

# Temps de recouvrement d'un graphe fini par une marche aléatoire

Yassine Guerch et Louis Noizet

13 juin 2017

## Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>2</b>
<b>1 Résultats préliminaires</b>	<b>2</b>
1.1 Conditionnement . . . . .	2
1.2 Définitions d'une chaîne de Markov . . . . .	3
1.3 Vers la propriété de Markov forte . . . . .	4
<b>2 Encadrement du temps de recouvrement</b>	<b>6</b>
2.1 Notations . . . . .	6
2.2 Premier encadrement . . . . .	6
2.3 Amélioration de la borne inférieure . . . . .	8
<b>3 Résistances et réseaux électriques</b>	<b>10</b>
3.1 Premiers résultats . . . . .	10
3.2 Lien avec le <i>commute time</i> . . . . .	13
3.3 Résistance du tore . . . . .	15
<b>4 Temps de recouvrement du tore</b>	<b>17</b>
<b>Conclusion</b>	<b>19</b>
<b>Références</b>	<b>20</b>

# Introduction

Dans [5], Herbert Wilf pose les bases de ce qu'il appelle le « Problème de l'écran blanc ». Partant d'un écran noir, il fait se déplacer un pixel blanc de manière aléatoire, le pixel blanc coloriant les cases qu'il visite au fur et à mesure. La question se posant étant de savoir combien de temps il faudra pour colorier la totalité de l'écran. On voit bien que le problème, une fois formalisé, peut s'étendre de manière plus général à un graphe connexe fini quelconque.

L'objectif de ce mémoire est d'étudier le temps de recouvrement d'un graphe fini par une marche aléatoire, c'est-à-dire l'espérance du temps nécessaire pour qu'une marche aléatoire visite tous les points d'un graphe.

Par marche aléatoire, on entend un processus aléatoire à temps discret qui part d'un sommet quelconque au temps  $t = 0$  et qui au temps suivant  $t = 1$  se déplace vers un sommet adjacent choisi uniformément, et ainsi de suite.

Dans la suite de ce mémoire,  $G = (V, E)$  désignera un graphe connexe à  $n$  sommets avec  $E \subset \{\{x, y\} : x \neq y \in V\}$ . On se donne également une numérotation  $(f(i) = v_i)_{1 \leq i \leq n}$  des sommets. On considèrera une marche aléatoire  $X_n$  simple sur un graphe fini, c'est-à-dire une suite aléatoire de sommets où lorsque  $X_n$  est fixé,  $X_{n+1}$  est choisi uniformément parmi ses voisins. Si l'on fixe le point de départ à  $X_0 = v$ , on obtient une marche aléatoire que nous noterons  $X_v$ . Puis, on définit la mesure de probabilité  $\mathbb{P}_v$  associée à  $(X_n^v)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $\mathbb{E}_v$  l'espérance associée à  $\mathbb{P}_v$ .

On définira le temps de recouvrement de  $G$ , noté  $C(G)$ , comme le temps nécessaire pour visiter la totalité des sommets du graphe, i.e :  $C(G) = \max_{v \in V} \min\{n \in \mathbb{N} : X_n = v\}$ .

Dans la section 1, on énonce et démontre un ensemble de résultats probabilistes généraux qui serviront dans les sections suivantes. Dans la section 2, nous donnons un premier encadrement du temps de recouvrement d'un graphe connexe quelconque, et dans la sous-section 2.3, on énonce un lemme un peu technique qui permet d'obtenir une meilleure borne inférieure. Dans la section 3, on construit une analogie avec les réseaux électriques, ce qui nous donne de nouveaux outils pour estimer le temps de recouvrement. Enfin, dans la section 4, on montre que le temps de recouvrement du tore de dimension 2 est  $\Theta(n \log^2 n)$ , et on calcule également le temps de recouvrement d'un tore de dimension quelconque.

## 1 Résultats préliminaires

### 1.1 Conditionnement

La théorie du conditionnement repose sur la définition de l'espérance conditionnelle. Même si nous n'utiliserons dans ce mémoire que du conditionnement dans le cas discret, nous prouvons son existence et son unicité dans le cas de variables aléatoires intégrables.

