Formes modulaires et formule des traces

Menglin WANG, Charles VALENTIN et Quentin GUIGNARD

Exposé de première année

Table des matières

1 Introduction

Les formes modulaires sont une classe de fonctions analytiques définies sur le demi-plan de Poincaré $\mathbb{H}$, vérifiant certaines équations fonctionnelles, liées à l'action de $SL_2(\mathbb{Z})$ sur $\mathbb{H}$:

$$\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, z\right) \to \frac{az+b}{cz+d}$$

Comme souvent en analyse complexe, les formes modulaires ont un comportement assez "rigide", c'est-à-dire qu'une faible quantité d'informations est parfois suffisante pour prouver des égalités entre fonctions. Une manifestation cruciale - pour cet exposé - de ce phénomène sera la finitude des dimensions des divers espaces de formes modulaires.
Les premières formes modulaires apparaissent avec l'étude des fonctions elliptiques. En effet, si $\wp_\tau$ désigne la fonction elliptique de Weierstrass 1-périodique et τ-périodique, avec $\tau \in \mathbb{H}$, alors $\wp_\tau$ vérifie l'équation différentielle

$$\wp_\tau'(z)^2 = 4\wp_\tau(z)^3 - g_2(\tau)\wp_\tau(z) - g_3(\tau)$$

Les fonctions g_2, g_3 ainsi obtenues sont des exemples de formes modulaires.
La fonction

$$\Delta(z) = q\prod_{n\geq 1}(1-q^n)^{24} = \sum_{n=0}^{\infty}\tau(n)q^n$$

où $q = e^{2i\pi z}$, est également une forme modulaire, initialement apparue dans un contexte arithmétique, celui de la théorie des partitions. Les coefficients $\tau(n)$ ont une propriété remarquable, conjecturée par Srinivasa Ramanujan : si m et n sont premiers entre eux, alors $\tau(mn) = \tau(m)\tau(n)$. Elle fut démontrée par Louis Mordell en 1917. La démonstration utilise les opérateurs de Hecke, une suite d'opérateurs agissant sur les formes modulaires. Erich Hecke étudia en détail ces opérateurs dans les années 1930.
Plus récemment, des liens étroits entre formes modulaires et courbes elliptiques ont été mis en évidence. On peut notamment citer la démonstration du dernier théorème de Fermat par Andrew Wiles. Elle résulte de la preuve d'une partie de la conjecture dite de Shimura-Taniyama-Weil, maintenant appelé théorème de modularité, qui établit un lien entre certaines formes modulaires et les courbes elliptiques sur $\mathbb{Q}$.
L'étude des formes modulaires a donc de nombreux liens avec différents domaines des mathématiques, principalement la théorie des nombres.

Dans cette exposé, nous définirons les espaces M_k^0 des formes paraboliques de poids $2k$, ainsi que les opérateurs de Hecke $T(N)$ qui agissent sur ces espaces. Notre objectif est de donner une démonstration, due à Don Zagier [5], d'une formule permettant de calculer la trace des opérateurs de Hecke :

$$\mathrm{Tr}(T(N)|M_k^0) = -\frac{1}{2}\sum_{t\in\mathbb{Z}} p_k(t,N)\tilde{H}(t^2-4N) - \frac{1}{2}\sum_{d|N}\min\left(d, \frac{N}{d}\right)^{2k-1}$$

Les fonctions p_k et $\tilde{H}$ seront définies plus tard, notons simplement que $\tilde{H}(t^2-4N) = 0$ si $t^2 - 4N > 0$, de sorte que la première somme est finie, et que p_k et $\tilde{H}$ sont effectivement calculables, ce qui rend donc cette formule exploitable.
Cette formule est similaire à la formule des traces de Selberg et à la formule des traces d'Arthur-Selberg, qui donnent la trace de certains opérateurs intégraux. Ces mêmes formules peuvent être vues comme une généralisation de la réciprocité de Frobenius, liant les représentations d'un groupe aux représentations d'un de ses sous-groupes. Toutes ces formules peuvent être vu comme des généralisations non-commutatives de la formule sommatoire de

Poisson, qui affirme que
$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \hat{f}(m)$$
où f désigne une fonction dans la classe de Schwartz, et $\hat{f}$ sa transformée de Fourier. Cette formule fait clairement apparaître un lien entre une quantité géométrique et une quantité spectrale, à l'instar des différentes formules des traces. La démonstration donnée par Don Zagier pour les opérateurs de Hecke sur $SL_2(\mathbb{Z})$ présente l'avantage de n'utiliser que des outils élémentaires.
Nous commencerons d'abord par présenter les définitions générales et les premiers résultats sur les formes modulaires, et nous donnerons également quelques exemples. Nous introduirons ensuite les opérateurs de Hecke et leur action sur les formes modulaires, en adoptant un point de vue général, celui de la théorie des représentations. Enfin, nous exposerons en détail la démonstration de la formule des traces par Don Zagier, de sorte que celle-ci puisse être lue - presque - sans prérequis.

2 Le groupe modulaire et son action sur le demi-plan de Poincaré

2.1 Premières définitions

Le contenu de cette partie introductive provient en partie de [4]. On note $\mathbb{H}$ le demi-plan supérieur du plan complexe $\mathbb{C}$, c'est-à-dire l'ensemble des nombres complexes de partie imaginaire strictement positive, appelé demi-plan de Poincaré.
On considère le groupe $SL_2(\mathbb{R})$ formé des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels et de déterminant 1.
On fait agir $SL_2(\mathbb{R})$ sur $\overline{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ de la manière suivante : Soit $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ un élément de $SL_2(\mathbb{R})$ et z un élément de $\overline{\mathbb{C}}$. On pose
$$\gamma z = \frac{az+b}{cz+d}$$
La formule $\mathfrak{Im}(\gamma z) = \frac{\mathfrak{Im}(z)}{|cz+d|^2}$ montre que $\mathbb{H}$ est stable par l'action de $SL_2(\mathbb{R})$. De plus, $-\mathrm{Id}$ agit trivialement ; on peut donc considérer l'action de $PSL_2(\mathbb{R}) := SL_2(\mathbb{R})/\{\pm 1\}$ sur $\mathbb{H}$. Il se trouve qu'il s'agit précisément du groupe des automorphismes analytiques de $\mathbb{H}$.
Soit $SL_2(\mathbb{Z})$ le sous-groupe de $SL_2(\mathbb{R})$ formé des matrices à coefficients dans $\mathbb{Z}$.

Définition 2.1
On appelle groupe modulaire le groupe $\Gamma := SL_2(\mathbb{Z})/\{\pm 1\}$.

On notera le plus souvent de la même manière un élément de $SL_2(\mathbb{Z})$ et son image dans Γ.

2.2 Domaine fondamental.

Soit S et T les classes dans Γ des matrices $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ respectivement, c'est-à-dire $Sz = -1/z$ et $Tz = z+1$. On a les relations suivantes : $S^2 = Id$ et $(ST)^3 = Id$.
Soit F_Γ la partie de $\mathbb{H}$ formée des points z tels que $|z| \geq 1$ et $|\mathfrak{Re}(z)| \leq 1/2$. On a le théorème suivant :

Théorème 2.2 *(i) Tout élément de $\mathbb{H}$ est congru à un élément de F_Γ modulo Γ.*
(ii) Si deux points distincts z, z' de F_Γ sont congrus modulo Γ, alors ou bien $\mathfrak{Re}(z) = \pm 1/2$ et alors $z' = z \pm 1$; ou bien $|\mathfrak{Re}(z)| < 1/2$, auquel cas $|z| = 1$ et $z' = -1/z$.

(iii) Soit z un point de F_Γ, et soit Γ_z le stabilisateur de z dans Γ. Alors Γ_z est trivial sauf dans les cas suivants :
-Si $z = i$, alors Γ_z est le groupe d'ordre 2 engendré par S ;
-Si $z = \rho = e^{2i\pi/3}$, alors Γ_z est le groupe d'ordre 3 engendré par ST ;
-Si $z = -\bar{\rho} = e^{i\pi/3}$, alors Γ_z est le groupe d'ordre 3 engendré par TS.

Démonstration.
Soit Γ' le sous-groupe de Γ engendré par S et T, et soit z un élément de $\mathbb{H}$. On va montrer que z est congru modulo Γ' à un élément de F_Γ, ce qui prouvera le point (i).
Si la matrice $= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ représente un élément γ de Γ, on a $\mathfrak{Im}(\gamma z) = \frac{\mathfrak{Im}(z)}{|cz+d|^2}$. Soit M un réel positif. Si la paire (c,d) est dans l'ensemble $\{(c,d) \in \mathbb{Z}^2 || cz+d| \leq M\}$, alors $|c|\mathfrak{Im} z \leq |cz+d| \leq M$ et $|d| \leq M + |cz|$, de sorte qu'il n'y a qu'un nombre fini de possibilités pour les entiers c et d : l'ensemble $\{(c,d) \in \mathbb{Z}^2 |\ |cz+d| \leq M\}$ est donc fini. Ainsi, l'ensemble des quantités $\mathfrak{Im}\gamma z$ lorsque γ parcourt les éléments de Γ' tels que $\mathfrak{Im}\gamma z \leq \mathfrak{Im} z + 1$ est un ensemble fini. On peut donc choisir un élément γ de Γ' pour lequel $\mathfrak{Im}\gamma z$ est minimal. On peut ensuite appliquer T^n pour un certain entier relatif n, de sorte que $T^n \gamma z$ soit de partie réelle comprise entre $\frac{-1}{2}$ et $\frac{1}{2}$. L'élément $z' = T^n \gamma z$ est alors dans F_Γ : en effet, si $|z'| < 1$ alors, du fait de l'identité $\mathfrak{Im}(Sz') = \frac{\mathfrak{Im}(z')}{|z'|^2}$, le nombre complexe Sz' serait de partie imaginaire strictement supérieure à z', contredisant la définition de γ. On a donc bien $|z'| \geq 1$, de sorte que z' est dans F_Γ, ce qui démontre le point (i).
Montrons maintenant les points (ii) et (iii). Soit z un point de F_Γ, et soit $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice représentant un élément γ de Γ tel que γz soit dans F_Γ. Quitte à remplacer (z, γ) par $(\gamma z, \gamma^{-1})$, on peut supposer que $\mathfrak{Im}(\gamma z) \geq \mathfrak{Im}(z)$, ce qui implique $|cz+d| \leq 1$. En élevant au carré, cela donne

$$1 \geq |z|^2 c^2 + d^2 + 2cd\mathfrak{Re}(z) \geq c^2 + d^2 - |cd| = (c - sgn(cd)d)^2 + |cd| \geq |cd| \qquad (1)$$

Cette dernière égalité est impossible si $|c|, |d| > 1$, puisqu'alors $|cd| > 1$, ce qui laisse donc 0, 1, et -1 comme valeurs possibles pour c et d.
- Si $c = 0$, alors $d = 0$ est impossible car γ est inversible. On a alors $\gamma = \pm T^b$. Les parties réelles de z et γz étant comprises entre $-\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2}$, on a soit $b = 0$ et donc $\gamma = 1$, soit $b = \pm 1$ et alors z et $\gamma z = z \pm 1$ sont de parties réelles $\pm\frac{1}{2}$.
- Si $c = 1$ et $d = 0$, alors l'inégalité précédente donne $|z| \leq 1$ mais z est dans F_Γ, donc $|z| = 1$. La relation $\det \gamma = 1$ implique $b = -1$, de sorte que l'on a pour tout $\tau \in \mathbb{H}$ la relation $\gamma\tau = a - \frac{1}{\tau} = T^a S\tau$.
Puisque γz est dans F_Γ, on a $a = 0$, à moins que $\mathfrak{Re}(z) = -\mathfrak{Re}(-\frac{1}{z}) = \pm\frac{1}{2}$. Ajouté à la condition $|z| = 1$, cela donne $z = \rho$ ou $z = -\bar{\rho}$, avec comme possibilité pour a respectivement 0 ou -1 et 0 ou 1.
-Si $c = 1$ et $d = 1$, alors la suite d'inégalités (1) donne $|z+1| = 1$, ce qui n'est possible que si $z = \rho$. $det\, \gamma = 1$ donne $a - b = 1$, donc $\gamma\rho = a - \frac{1}{1+\rho} = a + \rho$ donc $a = 0$ ou 1.
-Si $c = 1$ et $d = -1$, on trouve de la même manière que $z = -\bar{\rho}$, et $a = 0$ ou $a = -1$.
-Si $c = -1$, on change tous les signes de a, b, c, d, ce qui n'altère pas γ, et on applique les résultats précédents.
On a ainsi montré les points (ii) et (iii).

Les deux premiers points du théorème 2.2 impliquent le corollaire suivant :

Corollaire 2.3 La projection canonique de F_Γ dans $\Gamma\backslash\mathbb{H}$ est surjective, et sa restriction à l'intérieur de F_Γ est injective.

On a également :

Théorème 2.4 *Le groupe modulaire Γ est engendré par S et T.*

Démonstration.
Considérons à nouveau le sous-groupe Γ' de Γ engendré par S et T. Soit γ un élément de Γ, et z un point de l'intérieur de F_Γ, dont le stabilisateur dans Γ est trivial, par exemple $2i$. On a prouvé

au cours de la démonstration du théorème 2.2 que l'on peut trouver un élément γ' de Γ' tel que $\gamma'\gamma z$ soit dans F_Γ. Comme z est dans l'intérieur de F_Γ, ceci implique que $\gamma'\gamma z = z$, puis $\gamma'\gamma = 1$, de sorte que γ appartient à Γ'.

2.3 Les fonctions modulaires

Une action de Γ sur $\mathbb{H}$ a été définie. De manière générale, l'adjectif *modularité* se rapporte à l'invariance pour cette action.

Définition 2.5
Soit k un entier relatif. Une fonction $f : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{C}$ est dite faiblement modulaire de poids $2k$ si f est méromorphe sur $\mathbb{H}$ et vérifie, pour tout $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$, la relation :

$$f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = (cz+d)^{2k} f(z) \tag{2}$$

Si une fonction f vérifie la relation (2) pour deux matrices $M, N \in SL_2(\mathbb{Z})$, pour tout $z \in \mathbb{H}$, alors un calcul direct montre que f vérifie la relation (2) pour le produit MN. Comme S et T engendrent Γ, on a directement la proposition suivante :

Proposition 2.6
Soit f une fonction méromorphe sur $\mathbb{H}$. Alors f est faiblement modulaire de poids $2k$ si et seulement si elle vérifie les deux relations :

$$f(z+1) = f(z) \tag{3}$$
$$f(-1/z) = z^{2k} f(z) \tag{4}$$

Si la première de ces relations est vérifiée, la fonction f se factorise à travers le cylindre $\langle T\rangle\backslash\mathbb{H}$. L'isomorphisme entre $\langle T\rangle\backslash\mathbb{H}$ et le disque unité épointé de 0 donné par $z \longmapsto e^{2i\pi z}$, garantit alors l'existence d'une unique fonction méromorphe $\tilde{f}$ sur le disque unité épointé de 0 telle que $f(z) = \tilde{f}(e^{2i\pi z})$. Si $\tilde{f}$ se prolonge de manière méromorphe (respectivement holomorphe) à l'origine, on dit que f est méromorphe (respectivement holomorphe) à l'infini.

Définition 2.7
Une fonction faiblement modulaire est dite modulaire si elle est méromorphe à l'infini.

Définition 2.8
Une fonction modulaire holomorphe en tout point, y compris à l'infini, est appelée forme modulaire. Si elle s'annule à l'infini, elle est appelée forme parabolique.
On note M_k le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des formes modulaires de poids $2k$, et M_k^0 celui des formes paraboliques de poids $2k$.

Si f est une forme modulaire, on pose $f(\infty) = \tilde{f}(0)$. Si l'on pose $q = e^{2i\pi z}$, suivant ainsi une tradition bien établie, une forme modulaire de poids $2k$ est donnée par une série

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n q^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{2i\pi nz}$$

qui converge pour tout $|q| < 1$, c'est-à-dire pour tout z de partie imaginaire > 0, et qui vérifie l'identité $f(-\frac{1}{z}) = z^{2k} f(z)$. C'est une forme parabolique si, de plus, $a_0 = 0$. Dans ce cas, on dispose donc de l'estimation $f(z) = O(q) = O(e^{-2\pi y})$ lorsque $y \longrightarrow +\infty$.
Soit maintenant f et g deux formes paraboliques de même poids $2k$. La propriété de décroissance de f et g que nous venons de mentionner permet de définir le *produit scalaire*

hermitien de Petersson de f et g comme suit :

$$\langle f|g\rangle = \int_{F_\Gamma} \overline{f(z)}g(z)(\mathfrak{Im} z)^{2k}\mathrm{d}\mu$$

où on a posé $\mathrm{d}\mu = \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{y^2}$. La mesure μ est appelée mesure hyperbolique, et vérifie $\gamma^\star \mathrm{d}\mu = \mathrm{d}\mu$ pour tout $\gamma \in \Gamma$. On vérifie par ailleurs que la forme différentielle

$$\overline{f(z)}g(z)(\mathfrak{Im} z)^{2k}\mathrm{d}\mu$$

est invariante sous l'action de Γ, de sorte que l'intégrale sur le domaine fondamental F_Γ ci-dessus pourrait être interprétée comme une intégrale sur une hypothétique variété quotient $\Gamma\backslash\mathbb{H}$, ce que nous ne ferons pas ; cela motive cependant l'introduction du produit scalaire de Petersson.

