INTRODUCTION AU PROBLÈME DE MÉTRIQUE CANONIQUE

XIA MINGCHEN

[1]

Table des matières

1. Le problème de métrique canonique

Soit (X, L) une variété lisse polarisée complexe, c'est-à-dire, une variété lisse complexe compacte X munie d'une fibré en droite ample L.

Rappelons qu'on dit que L est ample s'il existe une métrique lisse dont la courbure soit strictement positive.

Théorème 1.1 (Kodaira). *L est ample ssi il existe un entier positif m_0 tel que pour tout $m \geq m_0$, $|mL|$ est très ample, c'est-à-dire le morphisme déterminé par $|mL|$ est un plongement.*

On va fixer les notations : S est la courbure scalaire de certaine métrique sur X. Ric est la courbure de Ricci. Si l'on veut être plus prudent, on met également la métrique dans les notations, comme S_φ et Ric_φ.

On rappelle une variété Kählerienne est une variété qui admet une métrique Kählerienne, c'est-à-dire, une métrique hermitienne h, localement donné par $(h_{i\bar{j}})$, telle que la forme

$$\omega = \frac{i}{2} h_{i\bar{j}} \mathrm{d}z^i \wedge \mathrm{d}\bar{z}^j$$

[1] Ce papier est destiné aux personnes complètement nulles en mathématiques, comme demandé par les jeunes relecteurs de l'ENS.

soit fermée.

Un problème central de la géométrie complexe est de trouver une métrique Kählerienne dont la courbure scalaire S soit constante (Abréviation :cscK pour constant scalar curvature Kähler en anglais) dans la classe $c_1(L)$, où $c_1(L)$ est la première classe de Chern de la fibré L. Autrement dit, on veut résoudre l'équation suivante :

$$S = \bar{S}.$$

Ici,

$$\bar{S} = \frac{1}{V}\int_X S\omega^n,$$

où $V = (L^n)$ est le volume de X, ω^n étant une métrique Kählerienne dans la classe $c_1(L)$. On observe que la constante $\bar{S}$ ne dépend que de la polarisation L. En fait, soit φ une métrique lisse au dessus de L, on a alors

$$\int_X S_\varphi \,\mathrm{MA}(\varphi) = \int_X \mathrm{tr}_{\mathrm{dd^c}\varphi} \mathrm{Ric}_\varphi \,\mathrm{MA}(\varphi) = n\int_X \mathrm{Ric}_\varphi (\mathrm{dd^c}\varphi)^{n-1} = -n(K_X \cdot L^{n-1}).$$

Ici MA est l'opérateur de Monge-Ampère, autrement dit,

$$\mathrm{MA}(\varphi) = (\mathrm{dd^c}\varphi)^n.$$

K_X est la fibré canonique, le produit à droite est celui au sens de la théorie d'intersection. On a utilisé les notations additives pour une métrique sur une fibré en droite.

Donc on a

$$\bar{S} = -\frac{n}{V}(K_X \cdot L^{n-1}).$$

En particulier,

$$\mathrm{Ric}_\varphi - \frac{\bar{S}}{n}\mathrm{dd^c}\varphi$$

est sans trace.

Cette expression ne peut être exacte que quand ω_φ est dans la droite engendrée par $c_1(L)$ ou $\bar{S} = 0$. Autrement dit, les seules possibilités sont (après certaines réductions)

1. $c_1 < 0$, $L = K_X$. (Anti-Fano)
2. $c_1 = 0$. (Calabi-Yau)
3. $c_1 > 0$, $L = -K_X$. (Fano)

Dans ces cas là, l'équation de métrique cscK devient

$$\mathrm{Ric}_\varphi = \lambda \mathrm{dd^c}\varphi. \tag{1.1}$$

De telles métriques sont connues sous le nom de métriques de Kähler-Einstein ou KE en abrégé.

En terme des coordonnées locales, où l'on fixe une métrique Kählerienne arbitraire

$$\omega = \mathrm{dd^c}\varphi^0$$

dans $c_1(L)$, on identifie φ avec une fonction

$$\psi = \varphi - \varphi^0.$$

On va réécrire (1.1) en termes de ψ : D'abord,

$$\mathrm{Ric}_{\varphi_0} - \lambda \mathrm{dd^c} \varphi^0 = \mathrm{dd^c} h \tag{1.2}$$

pour une certaine $h \in C^\infty(X)$.

