X^j saute à la valeur $X_{\tau_1}^k$ au temps τ_1. Puis les particules évoluent comme N mouvements browniens indépendants jusqu'au temps $\tau_2 > \tau_1$ auquel une particule atteint D^c. A cet instant, la particule concernée saute à la position d'une des autres paricules choisie au hasard. Et ainsi de suite, définissant l'évolution de $\mathbf{X}_t$, processus de Fleming-Viot à N particules.

Notons que l'existence du processus de Fleming-Viot n'est pas évidente, il est facile d'imaginer un cas tel que le nombre de sauts soit infini presque sûrement en temps fini.

Dans le cas du mouvement brownien, le résultat suivant nous assure l'existence de ce processus pour tout $t \geq 0$, c'est à dire

Théorème 3.1 *Nous avons* $\tau_\infty \overset{déf}{=} \lim_{k\to\infty} \tau_k = \infty$ *presque-sûrement.*

Nous avons, toujours pour le mouvement brownien, le résultat suivant,

Théorème 3.2 *Avec probabilité* 1*, il existe* $t < \tau_\infty$ *tel que tous les processus* X^k *appartiennent à une même composante connexe de* D *au temps* t*.*

3.1.2 Convergence du processus de Fleming-Viot

Soient Y_t un processus de Markov sur $\mathbf{R}^d$ et $D \subset \mathbf{R}^d$ un ouvert borné, tels que le processus de Fleming-Viot est bien défini (les arguments donnés pour le mouvement brownien [3] ne sont pas spécifiques et semblent être généralisables à une large classe de processus). Le résultat obtenu par K. Burdzy, R. Holyst et P. March pour le mouvement brownien se généralise de la manière suivante :

Supposons que l'hypothèse (H) suivante est vérifiée

1. $\forall \delta > 0$, $\exists \lim_{t\to 0} \sup_x P_x \left(|Y_t - x|\right) > \delta) = 0$.
2. $\forall A \subset \mathbf{R}^d$ ouvert et $\forall s > 0$, $x \mapsto P_s(x,A)$ est continue sur $\overline{D}$.
3. $\forall A \subset D$ ouvert, $\forall s > 0$ et $\forall x \in D$, $P_s(x,\partial A) = 0$

où P^D est la probabilité de transition pour le processus Y_t tué au temps d'atteinte de D^c.

Étant donné une mesure de probabilité $\mu_0(dx)$ sur D, on définit pour tout $t > 0$ la mesure μ_t du processus conditionné à la non-extinction par

$$\mu_t(A) = \frac{\int_D P_t^D(x,A)\mu_0(dx)}{\int_D P_t^D(x,D)\mu_0(dx)} \tag{9}$$

pour $A \subset D$ mesurable. Nous noterons $\mathcal{X}_t^N(dy) = (1/N)\sum_{k=1}^N \delta_{X_t^k}(dy)$ la distribution empirique du processus X_t, où X_t est le processus de Fleming-Viot à N particules défini à partir du processus Y_t.

Théorème 3.3 *(K. Burdzy, R. Holyst, P. March (2000)) Soit μ_0 une mesure de probabilité sur D, μ_t défini en (9). Supposons que pour tout N, la distribution initiale $\mathcal{X}_0^N$ est une mesure non-aléatoire μ_0^N. Si la mesure μ_0^N converge vers μ_0 quand $N \to \infty$ alors $\forall t > 0$ la mesure empirique $\mathcal{X}_0^N$ converge vers μ_t au sens où $\forall A \subset D$, la suite $\mathcal{X}_t^N(A)$ converge vers μ_t en probabilité.*

Enfin, on obtient le résultat suivant sur la limite hydrodynamique du processus de Fleming-Viot :

Théorème 3.4 *(K. Burdzy, R. Holyst, P. March (2000)) Supposons que $D \subset \mathbf{R}^d$ est un ouvert borné satisfaisant la condition de la boule intérieure.*

Soit $\mathcal{X}_{\mathbf{M}}^N$ la distribution empirique stationnaire et soit $\varphi(x)$ la première fonction propre du Laplacien dans D avec les conditions au bord de Dirichlet, normalisée de telle sorte que $\int_D \varphi = 1$.