2.4 Exemples de fonctions modulaires : les séries d'Eisenstein.

Dans cette section, on se propose de donner des exemples de formes modulaires. On peut définir, pour k un entier ≥ 2, la fonction sur $\mathbb{H}$ donnée par

$$G_k : z \longmapsto \sum_{\substack{m,n\in\mathbb{Z} \\ (m,n)\neq(0,0)}} \frac{1}{(mz+n)^{2k}}$$

La condition $k \geq 2$ assure la convergence absolue de cette série. La fonction G_k est appelée *série d'Eisenstein* de degré $2k$.

Proposition 2.9
La série d'Eisenstein G_k est une forme modulaire de poids $2k$, et sa valeur en l'infini est $2\zeta(2k)$.

Démonstration.
Soit z un élément du domaine fondamental F_Γ. L'inégalité (1) donne $|mz+n|^2 \geq |m\rho - n|^2$ ou $|mz+n|^2 \geq |m\bar{\rho}+n|^2$, suivant le signe de mn. Les séries $\sum 1/|m\rho - n|^{2k}$ et $\sum 1/|m\bar{\rho}+n|^{2k}$ convergent car $k \geq 2$. On a donc convergence uniforme de G_k sur F_Γ, et donc sur un voisinage de F_Γ en appliquant le résultat à $G_k(\gamma z)$ pour un nombre fini de $\gamma \in \Gamma$: la fonction G_k est donc holomorphe sur un voisinage W de F_Γ. Puisque les γW pour $\gamma \in \Gamma$ recouvrent $\mathbb{H}$, on obtient que G_k est holomorphe sur $\mathbb{H}$ tout entier. La modularité de G_k se vérifie aisément à l'aide de la proposition 2.6. Il reste à vérifier qu'elle est holomorphe à l'infini, et à calculer $G_k(\infty)$.
On cherche donc la limite de G_k quand $\mathfrak{Im}(z) \to \infty$, l'invariance de G_k par $z \to z+1$ permet de se ramener au cas où z reste dans F_Γ. La convergence uniforme dans F_Γ permet alors de prendre la limite terme à terme. Si $m \neq 0$, le terme $\frac{1}{(mz+n)^{2k}}$ tend vers 0 ; si $m = 0$, il tend vers $\frac{1}{n^{2k}}$. On a donc

$$\lim_{\mathfrak{Im}(z)\to\infty} G_k(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}\backslash\{0\}} \frac{1}{n^{2k}} = 2\zeta(2k)$$

ce qui termine la preuve.

Les valeurs de $\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$ et $\zeta(6) = \frac{\pi^6}{945}$ montrent que la fonction $\Delta := 21600G_2^3 - 529200G_3^2$ vérifie $\Delta(\infty) = 0$, c'est-à-dire que Δ est une forme parabolique de poids 12. Le choix des coefficients 21600 et 529200 s'explique par trois raisons : d'une part la volonté de créer un zéro à l'infini, d'autre part le fait que la fonction Δ ainsi définie est *normalisée* à l'infini, dans le sens où son premier coefficient dans son développement en $q = e^{2i\pi z}$ vaut 1, et enfin par le fait que c'est bien la fonction Δ qui apparaît naturellement en arithmétique.

3 L'espace des formes modulaires

3.1 Zéros et pôles d'une fonction modulaire

Dans cette section, on énonce une formule reliant les zéros et les pôles d'une fonction modulaire, ce qui nous permettra ensuite de déterminer la structure des espaces M_k et M_k^0, notamment la finitude de leur dimension.
Soit f une fonction méromorphe non identiquement nulle sur $\mathbb{H}$, et soit p un point de $\mathbb{H}$. L'unique entier n tel que $f/(z-p)^n$ soit holomorphe et non nulle en p s'appelle l'ordre de f en p, et se note $v_p(f)$.
Si f est une fonction modulaire de poids $2k$, l'identité $f(\gamma z) = (cz+d)^{2k} f(z)$ montre que $v_p(f) = v_{\gamma p}(f)$ pour tous $\gamma \in \Gamma$ et $p \in \mathbb{H}$. L'entier $v_p(f)$ ne dépend donc que de l'image de p dans $\Gamma\backslash\mathbb{H}$. On note également $v_\infty(f)$ l'ordre de $\tilde{f}$ en 0. On désigne par e_p le cardinal du stabilisateur de p, c'est-à-dire $e_p = 1$ sauf si p est congru à i ou à ρ, auquel cas e_p est respectivement égal à 2 et 3.

Théorème 3.1 *Soit f une fonction modulaire de poids $2k$, non identiquement nulle. On a alors la formule suivante :*

$$v_\infty(f) + \sum_{p \in \Gamma\backslash\mathbb{H}} \frac{1}{e_p} v_p(f) = \frac{k}{6}$$

Ce qui se réécrit :

$$v_\infty(f) + \frac{1}{2} v_i(f) + \frac{1}{3} v_\rho(f) + \sum_{\substack{p \in \Gamma\backslash\mathbb{H} \\ p \neq i, \rho}} v_p(f) = \frac{k}{6}$$

Démonstration.
Nous renvoyons le lecteur à [4]. La démonstration, légèrement technique, consiste à intégrer la forme différentielle $\frac{\mathrm{d}f}{f}$ sur le bord de F_Γ : cette idée n'est pas sans rappeler la formule de Stokes.

3.2 L'algèbre des formes modulaires.

Par définition, l'espace M_k^0 est le noyau de l'application linéaire $f \to f(\infty)$ sur M_k, donc $\dim M_k/M_k^0 \leq 1$. De plus, pour $k \geq 2$, la série d'Eisenstein G_k est un élément de M_k et vérifie $G_k(\infty) \neq 0$, on a donc pour $k \geq 2$,

$$M_k = M_k^0 \oplus \mathbb{C}.G_k$$

Finalement, Δ est un élément de M_6^0. Le théorème suivant donne la structure des espaces M_k et M_k^0.

Théorème 3.2 *(i) Si $k < 0$ ou $k = 1$, alors $M_k = 0$.*
(ii) Pour $k = 0, 2, 3, 4, 5$, M_k est de dimension 1, engendré respectivement par 1,G_2, G_3, G_4, G_5, et $M_k^0 = 0$.
(iii) La multiplication par Δ est un isomorphisme de M_{k-6} sur M_k^0.

Démonstration.
Soit f un élément non nul de M_k. Par définition, f est holomorphe, donc l'ordre de f en tout point est positif. La formule

$$v_\infty(f) + \frac{1}{2} v_i(f) + \frac{1}{3} v_\rho(f) + \sum_{p \in \mathbb{H}/\Gamma, p \neq i, \rho} v_p(f) = \frac{k}{6}$$

donne donc que k est positif. De plus, $k = 1$ est impossible car $\frac{1}{6}$ ne peut pas se mettre sous la forme $n_1 + \frac{n_2}{2} + \frac{n_3}{3}$. Cela prouve le point (i). On applique maintenant l'égalité précédente au cas $k = 2$, $f = G_2$. L'unique façon de décomposer $\frac{2}{6}$ sous la forme $n_1 + \frac{n_2}{2} + \frac{n_3}{3}$ est $n_1 = 0$, $n_2 = 0$, $n_3 = 1$.

G_2 a donc comme unique zéro ρ modulo Γ. Le même argument appliqué à G_3 donne que l'unique zéro de G_3 modulo Γ est i. Ceci permet également de prouver que Δ ne s'annule pas en i, donc Δ n'est pas identiquement nul. On peut donc une fois de plus appliquer la formule du théorème 2 à Δ, qui est de poids 12. Comme Δ a un zéro d'ordre au moins 1 à l'infini, on en déduit que c'est son unique zéro et qu'il est exactement d'ordre 1.
Si f est un élément de M_k^0, alors $g := f/\Delta$ est de poids $2k-12$. L'unique zéro simple de Δ à l'infini est compensé par f, donc g est holomorphe : c'est un élément de M_{k-6}, ce qui prouve le point (iii). Finalement, si $k \leq 5$, alors $k-6<0$, donc $M_k^0 = 0$ d'après les points (i) et (iii). Cela montre que $\dim M_k \leq 1$, mais 1, G_2, G_3, G_4, G_5 sont des éléments non nuls de M_0, M_2, M_3, M_4, M_5, ce qui achève la démonstration.

On déduit de ce théorème les deux corollaires suivants :

Corollaire 3.3 Soit k un entier positif. Si $k \equiv 1 \pmod 6$, alors $\dim M_k = [k/6]$. Sinon, $\dim M_k = [k/6]+1$.

Corollaire 3.4 La famille des monômes $G_2^a G_3^b$, où a, b sont des entiers positifs tels que $2a+3b=k$, est une base de l'espace vectoriel M_k.

Démonstration.
Le premier corollaire se vérifie numériquement pour $k \leq 5$ à l'aide des points (i) et (ii) du théorème 3.2, et le résultat s'étend alors par récurrence à l'aide point (iii) du théorème 3.2
Pour le deuxième corollaire, montrons d'abord que ces monômes engendrent M_k. Pour $k \leq 3$, cela découle du théorème. Pour $k \geq 4$, on raisonne par récurrence. On choisit une paire d'entiers ≥ 0 (c,d) telle que $2c+3d=k$, ce qui est possible pour tout $k \geq 2$. La forme modulaire $g := G_2^c G_3^d$ est non nulle à l'infini. Soit $f \in M_k$. Il existe un complexe λ tel que $f - \lambda g$ soit une forme parabolique, donc de la forme Δh pour un h dans M_k^0. On applique alors l'hypothèse de récurrence à h.
De plus, pour $0 \leq k \leq 5$, le nombre de couples (a,b) solution de $2a+3b=k$ est égal à la dimension de M_k. Pour k quelconque, si (a,b) est solution de $2a+3b=k$, alors $(a,b+2)$ est solution de $2a'+3b'=k+6$. Toutes les solutions de $2a'+3b'=k+6$ sont de la forme $(a,b+2)$ avec $a,b \geq 0$ sauf une, $(\frac{k+3}{2},1)$ ou $(\frac{k+6}{2},0)$ suivant la parité de k. Le nombre de monômes $G_2^a G_3^b$ considéré est donc bien égal à la dimension de M_k, la famille étant génératrice, c'est bien une base.

Le point important, et qui se révélera crucial dans la suite est la finitude des dimensions des espaces vectoriels M_k et M_k^0.

4 Algèbres et opérateurs de Hecke

4.1 Motivation

Nous avons défini dans les sections précédentes les fonctions modulaires comme les invariants d'une certaine action de Γ sur l'espace des fonctions $\mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{C}$: plus précisément, cette action était donnée par

$$\gamma : f \longmapsto f|_k\gamma = \big(z \in \mathbb{H} \longmapsto j(\gamma,z)^{-2k} f(\gamma z)\big)$$

où $j(\gamma,z) = cz+d$ si (c,d) est la deuxième ligne de γ. On se propose dans cette partie de construire des endomorphismes de M_k et M_k^0 à partir de cette action.
Pour fixer les idées, considérons l'espace M_k. Par construction, les opérateurs $(.|_k\gamma)$ avec $\gamma \in \Gamma$ agissent trivialement sur cet espace. Une première famille de transformations à envisager serait de considérer l'action de $(.|_k\gamma)$ pour γ en dehors de Γ. Soit donc $\gamma \in PSL_2(\mathbb{Q})$. On se donne $f \in M_k$ et on cherche une condition suffisante pour avoir $f|_k\gamma \in M_k$. Pour $\gamma_0 \in \Gamma$, on calcule

$$(f|_k\gamma)|_k\gamma_0 = f|_k\gamma\gamma_0$$

Puisque f est modulaire, une condition suffisante pour que $f|_k\gamma$ soit stabilisée par γ_0 est donc l'existence de $\gamma_1 \in \Gamma$ tel que $\gamma_1\gamma\gamma_0 = \gamma$. Autrement dit, pour avoir $f|_k\gamma \in M_k$ il suffit que l'élément γ vérifie $\gamma\Gamma = \Gamma\gamma$, c'est-à-dire $\gamma \in N_{PSL_2(\mathbb{Q})}(\Gamma)$. Le lemme qui suit montre que ce résultat n'est pas particulièrement encourageant.

Lemme 4.1 *Le normalisateur de Γ dans $PSL_2(\mathbb{Q})$ est réduit à Γ.*

Démonstration.
Soit

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

un représentant d'un élément γ de $N_{PSL_2(\mathbb{Q})}(\Gamma)$. On calcule alors

$$M^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} M = \begin{pmatrix} \star & d^2 \\ -c^2 & \star \end{pmatrix}$$
$$M^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} M = \begin{pmatrix} \star & -b^2 \\ a^2 & \star \end{pmatrix}$$

Donc a^2, b^2, c^2 et d^2 sont des entiers. Puisque a, b, c et d sont des rationnels de carrés entiers, ce sont des entiers, de sorte que γ est dans Γ.

Considérer l'action individuelle d'un opérateur $(.|_k\gamma)$ est donc peu satisfaisant. Une généralisation naturelle de l'idée précédente consisterait en l'étude d'opérateurs de la forme

$$T = \sum_{\gamma} c_\gamma (.|_k \gamma)$$

Pour pouvoir donner une condition suffisante pour que T agisse sur M_k, il nous faut comme précédemment comprendre comment les éléments de Γ permutent - en agissant à droite - les différents éléments de $\Gamma \backslash PSL_2(\mathbb{Q})$: il s'agit précisément du rôle de l'algèbre de Hecke.

4.2 Algèbre de Hecke d'un groupe par rapport à un sous-groupe

Dans toute cette section, G désignera un groupe, H un sous-groupe de G, et A un anneau commutatif unitaire.

Définition 4.2
• *Une application $\phi : G \longrightarrow A$ est dite H-invariante à gauche (respectivement H-invariante à droite) si elle vérifie pour tous $g \in G$, $h \in H$ la relation $\phi(hg) = \phi(g)$ (respectivement $\phi(gh) = \phi(g)$).*
• *Une application $\phi : G \longrightarrow A$ qui est H-invariante à gauche et à droite est dite H-bi-invariante.*
• *On note $\mathcal{H}_A(G, H)$ l'ensemble des fonctions H-bi-invariantes $\phi : G \longrightarrow A$ telles que les applications induites $H\backslash G \longrightarrow A$ et $G/H \longrightarrow A$ sont à supports finis.*

Notons que l'ensemble $\mathcal{H}_A(G, H)$ est naturellement muni d'une structure de A-module. Si G est fini, il s'agit d'un A-module libre dont le rang est le nombre de doubles classes de H dans G, c'est à dire le cardinal de $H\backslash G/H$. Nous cherchons à munir $\mathcal{H}_A(G, H)$ d'une structure d'anneau - et donc de A-algèbre. Si G est fini, l'espace des fonctions $G \longrightarrow A$ possède un produit naturel, à savoir le produit de convolution

$$\phi \bullet \psi(g) = \sum_{t \in G} \phi(gt^{-1})\psi(t)$$

Dans le cas où ϕ est H-invariant à droite et ψ H-invariant à gauche, cette somme se simplifie en

$$\phi \bullet \psi(g) = |H| \sum_{t \in H\backslash G} \phi(gt^{-1})\psi(t)$$

ce qui suggère une définition plus générale dans le cas où ψ induit une application à support fini $H\backslash G \longrightarrow A$. Nous définissons donc - après renormalisation pour des raisons esthétiques

- pour tous $\phi, \psi \in \mathcal{H}_A(G,H)$ le produit

$$\phi \star \psi(g) = \sum_{t \in H \backslash G} \phi(gt^{-1})\psi(t)$$

Proposition 4.3
L'opération $\star$ fait de $\mathcal{H}_A(G,H)$ une algèbre associative. On a de plus la formule

$$\phi \star \psi(g) = \sum_{s \in G/H} \phi(s)\psi(s^{-1}g)$$

Démonstration.
La somme est bien définie car le terme général de la somme ne dépend pas de la classe de t dans $H\backslash G$ et car ψ induit une application à support fini $H\backslash G \longrightarrow A$, de sorte que la somme est en réalité finie. La H-invariance à gauche de $\phi \star \psi$ résulte de celle de ϕ, et la H-invariance à droite de $\phi \star \psi$ résulte de celle de ψ. Considérons à présent des éléments $g_1, \cdots g_n$ (respectivement $s_1, \cdots, s_m$) de G tel que $\phi(g)$ est nul si g n'est pas dans l'un des Hg_i (respectivement $\psi(g)$ est nul si g n'est pas dans l'un des Hs_j). Alors $\phi \star \psi(g)$ est nul si g n'est pas dans l'un des Hg_is_j. On procède de même pour les classes à droite. Ceci montre bien que $\phi \star \psi$ est dans $\mathcal{H}_A(G,H)$. L'associativité résulte quant à elle du calcul

$$\begin{aligned}
\phi_1 \star (\phi_2 \star \phi_3)(g) &= \sum_{t \in H\backslash G} \phi_1(gt^{-1}) \left(\sum_{s \in H\backslash G} \phi_2(ts^{-1})\phi_3(s) \right) \\
&= \sum_{s \in H\backslash G} \left(\sum_{t \in H\backslash G} \phi_1(gt^{-1})\phi_2(ts^{-1}) \right) \phi_3(s) \\
&= \sum_{s \in H\backslash G} \left(\sum_{r \in H\backslash G} \phi_1(gs^{-1}r^{-1})\phi_2(r) \right) \phi_3(s) \quad ; Hrs = Ht \\
&= (\phi_1 \star \phi_2) \star \phi_3(g)
\end{aligned}$$

La dernière formule provient du fait que $Ht \longmapsto gt^{-1}H$ établit une bijection entre $H\backslash G$ et G/H.