Prenons la différence entre (1.1) et (1.2). On conclut

$$-\mathrm{dd^c} \log \frac{\mathrm{MA}(\varphi)}{\mathrm{MA}(\varphi^0)} - \lambda \mathrm{dd^c} \psi = -\mathrm{dd^c} h,$$

Donc quitte à ajouter une constante à h, on arrive à

$$\log \frac{\mathrm{MA}(\varphi)}{\mathrm{MA}(\varphi^0)} + \lambda \psi = h.$$

Autrement dit,

$$\boxed{\mathrm{MA}(\varphi^0 + \psi) = e^{h - \lambda\psi}\, \mathrm{MA}(\varphi^0).} \tag{1.3}$$

La seule restriction sur $h \in C^\infty(X)$ est que quand $\lambda = 0$, le volume des deux parties soient égales, c'est-à-dire,

$$\frac{1}{V} \int_X e^h\, \mathrm{MA}(\varphi^0) = 1. \tag{1.4}$$

Cette equation est une EDP elliptique totalement non-linéaire.

La théorie générale de telle équation sont bien connue d'après Caffarelli, P.L.Lions et d'autres. ([7], [13]).

Pour comprendre le problème général d'une métrique cscK, il faut comprendre le comportement d'une fonctionnel M sur $\mathcal{H}$ (l'espace des métriques). (Voir Section 4). L'espace $\mathcal{H}$ est un espace symétrique de dimension infinie, donc il est difficile de le comprendre directement, mais on va introduire des approximations $\mathcal{H}_m$ de dimensions finies de $\mathcal{H}$ et étudier tout d'abord le comportement de M sur $\mathcal{H}_m$, qui est connu comme le théorème de Paul.

Ces choses sont mieux compris maintenant en utilisant le langage de limite NA de Boucksom-Hisamoto-Jonsson.

Dans Section 2, on va expliquer le théorème de Calabi-Yau.

Dans Section 3, on va expliquer le conjecture de Yau-Tian-Donaldson sur les variétés Fano.

Dans Section 4, on va introduire le conjecture de Tian.

Dans Section 5, on va considérer les métriques de Bergman.

Dans Section 6, on va introduire le théorème de Paul.

Finalement, dans Section 7, on introduit le point de vue de Boucksom-Hisamoto-Jonsson.

2. Théorème de Calabi-Yau

Si $c_1(X) = 0$, c'est-à-dire X est Calabi-Yau, l'existence de métriques KE est bien établie par S.T.Yau. ([25]). En fait, le théorème de Yau est plus fort que ça :

Théorème 2.1 (Yau)**.** *Soit (X, L) une variété polarisée, alors l'opérateur de Monge-Ampère*

$$\mathrm{MA} : \mathcal{H}/\mathbb{R} \to \mathcal{M}_{V,s}(X)$$

est bijectif.

En particulier, sur toutes les variétés où $c_1 = 0$ (Calabi-Yau), dans toutes les classes de polarisation, il y a une seule métrique Ricci plate.

Ici $\mathcal{H}$ est l'espace des métriques lisses et positives sur L, $\mathcal{M}(X)$ est l'espace de mesure de Borel sur X et $\mathcal{M}_{V,s}(X) \subset \mathcal{M}(X)$ est son sous-espace des formes de volume V.

Remarque 2.1.1. Ce théorème était la conjecture de Calabi. (Voir [8])

Il y a plein de généralisations de ce théorème. Par exemple : Conjecture de Gauduchon. ([22]) Théorème de Calabi-Yau faible ([3]) L'équation de Monge-Ampère sur les variétés à bord. ([4]) Variétés de Calabi-Yau non-compactes, etc.

Si $c_1(X) < 0$ et $L = K_X$, presque la même démonstration marche([1]). C'est le théorème d'Aubin-Yau.

3. Métrique KE sur les variétés Fano

Si $c_1(X) > 0$ et $L = -K_X$, le problème est plus délicat.

Toutes les variétés Fano ne possèdent pas de métrique Kähler-Einstein. En fait, on ne sait pas si toutes les hypersurfaces dans $\mathbb{C}P^N$ admettent métrique KE.