La mesure aléatoire $\mathcal{X}_{\mathbf{M}}^N$ converge quand $N \to \infty$ vers la mesure (non-aléatoire) de densité $\varphi(x)$, au sens de la convergence faible des mesures aléatoires.

3.2 Cas discret

Je fais ici l'exposé de l'article de P.A. Ferrari et Nevena Marič [8]. Les idées qui y sont contenues sont largement inspirées de l'article fondateur de K. Burdzy, R. Holyst et P. March [3]. L'utilisation des processus de Fleming-Viot permet d'obtenir une condition suffisante à l'existence d'une distribution quasi-stationnaire quand, sous cette même condition et en cas d'existence d'une distribution quasi-stationnaire, S.D. Jacka et G.0. Roberts [11] en ont prouvé l'unicité.

3.2.1 Construction du processus de Fleming-Viot

Considérons une chaîne de Markov irréductible Z_t dont la matrice des taux de transition est $Q = (q(x,y))$, pour $x,y \in \Lambda \cup \{0\}$, où Λ est au plus dénombrable et 0 est un état absorbant, c'est à dire $q(0,x) = 0$ pour tout $x \in \Lambda$. Nous faisons l' hypothèse que $\bar{q} := \sup_x \sum_{y \in 0 \cup \Lambda \setminus \{x\}} q(x,y) < \infty$, que $P_t(x,y) > 0$ pour tout $x,y \in \Lambda$ et $t > 0$, enfin que le temps d'absorption est fini presque sûrement quelque soit l'état initial.

Posons, pour $z \in \Lambda$,

$$\alpha(z) = \inf_{x \in \Lambda \setminus \{z\}} q(x,z).$$

On définit le *coefficient d'ergodicité*

$$\alpha = \alpha(Q) := \sum_{z \in \Lambda} \inf_{c \in \Lambda \setminus \{z\}} q(x,z), \tag{10}$$

puis le *taux maximal d'absorption* de Q par

$$C = C(Q) := \sup_{x \in \Lambda} q(x,0). \tag{11}$$

Le générateur d'un tel processus est défini sur l'ensemble des applications $f : \Lambda^{\{1,..,N\}} \mapsto \mathbf{R}$ par

$$\mathcal{L}^N f(\xi) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{y \in \Lambda \setminus \{\xi(i)\}} \left[q(\xi(i),y) + q(\xi(i),0) \frac{\eta(\xi,y)}{N-1} \right] \left(f(\xi^{i,y}) - f(\xi) \right) \tag{12}$$

où $\xi^{i,y} = y$ pour $j = i$ et $\xi^{i,y} = \xi(j)$ autrement, et

$$\eta(\xi,y) := \sum_{i=1}^{N} \mathbf{1}_{\{\xi(i)=y\}}. \tag{13}$$

Nous noterons ξ_t le processus sur $\Lambda^{(1,..,N)}$ de générateur (12) et $\eta_t(x) = \eta(\xi_t,x)$ le nombre de particules à l'état x au temps t. À partir d'une probabilité μ sur λ, on note $\xi_t^{N,\mu}$ le processus dont la position initiale est distribuée selon N variables indépendantes de loi μ ($\xi_0^{N,\mu}, i = 1,..,N$), et $\eta_t^{N,\mu}(x)$ le processus correspondant.

Construction du processus de Fleming-Viot Pour chaque $i = 1,..,N$, on définit des processus de Poisson (PP) marqués indépendants sur $\mathbf{R}$:

– Temps de régénération, PP de taux α : $(a_n^i)_{n \in \mathbf{Z}}$ de marques $(A_n^i)_{n \in \mathbf{Z}}$

– Temps internes, PP de taux $\bar{q}-\alpha$:
$(b^i_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ de marques $((B^i_n(x),x\in\Lambda),n\in\mathbf{Z})$
– Temps de vote, PP de taux C :
$(c^i_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ de marques $((C^i_n(x),(F^i_n(x),x\in\Lambda)),n\in\mathbf{Z})$

Les marques sont choisies indépendantes et de lois marginales :

– $P(A^i_n=y)=\alpha(y)/\alpha$, $y\in\Lambda$.
– $P(B^i_n=y)=(q(x,y)-\alpha(y))/(\bar{q}-\alpha)$, $x\in\Lambda$, $y\in\Lambda\backslash\{x\}$;
$P(B^i_n=x)=1-\sum_{y\in\Lambda\backslash\{x\}}P(B^i_n=y)$.
– $P(F^i_n(x)=1)=q(x,0)/C=1-P(F^i_n(x)=0)$, $x\in\Lambda$.
– $P(C^i_n=j)=1/(N-1)$, $j\neq i$.