Notons de plus que l'indicatrice de H est bien un élément de $\mathcal{H}_A(G,H)$ et est un élément neutre pour le produit construit ci-dessus : on le notera 1. L'algèbre $\mathcal{H}_A(G,H)$ ainsi construite est appelée algèbre de Hecke - bien que les notions recouvertes par ce terme peuvent varier dans la littérature ; dans le cas où G est fini, c'est en général $\mathcal{H}_{\mathbb{Z}}(G,H)$ qui est appelée algèbre de Hecke. On se donne maintenant un corps K, on se fixe une K-représentation (V,π) de G, et on s'intéresse à l'espace des vecteurs H-invariants

$$V^H = \{v \in V \mid \forall h \in H,\ \pi(h)v = v\}$$

Si H est distingué dans G, l'espace V^H est une sous représentation de V ; mais tel n'est pas le cas en général.

Proposition 4.4
L'application

$$\begin{aligned}
\rho : \mathcal{H}_K(G,H) &\to \mathrm{End}_K(V^H) \\
\phi &\mapsto \left(v \longmapsto \sum_{g \in G/H} \phi(g)\pi(g)v \right)
\end{aligned}$$

est un morphisme de K-algèbre, et définit en particulier une structure de $\mathcal{H}_K(G,H)$-module sur V^H.

Démonstration.
Soit $\phi \in \mathcal{H}_K(G,H)$ et $v \in V^H$. La somme

$$\sum_{g \in G/H} \phi(g)\pi(g)v$$

est bien définie puisque le terme général de la somme ne dépend pas de la classe de g dans G/H, et que la somme est finie. Si $h \in H$, on calcule de plus

$$\begin{aligned}
\pi(h)\left(\sum_{g \in G/H} \phi(g)\pi(g)v\right) &= \sum_{g \in G/H} \phi(g)\pi(hg)v \\
&= \sum_{t \in G/H} \phi(h^{-1}t)\pi(t)v \quad ; \ hgH = tH \\
&= \sum_{t \in G/H} \phi(t)\pi(t)v
\end{aligned}$$

de sorte que la formule

$$\rho(\phi)v = \sum_{g \in G/H} \phi(g)\pi(g)v$$

définit bien un élément de $\mathrm{End}_K(V^H)$. On note que $\rho(1)$ est bien l'identité. Si ϕ_1 et ϕ_2 sont dans $\mathcal{H}_K(G,H)$, on calcule enfin pour $v \in V^H$

$$\begin{aligned}
\rho(\phi_1)\rho(\phi_2)v &= \sum_{g \in G/H} \phi_1(g)\pi(g)\left(\sum_{t \in G/H} \phi_2(t)\pi(t)\right)v \\
&= \sum_{g \in G/H} \phi_1(g)\left(\sum_{t \in G/H} \phi_2(t)\pi(gt)\right)v \\
&= \sum_{g \in G/H} \phi_1(g)\left(\sum_{s \in G/H} \phi_2(g^{-1}s)\pi(s)\right)v \quad ; \ gtH = sH \\
&= \sum_{s \in G/H} \left(\sum_{g \in G/H} \phi_1(g)\phi_2(g^{-1}s)\right)\pi(s)v \\
&= \rho\left(\phi_1 \star \phi_2\right)v
\end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration.

4.3 Opérateurs de Hecke et formes modulaires

Aux groupes G et H de la section précédente correspondront ici les groupes $GL_2^+(\mathbb{Q})/\{\pm 1\}$ et Γ. Dans toute cette section on notera simplement $\mathcal{H}$ l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}_{\mathbb{C}}\left(GL_2^+(\mathbb{Q})/\{\pm 1\}, \Gamma\right)$.
Le contenu de cette section provient en partie du chapitre 1.4 de [1].
Nous allons tout d'abord déterminer la structure d'algèbre de $\mathcal{H}$. Nous débutons pour cela par un lemme algébrique classique.

Proposition 4.5
Soit M un élément de $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$. Il existe des entiers positifs ou nuls d_1, d_2 avec $d_1 | d_2$, et des matrices $P, Q \in GL_2(\mathbb{Z})$ telles que

$$M = P \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix} Q$$

Les entiers d_1 et d_2, appelés facteurs invariants de M, sont uniquement déterminés par M. Plus précisément, d_1 est le plus grand diviseur commun des coefficients de M - que l'on *décrète nul lorsque $M = 0$ - et $d_1 d_2$ est égal à $|\det M|$.*

Pour $(\alpha, k) \in \mathbb{Q}_+^* \times \mathbb{N}^*$, notons $\gamma_{\alpha,k}$ la classe dans $GL_2^+(\mathbb{Q})/\{\pm 1\}$ de la matrice

$$\tilde{\phi}_{\alpha,k} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & k\alpha \end{pmatrix}$$

Notons enfin $\phi_{\alpha,k}$ l'indicatrice de $\Gamma\gamma_{\alpha,k}\Gamma$.

Lemme 4.6 *Si pour des rationnels non tous nuls $a_1, \cdots, a_n$ on note $c(a_1, \cdots, a_n)$ le contenu de $(a_1, \cdots, a_n)$, c'est à dire l'unique $\alpha \in \mathbb{Q}_+^*$ tel que le vecteur $\frac{1}{\alpha}(a_1, \cdots, a_n)$ soit à coordonnées entières premières entre elles dans leur ensemble, alors on a*

$$\Gamma\gamma_{\alpha,k}\Gamma = \bigsqcup_{\substack{a,d \in \mathbb{Q}_+^* \ b \in \mathbb{Q}/d\mathbb{Z} \\ ad = \alpha^2 k \\ c(a,b,d) = \alpha}} \Gamma \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$$

Dans le membre de droite, la réunion est finie. On a de plus

$$\Gamma\gamma_{\alpha,k}\Gamma = \bigsqcup_{\substack{a,d \in \mathbb{Q}_+^* \ b \in \mathbb{Q}/d\mathbb{Z} \\ ad = \alpha^2 k \\ c(a,b,d) = \alpha}} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \Gamma$$

Démonstration.
Par la proposition 4.5, le membre de gauche n'est autre que l'ensemble des $\gamma \in GL_2^+(\mathbb{Q})/\{\pm 1\}$ dont le contenu est α et dont le déterminant est $\alpha^2 k$. En particulier, le membre de gauche contient le membre de droite. Pour montrer l'inclusion réciproque, donnons nous un $\gamma \in \Gamma\gamma_{\alpha,k}\Gamma$, et soit a, b, c, d les coefficients de l'un de ses représentants. Soit r le contenu de (a, c), de sorte que le vecteur $\frac{1}{r}(-c, a)$ est la deuxième ligne d'un certain $\gamma_0 \in \Gamma$. On vérifie alors que le premier coefficient de la deuxième ligne de $\gamma_0\gamma$ est nul. Puisque $\gamma_0\gamma$ a le même contenu et le même déterminant que γ, l'élément appartient au membre de droite. Pour montrer la finitude de l'union dans le membre de droite, il suffit de le vérifier pour α entier, auquel cas le résultat est clair. Enfin, le résultat pour des classes à droite est obtenu par la même méthode que précédemment.

Lemme 4.7 *La famille $(\phi_{\alpha,k})_{(\alpha,k) \in \mathbb{Q}_+^* \times \mathbb{N}^*}$ forme une base du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathcal{H}$.*

Démonstration.
• Les applications $\phi_{\alpha,k}$ sont clairement bi-invariantes. En particulier, $\phi_{\alpha,k}$ induit des applications $\Gamma \backslash GL_2^+(\mathbb{Q})/\{\pm 1\} \longrightarrow \mathbb{C}$ et $GL_2^+(\mathbb{Q})/\{\pm 1\}/\Gamma \longrightarrow \mathbb{C}$ dont les supports sont finis par le lemme 4.6. On en déduit que $\phi_{\alpha,k}$ est effectivement dans $\mathcal{H}$.
• Soit (α_1, k_1) et (α_2, k_2) des éléments de $\mathbb{Q}_+^* \times \mathbb{N}^*$ tels que les supports de ϕ_{α_1,k_1} et ϕ_{α_2,k_2} s'intersectent. Alors $\Gamma\gamma_{\alpha_1,k_1}\Gamma = \Gamma\gamma_{\alpha_2,k_2}\Gamma$. Quitte à multiplier cette égalité par un entier adéquat, on peut supposer que α_1 et α_2 sont à coefficients entiers. La clause d'unicité dans la proposition 4.5 assure alors que $(\alpha_1, k_1) = (\alpha_2, k_2)$. Les $\phi_{\alpha,k}$ sont donc à supports disjoints non-vides, ce qui impliquent qu'ils forment une famille libre.
• Soit maintenant $\phi \in \mathcal{H}$. On peut alors écrire

$$\phi = \sum_{(\alpha,k) \in \mathbb{Q}_+^* \times \mathbb{N}^*} \phi(\gamma_{\alpha,k})\phi_{\alpha,k}$$

La somme de droite est en effet bien définie puisque finie, et la clause d'existence de la proposition 4.5 assure que cette somme coïncide en tout point avec ϕ. La famille $(\phi_{\alpha,k})_{(\alpha,k) \in \mathbb{Q}_+^* \times \mathbb{N}^*}$ est donc génératrice.

Corollaire 4.8 L'anneau $\mathcal{H}$ est commutatif.

Démonstration.
Considérons l'endomorphisme $T : \phi \in \mathcal{H} \longmapsto (\gamma \longmapsto \phi(\gamma^T)) \in \mathcal{H}$. En utilisant l'identité $(\gamma_1\gamma_2)^T = \gamma_2^T\gamma_1^T$, on vérifie que l'on a pour tous $\phi_1, \phi_2 \in \mathcal{H}$ l'identité

$$T(\phi_1 \star \phi_2) = T(\phi_2) \star T(\phi_1)$$

de sorte que pour conclure, il suffit de montrer que T est l'identité. Par le lemme 4.7, il suffit de vérifier que $T(\phi_{\alpha,k}) = \phi_{\alpha,k}$. Mais ceci est clair puisque $\phi_{\alpha,k}$ est l'indicatrice de $\Gamma\gamma_{\alpha,k}\Gamma$, qui est stable par transposition du fait que $\gamma_{\alpha,k}$ est diagonale.

Le lemme 4.7 montre que la structure multiplicative de $\mathcal{H}$ est complètement déterminée par les quantités $\phi_{\alpha_1,k_1} \star \phi_{\alpha_2,k_2}(\gamma_{\alpha_3,k_3})$. Le lemme 4.6 permet de calculer explicitement ces coefficients ; le résultat - que nous n'énoncerons pas - est toutefois peu éclairant.
Considérons à présent la représentation

$$\pi : \gamma \in GL_2^+(\mathbb{Q})/\{\pm 1\} \longmapsto (.|_k\gamma^{-1}) \in GL(V)$$

où V est l'espace des fonctions holomorphes $f : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{C}$ telles que $f|_k\gamma$ est bornée sur $y \geq 1$ pour tout $\gamma \in GL_2^+(\mathbb{Q})/\{\pm 1\}$, et où on a posé cette fois-ci

$$f|_k\gamma(z) = (\det\gamma)^k j(\gamma, z)^{-2k} f(\gamma z)$$

L'espace V^Γ n'est autre que M_k. Le morphisme ρ construit dans la section précédente confère alors à M_k une structure de $\mathcal{H}$-module - notons aussi que l'espace M_k^0 est un sous $\mathcal{H}$-module de M_k. Nous avons donc achevé l'un des buts que nous nous étions fixés : exhiber des endomorphismes non triviaux de M_k et M_k^0 !

Donnons à présent un exemple d'application : la construction des opérateurs de Hecke. Nous savons que tout élément $f \in M_k^0$ se développe en une série entière

$$f(z) = \sum_{n\geq 1} a_n(f)q^n \quad ; \; q = e^{2i\pi z}$$

Intéressons nous aux formes linéaires $a_n : f \longmapsto a_n(f)$. Puisque l'intersection des noyaux de ces formes linéaires est nulle, on sait que pour tout endomorphisme T de M_k^0, la forme linéaire $a_1 \circ T$ est une combinaison linéaire des $(a_n)_n$. Il se trouve que l'on peut choisir T de la forme $\rho(\phi)$ pour avoir exactement $a_1 \circ T = a_n$.

Proposition 4.9
L'élément $\phi(N) : \gamma \longmapsto N^{k-1}1_{\det\gamma = N\,;\,\gamma\in\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})}$ est dans $\mathcal{H}$, et l'opérateur $T(N) = \rho(\phi(N))$ vérifie $a_N = a_1 \circ T(N)$

Démonstration.
Puisque $\phi_{\alpha,k}$ est l'indicatrice de l'ensemble des matrices de déterminant $\alpha^2 k$ et de contenu α, on a la décomposition

$$\phi(N) = N^{k-1} \sum_{\alpha^2|N} \phi_{\alpha,\frac{N}{\alpha^2}}$$

et cela suffit à montrer que $\phi(N)$ est dans $\mathcal{H}$. Pour le deuxième point, on utilise la décomposition ci-dessus et le lemme 4.6 pour écrire

$$\begin{aligned}
T(N)(f)(z) &= N^{k-1} \sum_{ad=N} \sum_{b\in\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}} \pi\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}\right)(f)(z) \\
&= N^{k-1} \sum_{ad=N} \sum_{b\in\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}} \pi\left(\begin{pmatrix} d & -b \\ 0 & a \end{pmatrix}\right)(f)(z) \\
&= N^{k-1} \sum_{ad=N} \sum_{b\in\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}} \left(f|_k \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}\right)(z) \\
&= \sum_{n\geq 1} a_n(f) \sum_{ad=N} \frac{N^{2k-1}}{d^{2k}} e^{\frac{2i\pi naz}{d}} \sum_{b\in\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}} e^{\frac{2i\pi nb}{d}} \\
&= \sum_{n\geq 1} a_n(f) \sum_{ad=N\ ;\ d|n} \left(\frac{N}{d}\right)^{2k-1} q^{\frac{na}{d}}
\end{aligned}$$

Le coefficient de q dans cette dernière expression correspond à $a = 1$ et $n = d = N$, et vaut bien $a_N(f)$.

Remarque 1. Ce sont souvent les opérateurs $T(N)$ qui sont appelés *opérateurs de Hecke*, bien que les $\rho(\phi_{\alpha,k})$ pourraient aussi prétendre à ce titre.

Nous avons vu dans la section 1.3 que l'espace M_k^0 était muni d'une structure hilbertienne naturelle, donnée par le produit hermitien de Petersson. Une nouvelle question émerge : comment l'action de $\mathcal{H}$ sur M_k^0 se comporte-t-elle du point de vue de cette structure hilbertienne ?

Proposition 4.10
Chaque $\rho(\phi_{\alpha,k})$ est un endomorphisme auto-adjoint de M_k^0.

Démonstration.
C'est le théorème 1.4.3 de [1].

Ainsi, les $\rho(\phi_{\alpha,k})$ constituent une famille commutative - par le corollaire 4.8 - d'opérateurs auto-adjoints de l'espace vectoriel de dimension finie M_k^0 : ceci implique l'existence d'une base de vecteurs propres communs à tous les $\rho(\phi_{\alpha,k})$, et que de plus les valeurs propres associées sont réelles. Si $f \neq 0$ est une telle fonction propre, alors f est aussi une fonction propre des opérateurs $T(N)$: on peut écrire $T(N)f = \lambda(N)f$. Mais la proposition 4.9 montre alors que

$$a_N(f) = a_1(T(N)f) = \lambda(N)a_1(f)$$

Puisque $f \neq 0$, au moins un des $a_N(f)$ est non nul ce qui implique donc $a_1(f) \neq 0$. Ce dernier point montre qu'il existe une base de fonctions propres *normalisées*, c'est à dire dont les coefficients a_1 valent 1.