Par exemple, une variété Fano et KE M doit satisfaire la condition suivante :

$$\mathrm{Aut}^0(M) \text{ est réductif. ([18])}$$

Dans les années quatre-vingts, cette condition et une autre, l'invariant de Futaki ([17],[9]) étaient les seules obstructions connues à l'existence d'une métrique KE.

Néanmoins, il était conjecturé par Yau, Tian, Donaldson que l'existence d'une métrique cscK est équivalente à certaines conditions de stabilité au sens de GIT(Geometric invariant theory). Cette conjecture est inspirée par la correspondance de Kobayashi-Hitchin.

Dans le cas Fano, c'est vrai, c'est le théorème de Chen-Donaldson-Sun([10],[11],[12]) avec un résultat antérieur de Berman([2]) :

Théorème 3.1. *L'existence d'une métrique KE sur une variété Fano est équivalente à la K-poly-stabilité de cette variété.*

On donne la définition de K-stabilité ici et on remarque que c'est une analogue du critère de Hilbert-Mumford dans GIT.

Définition 3.1. Soit (X, L) une variété polarisée, une *configuration teste* de (X, L) est une paire $(\mathcal{X}, \mathcal{L})$ où $\mathcal{X}$ est une variété et $\mathcal{L}$ est une $\mathbb{Q}$-fibré en droite semi-ample sur X, avec un morphisme $\pi : \mathcal{X} \to \mathbb{C}$ telle que les conditions suivantes soient vérifiées

1. Il existe une action $\mathbb{C}^*$ sur $(\mathcal{X}, \mathcal{L})$.
2. π est $\mathbb{C}^*$-invariant.
3. On a une identification canonique $(\mathcal{X}|_{\pi^{-1}(1)}, \mathcal{L}|_{\pi^{-1}(1)}) \cong (X, L)$.
4. $\mathcal{X}$ est normale.

Définition 3.2. Soit $(\mathcal{X}, \mathcal{L})$ une variété polarisée, soit $(\mathcal{X}, \mathcal{L})$ une configuration teste de (X, L), on définit :

$$N_k = H^0(\mathcal{X}_0, k\mathcal{L}_0)$$

et

$$w_k = \deg_{\mathbb{C}^*} \Lambda^{N_k} H^0(\mathcal{X}_0, k\mathcal{L}_0).$$

Alors,

$$w_k/kN_k \sim F_0 + F_0 k^{-1} + F_2 k^{-2} + \cdots$$

quand $k \to \infty$, on définit alors l'invariant de Donaldson-Futaki comme

$$\mathrm{DF}(\mathcal{X}, \mathcal{L}) = -2F_1.$$

Définition 3.3. Soit $(\mathcal{X}, \mathcal{L})$ une variété polarisée, (X, L) est *K-polystable* si pour toute configuration teste $(\mathcal{X}, \mathcal{L})$ de (X, L), $\mathrm{DF}(\mathcal{X}, \mathcal{L}) \geq 0$ et $= 0$ ssi $(\mathcal{X}, \mathcal{L})$ est isomorphique à un produit.

On constate, tout de même que ce résultat est de peu d'importance en pratique, car la K-polystabilité est une condition nonvérifiable.

Pour autant que je sache, jusqu'à maintenant, le seul critère vérifiable et général à l'existence d'une métrique KE est celui du α-invariant de Tian([23], [15]) avec ses généralisations comme [16].

4. La conjecture de propreté de Tian

Dans cette partie, (X, L) est une variété polarisée. Quand X est Fano, on prend toujours $L = -K_X$, $\mathcal{H}$ est l'espace des métriques positives lisses Hermitiennes sur L. $\mathcal{H}$ est naturellement une variété de Fréchet. Il existe certaines métriques différentes sur le fibré tangent de $\mathcal{H}$: Celle de Mabuchi, celle de Finsler-L^1, etc.

On a une approche variationnelle du problème de métrique cscK. On définit la fonctionnelle de Mabuchi

$$M : \mathcal{H} \to \mathbb{R},$$

dont les points stationnaires sont métrique cscK.

Dans le cas Fano, il est plus facile d'utiliser la fonctionnelle de Ding D. On a une inégalité

$$D \leq M.$$

On va utiliser la notation : $\eta(X)$ est l'algèbre de Lie des champs de vecteurs holomorphe sur X, c'est-à-dire, l'algèbre de Lie de $\mathrm{Aut}(X)$.