**Théorème 1.1.** *Soit  $X$  dans  $L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ,  $\mathcal{B}$  une sous-tribu de  $\mathcal{F}$ . Alors il existe une unique variable aléatoire  $\mathbb{E}[X|\mathcal{B}]$  appartenant à  $L^1(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P}_{|\mathcal{B}})$  telle que, pour toute variable aléatoire  $Z$   $\mathcal{B}$ -mesurable,*

$$\mathbb{E}[XZ] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{B}]Z].$$

*Cette variable aléatoire est appelée l'espérance conditionnelle.*

*Démonstration.* Unicité : Soient  $X_1$  et  $X_2$  deux variables aléatoires dans  $L^1(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$  vérifiant la propriété énoncée. Alors, en particulier, si  $B = \{X_1 < X_2\}$ , alors  $\mathbb{1}_B$  est  $\mathcal{B}$ -mesurable et bornée. D'où, par la propriété énoncée :

$$\mathbb{E}[(X_1 - X_2)\mathbb{1}_B] = 0.$$

Ainsi,  $X_1 \leq X_2$  presque sûrement, et par symétrie,  $X_2 \leq X_1$  presque sûrement. On en déduit l'unicité de l'espérance conditionnelle.

Existence : On peut supposer  $X \geq 0$ , et le cas général se déduit en considérant  $X = X^+ - X^-$ . On peut définir une mesure  $\mu$  sur  $(\Omega, \mathcal{B})$  en posant :

$$\forall B \in \mathcal{B}, \mu(B) = \mathbb{E}[X\mathbb{1}_B].$$

En effet, si  $B = \emptyset$ , on a bien que  $\mu(B) = 0$ . De plus, si  $B = (\cup_{n \in \mathbb{N}} A_n)$  est une union d'ensembles disjoints, alors on a :

$$\mu(B) = \mathbb{E}[X\mathbb{1}_{(\cup_{n \in \mathbb{N}} A_n)}] = \mathbb{E}[\sum_{n \in \mathbb{N}} X\mathbb{1}_{A_n}] = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{E}[X\mathbb{1}_{A_n}] = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n).$$

Montrons maintenant, en considérant  $\mathbb{P}$  comme une mesure de probabilité sur  $(\Omega, \mathcal{B})$  que  $\mu \ll \mathbb{P}$  : Si  $B \in \mathcal{B}$  est tel que  $\mathbb{P}(B) = 0$ , alors :

$$\mu(B) = \int_B X \, d\mathbb{P} = 0.$$

Ainsi  $\mu \ll \mathbb{P}$ , et par le théorème de Radon-Nikodym, il existe une variable aléatoire  $Y$   $\mathcal{B}$ -mesurable telle que :

$$\forall B \in \mathcal{B}, \mathbb{E}[X\mathbf{1}_B] = \mathbb{E}[Y\mathbf{1}_B].$$

Enfin, comme le résultat est vrai pour toutes les fonctions indicatrices d'ensembles dans  $\mathcal{B}$ , en approximant on élargit au cas des fonctions  $\mathcal{B}$ -mesurables en approximant ces dernières par des fonctions étagées.  $\square$

Nous avons dès lors défini la notion d'espérance conditionnelle à toute fonction dans  $L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  pour un  $\Omega$  quelconque. Si, en particulier la sous-tribu  $\mathcal{B}$  est la sous-tribu engendrée par une variable aléatoire  $Y$  à valeurs dans  $E$ , on notera indifféremment

$$\mathbb{E}[X|\sigma(Y)] = \mathbb{E}[X|Y].$$

Dans le cas discret, la forme explicite de l'espérance conditionnelle où l'on conditionne par une variable aléatoire  $Y$  est :

$$\mathbb{E}[X|Y] = \sum_{y \in E} \mathbf{1}_{Y=y} \mathbb{E}[X|Y=y]$$

où l'on a :

$$\begin{cases} \mathbb{E}[X|Y=y] = \frac{\mathbb{E}(X\mathbf{1}_{\{Y=y\}})}{\mathbb{P}(Y=y)} & \text{si } \mathbb{P}(Y=y) \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

**Corollaire 1.2.** Soit  $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ , soit  $Z$  une variable aléatoire.

- $\mathbb{E}X = \mathbb{E}[\mathbb{E}(X|\mathcal{B})]$  ;
- Si  $Z$  est  $\mathcal{B}$ -mesurable, alors  $\mathbb{E}[XZ|\mathcal{B}] = Z\mathbb{E}(X|\mathcal{B})$  ;
- Si  $Z$  est indépendant de  $\sigma(X) \vee \mathcal{B}$ , alors  $\mathbb{E}[XZ|\mathcal{B}] = \mathbb{E}(Z)\mathbb{E}(X|\mathcal{B})$ .