Remarque 2. Une présentation plus moderne de ce sujet considérerait non pas l'inclusion $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{R}$ - qui induit un morphisme $SL_2(\mathbb{Z}) \hookrightarrow SL_2(\mathbb{R})$, ce qui correspond à l'action de $SL_2(\mathbb{Z})$ sur $\mathbb{H}$ si l'on quotiente à droite par $SO_2(\mathbb{R})$ - mais plutôt l'inclusion $\mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{A}$, où $\mathbb{A}$ est l'anneau des *adèles*, défini par

$$\mathbb{A} = \{x \in \mathbb{R} \times \prod_p \mathbb{Q}_p \,|\, \exists p_0\, \forall p > p_0 \quad x_p \in \mathbb{Z}_p\}$$

L'introduction des différentes complétions de $\mathbb{Q}$ permet d'associer à un problème donné sa contrepartie *locale*, qui est en général plus simple que le problème *global.* Par exemple, on peut considérer l'algèbre de Hecke - ou plutôt sa variante pour des groupes topologiques - associée aux groupes $G = SL_2(\mathbb{Q}_p)$ et $H = SL_2(\mathbb{Z}_p)$, dont la structure est bien plus simple : elle est essentiellement engendrée par $T(p)$. Ceci donne tout son sens au terme *localisation* ... De ce point de vue, la commutation de deux opérateurs de Hecke $T(N)$ et $T(M)$ résulterait, du moins pour N et M premiers entre eux, de leur commutation locale - elle-même immédiate puisqu'ils ne sont jamais simultanément non triviaux dans une même complétion si N et M sont premiers entre eux.

4.4 Trace des opérateurs de Hecke

Pour exposer ce qui motive - en partie - l'étude et la démonstration de *formules des traces* pour des opérateurs de Hecke, nous nous plaçons tout d'abord dans le cadre élémentaire que nous offre la théorie des représentations des groupes finis.
Soit donc G un groupe fini et H un sous-groupe de G. La formule $(gf)(x) = f(xg)$ fait de l'espace des fonctions $G \longrightarrow \mathbb{C}$ qui sont H-invariantes à gauche une représentation de H. Dans le langage des représentations induites, il s'agit simplement de $\mathrm{Ind}_H^G 1_H$.

Lemme 4.11 *L'algèbre de Hecke* $\mathcal{H}_{\mathbb{C}}(G,H)$ *est isomorphe à* $\mathrm{End}_G(\mathrm{Ind}_H^G 1_H)$.

Démonstration.
Par définition, $\mathcal{H}_{\mathbb{C}}(G,H)$ n'est autre que $\left(\mathrm{Ind}_H^G 1_H\right)^H$. Donc $\mathcal{H}_{\mathbb{C}}(G,H)$ s'identifie à l'espace vectoriel $\mathrm{Hom}_H\left(1_H, \mathrm{Res}_H^G \mathrm{Ind}_H^G 1_H\right)$, que la réciprocité de Frobenius identifie à $\mathrm{End}_G\left(\mathrm{Ind}_H^G 1_H\right)$. On obtient donc un isomorphisme d'espaces vectoriels

$$\theta : \mathcal{H}_{\mathbb{C}}(G,H) \simeq \mathrm{End}_G\left(\mathrm{Ind}_H^G 1_H\right)$$

et l'on vérifie que celui-ci est donné par $\theta(\phi)(f) = \phi \star f$. Cette dernière formule montre que θ préserve aussi la structure d'algèbre, d'où le résultat.

Remarque 3. On peut décomposer la représentation $\mathrm{Ind}_H^G 1_H$ en somme de représentations irréductibles,

$$\mathrm{Ind}_H^G 1_H = \bigoplus_\chi n_\chi V_\chi$$

où V_χ est de caractère χ - on montre à l'aide de la formule de réciprocité de Frobenius que le coefficient n_χ est simplement la dimension de V_χ^H. Dans ce cas, le lemme précédent montre que la structure d'algèbre de $\mathcal{H}_{\mathbb{C}}(G,H)$ est donnée par

$$\mathcal{H}_{\mathbb{C}}(G,H) \simeq \mathrm{End}_G(\mathrm{Ind}_H^G 1_H) \simeq \bigoplus_\chi \mathcal{M}_{n_\chi}(\mathbb{C})$$

Le dernier isomorphisme résulte du lemme de Schur. En particulier $\mathcal{H}_{\mathbb{C}}(G,H)$ est commutative si et seulement si toute représentation irréductible de G apparaît au plus une fois dans $\mathrm{Ind}_H^G 1_H$; il n'est donc pas déraisonnable d'imaginer que le résultat de commutativité de la section précédente reflète le fait que certains objets correspondant aux représentations irréductibles de $GL_2^+(\mathbb{Q})/\{\pm 1\}$ apparaissent avec multiplicité au plus 1 dans une certaine représentation induite $\mathrm{Ind}_\Gamma^{GL_2^+(\mathbb{Q})/\{\pm 1\}} 1_\Gamma$.

Si (V,π) est la représentation régulière gauche - explicitement, V est l'espace des fonctions $G \longrightarrow \mathbb{C}$ et $\pi(g)\phi(x) = \phi(g^{-1}x)$ - alors l'espace vectoriel V^H n'est autre que $\mathrm{Ind}_H^G 1_H$. Le morphisme ρ associé n'est autre que l'isomorphisme du lemme . Soit maintenant $\phi \in \mathcal{H}_{\mathbb{C}}(G,H)$. On calcule

$$\rho(\phi)(1_{Ht}) = \sum_{g \in G/H} \phi(g) 1_{Htg}$$

de sorte que la trace de $\rho(\phi)$ est donnée par

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}\rho(\phi) &= \sum_{t\in H\backslash G}\left(\sum_{g\in G/H\,:\,tgt^{-1}\in H}\phi(g)\right)\\ &= \sum_{g\in G/H}\left(\sum_{t\in H\backslash G\,:\,tgt^{-1}\in H}1\right)\phi(g)\end{aligned}$$

Ici, calculer la trace d'un opérateur de Hecke donne des informations sur la quantité

$$\sum_{t\in H\backslash G\,:\,tgt^{-1}\in H}1$$

qui se trouve aussi être le caractère de $\mathrm{Ind}_H^G 1_H$, et donc sur les classes de conjugaison de G. La formule des traces que nous démontrerons dans ce mémoire est un analogue de la formule précédente pour les groupes $H=\Gamma$ et $G=GL_2(\mathbb{Q})/\{\pm 1\}$ - qui ne sont pas finis. Si l'on avait plutôt considéré l'espace des vecteurs K-invariants de $\mathrm{Ind}_H^G 1_H$, où K est un sous-groupe de G, on aurait pu obtenir une analogie plus précise - qui serait cette fois ci donnée par $G=GL_2(\mathbb{A})$, $H=GL_2(\mathbb{Q})$ et $K=GL_2(\hat{\mathbb{Z}})$ - mais nous ne développerons pas ce point de vue.

5 La formule des traces

5.1 Énoncé de la formule des traces

On énonce dans cette section la formule des traces pour les opérateurs de Hecke sur le groupe modulaire Γ, que nous avons introduit précédemment.
On donne tout d'abord quelques notations. Soit k un entier ≥ 2, $N\geq 0$, et $t\in\mathbb{Z}$. On note $p_k(t,N)=\frac{\rho_1^{2k-1}-\rho_2^{2k-1}}{\rho_1-\rho_2}$, où ρ_1 et ρ_2 vérifient $\rho_1+\rho_2=t$ et $\rho_1\rho_2=N$ - la quantité $p_k(t,N)$ ne dépend pas de l'indexation des racines ρ_1 et ρ_2. Nous introduirons une certaine fonction H dans la section 5.4, mais dont nous avons besoin pour énoncer la formule des traces. On pose $\tilde{H}(\Delta)=\frac{1}{2}H(\Delta)$ si $\Delta<0$, $\tilde{H}(0)=-\frac{1}{12}$ et $\tilde{H}(\Delta)=0$ si $\Delta>0$.

Théorème 5.1 *La trace de l'opérateur $T(N)$ sur M_k^0 est donnée par :*

$$\mathrm{Tr}\left(T(N)|M_k^0\right)=-\frac{1}{2}\sum_{t\in\mathbb{Z}}p_k(t,N)\tilde{H}(t^2-4N)-\frac{1}{2}\sum_{d|N}\min\left(d,\frac{N}{d}\right)^{2k-1}$$

Les sections qui suivent sont consacrées à la démonstration de ce théorème.

Remarque 4. Pour $N=1$, l'opérateur $T(1)$ est l'identité, et la formule des traces donne alors

$$\begin{aligned}\dim M_k^0 &= -\frac{1}{2}\Big(p_k(0,1)\tilde{H}(-4)+2p_k(1,1)\tilde{H}(-3)+2p_k(2,1)\tilde{H}(0)\Big)-\frac{1}{2}\\ &= -\frac{1}{2}\left(\frac{(-1)^{k-1}}{4}-\frac{j^{2(2k-1)}-j^{-2(2k-1)}}{3i\sqrt{3}}-\frac{k}{3}\right)-\frac{1}{2}\\ &= \frac{k}{6}+\epsilon_k\end{aligned}$$

où $k\mapsto\epsilon_k$ est 6-périodique. Le calcul explicite de ϵ_k permet de retrouver les résultats obtenus dans la section 3.2.

5.2 Construction d'un noyau

Dans cette section, on montre que les opérateurs de Hecke sont des *opérateurs intégraux à noyaux*, ce qui permet de décrire leurs traces en fonction des noyaux construits.
Soit k un entier ≥ 2. Pour chaque entier $N > 0$, on pose

$$\Omega_N(z,z') = \sum_{ad-bc=N} (czz' + dz' + az + b)^{-2k} = \sum_{ad-bc=N} (cz+d)^{-2k} \left(z' + \frac{az+b}{cz+d}\right)^{-2k}$$

où z et z' sont dans $\mathbb{H}$, et où la sommation porte sur les matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ à coefficients entiers et de déterminant N.
Si z est dans $\mathbb{H}$ et si $ad - bc > 0$, alors $\mathfrak{Im}\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = \frac{ad-bc}{|cz+d|^2}\mathfrak{Im}(z)$ est strictement positif. L'expression $z' + \frac{az+b}{cz+d}$ ne s'annule donc pas pour z et z' dans $\mathbb{H}$. Chaque terme de la série définissant Ω_N est donc holomorphe en z, z'.

Lemme 5.2 *Pour tout $\epsilon > 0$, la série Ω_1 converge normalement sur le domaine $K_\epsilon = \{(z,z') \in \mathbb{H}^2 \,|\, \mathfrak{Im}z,\, \mathfrak{Im}z' \geq \epsilon,\, |z|, |z'| \leq \frac{1}{\epsilon}\}$.*

Démonstration.
Soit c et d des entiers premiers entre eux. On se fixe des entiers a_0 et b_0 tels que $a_0d - b_0c = 1$. Les couples d'entiers (a,b) tels que $ad - bc = 1$ sont de la forme $a = a_0 + ch$ et $b = b_0 + dh$ pour un certain $h \in \mathbb{Z}$. On a alors

$$z' + \frac{az+b}{cz+d} = z' + \frac{a_0z+b_0}{cz+d} + h$$

Pour $(z,z') \in K_\epsilon$, la partie imaginaire de $z' + \frac{a_0z+b_0}{cz+d}$ est minorée par ϵ, et on peut vérifier que sa partie réelle reste dans un intervalle $[x_0 - X, x_0 + X]$ où X ne dépend que de ϵ - mais où x_0 peut dépendre de c et d. On dispose alors de l'estimation

$$\begin{aligned}
\sum_{(a,b):ad-bc=1} \sup_{(z,z')\in K_\epsilon} |z' + \frac{az+b}{cz+d}|^{-2k} &= \sum_{h\in\mathbb{Z}} \sup_{(z,z')\in K_\epsilon} |z' + \frac{a_0z+b_0}{cz+d} + h|^{-2k} \\
&\leq \sum_{h\in\mathbb{Z}} \sup_{x\in[x_0-X,x_0+X]} \left(\epsilon^2 + (h+x)^2\right)^{-k} \\
&\leq A_k \sum_{h\in\mathbb{Z}} \left(\left(\epsilon^2 + (h+x_0+X)^2\right)^{-k} + \left(\epsilon^2 + (h+x_0-X)^2\right)^{-k}\right) \\
&\leq A'_k \epsilon^{-2k}
\end{aligned}$$

où A_k et A'_k ne dépendent que de k. Par ailleurs, la quantité

$$\sum_{(c,d):\mathrm{pgcd}(c,d)=1} \sup_{(z,z')\in K_\epsilon} |cz+d|^{-2k}$$

est finie par la propriété de convergence normale établie au cours de la preuve de la proposition 2.9. Ceci achève la démonstration.

Il résulte de ce lemme que chaque $\Omega_1(z,.)$ est holomorphe et faiblement modulaire de poids $2k$ - une fois la convergence absolue établie, la modularité est une simple vérification. Un calcul très similaire à celui effectué dans la démonstration du lemme précédent montre alors l'estimation

$$|\Omega_1(z,z')| \leq B_{k,z} \left(\mathfrak{Im}z'\right)^{-2k+1}$$

ce qui montre que $\Omega_1(z,.)$ est en réalité une forme parabolique. La relation $\Omega_1(z,z') = \Omega_1(z',z)$ montre qu'il en va de même pour $\Omega_1(.,z')$. Ces résultats s'étendent à Ω_N en notant que $N^{2k-1}\Omega_N(.,z') = T(N)\Omega_1(.,z')$.

Théorème 5.3 *(i) Pour toute fonction $f \in M_k^0$ et tout $z' \in \mathbb{H}$, le produit de Petersson de f et de $\Omega_N(\,.\,,z')$ est donné par*

$$\langle \Omega_N(\,.\,,z')|f\rangle = C_k N^{-2k+1}(T(N)f)\left(-\overline{z'}\right)$$

où $C_k = \frac{(-1)^k\pi}{2^{2k-3}(2k-1)}$. On dit alors que la fonction $C_k^{-1}N^{2k-1}\Omega_N\left(z,-\overline{z'}\right)$ est le "noyau" de l'opérateur $T(N) : M_k^0 \to M_k^0$

(ii) On note f_i, $1 \le i \le r = \dim M_k^0$ les fonctions propres normalisées des opérateurs de Hecke, de sorte que $T(N)f_i = \lambda_N^i f_i$ pour certains réels λ_N^i. On a alors l'identité :

$$C_k^{-1}N^{2k-1}\Omega_N(z,z') = \sum_{i=1}^{r} \frac{\lambda_N^i}{\langle f_i, f_i\rangle} f_i(z)f_i(z')$$

(iii) La trace de l'opérateur de Hecke $T(N) : M_k^0 \to M_k^0$ est donnée par :

$$\mathrm{Tr}(T(N) \mid M_k^0) = C_k^{-1}N^{2k-1}\int_{F_\Gamma} \Omega_N(z,-\overline{z})Im(z)^{2k}\mathrm{d}\mu$$

Démonstration.

(i) On commence par le cas $N = 1$, le cas général s'en déduira.

Soit $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$.

Les égalités $f(\gamma z) = (cz+d)^{2k}f(z)$ et $\mathfrak{Im}(\gamma z) = (ad-bc)\frac{\mathfrak{Im}(z)}{|cz+d|^2} = \frac{y}{|cz+d|^2}$ donnent

$$(c\overline{z}+d)^{-2k}f(z)y^{2k} = f(\gamma z)\mathfrak{Im}(\gamma z)^{2k}$$
$$(c\overline{z}+d)^{-2k}(\bar{z'}+\gamma\overline{z})^{-2k}f(z)y^{2k} = (\overline{z'}+\gamma\overline{z})^{-2k}f(\gamma z)\mathfrak{Im}(\gamma z)^{2k}$$

donc, en sommant sur $\gamma \in SL_2(\mathbb{Z})$,

$$f(z)\overline{\Omega_1(z,z')}y^{2k} = 2\sum_{\gamma\in\Gamma}(\overline{z'}+\gamma\overline{z})^{-2k}f(\gamma z)(\mathfrak{Im}\gamma z)^{2k}$$

où le facteur 2 vient du fait que chaque $\gamma \in \Gamma$ est représenté par deux matrices distinctes de $SL_2(\mathbb{Z})$. On a donc pour le produit de Petersson :

$$\langle \Omega_1(\,.\,,z')|f\rangle = 2\int_{F_\Gamma}\sum_{\gamma\in\Gamma}(\overline{z'}+\gamma\overline{z})^{-2k}f(\gamma z)\mathfrak{Im}(\gamma z)^{2k}\mathrm{d}\mu$$

On peut permuter la somme et l'intégrale car $k \ge 2$, et en effectuant le changement de variable $z \to \gamma z$ dans chaque terme de la somme - en se souvenant que la mesure $\mathrm{d}\mu$ est préservée par l'action de Γ - on obtient

$$\begin{aligned}\langle \Omega_1(\,.\,,z')|f\rangle &= 2\sum_{\gamma\in\Gamma}\int_{\gamma F_\Gamma}(\overline{z'}+\overline{z})^{-2k}f(z)\mathfrak{Im}(z)^{2k}\mathrm{d}\mu \\ &= 2\int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty (x-iy+\overline{z'})^{-2k}f(x+iy)y^{2k-2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\end{aligned}$$

La dernière égalité vient du fait que les γF_Γ forment une partition de $\mathbb{H}$, à une partie négligeable près.