Le point clé est l'observation de Tian([24]) : Dans le cas Fano, si $\eta(X) = 0$ (pour éliminer l' obstruction de Futaki), l'existence de métrique KE est équivalente à la propreté de D. On va préciser cela.

La propreté à deux sens différents, la définition originaire de Tian est : Il existe une fonction croissante $f : [0, \infty) \to [c, \infty)$ tendant vers infini à l'infini telle que

$$D \geq f(J) \text{ on } \mathcal{H},$$

où J est la fonctionnelle J d'Aubin.

Tian a démontré :

1. Soit $\eta(X) = 0$, si D est propre, alors X admet une métrique KE.
2. Soit $\eta(X) = 0$, si X admet une métrique KE, alors

$$D \geq AJ^{\gamma} - B,$$

où

$$\gamma = e^{-n}/(8n + 8 + e^{-n}).$$

La conjecture célèbre de Tian est la suivante : il est possible d'avoir $\gamma = 1$. C'est vrai d'après Phong, et al.([21]).

Un résultat similaire pour cscK est établi plus tard. ([14])

A partir de maintenant, la propreté se définit comme suit :

$F : \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ est propre ssi

$$F \geq AJ - B, \ A, B \in \mathbb{R}_{>0}.$$

Théorème 4.1. *Soit X Fano, les suivantes sont équivalentes*

(1) *Il existe métrique KE sur X.*
(2) *F est $Aut^0(X)$-invariante, et sa décente à $\mathcal{H}/G$ est propre.*
(3) *F est $Aut^0(X)$-invariant, et sa décente à $\mathcal{H}/G$ est propre par rapport à la métrique L^1-Finsler.*

Pour le sens précis de ce théorème, voir [14].

La même chose est conjecturée pour cscK, je ne sais pas si elle est résolue ou pas.

En tous cas, il est nécessaire d'étudier le comportement de M sur $\mathcal{H}$.

Donc dans la section prochaine, on va étudier le comportement de M sur les quantisations $\mathcal{H}^m$ de $\mathcal{H}$, qui donnent des informations utiles.

5. Métrique de Bergman et quantisation

Soit (X, L) une variété polarisée.

Le comportement de la variété $\mathcal{H}$ de dimension infinie est difficile à étudier, donc on va l'approximer par des espaces de dimension finie. Autrement dit, on va quantiser $\mathcal{H}$.

5.1. **Métrique de Mabuchi.** D'abord, on considère la métrique sur $\mathcal{H}$. En fait, cet espace est équipé de la métrique de Mabuchi : pour

$$\varphi \in \mathcal{H},$$

et

$$f, g \in T_\varphi \mathcal{H} = C^\infty(X, \mathbb{R}),$$

le produit scalaire est défini comme

$$(f, g)_\varphi = \int_X f\bar{g}\,\mathrm{MA}(\varphi).$$

Cet espace est équipé d'une connexion Riemannienne naturelle.

Mabuchi a prouvé que l'énergie de Mabuchi M est convexe le long de géodésique, qui est définit par

$$\ddot{\varphi} = \frac{1}{2}\|\nabla\dot{\varphi}\|_\varphi^2,$$

En fait, le problème des géodésiques sur cet espace est équivalent à un problème de Dirichlet de l'équation de Monge-Ampère homogène par Donaldson et Sommes.

Après une perturbation petite, de telles equations sont d'un type bien compris. $\mathcal{H}$ est un espace métrique par rapport à la métrique géodésique induite par la métrique de Mabuchi.

5.2. **Les espaces $\mathcal{H}_m$.** Soit $N_m = \dim |mL|$.

Soit $\mathcal{H}_m$ l'espace des métriques hermitiennes positives sur $H^0(X, mL)$. On identifie

$$\mathcal{H}_m \cong SL(N_m + 1, \mathbb{C})/SU(N_m + 1).$$

Notons que cette identification n'est pas canonique.