Ces résultats sur le conditionnement démontrés, nous pouvons maintenant nous intéresser à un outil généralisant les marches aléatoires, à savoir les chaînes de Markov. Certaines propriétés de ces dernières nous seront particulièrement utiles par la suite.

## 1.2 Définitions d'une chaîne de Markov

Nous nous plaçons dans un espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ .

Intuitivement, une chaîne de Markov est une suite de variables aléatoires telle que la probabilité de passer du point  $x_n$  au point  $x_{n+1}$  dépend uniquement du point  $x_n$  et non des points précédents ou suivants. Formalisons maintenant cette idée avec un certain nombre de définitions au préalable. On se donne  $E$  un ensemble au plus dénombrable, que nous appellerons espace d'états.

**Définition 1.3** (Probabilité de transition). Soient  $(E, \mathcal{E})$  un espace mesurable. On appelle probabilité de transition une fonction  $\nu : E \times \mathcal{E} \rightarrow [0, 1]$  telle que :

- i)  $\forall x \in E, \nu(x, \cdot)$  est une mesure de probabilité sur  $E$ .
- ii)  $\forall A \in \mathcal{E}, x \mapsto \nu(x, A)$  est  $\mathcal{E}$ -mesurable.

Pour définir les chaînes de Markov, nous nous intéresserons à une manière équivalente de définir une probabilité de transition, à savoir les matrices stochastiques.

**Définition 1.4** (Matrice stochastique). Soit  $E$  un ensemble fini ou dénombrable. On appelle matrice stochastique une famille  $(Q(x, y))_{x, y \in E}$  de nombres réels tels que :

- i)  $\forall x, y \in E, 0 \leq Q(x, y) \leq 1$ .
- ii)  $\sum_{y \in E} Q(x, y) = 1$ .

Cette notion est équivalente à celle de probabilité de transition. En effet, soit  $(Q(x, y))_{x, y \in E}$  une matrice stochastique, alors

$$\nu(x, A) = \sum_{y \in A} Q(x, y).$$

définit une probabilité de transition. Réciproquement, si  $\nu$  est une probabilité de transition, alors  $Q(x, y) = \nu(x, \{y\})$  définit une matrice stochastique.

**Définition 1.5.** Soit  $Q$  une matrice stochastique sur  $E$ . Une chaîne de Markov associée à  $Q$  est une suite de variables aléatoires  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telle que pour tout  $n \geq 0$ ,

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = x_{n+1} | X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n) = Q(x_n, x_{n+1}),$$

pour tous  $x_0, \dots, x_{n+1}$  tels que  $\mathbb{P}(X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n) > 0$ .

Ainsi, la marche aléatoire introduite ci-dessus peut formellement être définie comme la chaîne de Markov dont la matrice de transition est  $Q$  définie par  $Q(x, y) = 1/d(x)$  si  $x \sim y$  où  $d(x)$  est le degré de  $x$  et  $Q(x, y) = 0$  sinon.

### 1.3 Vers la propriété de Markov forte

Dans cette sous-section, on cherche à démontrer la propriété de Markov forte.