On calcule d'abord, à y fixé, l'intégrale $I(y) := \int_{-\infty}^{\infty}(x-iy+\overline{z'})^{-2k}f(x+iy)\mathrm{d}x$.

Soit R un réel positif, et soit γ_R le contour fermé formé du segment $[-R,R]$ et du demi-cercle supérieur joignant $-R$ et R. La formule de Cauchy donne

$$\frac{2i\pi}{(2k-1)!}f^{(2k-1)}(2iy-\overline{z'}) = \int_{\gamma_R}\frac{f(z+iy)}{((z+iy)-(2iy-\overline{z'}))^{2k}}\mathrm{d}z$$

Cette intégrale se découpe en deux termes : le premier terme, l'intégrale sur $[-R,R]$, tend vers l'intégrale $I(y)$ recherchée quand R tend vers $+\infty$. Le second terme est

$$\int_0^\pi \frac{f(Re^{i\theta}+iy)}{(Re^{i\theta}+\overline{z'}-iy)^{2k}} iR\mathrm{d}\theta$$

qui tend vers zéro quand R tend vers $+\infty$, car f est parabolique donc bornée. On a donc

$$I(y) = \frac{2i\pi}{(2k-1)!} f^{(2k-1)}(2iy-\overline{z'})$$

Ceci donne pour le produit de Petersson de f et Ω_1 :

$$\begin{aligned}
\langle \Omega_1(\,.\,,z')|f\rangle &= \frac{4i\pi}{(2k-1)!}\int_0^\infty y^{2k-2} f^{(2k-1)}(2iy-\overline{z'})\mathrm{d}y \\
&= \frac{4i\pi}{(2k-1)!}\int_0^\infty \frac{1}{(2i)^{2k-2}}\frac{\mathrm{d}^{2k-2}}{\mathrm{d}t^{2k-2}} f'(2ity-\overline{z'})\,|_{t=1}\,\mathrm{d}y \\
&= \frac{4i\pi}{(2k-1)!}\frac{1}{(2i)^{2k-2}}\frac{\mathrm{d}^{2k-2}}{\mathrm{d}t^{2k-2}}\int_0^\infty f'(2ity-\overline{z'})\mathrm{d}y\,|_{t=1} \\
&= \frac{4i\pi}{(2k-1)!}\frac{1}{(2i)^{2k-2}}\frac{\mathrm{d}^{2k-2}}{\mathrm{d}t^{2k-2}}(\frac{-f(-\overline{z'})}{2it})\,|_{t=1} \\
\langle \Omega_1(\,.\,,z')|f\rangle &= C_k f(-\overline{z'})
\end{aligned}$$

ce qui démontre le point (i) dans le cas $N=1$.
Le cas N quelconque se déduit du cas $N=1$, puisque $N^{2k-1}\Omega_N(.,z') = T(N)\Omega_1(.,z')$, où $T(N)$ agit sur la première variable de Ω_1 et que $T(N)$ est auto-adjoint.

(ii) $\Omega_N(.,z')$ est une forme parabolique de poids $2k$ et peut donc s'écrire

$$\Omega_N(z,z') = \sum_{i=1}^r a_i(z')f_i(z)$$

Puisque cette décomposition est unique, et que chaque $\Omega_N(z,.)$ est une forme parabolique de poids $2k$, les coefficients a_i sont eux-mêmes des formes paraboliques de poids $2k$, qui s'écrivent donc

$$a_i = \sum_{j=1}^r c_{ij}f_j$$

de sorte que

$$\Omega_N(z,z') = \sum_{i=1}^r\sum_{j=1}^r c_{ij}f_i(z)f_j(z')$$

On applique à présent le résultat du (i) à l'une des fonctions propres f_α :

$$\begin{aligned}
\lambda_N^\alpha f_\alpha(-\overline{z'}) &= (T(N)f_\alpha)(-\overline{z'}) \\
&= C_k^{-1}N^{2k-1}\langle \Omega_N(\,.\,,z')|f_\alpha\rangle \\
&= C_k^{-1}N^{2k-1}\sum_{i,j}\overline{c}_{ij}\langle f_i|f_\alpha\rangle\overline{f_j(z')}
\end{aligned}$$

Or $< f_\alpha|f_i >= 0$ si $\alpha\neq i$, de sorte que la somme double se réduit à une somme simple. De plus, $f_\alpha(-\overline{z'}) = \overline{f_\alpha(z')}$ puisque $f_\alpha(z) = \sum_N \lambda_N^\alpha e^{2i\pi Nz}$ et que les λ_N^α sont réels. On a donc, en passant au conjugué :

$$\lambda_N^\alpha f_\alpha(z') = C_k^{-1}N^{2k-1}\sum_{j=1}^r c_{\alpha j}\langle f_\alpha|f_\alpha\rangle f_j(z')$$

Cette égalité est valable pour tout z' dans $\mathbb{H}$, et les f_j sont linéairement indépendantes, de sorte que l'on obtient $c_{\alpha j} = 0$ pour $\alpha \neq j$, et

$$c_{\alpha\alpha} = \lambda_N^\alpha C_k N^{1-2k} \langle f_\alpha | f_\alpha \rangle^{-1}$$

ce qui montre bien le point (ii) en remplaçant dans l'expression de Ω_N la valeur des coefficients c_{ij} trouvée ci-dessus.

(iii) On substitue l'expression de Ω_N trouvée en (ii) dans l'intégrale :

$$\begin{aligned} C_k^{-1} N^{2k-1} \int_{F_\Gamma} \Omega_N(z, -\overline{z}) \mathfrak{Im}(z)^{2k} \mathrm{d}\mu &= \sum_{i=1}^r \frac{\lambda_N^i}{\langle f_i | f_i \rangle} \int_{F_\Gamma} f_i(z) f_i(-\overline{z}) y^{2k} \mathrm{d}\mu \\ &= \sum_{i=1}^r \lambda_N^i \\ &= \mathrm{Tr}(T(N) | M_k^0) \end{aligned}$$

ce qui est la formule annoncée.

5.3 Une décomposition du noyau sur la diagonale

Nous avons montré précédemment que la trace de l'opérateur $T(N)$ sur l'espace M_k^0 était donnée par $C_k^{-1} N^{2k-1} I_N$, où I_N est l'intégrale sur $\Gamma\backslash\mathbb{H}$ de la fonction

$$\omega_N(z) := \Omega_N(z, -\overline{z})(\mathfrak{Im} z)^{2k} = \sum_{\substack{\gamma \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}) \\ \det \gamma = N}} j(\gamma, z)^{-2k} (\gamma z - \overline{z})^{-2k} (\mathfrak{Im} z)^{2k}$$

Il résulte de la discussion précédente que ω_N est Γ-invariante. Calculons néanmoins $\ell_\gamma(\gamma_0 z)$, où $\ell_\gamma(z)$ est le terme général de la somme ω_N ci-dessus, et γ_0 est un élément de Γ.

Lemme 5.4 *Soit $z, z' \in \mathbb{H}$ et $\gamma, \gamma_0 \in \Gamma$. On a alors les identités :*
(i) $\gamma z - \gamma z' = j(\gamma, z)^{-1} j(\gamma, z')^{-1}(z - z')$
(ii) $\ell_\gamma(\gamma_0 z) = \ell_{\gamma_0^{-1}\gamma\gamma_0}(z)$

Démonstration.
(i) On commence par écrire $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, puis on calcule

$$\begin{aligned} \gamma z - \gamma z' &= j(\gamma, z)^{-1}(az + b) - j(\gamma, z')^{-1}(az' + b) \\ &= j(\gamma, z)^{-1} j(\gamma, z')^{-1} \big((az + b)(cz' + d) - (az' + b)(cz + d)\big) \\ &= j(\gamma, z)^{-1} j(\gamma, z')^{-1} \big((ad - bc)z - (ad - bc)z'\big) \\ &= j(\gamma, z)^{-1} j(\gamma, z')^{-1} \big(z - z'\big) \end{aligned}$$

(ii) Nous savons déjà que $\mathfrak{Im}\gamma_0 z = |j(\gamma_0, z)|^{-2} \mathfrak{Im} z = j(\gamma_0, z)^{-1} j(\gamma_0, \overline{z})^{-1} \mathfrak{Im} z$ et que $j(\gamma_0, \gamma_0^{-1}\gamma\gamma_0 z) = j(\gamma_0^{-1}, \gamma\gamma_0 z)^{-1} = j(\gamma_0^{-1}\gamma\gamma_0, z)^{-1} j(\gamma, \gamma_0 z) j(\gamma_0, z)$. En utilisant le (i), on en déduit

$$\begin{aligned} \ell_\gamma(\gamma_0 z) &= j(\gamma, \gamma_0 z)^{-2k} j(\gamma_0, z)^{-2k} j(\gamma_0, \overline{z})^{-2k} (\mathfrak{Im} z)^{2k} (\gamma_0(\gamma_0^{-1}\gamma\gamma_0 z) - \gamma_0 \overline{z})^{-2k} \\ &= j(\gamma, \gamma_0 z)^{-2k} j(\gamma_0, z)^{-2k} j(\gamma_0, \overline{z})^{-2k} (\mathfrak{Im} z)^{2k} j(\gamma_0, \gamma_0^{-1}\gamma\gamma_0 z)^{2k} j(\gamma_0, \overline{z})^{k} (\gamma_0^{-1}\gamma\gamma_0 z - \overline{z})^{-2k} \\ &= j(\gamma, \gamma_0 z)^{-2k} j(\gamma_0, z)^{-2k} (\mathfrak{Im} z)^{2k} j(\gamma_0^{-1}\gamma\gamma_0, z)^{-2k} j(\gamma, \gamma_0 z)^{2k} j(\gamma_0, z)^{2k} (\gamma_0^{-1}\gamma\gamma_0 z - \overline{z})^{-2k} \\ &= (\mathfrak{Im} z)^{2k} j(\gamma_0^{-1}\gamma\gamma_0, z)^{-2k} (\gamma_0^{-1}\gamma\gamma_0 z - \overline{z})^{-2k} \\ &= \ell_{\gamma_0^{-1}\gamma\gamma_0}(z) \end{aligned}$$

Il résulte de la partie (ii) du lemme que pour toute orbite $\mathcal{C}$ de l'action de $SL_2(\mathbb{Z})$ par conjugaison sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$, la somme $\sum_{\gamma \in \mathcal{C}} \ell_\gamma$ est une fonction Γ-invariante. On peut en particulier écrire une décomposition $\omega_N = \sum_t \omega_N^t$, où les ω_N^t sont données par

$$\omega_N^t(z) = \sum_{\substack{\gamma \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}) \\ \det \gamma = N \\ \operatorname{Tr} \gamma = t}} j(\gamma, z)^{-2k} (\gamma z - \bar{z})^{-2k} \left(\mathfrak{Im} z\right)^{2k}$$

Il suffit donc de calculer séparément les intégrales des ω_N^t sur le quotient $\Gamma \backslash \mathbb{H}$. Plus précisément, nous montrerons :

Proposition 5.5
(i) Si $t^2 - 4N < 0$ et $\rho = \frac{1}{2}\left(t + i\sqrt{4N - t^2}\right)$, et si H est la fonction définie dans la section suivante, alors

$$C_k^{-1} N^{2k-1} \int_{\Gamma \backslash \mathbb{H}} \omega_N^t \mathrm{d}\mu = \frac{\bar{\rho}^{2k-1}}{\rho - \bar{\rho}} H(t^2 - 4N)$$

(ii) Si $t^2 - 4N = 0$, alors

$$C_k^{-1} N^{2k-1} \int_{\Gamma \backslash \mathbb{H}} \omega_N^t \mathrm{d}\mu = \frac{2k-1}{24} N^{k-1} - \frac{1}{4} N^{k-\frac{1}{2}}$$

(iii) Si $t^2 - 4N > 0$ est le carré d'un entier u, alors

$$C_k^{-1} N^{2k-1} \int_{\Gamma \backslash \mathbb{H}} \left(\omega_N^t + \omega_N^{-t}\right) \mathrm{d}\mu = -\left(\frac{|t| - |u|}{2}\right)^{2k-1}$$

(iv) Si $t^2 - 4N > 0$ n'est pas le carré d'un entier, alors

$$\int_{\Gamma \backslash \mathbb{H}} \left(\omega_N^t + \omega_N^{-t}\right) \mathrm{d}\mu = 0$$

La formule des traces résultera de la proposition 5.5 en sommant sur les différentes valeurs de t, et en prenant garde au cas où N est un carré.

5.4 Lien avec les formes quadratiques entières

Le contenu de cette section est en partie inspiré de [3].

Définition 5.6
*Une **forme quadratique entière** q est un élément de $\mathbb{Z}[X, Y]$, homogène de degré 2. Un tel objet s'écrit donc $q = q(X, Y) = \alpha X^2 + \beta XY + \gamma Y^2$, et la **matrice** de q est par définition*

$$M = M_q = \begin{pmatrix} \alpha & \frac{\beta}{2} \\ \frac{\beta}{2} & \gamma \end{pmatrix}$$

*Le **discriminant** $\operatorname{disc} q$ de q est la quantité $-4 \det M_q$. On note $\mathcal{Q}_\Delta$ l'ensemble des formes quadratiques entières de discriminant Δ.*

Notons que $\mathcal{Q}_\Delta$ est vide si $\Delta \equiv 2, 3 \pmod 4$. Par ailleurs, le groupe modulaire Γ agit naturellement à droite sur l'ensemble $\mathcal{Q}_\Delta$ par composition à droite :

$$q \cdot \gamma(X, Y) = q(aX + bY, cX + dY) \qquad \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Matriciellement, il s'agit simplement de l'opération $M \longmapsto \gamma^T M \gamma$. Sous cette forme, il est clair que $q \cdot \gamma$ a le même discriminant que q, de sorte que Γ agit sur chaque $\mathcal{Q}_\Delta$. On note alors $\mathcal{H}_\Delta = \mathcal{Q}_\Delta/\Gamma$ l'espace quotient. La fonction H apparaissant dans la partie (i) de la proposition 5.5 est définie par la formule

$$H(\Delta) = \sum_{q \in \mathcal{H}_\Delta} \frac{1}{|\Gamma_q|}$$

Remarque 5. Si un groupe fini G agit à droite sur un ensemble fini X, alors on a l'identité

$$\frac{|X|}{|G|} = \sum_{x \in X/G} \frac{1}{|G_x|}$$

Lemme 5.7 *Toute forme quadratique de discriminant Δ non-carré est dans la même orbite sous l'action de Γ qu'une forme $aX^2 + bXY + cY^2$ avec $|b| \leq |a| \leq |c|$.*

Démonstration.
Soit $q(X,Y)$ une forme de discriminant Δ non-carré, alors il existe $(r,s) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $a = q(r,s)$ satisfaisant $|a| = \min\{|q(x,y)|; (x,y) \in \mathbb{Z}^2\}\backslash\{0\}$. On a alors $\mathrm{pgcd}(r,s) = 1$, puisque $\frac{|a|}{(\mathrm{pgcd}(r,s))^2} = |q(\frac{r}{\mathrm{pgcd}(r,s)}, \frac{s}{\mathrm{pgcd}(r,s)})| \geq |a|$. Il existe donc des entiers u, v tels que $\gamma = \begin{pmatrix} r & s \\ u & v \end{pmatrix}$ soit dans $SL_2(\mathbb{Z})$. On en déduit $q(X,Y) \sim q(rX+sY, uX+vY) = aX^2 + b'XY + c'Y^2 \sim a(X+nY)^2 + b'(X+nY)Y + c'Y^2 = aX^2 + (b'+2na)XY + (na^2+b'n+c')Y^2$ où $b', c' \in \mathbb{Z}$. On prends $n \in \mathbb{Z}$ pour que $b = b'+2na$ vérifie $|b| \leq |a|$. Comme $c = na^2 + b'n + c' = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 \cdot 1 + (na^2 + b'n + c')1^2$, on a $(r', s') \in \mathbb{Z}^2$ tels que $c = q(r', s')$. On en déduit que $|a| \leq |c|$.

Lemme 5.8 *Soit $q(X,Y) = aX^2 + bXY + cY^2$ une forme avec $\mathrm{pgcd}(a,b,c) = 1$, alors $\gamma \in SL_2(\mathbb{Z})$ stabilise q si et seulement si*

$$\gamma = \begin{pmatrix} \frac{t-bk}{2} & -ck \\ ak & \frac{t+bk}{2} \end{pmatrix}$$

pour des entiers (t,k) satisfaisant l'équation de Pell

$$t^2 - \Delta k^2 = 4$$

.