On a une application de quantisation

$$H_m : \mathcal{H} \to \mathcal{H}_m,$$

définie pour

$$\varphi \in \mathcal{H},$$

et

$$s \in H^0(X, mL),$$

par

$$\|s\|_{H_m} = \frac{1}{V}\int_X |s|_\varphi\,\mathrm{MA}(\varphi).$$

En revanche, on a l'application de Fubini-Study

$$FS_m : \mathcal{H}_m \to \mathcal{H},$$

définie par le pull-back de la métrique de Fubini-Study par l'application de Kodaira de

$$\mathbb{P}H^0(X, mL)^\vee$$

à une métrique sur mL, donc celle-ci induit une métrique sur L.

En utilisant ces applications, on identifie $\mathcal{H}_m$ à un sous-espace de $\mathcal{H}$.

Théorème 5.1. *1. $\mathcal{H}_m$ approxime $\mathcal{H}$ au sens suivant :*

$$FS_k \circ H_k(k\varphi) \to \varphi \text{ in } C^\infty$$

pour chaque

$$\varphi \in \mathcal{H}.$$

2. Les géodésiques sur $\mathcal{H}_m$ approximent les géodésiques faibles sur $\mathcal{H}$ uniformément.

C'est le théorème de Phong-Sturm.

Intuitivement, m^{-1} correspond à la constante Planck. Quand $m \to \infty$, il se produit exactement ce qu'on pourrait imaginer.

On pourrait donc essayer de comprendre d'abord les fonctionnelles sur $\mathcal{H}_m$ pour comprendre celles sur $\mathcal{H}$.

6. Un théorème de Paul

Dans ses papiers ([19],[20]), Paul a étudié le comportement de l'énergie de Monge-Ampère et Mabuchi sur $\mathcal{H}_m$. Ses résultats sont :

Définition 6.1. Soit $f : \mathcal{H}_m = SL(N_m+1, \mathbb{C})/SU(N_m+1) \to \mathbb{R}$ une fonction.

1. On dit que f a *singularité log norme* au sens faible s'il y a un nombre fini de G-modules V_i normés et éléments $v_i \in V_i$ telles que

$$f([\sigma]) = \sum_i c_i \|\sigma \cdot v_i\| + O(1) \tag{6.1}$$

pour certaines constantes $c_i \in \mathbb{R}$.

2. f a *singularité log norme* s'il existe un nombre fini de G-modules V_i avec norme continue (c'est-à-dire, considéré comme métriques sur $\mathcal{O}_{\mathbb{P}V}(-1)$, ils sont continues par rapport à celles de Fubini-Study) et éléments $v_i \in V_i$ tels que

$$f([\sigma]) = \sum_i c_i \|\sigma \cdot v_i\| \tag{6.2}$$

pour certaines constantes $c_i \in \mathbb{R}$.

Théorème 6.1 (Paul)**.** *L'énergie de Mabuchi M et Monge-Ampère E ont singularités log normes sur $\mathcal{H}_m$.*

En fait, les constantes dans (6.2) sont rationnelles dans ces cas là.

Pour l'expliquer, on va considérer une variété polarisée (X, L), soit L très ample pour simplification, alors on plonge X dans $\mathbb{P}^N$ par $|L|$.

Paul considère la fonctionnelle de Donaldson associé à c_{n+1} de la fibré $J_1(L)^\vee$, où $J_1(L)$ est la fibré de 1-jet associé à L.

En utilisant une méthode de Tian, Paul a pu exprimer cette fonctionnelle de Donaldson en termes de X-hyperdiscriminant.

Rappelons rapidement les définitions. La variété duale $X^\vee$ de X est la sous-variété de $\mathbb{P}^{N\vee}$ qui se compose de toute les hypersurfaces tangentes à X. La défection de X est

$$\delta(X) = N - 1 - \dim(X^\vee).$$

Quand $\delta(X) = 0$, on dit que X est nondégénérée. Soit $d^\vee$ le degré de X, soit Δ_X un polynôme qui définit $X^\vee$, il est naturel d'écrire

$$[\Delta_X] \in B := \mathbb{P}H^0(\mathbb{P}^{N\vee}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{N\vee}}(d^\vee)).$$

On appelle Δ_X le X-hyperdiscriminant. Le $X \times \mathbb{P}^n$-hyperdiscriminant est toujours bien défini même si $\delta(X) > 0$, dans ce cas là, $\Delta_{X\times\mathbb{P}^n}$ est connu sous le nom de *forme de Cayley-Chow*. Cette équivalence est connue comme l'astuce de Cayley.