Notons $(\Omega,\mathcal{F},P)$ l'espace probabilisé sur lequel sont construits les processus de Poisson marqués décrits ci-dessus. Étant donné $\omega\in\Omega$, on construit le processus $\xi^{N,\xi}_{[s,t]}$ dans l'intervalle de temps arbitraire $[s,t]$ comme une fonction des processus de Poisson (temps et marques) et de la configuration ξ au temps s.

Puisqu'à chaque particule i, on associe trois processus de Poisson de taux C, α et $\bar{q}-\alpha$, le nombre d'événements dans l'intervalle $[s,t]$ est de loi de Poisson de moyenne $N(C+\bar{q})$. Ainsi les événements peuvent être rangés par ordre d'arrivée.

Au temps s la configuration est ξ. On procède alors événement par événement :

La configuration reste inchangée entre chaque événement.

À chaque temps de régénération a^i_n, la particule i saute sur la particule A^i_n, quelle que soit la configuration.

Si lors du temps interne b^i_n, la particule est à l'état x, alors elle saute sur l'état $B^i_n(x))$, quelle que soit la configuration.

Si au temps de vote c^i_n, la particule i est à l'état x et $F^i_n(x)=1$, alors elle saute sur l'état de la particule C^i_n ; si $F^i_n(x)=0$, alors la particule i reste en x.

La configuration obtenu après avoir utilisé tous les événements contenus dans $[s,t]$ est $\xi^{N,\xi}_{[s,t]}$.

Nous obtenons ainsi le processus recherché :

Lemme 3.1 *Pour tout $s\in\mathbf{R}$, le processus $(\xi^{N,\xi}_{[s,t]},t\geq s)$ est markovien de générateur (12) et de condition initiale $\xi^{N,\xi}_{[s,s]}=\xi$.*

3.2.2 Convergence du processus de Fleming-Viot

Nous avons le résultat suivant :

Théorème 3.5 *Si $\alpha>0$, alors, pour chaque N, le processus de Fleming-Viot à N particules est ergodique.*

La loi du processus Z_t de distribution initiale μ et conditionné à la non-absorption avant le temps t est donnée par

$$\varphi_t^\mu(x) = \frac{\sum_{y\in\Lambda}\mu(y)P_t(y,x)}{1-\sum_{y\in\Lambda}\mu(y)P_t(y,0)}, x\in\Lambda. \tag{14}$$

L'un des principaux résultats est le suivant, similaire au théorème 3.3 dans le cadre continu :

Théorème 3.6 *Soit μ une probabilité sur Λ. Nous avons, pour tout $t>0$ et $x\in\Lambda$,*

$$\lim_{N\to\infty}\mathbb{E}\left(\frac{\eta_t^{N,\mu}}{N}-\varphi_t^\mu(x)\right)^2=0. \tag{15}$$

Enfin, on obtient :

Théorème 3.7 *Supposons que $\alpha > C$, alors il existe une probabilité ν sur Λ telle que pour tout $x\in\Lambda$,*

$$\lim_{N\to\infty}\mathbb{E}\left(\frac{\eta^N(x)}{N}-\nu(x)\right)^2=0.$$

De plus, ν est l'unique mesure quasi-stationnaire pour la chaîne Q.

4 Conclusion

La structure générale du problème peut être résumée par le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{X}_t^N \arrow[r, "(1)\ N\to\infty"] \arrow[d, "(2)\ t\to+\infty"'] & \mu_t \arrow[d, "(3)\ t\to+\infty"] \\
\mathbf{M}^N \arrow[r, "(4)\ N\to\infty"'] & \text{DQS}
\end{tikzcd}$$

où l'on a noté $\mathcal{X}_t^N$ la mesure empirique du processus de Fleming-Viot, $\mathbf{M}^N$ sa mesure invariante et μ_t la distribution du processus étudié conditionné à sa non-absorption.