**Proposition 1.6.** *Un processus aléatoire  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une chaîne de Markov associée à la matrice de transition  $Q$  si, et seulement si,*

$$\mathbb{P}(X_0 = x_0, X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) = \mathbb{P}(X_0 = x_0)Q(x_0, x_1) \dots Q(x_{n-1}, x_n).$$

*Démonstration.* L'implication se fait par une récurrence immédiate en écrivant

$$\mathbb{P}(X_0 = x_0, X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) = \mathbb{P}(X_n = x_n | X_0 = x_0, \dots, X_{n-1} = x_{n-1})\mathbb{P}(X_0 = x_0, \dots, X_{n-1} = x_{n-1}).$$

Pour la réciproque, on note que :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_n = x_n | X_0 = x_0, X_1 = x_1, \dots, X_{n-1} = x_{n-1}) &= \frac{\mathbb{P}(X_0 = x_0, X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n)}{\mathbb{P}(X_0 = x_0, X_1 = x_1, \dots, X_{n-1} = x_{n-1})} \\ &= \frac{\mathbb{P}(X_0 = x_0)Q(x_0, x_1) \dots Q(x_{n-1}, x_n)}{\mathbb{P}(X_0 = x_0)Q(x_0, x_1) \dots Q(x_{n-2}, x_{n-1})} \\ &= Q(x_n, x_{n+1}), \end{aligned}$$

et l'on retrouve la définition d'une chaîne de Markov associée à une matrice stochastique. □

À présent, pour  $f : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ , on définit

$$Qf(x) = \sum_{y \in E} Q(x, y)f(y).$$

À partir de ces dernières définitions, nous pouvons étendre le principe qu'une chaîne de Markov ne dépend que de l'état présent :

**Proposition 1.7.** *Soit  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une chaîne de Markov. Alors :*

i) *Pour toute fonction mesurable  $f : E \rightarrow \mathbb{R}_+$  et tout sous-ensemble fini  $\{i_1, \dots, i_k\}$  de  $0, \dots, n-1$ ,*

$$\mathbb{E}[f(X_{n+1}) | X_{i_1}, \dots, X_{i_k}, X_n] = \mathbb{E}[f(X_{n+1}) | X_n] = Qf(X_n).$$

ii) *Pour tout entier naturel  $n \geq 0$  et  $p \geq 1$  et pour tout  $y_1, \dots, y_p \in E$ ,*

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = y_1, \dots, X_{n+p} = y_p | X_0, \dots, X_n) = Q(X_n, y_1) \dots Q(y_{p-1}, y_p).$$

*De plus, si on pose  $Y_p = X_{n+p}$ , alors  $(Y_p)_{p \in \mathbb{N}}$  est une chaîne de Markov de matrice de transition  $Q$ .*

*Démonstration.* i) La définition d'une chaîne de Markov et de  $Qf(x)$  donne directement :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[f(X_{n+1})|X_0, \dots, X_n] &= \mathbb{E}[f(X_{n+1})|X_n] \\ &= \sum_{y \in E} Q(X_n, y)f(y) \\ &= Qf(X_n).\end{aligned}$$

Maintenant soit un sous-ensemble fini  $i_1, \dots, i_k$  de  $0, \dots, n-1$ . Alors, d'après 1.2

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[f(X_{n+1})|X_{i_1}, \dots, X_{i_k}, X_n] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[f(X_{n+1})|X_0, \dots, X_n]|X_{i_1}, \dots, X_{i_k}, X_n] \\ &= \mathbb{E}[Qf(X_n)|X_{i_1}, \dots, X_{i_k}, X_n] \\ &= Qf(X_n).\end{aligned}$$

ii) Pour la seconde assertion, il vient que d'après 1.6,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_{n+1} = y_1, \dots, X_{n+p} = y_p | X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n) &= \frac{\mathbb{P}(X_0 = x_0, \dots, X_{n+p} = y_p)}{\mathbb{P}(X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n)} \\ &= Q(x_n, y_1), \dots, Q(y_{p-1}, y_p).\end{aligned}$$

D'après ce qui précède, il vient :

$$\mathbb{P}(Y_0 = y_0, Y_1 = y_1, \dots, Y_p = y_p) = Q(X_n, y_1) \dots Q(y_{p-1}, y_p) = \mathbb{P}(X_n = y_0)Q(X_n, y_1) \dots Q(y_{p-1}, y_p),$$

et l'on conclut que  $(Y_p)_{p \in \mathbb{N}}$  est une chaîne de Markov de matrice de transition  $Q$ . □