Le lemme principal de Paul est

Théorème 6.2 (Paul)**.** *Soit X une sous-variété lisse, linéairement normale de $\mathbb{C}P^N$ de dimension n, soit X non-dégénéré, alors il existe une métrique continue $\|\ \|$ sur $B = \mathbb{P}H^0(\mathbb{P}^{N\vee}, \mathcal{O}(d^\vee))$, telle que*

$$(-1)^{n+1} D_{J_1(\mathcal{O}_X(1))^\vee}(c_{n+1}, \sigma, e) = \log \frac{\|\sigma \cdot \Delta_X\|}{\|\Delta_X\|},$$

où $e, \sigma \in G = SL(N+1, \mathbb{C})$, e est l'identité. On identifie (la classe d') un élément dans G avec la métrique de Bergman correspondante.

Du coup, Paul considère la séquence suivante

$$0 \to -L \to J_1(L)^\vee \to TX \otimes (-L) \to 0$$

On sait que les classes de Bott-Chern secondaire sont nulles pour cette sequence.

En utilisant la théorie de Chern-Weil, on peut trouver la variation de cette fontionnelle de Donaldson.

Du coup, Paul replace X par $X \times \mathbb{P}^{n-1}$ pour trouver que la fonctionnelle de Donaldson est essentiellement une partie de l'énergie de Mabuchi.

La partie de l'énergie de Monge-Ampère est pareille.

On en conclut le théorème de Paul.

7. Limites non-Archimedean et fonctionnelles non-Archimedean

Dans cette partie, on va introduire la théorie de limites non-Arachimedean de Boucksom-Hisamoto-Johsson.([5],[6])

Fixons une variété polarisée (X, L) de dimension n.

Définition 7.1. Soit $(\mathcal{X}_i, \mathcal{L}_i)$ $(i = 1, 2)$ deux configurations testes *normales* de (X, L). On dit que $(\mathcal{X}_0, \mathcal{L}_0) \sim (\mathcal{X}_1, \mathcal{L}_1)$ s'il existe une configuration teste $(\mathcal{X}, \mathcal{L})$ de (X, L) qui est à la fois la pull-back de $(\mathcal{X}_i, \mathcal{L}_i)$. $(i = 1, 2)$

Une telle classe est appelée une *métrique non-Archimedean*.

L'ensemble de classe d'équivalence est notée comme $\mathcal{H}^{NA}(X, L)$.

Soit $\varphi_s (s > 0)$ une famille lisse dans $\mathcal{H}$, pour $\tau \in \mathbb{C}^\times$, $|\tau| < 1$, on définit $\varphi^\tau = \varphi_s$, où $s = -\log |\tau|$. On dit que φ_s est sous-géodésique si φ^τ est semi-positive.

On dit que φ_s admet *une limite non-Archimedean* s'il existe une métrique NA représentée par $(\mathcal{X}, \mathcal{L})$, telle que la métrique dessus se plonge à une métrique sur $\mathcal{L}$.

Limite NA est unique si elle existe.

Soit $F : \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que F admet une fonction $F^{NA} : \mathcal{H}^{NA} \to \mathbb{R}$ comme sa limite NA si pour toute famille sous-géodésique φ_s admettant une limite NA φ, on a

$$\lim_{s \to +\infty} \frac{F(\varphi_s)}{s} = F^{NA}(\varphi^{NA}).$$

Théorème 7.1. *([5]) Soit M le fonctionnel de Mabuchi. Alors*

$$M^{NA}(\mathcal{X}, \mathcal{L}) - \mathrm{DF}(\mathcal{X}, \mathcal{L}) = \frac{1}{V}((\mathcal{X}_{0,\mathrm{red}} - \mathcal{X}_0) \cdot \mathcal{L}^n)$$

pour toute configuration teste $(\mathcal{X}, \mathcal{L})$ de (X, L).

Ca explique pourquoi la limite NA est utile.

Références

[1] T. Aubin. Equations du type monge-ampère sur les varietes kähleriennes compactes. *CR Acad. Sci Paris.*, 283 :119–121, 1976.

[2] R. J. Berman. K-polystability of q-fano varieties admitting kähler-einstein metrics. *Inventiones mathematicae*, 203(3) :973–1025, 2016.

[3] R. J. Berman, S. Boucksom, V. Guedj, and A. Zeriahi. A variational approach to complex monge-ampère equations. *Publications mathématiques de l'IHÉS*, pages 1–67, 2013.