Démonstration.
Supposons que $\gamma = \begin{pmatrix} r & s \\ u & v \end{pmatrix}$ stabilise q. On a alors

$$a = ar^2 + bru + cu^2,$$

$$ars + bsu + cuv = 0.$$

En utilisant deux équations ci-dessus

$$as = cu(ur - vs) = -cu \tag{5}$$

$$av = arv(rv - su) + bu(rv - su) = arv + bu \tag{6}$$

Donc $a|bu$ et $a|cu$. Comme $\mathrm{pgcd}(a,b,c) = 1$, on a $a|u$, i.e. $u = ak$ pour un $k \in \mathbb{Z}$. En remplaçant u par ak en (1) et (2), on obtient $s = -ck$ et $v - r = bk$. Ainsi on a

$$(r+v)^2 = (r-v)^2 + 4rv = b^2k^2 + 4(1+su) = b^2k^2 + 4(1-ack^2) = \Delta k^2 + 4.$$

En posant $t = r + v$ avec $r = \frac{t-bk}{2}$ et $v = \frac{t+bk}{2}$, on a alors $t^2 - \Delta k^2 = 4$.

Réciproquement, supposons que γ est de la forme $\gamma \cdot p = a'X^2 + b'XY + c'Y^2$. L'équation de Pell entraîne que $\frac{t+bk}{2} \cdot \frac{t-bk}{2} + ack^2 = 1$, donc $\frac{t+bk}{2} \cdot \frac{t-bk}{2}$ est entier. Comme $t + bk$ et $t - bk$ ont la même parité, tous les deux sont pairs. $\frac{t+bk}{2}, \frac{t-bk}{2}$ sont donc entiers, ainsi γ est dans $SL_2(\mathbb{Z})$. Calculons :

$$a' = a \cdot \frac{t-bk}{2}^2 + b(\frac{t-bk}{2}) \cdot ak + c(ak)^2 = \frac{a}{4}(t^2 - (b^2 - 4ac)k^2) = \frac{a}{4}(t^2 - \Delta k^2) = a.$$

De même, $b' = b$. Puisque $\gamma \in SL_2(\mathbb{Z})$, on a $b'^2 - 4a'c' = b^2 - 4ac$, puis $c' = c$, c'est-à-dire, $\gamma \cdot q = q$.

Proposition 5.9

(i) Si $\Delta < 0$, alors $\mathcal{H}_\Delta$ est fini. Pour $q \in \mathcal{H}_\Delta$, le stabilisateur Γ_q est de cardinal 2 si $X^2 + Y^2 \in q$, 3 si $X^2 + XY + Y^2 \in q$, et 1 sinon.

(ii) Si $\Delta = 0$, alors les formes quadratiques $q_r = rY^2$ forment un système complet de représentants pour $\mathcal{H}_0$. Le stabilisateur de q_0 est Γ, et celui de q_r pour $r \neq 0$ est le groupe cyclique infini engendré par

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(iii) Si $\Delta > 0$ est le carré d'un entier u, alors les formes quadratiques $q_u^h = X(hX - uY)$ où $0 \leq h < u$ forment un système complet de représentants pour $\mathcal{H}_\Delta$. Le stabilisateur de chaque q_u^h est trivial.

(iv) Si $\Delta > 0$ n'est pas le carré d'un entier, alors $\mathcal{H}_\Delta$ est fini. Le stabilisateur de chaque point de $\mathcal{H}_\Delta$ est cyclique infini.

Démonstration.

(i) Soit $q(X, Y) = aX^2 + bXY + cY^2$ une forme quadratique entière de discriminant $\Delta < 0$ vérifiant $|b| \leq |a| \leq |c|$. Donc $0 \leq b^2 < 4ac$,et $4a^2 \leq 4ac = b^2 - \Delta \leq a^2 + |\Delta|$ puis $|b| \leq |a| \leq \sqrt{\frac{|\Delta|}{3}}$. Comme $c = \frac{b^2-\Delta}{4a}$ est déterminé par a, b, Δ, les formes $q(X, Y)$ dont les coefficients vérifient les conditions ci-dessus forment une ensemble fini. D'après le lemme 5.8, $\mathcal{H}_\Delta$ est fini.
D'après le lemme précédent, il y a une bijection entre $\Lambda_q = \{\gamma \in SL_2(\mathbb{Z}) : q \cdot \gamma = q\}$ et $S_\Delta = \{(t, k) \in \mathbb{Z}^2 : t^2 - \Delta k^2 = 4\}$. On a donc $|\Gamma_q| = |\{\gamma \in \Gamma : q \cdot \gamma = q\}| = \frac{1}{2}|\{(t, k) \in \mathbb{Z}^2 : t^2 - \Delta k^2 = 4\}|$ où Δ est le discriminant de q. On calcule alors :

$$|\{(t, k) \in \mathbb{Z}^2 : t^2 - \Delta k^2 = 4\}| = \begin{cases} 2, & \text{si} \quad \Delta < -4, \\ 4, & \text{si} \quad \Delta = -4, \\ 6, & \text{si} \quad \Delta = -3. \end{cases}$$

(ii) • Soit $q = \alpha X^2 + \beta XY + \gamma Y^2$ une forme quadratique entière de discriminant nul. Notons s le plus grand diviseur commun de α et γ. Si s n'est pas défini, alors $\alpha = \gamma = 0$, puis $\beta^2 = 4\alpha\gamma = 0$, d'où $q = 0 = q_0$. Supposons donc que s est bien défini. Comme $\beta^2 = 4\alpha\gamma$, les coefficients α et γ sont de même signe. Il existe donc un choix de signe $r = \pm s$ tel que r soit de même signe que α et γ. Mais $(\frac{\beta}{2r})^2 = \frac{\alpha}{r}\frac{\gamma}{r}$, et $\frac{\alpha}{r}, \frac{\gamma}{r}$ sont des entiers naturels premiers entre eux. Ce sont donc les carrés d'entiers c et d, respectivement. On doit avoir $\beta = \pm 2rcd$; quitte à changer le signe de c, on peut supposer que $\beta = 2rcd$. Comme c et d sont premiers entre eux, il existe $\gamma \in \Gamma$ dont la deuxième ligne est (c, d). On calcule alors :

$$q_r \cdot \gamma(X, Y) = r(cX + dY)^2 = rc^2X^2 + 2rcdXY + rd^2Y^2 = q(X, Y)$$

Donc q est dans la même orbite que q_r.
• Soit maintenant r, s des entiers relatifs, et $\gamma \in \Gamma$ tel que $\gamma \cdot q_r = q_s$. Si a, b, c, d sont les coefficients d'un représentant de γ, on a

$$sY^2 = q_s(X, Y) = q_r \cdot \gamma(X, Y) = r(cX + dY)^2$$

Donc $rd^2 = s$, $2rcd = 0$, $rc^2 = 0$. Si $r = 0$, alors $s = rd^2 = 0$ et γ peut être quelconque. Sinon, la troisième égalité implique $c = 0$. On a alors $ad = ad - bc = 1$ de sorte que $a = d = \pm 1$. Quitte à changer le représentant de γ, on peut supposer $a = d = 1$. On a alors $s = rd^2 = r$, et $\gamma = \tau^b$. Nous avons donc montré simultanément que les formes q_r sont deux à deux non équivalentes, et que leurs stabilisateurs sont bien ceux décrits dans la proposition.

(iii) • Soit $q = \alpha X^2 + \beta XY + \gamma Y^2$ une forme quadratique entière de discriminant u^2. Comme $\beta^2 = u^2 + 4\alpha\gamma$, les entiers β et u ont la même parité. Notons alors r le plus grand diviseur commun de α et $\frac{\beta+u}{2}$. Si $\beta = -u$, alors on applique à q la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

et le nouveau coefficient de XY est alors $u \neq -u$, de sorte que l'on est ramené au cas où $\beta + u \neq 0$. On se place désormais dans ce cas. Soit $a = \frac{\alpha}{r}$ et $b = \frac{\beta+u}{2r}$: ce sont des entiers premiers entre eux. La relation $\beta^2 = u^2 + 4\alpha\gamma$ peut se réécrire $b\frac{\beta-u}{2} = a\gamma$. Comme a et b sont premiers entre eux, il existe un entier k tel que $\frac{\beta-u}{2} = ak$ et $\gamma = bk$. On choisit un $\gamma \in \Gamma$ dont la première ligne est (a,b). Soit (c,d) sa deuxième ligne. On note que $\alpha = ar$, $\beta = rb + ak$ et $\gamma = bk$, de sorte que $q(X,Y) = (rX + kY)(aX + bY)$. Donc $q \cdot \gamma^{-1}(X,Y) = X((rd - kc)X - uY)$. On peut écrire $rd - kc = qu + h$ avec $0 \leq h < u$. On applique alors à $\gamma^{-1} \cdot q$ la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ q & 1 \end{pmatrix}$$

pour obtenir la forme quadratique q_u^h.
• Soit maintenant r, h des entiers entre 0 et $u-1$, et $\gamma \in \Gamma$ tel que $q_u^r \cdot \gamma = q_u^h$. Si a, b, c, d sont les coefficients d'un représentant de γ, on a

$$X(hX - uY) = (aX + bY)((ra - uc)X + (rb - ud)Y)$$

En identifiant les termes en Y^2, on obtient $b(rb - ud) = 0$. Si $b \neq 0$, alors $rb = ud$. Comme b et d sont premiers entre eux, il existe un entier k tel que $r = dk$ et $u = bk$. On a alors $ra - uc = k(ad - bc) = k$, puis

$$X(hX - uY) = X(akX + bkY) = X(akX + uY)$$

On obtient alors une contradiction en comparant les termes en XY. Donc $b = 0$, de sorte que $ad = ad - bc = 1$, puis $a = d = \pm 1$. Quitte à changer le représentant de γ, on peut supposer $a = d = 1$. On a alors $r - uc = h$, ce qui implique $c = 0$, puis $r = h$ et $\gamma = 1$. Nous avons donc montré simultanément que les formes q_u^h sont deux à deux non équivalentes, et que leurs stabilisateurs sont triviaux.

(iv) Soit $q(X,Y) = aX^2 + bXY + cY^2$ une forme de discriminant $\Delta > 0$ non-carré, vérifiant de plus $|b| \leq |a| \leq |c|$. On a alors $4ac < b^2 \leq |a||c|$, d'où $ac < 0$ et $4a^2 < 4|a||c| = -4ac = \Delta - b^2 \leq \Delta$, de sorte que $|b| \leq |a| \leq \frac{\sqrt{\Delta}}{2}$. On conclut comme en (i) que l'ensemble $\mathcal{H}_\Delta$ est fini.
En conservant les notations du (i), nous allons à présent montrer que Λ_q est un groupe 2-cyclique infini, ou plus précisément que le groupe $\Gamma_q = \Lambda_q/(\gamma \sim -\gamma)$ est un groupe cyclique infini. La structure de groupe de Λ_q induit sur S_Δ une structure de groupe. Celle-ci est explicitement donnée par $(t_1,k_1)\cdot(t_2,k_2) = (t',k')$ avec $t' = t_1t_2 + \Delta k_1k_2, k' = t_1k_2 + k_1t_2$. Lélément neutre est $(2,0)$, et l'inverse de (t,k) est donné par $(t,-k)$. Le stabilisateur Γ_q s'identifie alors à $S_q/((t,k) \sim (-t,-k)) \simeq \{(t,k) \in \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z} : t^2 - \Delta k^2 = 4\}$. Considérons $(T,K) \in {\mathbb{Z}_+}^2 \backslash \{(2,0)\}$ un élément de S_Δ qui minimise $T + K\sqrt{\Delta}$. On a clairement $\langle (T,K) \rangle \subset S_\Delta$. Supposons à présent l'existence d'une solution positive (t,k) en dehors de $\langle (T,K) \rangle$. On a alors $t + k\sqrt{\Delta} > T + K\sqrt{\Delta}$, et comme $T + K\sqrt{\Delta} > 2$, il existe un entier n tel que

$$\left(\frac{T + K\sqrt{\Delta}}{2}\right)^n < \frac{t + k\sqrt{\Delta}}{2} < \left(\frac{T + K\sqrt{\Delta}}{2}\right)^{n+1}.$$

En multipliant par le nombre positif $(\frac{T - K\sqrt{\Delta}}{2})^n = \frac{T_n - K_n\sqrt{\Delta}}{2}$, on obtient

$$1 < \frac{t' + k'\sqrt{\Delta}}{2} < \frac{T + K\sqrt{\Delta}}{2},$$

où $t' = \frac{tT_n - \Delta k K_n}{2}$ et $k' = \frac{T_n k - K_n t}{2}$ sont entiers.
De plus, $t'^2 - \Delta k'^2 = \frac{1}{4}(t^2 - \Delta k^2)(T^2 - \Delta K^2) = 4 = T^2 - \Delta K^2$. Comme $t' + \sqrt{\Delta}k' > 2$, on a $0 < t' - \sqrt{\Delta}k' < 2$, de sorte que t' et k' sont des entiers positifs. Mais $t' + \sqrt{\Delta}k' < T + \sqrt{\Delta}K$, ce qui contredit la minimalité de (T,K). Il n'y a donc pas de solution positive en dehors de $\langle (T,K) \rangle$.

Proposition 5.10
Soit ϵ la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. L'application $\theta_t : q \longmapsto \frac{t}{2}I - \epsilon M_q$ réalise une bijection entre $\mathcal{Q}_\Delta$ - où on identifie une forme quadratique et sa matrice - et l'ensemble des $\gamma \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ de déterminant N et de trace t, où $N = \frac{t^2-\Delta}{4}$. L'application réciproque est $\theta_t^{-1} : \gamma \longmapsto \frac{1}{2}(\epsilon\gamma + \gamma^T\epsilon^T)$.

Démonstration.
Soit q une forme quadratique, et soit $M_q = \begin{pmatrix} \alpha & \frac{\beta}{2} \\ \frac{\beta}{2} & \gamma \end{pmatrix}$ sa matrice. On a $\epsilon M_q = \begin{pmatrix} \frac{\beta}{2} & \gamma \\ -\alpha & -\frac{\beta}{2} \end{pmatrix}$. On a donc bien $\mathrm{Tr}(\theta_t(q)) = t$ et $\det(\theta_t(q)) = N$. On vérifie de même que si γ est de déterminant N et de trace t, alors $\frac{1}{2}(\epsilon\gamma + \gamma^T\epsilon^T)$ est bien une matrice symétrique de déterminant $-\frac{\Delta}{4}$. Un calcul direct montre que les deux fonctions θ_t et θ_t^{-1} sont bien inverses l'une de l'autre.

L'identité $\epsilon^T\gamma\epsilon = (\det\gamma)(\gamma^{-1})^T$ montre que pour $\gamma \in \Gamma$, on a

$$\begin{aligned} \gamma^{-1}(\frac{t}{2}I - \epsilon M_q)\gamma &= \frac{t}{2}I - \gamma^{-1}\epsilon M_q\gamma \\ &= \frac{t}{2}I - \epsilon\gamma^T M_q\gamma \end{aligned}$$

Puisque $\gamma^T M_q\gamma$ est la matrice de $q \cdot \gamma$, ceci montre que $\theta_t(q\cdot\gamma) = \gamma^{-1}\theta_t(q)\gamma$. Si on pose $R_q^t = \ell_{\theta_t(q)}$, nous venons de montrer - au vu du lemme 5.4 - que les R_q^t satisfont l'identité

$$R^t_{q\cdot\gamma}(z) = R^t_q(\gamma z)$$

de sorte que l'on peut écrire

$$\begin{aligned} \omega_N^t &= \sum_{q\in\mathcal{Q}_\Delta} R_q^t \\ &= \sum_{q\in\mathcal{H}_\Delta}\sum_{\gamma\in\Gamma_q\backslash\Gamma} R^t_{q\cdot\gamma} \\ &= \sum_{q\in\mathcal{H}_\Delta}\sum_{\gamma\in\Gamma_q\backslash\Gamma} R^t_q\circ\gamma \end{aligned}$$

En ce qui concerne notre objectif, à savoir l'intégrale de ω_N^t, on obtient formellement - en ignorant toute question de convergence - l'expression suivante :

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma\backslash\mathbb{H}} \omega_N^t \mathrm{d}\mu &= \int_{F_\Gamma} \omega_N^t \mathrm{d}\mu \\ &= \sum_{q\in\mathcal{H}_\Delta}\sum_{\gamma\in\Gamma_q\backslash\Gamma} \int_{F_\Gamma} R_q^t\circ\gamma\mathrm{d}\mu \\ &= \sum_{q\in\mathcal{H}_\Delta}\sum_{\gamma\in\Gamma_q\backslash\Gamma} \int_{\gamma F_\Gamma} R_q^t\mathrm{d}\mu \\ &= \sum_{q\in\mathcal{H}_\Delta} \int_{F_{\Gamma_q}} R_q^t\mathrm{d}\mu \\ &= \sum_{q\in\mathcal{H}_\Delta} \int_{\Gamma_q\backslash\mathbb{H}} R_q^t\mathrm{d}\mu \end{aligned}$$

La proposition 5.9 identifie alors quatre comportements distincts pour $\mathcal{H}_\Delta$ et les stabilisateurs de ces points en fonction de Δ. Ces quatre cas seront traités séparément dans les sections qui suivent.