Cette invariance par translation amène à définir un opérateur de translation noté  $\theta_p$ , i.e. si  $X_n = x_n$  pour tout  $n$ , alors :

$$\theta_p((x_n)_{n \in \mathbb{N}}) = (x_{p+n})_{n \in \mathbb{N}}.$$

En notant  $\Omega = E^{\mathbb{N}}$ , on a que  $\theta_p : \Omega \rightarrow \Omega$ . Par la suite,  $\Omega$  est muni de la tribu  $\mathcal{F}$  engendrée par les cylindres. On notera également  $\mathbb{P}_x$  (resp.  $\mathbb{E}_x$ ) la probabilité (resp. l'espérance) associée à l'évènement  $X_0 = x$  telle que  $\mathbb{P}_x(X_0 = x) = 1$ . De cette manière, on fixe un point de départ du processus aléatoire. On admettra que cette probabilité existe. Enfin, on définit  $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, \dots, X_n)$ . L'ensemble  $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est appelé une filtration. Nous pouvons dès lors énoncer la propriété de Markov simple.

**Proposition 1.8** (Propriété de Markov simple). *Soient  $F$  et  $G$  deux fonctions mesurables et positives sur  $\Omega$ . Si  $F$  est  $\mathcal{F}_n$ -mesurable, alors, pour tout  $x$  dans  $E$ ,*

$$\mathbb{E}_x[F \cdot G(\theta_n)] = \mathbb{E}_x[F \cdot \mathbb{E}_{X_n}(G)],$$

ce qui équivaut à :

$$\mathbb{E}_x[G(\theta_n)|\mathcal{F}_n] = \mathbb{E}_{X_n}[G].$$

*Démonstration.* Il suffit pour prouver le résultat de traiter le cas  $F = \mathbb{1}_{X_0=x_0, \dots, X_n=x_n}$  et  $G = \mathbb{1}_{X_0=y_0, \dots, X_p=y_p}$ , avec  $p \geq 0$ . Ainsi, si  $y \in E$ ,

$$\mathbb{E}_y G = \mathbb{1}_{y_0=y} Q(y_0, y_1) \dots Q(y_{p-1}, y_p).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_x[F \cdot G(\theta_n)] &= \mathbb{P}_x(X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n, X_n = y_0, X_{n+1} = y_1, \dots, X_{n+p} = y_p) \\ &= \mathbb{1}_{x_0=x} Q(x_0, x_1) \dots Q(x_{n-1}, x_n) \mathbb{1}_{x_n=y_0} Q(y_0, y_1) \dots Q(y_{p-1}, y_p) \\ &= \mathbb{P}_x(X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n, X_n = y_0) Q(y_0, y_1) \dots Q(y_{p-1}, y_p) \\ &= \mathbb{E}_x[\mathbb{1}_{X_0=x_0, \dots, X_n=x_n} \mathbb{1}_{X_n=y_0} Q(y_0, y_1) \dots Q(y_{p-1}, y_p)] \\ &= \mathbb{E}_x[F \mathbb{E}_{X_n}(G)].\end{aligned}$$

Soit

$$\mathcal{M} = \{A \in \mathcal{P}(\Omega) | \mathbb{E}_x[\mathbb{1}_{X_0=x_0, \dots, X_n=x_n} \cdot \mathbb{1}_A(\theta_n)] = \mathbb{E}_x[\mathbb{1}_{X_0=x_0, \dots, X_n=x_n} \mathbb{E}_{X_n}(\mathbb{1}_A)]\}.$$

On voit aisément que  $\mathcal{M}$  contient  $\Omega$ , est stable par union dénombrable et que si  $A \subseteq B$  sont inclus dans  $\mathcal{M}$ , alors  $B \setminus A$  appartient à  $\mathcal{M}$ . Donc  $\mathcal{M}$  est une classe monotone. Comme elle contient tous les éléments de la forme  $X_0 = y_0, \dots, X_p = y_p$ , et que  $\mathcal{C} = \{X_0 = y_0, \dots, X_p = y_p ; p \geq 0\}$  est stable par intersection fini, le lemme de classe monotone affirme que la propriété de Markov simple est vraie pour tout élément de la forme  $\mathbb{1}_A$  avec  $A \in \mathcal{F}$ . On conclut ensuite en approximant toute fonction  $\mathcal{F}$ -mesurable par des fonctions étagées, ce qui conclut la preuve.  $\square$