[4] Z. Błocki. *The Complex Monge-Ampère Equation in Kähler Geometry*, pages 95–141. Springer Berlin Heidelberg, 2013.

[5] Sébastien Boucksom, Tomoyuki Hisamoto, and Mattias Jonsson. Uniform k-stability, duistermaat-heckman measures and singularities of pairs. *arXiv preprint arXiv :1504.06568*, 2015.

[6] Sébastien Boucksom, Tomoyuki Hisamoto, and Mattias Jonsson. Uniform k-stability and asymptotics of energy functionals in k\" ahler geometry. *arXiv preprint arXiv :1603.01026*, 2016.

[7] L. A. Caffarelli and X. Cabré. *Fully nonlinear elliptic equations*. American Mathematical Society, 1995.

[8] E. Calabi. On kähler manifolds with vanishing canonical class. In *Algebraic geometry and topology. A symposium in honor of S. Lefschetz*, volume 12, pages 78–89, 1957.

[9] E. Calabi. *Differential geometry and complex analysis*, chapter Extremal Kähler metrics II, pages 95–114. Springer Berlin Heidelberg, 1985.

[10] Xiuxiong Chen, Simon Donaldson, and Song Sun. Kähler-einstein metrics on fano manifolds. i : Approximation of metrics with cone singularities. *Journal of the American Mathematical Society*, 28(1) :183–197, 2015.

[11] Xiuxiong Chen, Simon Donaldson, and Song Sun. Kähler-einstein metrics on fano manifolds. ii : Limits with cone angle less than 2π. *Journal of the American Mathematical Society*, 28(1) :199–234, 2015.

[12] Xiuxiong Chen, Simon Donaldson, and Song Sun. Kähler-einstein metrics on fano manifolds. iii : Limits as cone angle approaches 2π and completion of the main proof. *Journal of the American Mathematical Society*, 28(1) :235–278, 2015.

[13] M. G. Crandall, H. Ishii, and P. L. Lions. User's guide to viscosity solutions of second order partial differential equations. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 27(1) :1–67, 1992.

[14] T. Darvas and Y. Rubinstein. Tian's properness conjectures and finsler geometry of the space of kähler metrics. *Journal of the American Mathematical Society*, 30(2) :347–387, 2017.

[15] J.P. Demailly. Appendix to i. cheltsov and c. shramovs article log canonical thresholds of smooth fano threefolds : On tians invariant and log canonical thresholds. *Uspekhi Mat. Nauk*, 63(5) :383, 2008.

[16] Kento Fujita and Yuji Odaka. On the k-stability of fano varieties and anticanonical divisors. *arXiv :1602.01305*, 2016.

[17] A. Futaki. An obstruction to the existence of einstein kähler metrics. *Inventiones mathematicae*, 73(3) :437–443, 1983.

[18] Y. Matsushima. Sur la structure du groupe d'homéomorphismes analytiques d'une certaine variété kählerienne. *Nagoya Mathematical Journal*, 11 :145–150, 1957.

[19] S. T. Paul. Geometric analysis of chow-mumford stability. *Advances in Mathematics*, 182(2) :333–356, 2004.

[20] Sean Timothy Paul. Hyperdiscriminant polytopes, chow polytopes, and mabuchi energy asymptotics. *arXiv :0811.2548*, 2008.

[21] D. H. Phong, J. Song, J. Sturm, and B. Weinkove. The moser-trudinger inequality on kähler-einstein manifolds. *American journal of mathematics*, 130(4) :1067–1085, 2008.

[22] Gábor Székelyhidi, Valentino Tosatti, and Ben Weinkove. Gauduchon metrics with prescribed volume form. *arXiv :1503.04491*, 2015.

[23] Gang Tian. On kähler-einstein metrics on certain kähler manifolds with $c_1(m) > 0$. *Inventiones mathematicae*, 89(2) :225–246, 1987.

[24] Gang Tian. Kähler-einstein metrics with positive scalar curvature. *Inventiones Mathematicae*, 130(1) :1–37, 1997.

[25] Shing-Tung Yau. On the ricci curvature of a compact kähler manifold and the complex monge-ampère equation, i. *Communications on pure and applied mathematics*, 31(3) :339–411, 1978.