5.5 Cas $\Delta < 0$

Soit $q(X,Y) = \alpha X^2 + \beta XY + \gamma Y^2$ une forme quadratique entière de discriminant $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma < 0$. Nous avons vu dans la proposition 5.9 que Γ_q est un groupe fini, de sorte que

$$\begin{aligned}\int_{F_{\Gamma_q}} R_q^t \mathrm{d}\mu &= \frac{1}{|\Gamma_q|}\int_{\mathbb{H}} R_q^t \mathrm{d}\mu \\ &= \frac{1}{|\Gamma_q|}\int_{\mathbb{H}} \frac{y^{2k}}{(|z|^2 - ity - \frac{1}{4}\Delta)^{2k}}\mathrm{d}\mu \\ &= \frac{1}{|\Gamma_q|} I\end{aligned}$$

On a donc

$$\int_{\Gamma\backslash\mathbb{H}} \omega_N^t \mathrm{d}\mu = H(\Delta) I$$

où $H(\Delta)$ a été défini dans la section précédente, et nous sommes ramenés au calcul de l'intégrale

$$I = \int_{\mathbb{H}} \frac{y^{2k}}{(|z|^2 - ity - \frac{1}{4}\Delta)^{2k}}\mathrm{d}\mu. \tag{7}$$

Nous utilisons pour cela la formule

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+A)^{2k}}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{(2k-1)!}\frac{1}{2}\frac{3}{2}\cdots\left(2k - \frac{3}{2}\right) A^{-2k+\frac{1}{2}} \tag{8}$$

qui s'obtient en dérivant $2k-2$ fois par rapport à A la formule correspondante pour $k = 1$. On a alors

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\infty y^{2k}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2 + y^2 - ity - \frac{1}{4}\Delta)^{2k}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \int_0^\infty \frac{\pi}{(2k-1)!}\frac{1}{2}\frac{3}{2}\cdots\frac{1}{2k-\frac{3}{2}}\frac{y^k}{(y^2 - ity - \frac{1}{4}\Delta)^{2k-\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{\pi\, i^{2k-2}}{(2k-1)!}\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^{2k-2}}{\mathrm{d}t^{2k-2}}\int_0^\infty (y^2 - ity - \frac{1}{4}\Delta)^{-\frac{3}{2}}\mathrm{d}y \\ &= \frac{\pi\, i^{2k-2}}{(2k-1)!}\frac{\mathrm{d}^{2k-2}}{\mathrm{d}t^{2k-2}}\left(\frac{4}{t^2-\Delta}\frac{y - i\frac{t}{2}}{\sqrt{y^2 - ity - \frac{1}{4}\Delta}}\right)\Big|_0^\infty \\ &= \frac{\pi\, i^{2k-2}}{(2k-1)!}\frac{\mathrm{d}^{2k-2}}{\mathrm{d}t^{2k-2}}\frac{4}{\sqrt{|\Delta|}}\frac{1}{\sqrt{|\Delta|}-it} \\ &= \frac{2\pi}{2k-1}\cdot\frac{1}{\sqrt{|\Delta|}}\left(\frac{1}{\sqrt{|\Delta|}-it}\right)^{2k}\end{aligned}$$

On en conclut que

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma\backslash\mathbb{H}} \omega_N^t \mathrm{d}\mu &= C_k^{-1} N^{2k-1} \times H(t^2 - 4N) \times \frac{2\pi}{2k-1}\cdot\frac{1}{\sqrt{|\Delta|}}\left(\frac{1}{\sqrt{|\Delta|}-it}\right)^{2k} \\ &= \frac{\rho^{-2k-1}}{\rho - \bar{\rho}} \times H(t^2 - 4N)\end{aligned}$$

où on a posé $\rho = \frac{1}{2}(t + i\sqrt{4N - t^2})$.

5.6 Cas $\Delta = 0$

On suppose ici que $\Delta = t^2 - 4N = 0$. La proposition 5.9 (ii) et la remarque conclusive de la section 5.4 montre que

$$\int_{\Gamma\backslash\mathbb{H}} \omega_N^t \mathrm{d}\mu = \int_{\Gamma\backslash\mathbb{H}} R_{q_0}^t \mathrm{d}\mu + \sum_{r\neq 0} \int_{\langle\tau\rangle\backslash\mathbb{H}} R_{q_r}^t \mathrm{d}\mu$$

Par ailleurs, τ agit sur $\mathbb{H}$ par une translation horizontale $z \longmapsto z+1$, de sorte que l'on peut choisir comme domaine fondamental pour $\langle\tau\rangle\backslash\mathbb{H}$ la bande verticale $F_{\langle\tau\rangle} = \{z \in \mathbb{H} \,|\, x \in [0,1]\}$. Mais $R_{q_0}^t(z) = (\frac{i}{t})^{2k}$ est indépendant de z, et $\int_{F_\Gamma} \mathrm{d}\mu = \frac{\pi}{3}$, le premier terme est donc $(-1)^k \frac{\pi}{3t^{2k}}$. Le second terme est égal à

$$\int_0^\infty \int_0^1 y^{2k-2} \sum_{r\in\mathbb{Z}, r\neq 0} (r - ity)^{-2k} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{i^{2k-2}}{(2k-1)!} \frac{\mathrm{d}^{2k-2}}{\mathrm{d}t^{2k-2}} \int_0^\infty \sum_{r\in\mathbb{Z}, r\neq 0} (r - ity)^{-2}\mathrm{d}y$$

$$= \frac{i^{2k-2}}{(2k-1)!} \frac{\mathrm{d}^{2k-2}}{\mathrm{d}t^{2k-2}} \int_0^\infty \frac{1}{t^2y^2} - \frac{\pi^2}{\sinh^2(\pi t y)} \mathrm{d}y$$

On a pour tout $\epsilon > 0$,

$$\int_\epsilon^\infty \frac{1}{t^2y^2} - \frac{\pi^2}{\sinh^2(\pi t y)} \mathrm{d}y = \frac{1}{\epsilon t^2} - \pi^2 \frac{1}{\pi t}(-\mathrm{sgn}(t) + \frac{\cosh(\pi t \epsilon)}{\sinh(\pi t \epsilon)})$$
$$= \frac{\pi}{|t|} + o(\epsilon).$$

En faisant tendre ϵ vers 0, on obtient que le second terme est

$$\frac{i^{2k-2}}{(2k-1)!} \frac{\mathrm{d}^{2k-2}}{\mathrm{d}t^{2k-2}} \frac{\pi}{|t|} = (-1)^{k-1} \frac{\pi}{2k-1} |t|^{-2k+1}.$$

On a donc, pour $\Delta = 0$, c'est-à-dire $t = \pm 2\sqrt{N}$,

$$C_k^{-1} N^{2k-1} \int_{F_\Gamma} \omega_N^t \mathrm{d}\mu = \frac{2k-1}{24} N^{k-1} - \frac{1}{4} N^{k-\frac{1}{2}}$$

Ce qui donne bien la formule voulue dans le cas $\Delta = 0$.

5.7 Cas $\Delta = u^2 > 0$

On suppose ici que $\Delta = t^2 - 4N$ est le carré d'un entier strictement positif u. D'après la proposition 5.9 (iii), on a dans ce cas

$$\int_{\Gamma\backslash\mathbb{H}} \omega_N^t \mathrm{d}\mu = \int_{F_\Gamma} \omega_N^t \mathrm{d}\mu$$
$$= \sum_{q\in\mathcal{H}_\Delta} \int_{\Gamma_q\backslash\mathbb{H}} R_q^t \mathrm{d}\mu$$
$$= \sum_{0\leq h<u} \int_{\mathbb{H}} R_{q_u^h}^t \mathrm{d}\mu$$
$$= \sum_{1\leq h\leq u} \int_{\mathbb{H}} R_{q_u^h}^t \mathrm{d}\mu$$

où la dernière égalité provient du fait que q_u^0 et q_u^u sont dans la même Γ-orbite. Mais le calcul de $R^t_{q_u^h}$ donne pour $z = x + iy \in \mathbb{H}$:

$$\begin{aligned}
R^t_{q_u^h}(z) &= j(\gamma, z)^{-2k}(\gamma z - \bar{z})^{-2k} y^{2k} \quad ; \gamma = \begin{pmatrix} \frac{t+u}{2} & 0 \\ h & \frac{t-u}{2} \end{pmatrix} \\
&= (z\frac{t+u}{2} - \bar{z}(hz + \frac{t-u}{2}))^{-2k} y^{2k} \\
&= (h|z|^2 + 2ux + ity)^{-2k} y^{2k} \\
&= ((hx + \frac{u}{2})^2 + (hy)^2 + it(hy) - \frac{u^2}{4})^{-2k}(hy)^{2k}
\end{aligned}$$

Puisque $z \longmapsto hz + \frac{u}{2}$ préserve la mesure hyperbolique μ, on doit avoir

$$\int_{\mathbb{H}} R^t_{q_u^h} \mathrm{d}\mu = \int_{\mathbb{H}} (x^2 + y^2 + ity - \frac{u^2}{4})^{-2k} y^{2k} \mathrm{d}\mu$$

et donc

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma\backslash\mathbb{H}} \omega_N^t \mathrm{d}\mu &= u \int_{\mathbb{H}} (x^2 + y^2 + ity - \frac{u^2}{4})^{-2k} y^{2k} \mathrm{d}\mu \\
&= u \iint_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*} (x^2 + y^2 + ity - \frac{u^2}{4})^{-2k} y^{2k-2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y
\end{aligned}$$

Lemme 5.11 *L'intégrale*

$$\int_{\mathbb{R}_+^*} \left(\int_{\mathbb{R}} (x^2 + y^2 + ity - \frac{u^2}{4})^{-2k} y^{2k-2} \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y$$

converge et vaut $\frac{C_k}{2u} \left(\frac{2}{|t|+u} \right)^{2k-1}$.

Démonstration.
Supposons tout d'abord $t > 0$. La convergence de l'intégrale est une conséquence du calcul suivant :

$$\begin{aligned}
&\lim_{Y_+\to+\infty, Y_-\to 0} \int_{[Y_-,Y_+]} \left(\int_{\mathbb{R}} (x^2+y^2+ity-\frac{u^2}{4})^{-2k} y^{2k-2} \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y \\
&= \lim_{Y_+\to+\infty, Y_-\to 0} \frac{\mathrm{d}^{2k-2}}{(k-1)!(-i)^{2k-2}\mathrm{d}t^{2k-2}} \int_{[Y_-,Y_+]} \left(\int_{\mathbb{R}} (x^2+y^2+ity-\frac{u^2}{4})^{-2} \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y \\
&= \lim_{Y_+\to+\infty, Y_-\to 0} \frac{\mathrm{d}^{2k-2}}{(k-1)!(-i)^{2k-2}\mathrm{d}t^{2k-2}} \int_{[Y_-,Y_+]} \left(\int_{\mathbb{R}} (x^2+y^2+ity-\frac{u^2}{4})^{-2} \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y \\
&= \lim_{Y_+\to+\infty, Y_-\to 0} (-1)^{k-1} \frac{\mathrm{d}^{2k-2}}{(2k-1)!\mathrm{d}t^{2k-2}} \int_{[Y_-,Y_+]} \frac{\pi}{2} \left(y^2+ity-\frac{u^2}{4} \right)^{-\frac{3}{2}} \mathrm{d}y \\
&= \lim_{Y_+\to+\infty, Y_-\to 0} \pi(-1)^{k-1} \frac{\mathrm{d}^{2k-2}}{2(2k-1)!\mathrm{d}t^{2k-2}} \left[\frac{4y+2it}{(t^2-u^2)\sqrt{y^2+ity-\frac{u^2}{4}}} \right]_{y=Y_-}^{y=Y^+} \\
&= \pi(-1)^{k-1} \frac{\mathrm{d}^{2k-2}}{2(2k-1)!\mathrm{d}t^{2k-2}} \frac{4-\frac{4it}{iu}}{t^2-u^2} \\
&= 2\pi(-1)^k \frac{\mathrm{d}^{2k-2}}{u(2k-1)!\mathrm{d}t^{2k-2}} \frac{1}{t+u} \\
&= 2\pi(-1)^k \frac{1}{u(2k-1)} \frac{1}{(t+u)^{2k-1}} \\
&= \frac{C_k}{2u} \left(\frac{2}{t+u} \right)^{2k-1}
\end{aligned}$$

On obtient le cas $t < 0$ en conjuguant le tout.

Puisque l'on a par ailleurs $\frac{2N}{|t|+u} = \frac{t^2-u^2}{2(|t|+u)} = \frac{|t|-u}{2}$, le lemme 5.11 montre que l'on devrait avoir

$$C_k^{-1} N^{2k-1} \int_{\Gamma\backslash\mathbb{H}} \omega_N^t \mathrm{d}\mu = \frac{1}{2} \left(\frac{|t|-u}{2} \right)^{2k-1}$$

Nous obtenons donc l'exact opposé du résultat escompté ! Plus précisément, la formule des traces, une fois établie, montrera que la formule ci-dessus est fausse. L'erreur se situe au niveau de l'interversion non justifiée

$$\int_{F_\Gamma} \sum_{\gamma\in\Gamma} R_q^t \circ \gamma \mathrm{d}\mu = \sum_{\gamma\in\Gamma} \int_{F_\Gamma} R_q^t \circ \gamma \mathrm{d}\mu$$

En effet, les calculs ci-dessus montrent que la finitude de la quantité

$$\sum_{\gamma\in\Gamma} \int_{F_\Gamma} |R_q^t \circ \gamma| \mathrm{d}\mu$$

est équivalente à l'absolue convergence de l'intégrale apparaissant dans le lemme 5.11. Mais les singularités de l'intégrande en $x + iy = \pm\frac{u}{2}$ préviennent précisément toute convergence absolue. Cette erreur - doublée d'une erreur de signe qui rendait le résultat final correct - était présente dans l'article original [5] de Don Zagier, et a été corrigée par son auteur dans une note non publiée [6]. Puisque nous n'avons pas eu connaissance suffisamment tôt de l'existence de cette note, la méthode que nous nous apprêtons à présenter diffère de celle proposée dans cet erratum.
Soit maintenant Y un grand réel positif, et introduisons le compact $K_Y = \{z \in F_\Gamma | \mathrm{Im} z \leq$

$Y\}$. On peut alors intervertir

$$\begin{aligned}\int_{K_Y}\sum_{\gamma\in\Gamma}R_q^t\circ\gamma\mathrm{d}\mu &= \sum_{\gamma\in\Gamma}\int_{K_Y}R_q^t\circ\gamma\mathrm{d}\mu\\ &= \int_{S_Y}R_q^t\mathrm{d}\mu\end{aligned}$$

où S_Y est la réunion des γK_Y lorsque γ parcourt Γ. La Γ-invariance de S_Y et les calculs du début de cette section montrent alors que

$$\int_{K_Y}\omega_N^t\mathrm{d}\mu = u\iint_{S_Y}(x^2+y^2+ity-\frac{u^2}{4})^{-2k}y^{2k-2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Lorsque $Y\to+\infty$, le membre de gauche tend bien vers l'intégrale totale de ω_N^t. L'analyse de la convergence du membre de droite lorsque $Y\to+\infty$ est plus délicate. Nous débutons par une décomposition géométriquement motivée de cette intégrale : le lemme qui suit envoie les singularités en $z=\pm\frac{u}{2}$ sur des singularités à l'infini, plus simples à gérer.