Dans le cadre discret, l'existence d'un mesure quasi-stationnaire pour le processus de Fleming-Viot est très générale, ainsi que les convergences (1) et (2). La limite (4) est établie dans un cadre restreint mais permet alors de montrer l'existence d'une DQS. D'une manière générale, la condition sous laquelle le processus de Fleming-Viot converge vers une DQS semble être une condition sur la corrélation maximale des N particules le constituant ; cette piste nous permettra de trouver de nouvelles conditions sous-laquelle (4) a lieu, que l'existence d'une DQS soit connue ou non, puisque l'on montre en passant la convergence (3).

Dans le cadre continu, le problème est plus complexe. Pour le cas spécifique du mouvement brownien tué à la frontière d'un ouvert borné de $\mathbf{R}^d$, les quatres types de convergence ont été ibtenu, avec des résultats plus fins, notamment l'estimation du nombre de sauts des particules dans le processus de Fleming-Viot, et la convergence dans la topologie de Skorokhod des processus à valeur mesure concernés. Nous espérons, avec Sylvie Méléard, généraliser ses démonstrations à d'autres processus plus complexes, généralement décrits par des équations différentielles stochastiques, qui peuvent résulter du passage à la limite d'équations (à états discret) vérifiées par des poupulations d'organismes vivant.

En définitive, les valeurs numériques des DQS sont essentielles pour les applications, mais l'on ne peut que très rarement les obtenir par des méthodes de théorie spectrale (leur existence même est un problème qui n'est résolu que dans de rares cas). La facilité avec laquelle l'algoritme sous-jacent aux processus de Fleming-Viot peut être implémenté laisse espérer, en plus de résultats complètement nouveaux d'un point de vue théorique, l'accès aux valeurs numériques des DQS pour de très nombreux processus. Le but de cette thèse, encadrée par Sylvie Méléard, sera donc d'explorer en détail et dans la plus grande généralité possible les liens entre processus de Fleming-Viot et distributions quasi-stationnaires.

Références

[1] K.B. Athreya, P.E. Ney (1972) *Branching Processes*, Springer Verlag, Berlin.

[2] K. Burdzy, R. Holyst, D. Ingerman, P. March (1996) Configurational transition in a Fleming-Viot-type model and probabilistic interpretation of Laplacian eigenfunctions, *J. Phys. A* **29**, 2633-2642.

[3] K. Burdzy, R. Holyst, P. March (2000) A Fleming-Viot representation of the Dirichlet Laplacian, *Comm. Math. Phys.* **214**, 679-703.

[4] P. Cattiaux, P. Collet, A. Lambert, S. Martinez, S. Méléard, J. San Martin (2007) Quasi-stationarity distributions and diffusion models in population dynamics, Preprint.

[5] J.A. Cavender (1978) Quasi-stationary distributions of birth and death processes, *Adv. Appl. Prob* **10**, 570-586.

[6] J.N. Darroch, E. Seneta (1967) On quasi-stationnary distributions in absorbing continuous-time finite markov chains, *J. Appl. Prob.* **4**, 192-196.

[7] S.N. Ethier, T.G. Kurtz (1986) *Markov Processes, Characterization And Convegence*, Wiley series in probability and mathematical statistics.

[8] P.A. Ferrari, N. Mariȁ (2006) Quasi stationary distributions and Fleming-Viot processes in countable spaces, *arXiv :math/0605665*, eprint.

[9] P.A. Ferrari, H. Kesten, S. Martìnez, P. Picco (1995) Existence of quasi stationary distributions. A renewal dynamical approach, *Ann. Probab.* **23**, 2 :511-521.

[10] I. Grigorescu, M. Kang (2004) Hydrodynamic limit for a Fleming-Viot type system, *Stochastic Processes and their Applications* **110**, 111-143.

[11] S.D. Jacka, G.O. Roberts (1995) Weak convergence of conditionned processes on countable space, *J. Appl. Prob.* **32**, 902-916.

[12] K. Taira (1988) *Diffusion Processes and Partial Differential Equations*, Academic Press.

[13] D. Steinsaltz, S.N. Evans (2004) Markov mortality models : implications of quasistationarity and varying initial distributions, *Theo. Pop. Bio.* **65**, 319-337.