Lemme 5.12 *Si les intégrales $I_j(t)$ données par*

$$\begin{aligned}I_1(t) &= \int_{\mathbb{R}_+^*}\left(\int_{\mathbb{R}}(x^2+y^2+ity-\frac{u^2}{4})^{-2k}\mathrm{d}x\right)y^{2k-2}\mathrm{d}y\\ I_2(t) &= \int_{\mathbb{R}_+^*}\left(\int_{\mathbb{R}}\mathbb{1}_{|z-\frac{u}{2}|\le\frac{u}{2}}(x^2+y^2+ity-\frac{u^2}{4})^{-2k}\mathrm{d}x\right)y^{2k-2}\mathrm{d}y\\ I_3(t) &= \int_{\mathbb{R}_+^*}\left(\int_{\mathbb{R}}\mathbb{1}_{|z|\ge\frac{1}{2u}}(ux+\frac{1}{4}+ity)^{-2k}\mathrm{d}x\right)y^{2k-2}\mathrm{d}y\end{aligned}$$

sont convergentes, alors on a une décomposition

$$\int_{\Gamma\backslash\mathbb{H}}\omega_N^t\mathrm{d}\mu = uI_1(t)-2uI_2(t)+2uI_3(t)$$

Démonstration.
Nous repartons de l'égalité

$$\begin{aligned}\int_{K_Y}\omega_N^t\mathrm{d}\mu &= u\iint_{S_Y}(x^2+y^2+ity-\frac{u^2}{4})^{-2k}y^{2k-2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &= u\iint_{S_Y}R_q^t\mathrm{d}\mu\end{aligned}$$

où $q=X^2-\frac{u^2}{4}Y^2$. Nous supposons maintenant que $u=2h+1$ est un entier impair ; le cas où u est pair est similaire, et même légèrement plus simple. On peut encore décomposer

$$\iint_{S_Y}R_q^t\mathrm{d}\mu = \iint_{S_Y}\mathbb{1}_{|z\pm\frac{u}{2}|\ge\frac{u}{2}}R_q^t\mathrm{d}\mu + \iint_{S_Y}\mathbb{1}_{|z-\frac{u}{2}|\le\frac{u}{2}}R_q^t\mathrm{d}\mu + \iint_{S_Y}\mathbb{1}_{|z+\frac{u}{2}|\le\frac{u}{2}}R_q^t\mathrm{d}\mu$$

La symétrie $x\longmapsto -x$ montre que les deux dernières intégrales sont égales. La fonction $\mathbb{1}_{|z\pm\frac{u}{2}|\ge\frac{u}{2}}R_q^t$ étant par ailleurs intégrable, le premier terme converge vers la quantité

$$\iint_{\mathbb{H}}\mathbb{1}_{|z\pm\frac{u}{2}|\ge\frac{u}{2}}R_q^t\mathrm{d}\mu = \int_{\mathbb{R}_+^*}\left(\int_{\mathbb{R}}\mathbb{1}_{|z\pm\frac{u}{2}|\ge\frac{u}{2}}R_q^t\mathrm{d}x\right)y^{-2}\mathrm{d}y = I_1(t)-2I_2(t)$$

En résumé, il nous suffit de montrer que sous les hypothèses du lemme, on a

$$\iint_{S_Y} \mathbb{1}_{|z-\frac{u}{2}|\leq\frac{u}{2}} R_q^t \mathrm{d}\mu \xrightarrow[Y\to+\infty]{} I_3(t)$$

Considérons à cet effet la matrice

$$\gamma = \begin{pmatrix} u & h \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \in \Gamma$$

L'action de γ sur q est aisément calculée :

$$q \cdot \gamma(X, Y) = (uX + hY)^2 - \frac{u^2}{4}(2X + Y)^2 = -uXY - (h + \frac{1}{4})Y^2$$

On en déduit alors que

$$R_q^t \circ \gamma = (u(x + \frac{1}{2}) - \frac{1}{4} - ity)^{-2k} y^{2k}$$

Puisque l'on a par ailleurs $\gamma^{-1}(\frac{u}{2} \pm \frac{-u}{2}) = \frac{-1}{2} \pm \frac{1}{2u}$, nous savons que γ^{-1} envoie le demi-cercle de centre $\frac{u}{2}$ et de rayon $\frac{u}{2}$ sur le demi-cercle de centre $\frac{-1}{2}$ et de rayon $\frac{1}{2u}$. De ces remarques nous concluons :

$$\begin{aligned}
\iint_{S_Y} \mathbb{1}_{|z-\frac{u}{2}|\leq\frac{u}{2}} R_q^t \mathrm{d}\mu &= \iint_{S_Y \cap D(\frac{u}{2},\frac{u}{2})} R_q^t \mathrm{d}\mu \\
&= \iint_{S_Y \cap \gamma^{-1} D(\frac{u}{2},\frac{u}{2})} R_q^t \circ \gamma \mathrm{d}\mu \\
&= \iint_{S_Y + \frac{1}{2}} \mathbb{1}_{|z|\geq\frac{1}{2u}} (ux - \frac{1}{4} - ity)^{-2k} y^{2k-2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y
\end{aligned}$$

L'intégrande étant intégrable sur la bande $0 < y \leq 1$, cette dernière quantité est de la forme

$$\int_0^Y \left(\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{|z|\geq\frac{1}{2u}} (ux + \frac{1}{4} + ity)^{-2k} \mathrm{d}x \right) y^{2k-2} \mathrm{d}y + o(1)$$

lorsque $Y \longrightarrow +\infty$, ce qui montre le résultat annoncé.

Lemme 5.13 *La quantité I_2 vérifie l'identité*

$$I_2(t) + I_2(-t) = \frac{C_k}{2u} \left(\frac{2}{u + |t|} \right)^{2k-1}$$

Démonstration.
Soit $t > 0$. La fraction rationnelle $f_y^k(z) = (z^2 + iy(t - 2z) - \frac{u^2}{4})^{-2k}$ n'a pas de pôle dans le domaine délimité par les courbes $|z - \frac{u}{2}| = \frac{u}{2}$ et $\mathrm{Im} z = y$. On a donc

$$\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{|z-\frac{u}{2}|\leq\frac{u}{2}} (x^2 + y^2 + ity - \frac{u^2}{4})^{-2k} \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{|z-\frac{u}{2}|\leq\frac{u}{2}} f_y^k(x + iy) \mathrm{d}x = -\int_{\partial D(\frac{u}{2},\frac{u}{2})\cap\mathbb{H}} \mathbb{1}_{\mathrm{Im} z\geq y} f_y^k(z) \mathrm{d}z$$

L'intérêt de cette manipulation est double : d'une part nous nous sommes éloignés de la singularité $z = \frac{u}{2}$, ce qui justifie l'interversion qui va suivre, et d'autre part la fonction $y \mapsto f_y^1(z)$ admet a présent une primitive très simple, à savoir $\frac{1}{i(2z-t)}(z^2 + iy(t - 2z) - \frac{u^2}{4})^{-1}$. Nous pouvons maintenant écrire

$$\begin{aligned}
I_2(t) &= \int_{\mathbb{R}_+^*} \left(\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{|z-\frac{u}{2}|\leq\frac{u}{2}} (x^2+y^2+ity-\frac{u^2}{4})^{-2k} \mathrm{d}x \right) y^{2k-2}\mathrm{d}y \\
&= -\int_{\partial D(\frac{u}{2},\frac{u}{2})\cap\mathbb{H}} \left(\int_0^{\mathrm{Im}z} f_y^k(z) y^{2k-2}\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}z \\
&= \frac{(-1)^k}{(2k-1)!} \frac{\mathrm{d}^{2k-2}}{\mathrm{d}t^{2k-2}} \int_{\partial D(\frac{u}{2},\frac{u}{2})\cap\mathbb{H}} \left(\int_0^{\mathrm{Im}z} f_y^1(z)\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}z \\
&= \frac{(-1)^k}{(2k-1)!} \frac{\mathrm{d}^{2k-2}}{\mathrm{d}t^{2k-2}} \int_{\partial D(\frac{u}{2},\frac{u}{2})\cap\mathbb{H}} \left((x^2+y^2+ity-\frac{u^2}{4})^{-1} - (z^2-\frac{u^2}{4})^{-1} \right) \frac{\mathrm{d}z}{i(2z-t)} \\
&= \frac{(-1)^k}{(2k-1)!} \frac{\mathrm{d}^{2k-2}}{\mathrm{d}t^{2k-2}} \int_{\partial D(0,\frac{u}{2})\cap\mathbb{H}} \left((x(x+u)+y^2+ity)^{-1} - z^{-1}(z+u)^{-1} \right) \frac{\mathrm{d}z}{i(2z+u-t)}
\end{aligned}$$

Posons $z = \frac{us}{2}$ dans cette dernière intégrale :

$$\begin{aligned}
I_2(t) &= \frac{(-1)^k}{(2k-1)!} \frac{\mathrm{d}^{2k-2}}{\mathrm{d}t^{2k-2}} \frac{2}{u^2} \int_{\partial D(0,1)\cap\mathbb{H}} \left((1+2x+\frac{2it}{u}y)^{-1} - z^{-1}(z+2)^{-1} \right) \frac{\mathrm{d}z}{i(z+1-\frac{t}{u})} \\
&= \frac{4\pi(-1)^k}{u^2(2k-1)!} \frac{\mathrm{d}^{2k-2}}{\mathrm{d}t^{2k-2}} \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D(0,1)\cap\mathbb{H}} \frac{(z^2-1)\mathrm{d}z}{z(z+2)((1+\frac{t}{u})z^2+z+1-\frac{t}{u})}
\end{aligned}$$

On montre de même que l'on a, toujours sous l'hypothèse $t>0$,

$$I_2(-t) = \frac{4\pi(-1)^k}{u^2(2k-1)!} \frac{\mathrm{d}^{2k-2}}{\mathrm{d}t^{2k-2}} \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D(0,1)\cap(-\mathbb{H})} \frac{(z^2-1)\mathrm{d}z}{z(z+2)((1+\frac{t}{u})z^2+z+1-\frac{t}{u})}$$

L'hypothèse $t>0$ implique que le seul pôle de l'intégrande hors du disque unité se situe en $z=-2$. Si l'on voit l'opposé du cercle unité comme un contour englobant le point à l'infini, le théorème des résidus donne

$$\begin{aligned}
I_2(t)+I_2(-t) &= \frac{4\pi(-1)^k}{u^2(2k-1)!} \frac{\mathrm{d}^{2k-2}}{\mathrm{d}t^{2k-2}} \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D(0,1)} \frac{(z^2-1)\mathrm{d}z}{z(z+2)((1+\frac{t}{u})z^2+z+1-\frac{t}{u})} \\
&= \frac{4\pi(-1)^k}{u^2(2k-1)!} \frac{\mathrm{d}^{2k-2}}{\mathrm{d}t^{2k-2}} \frac{1}{2(1+\frac{t}{u})} \\
&= \frac{2\pi(-1)^k}{u(2k-1)(u+t)^{2k-1}} \\
&= \frac{C_k}{2u} \left(\frac{2}{u+t} \right)^{2k-1}
\end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration.

Lemme 5.14 *La quantité I_3 vérifie l'identité*

$$I_3(t)+I_3(-t) = -\frac{C_k}{2u} \left(\frac{2}{|t|+u} \right)^{2k-1}$$

Démonstration.
Puisque $x \longmapsto -\frac{1}{2k-1}(ux+\frac{1}{4}+ity)^{-2k+1}$ est une primitive de $x \longmapsto u(ux+\frac{1}{4}+ity)^{-2k}$, l'expression de $I_3(t)$ se simplifie ainsi :

$$uI_3(t) = \frac{1}{2k-1} \int_0^{\frac{1}{2u}} \left((u\sqrt{\frac{1}{4u^2}-y^2}+\frac{1}{4}+ity)^{-2k+1} - (-u\sqrt{\frac{1}{4u^2}-y^2}+\frac{1}{4}+ity)^{-2k+1} \right) y^{2k-2}\mathrm{d}y$$

On effectue à présent le changement de variable $y = \frac{1}{2u}\sin\theta$:

$$uI_3(t) = \frac{1}{u^{2k-1}(2k-1)}\int_0^{\pi}(\cos\theta + \frac{1}{2} + \frac{it}{u}\sin\theta)^{-2k+1}(\sin\theta)^{2k-2}\cos\theta\mathrm{d}\theta$$

Ajoutons à présent la contribution de $uI_3(-t)$, puis effectuons le changement de variable $z = e^{i\theta}$:

$$\begin{aligned}uI_3(t) + uI_3(-t) &= \frac{2\pi(-1)^{k-1}}{u^{2k-1}(2k-1)}\frac{1}{2i\pi}\int_{|z|=1}\frac{(z-z^{-1})^{2k-2}(z+z^{-1})\mathrm{d}z}{z\left(z+z^{-1}+1+\frac{t}{u}(z-z^{-1})\right)^{2k-1}} \\ &= -\frac{2^{2k-2}C_k}{u^{2k-1}}\frac{1}{2i\pi}\int_{|z|=1}\frac{(1-z^2)^{2k-2}(1+z^2)\mathrm{d}z}{z\left((1+\frac{t}{u})z^2+z+1-\frac{t}{u}\right)^{2k-1}}\end{aligned}$$

On peut certainement supposer $t < 0$. Dans ce cas, le seul pôle de l'intégrande dans le disque unité se situe en $z = 0$: on vérifie en effet que sous l'hypothèse $t < 0$, les racines du polynôme $(1+\frac{t}{u})X^2 + X + 1 - \frac{t}{u}$ sont en dehors du disque unité. Le théorème des résidus donne alors

$$uI_3(t) + uI_3(-t) = -\frac{2^{2k-2}C_k}{u^{2k-1}(1-\frac{t}{u})^{2k-1}} = -\frac{2^{2k-2}C_k}{(u+|t|)^{2k-1}}$$

Puisque le calcul de $I_1(t)$ était l'objet du lemme 5.11, nous sommes à présent en mesure d'affirmer que

$$\begin{aligned}C_k^{-1}N^{2k-1}\int_{\Gamma\backslash\mathbb{H}}\left(\omega_N^t + \omega_N^{-t}\right)\mathrm{d}\mu &= uC_k^{-1}N^{2k-1}(I_1(t)+I_1(-t)-2I_2(t)-2I_2(-t)+2I_3(t)+2I_3(-t)) \\ &= \left(\frac{|t|-u}{2}\right)^{2k-1} - \left(\frac{|t|-u}{2}\right)^{2k-1} - \left(\frac{|t|-u}{2}\right)^{2k-1} \\ &= -\left(\frac{|t|-u}{2}\right)^{2k-1}\end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration de la partie (*iii*) de la proposition 5.5.

5.8 Cas $\Delta > 0$ non carré

Nous allons ici démontrer que pour chaque forme q de discriminant $\Delta > 0$ non carré, on a

$$\int_{F_{\Gamma_q}} R_q^t\mathrm{d}\mu + \int_{F_{\Gamma_q}} R_q^{-t}\mathrm{d}\mu = 0$$

Soit $q = \alpha X^2 + \beta XY + \gamma Y^2$ une forme quadratique entière de discriminant $\Delta > 0$ non carré ; on peut factoriser q comme un produit $\alpha(X - wY)(X - w'Y)$, où $w' > w$ sont les deux racines réelles de $q(X,1)$. On a en particulier $w' - w = \sqrt{\Delta}$. Si on pose $\gamma = (w'-w)^{-\frac{1}{2}}\begin{pmatrix} w' & w \\ 1 & 1\end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{R})$ - notons que l'article original [5] comporte une erreur de signe dans la définition de γ - alors $q\cdot\gamma = (w'-w)^{-1}\alpha(w'X+wY-w'(X+Y))(w'X+wY-w(X+Y)) = -(w'-w)\alpha XY = -\sqrt{\Delta}XY$. Le conjugué $\gamma^{-1}\Gamma_q\gamma$ du groupe Γ_q par γ opère sur le demi-plan supérieur comme le groupe cyclique infini engendré par une certaine dilatation $z \to \varepsilon^2 z$: ceci est en effet assuré par la proposition 5.9 et le fait que le stabilisateur dans $PSL_2(\mathbb{R})$ de $-\sqrt{\Delta}XY$ soit le sous-groupe des matrices diagonales de $PSL_2(\mathbb{R})$, isomorphe à $\mathbb{R}_+^*$, et que ces matrices diagonales agissent par dilatation sur $\mathbb{H}$. On peut donc choisir le domaine fondamental F_{Γ_q}

de sorte que que $\gamma^{-1}F_{\Gamma_q}$ soit une demi-couronne $\{z \,|\, y > 0, 1 \leq |z| \leq \epsilon^2\}$. On a alors

$$\begin{aligned}
\int_{F_{\Gamma_q}} R_q^t \mathrm{d}\mu &= \int_{F_{\Gamma_q}} R_{q\dot{\gamma}}^t \circ \gamma^{-1} \mathrm{d}\mu \\
&= \iint_{y>0, 1\leq |z| \leq \epsilon^2} (\sqrt{\Delta}x + ity)^{-2k} y^{2k-2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \int_0^{\pi} \int_1^{\epsilon^2} (\sqrt{\Delta}\cos\theta + it\sin\theta)^{-2k} (\sin\theta)^{2k-2} \frac{\mathrm{d}r}{r} \mathrm{d}\theta \\
&= (\log \epsilon^2) \int_0^{\pi} (\sqrt{\Delta}\cos\theta + it\sin\theta)^{-2k} (\sin\theta)^{2k-2} \mathrm{d}\theta.
\end{aligned}$$

Ajoutons la contribution de $-t$:

$$\int_{\Gamma\backslash\mathbb{H}} \left(\omega_N^t + \omega_N^{-t}\right) \mathrm{d}\mu = (\log \epsilon^2) \int_{-\pi}^{\pi} (\sqrt{\Delta}\cos\theta + it\sin\theta)^{-2k} (\sin\theta)^{2k-2} \mathrm{d}\theta = 0.$$

par le théorème des résidus, en ayant effectué au préalable le changement de variable $z = e^{i\theta}$.

Références

[1] Automorphic forms and representations, Daniel Bump, Cambridge Studies in Advanced Mathemetics, 55, 1998.

[2] Elementary Number Theory, Edmund Landau, translated by J.E. Goodman, New York, 1958.

[3] Theory Of Numbers, G. B. Mathews, 2nd ed., New York NY, Chelsea.

[4] Cours d'arithmétique, Jean-Pierre Serre, PUF, Paris, 1995.

[5] Traces des opérateurs de Hecke, Don Zagier, Séminaire Delange-Pisot-Poitou ; Théorie des nombres, 17 no. 2, Exposé No. 23, 1975-1976.

[6] Correction to "The Eichler-Selberg trace formula on $SL_2(\mathbb{Z})$", Don Zagier, International Summer School on Modular Functions, Bonn 1976, disponible à l'adresse http ://people.mpim-bonn.mpg.de/zagier/files/doi/10.1007/BFb0065300/fulltext.pdf