La loi de l'avenir de la chaîne de Markov après l'instant  $n$  conditionnellement à tout ce qui s'est passé jusqu'à l'instant  $n$  est celle d'une chaîne de Markov issue de  $X_n$ . Nous allons désormais étendre cette propriété à certains temps aléatoires  $T$ . Nous avons pour cela besoin de définir la notion de temps d'arrêt :

**Définition 1.9** (Temps d'arrêt). Une variable aléatoire  $T : \Omega \rightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\}$  est un temps d'arrêt par rapport à une filtration  $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  si

$$\forall n \in \mathbb{N}, \{T = n\} \in \mathcal{F}_n.$$

On voit directement que ceci équivaut à ce que l'évènement  $\{T \leq n\}$  appartienne à  $\mathcal{F}_n$ . Par exemple, le temps  $T_A$  d'atteinte de  $A \in \mathcal{E}$  défini par  $T_A = \inf\{n \in \mathbb{N} : X_n \in A\}$  est un temps d'arrêt. De même, le maximum de deux temps d'arrêt est lui-même un temps d'arrêt.

Nous pouvons maintenant énoncer la propriété de Markov fort qui généralise la propriété de Markov simple aux temps d'arrêt :

**Proposition 1.10** (Propriété de Markov forte). Soit  $T$  un temps d'arrêt de la filtration  $(\mathcal{F}_n)$ . Soient  $F$  et  $G$  deux fonctions mesurables et positives sur  $\Omega$ . Si  $F$  est  $\mathcal{F}_T$ -mesurable, alors pour tout  $x \in E$  :

$$\mathbb{E}_x[\mathbb{1}_{T < \infty} F \cdot G(\theta_T)] = \mathbb{E}_x[\mathbb{1}_{T < \infty} F \mathbb{E}_{X_T}(G)].$$

De manière équivalente,

$$\mathbb{E}_x[\mathbb{1}_{T < \infty} G(\theta_T) | \mathcal{F}_T] = \mathbb{1}_{T < \infty} \mathbb{E}_{X_T}(G)].$$

*Démonstration.* Comme  $\mathbb{1}_{T=n} F$  est  $\mathcal{F}_n$ -mesurable, par la propriété de Markov simple, pour tout entier  $n \geq 0$ ,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_x[\mathbb{1}_{T=n} F \cdot G(\theta_T)] &= \mathbb{E}_x[\mathbb{1}_{T=n} F \cdot G(\theta_n)] \\ &= \mathbb{E}_x[\mathbb{1}_{T=n} F \mathbb{E}_{X_n}(G)]. \end{aligned}$$

En sommant sur toutes les valeurs de  $n$ , on obtient le résultat.  $\square$

## 2 Encadrement du temps de recouvrement

### 2.1 Notations

Dans cette partie, on introduit de l'aléatoire supplémentaire dans la numérotation des sommets en se donnant  $\pi$  une permutation aléatoire de  $\llbracket 1, n \rrbracket$ .

Quitte à agrandir l'espace  $\Omega$ , on peut choisir  $\pi$  indépendante de  $X$ .

En rappelant que  $f$  est une bijection de  $\llbracket 1, n \rrbracket$  dans  $V$ ,  $f \circ \pi$  est donc une numération des sommets. On identifie  $\pi$  et  $f \circ \pi \circ f^{-1}$ .

On note  $T_v$  le temps d'atteinte du sommet  $v$  et  $T_i^\sigma$  le temps nécessaire pour visiter chacun des  $\{T_{v_{\sigma(1)}}, \dots, T_{v_{\sigma(i)}}\}$  i.e :

$$T_i^\sigma = \max_{1 \leq k \leq i} T_{\sigma(k)}$$

on vérifie facilement que les  $T_i^\sigma$  sont des temps d'arrêt.

Ainsi le temps de recouvrement du graphe que nous noterons  $C(G)$ , ou simplement  $C$  quand il n'y a pas d'ambiguïté est égal à  $\mathbb{E}T_n^\sigma$  pour  $\sigma$  quelconque, en particulier pour l'identité.

### 2.2 Premier encadrement

On définit  $R_i$  de la manière suivante :  $R_1 = T_1^\pi$  et pour  $k \leq 2$ ,  $R_k = T_k^\pi - T_{k-1}^\pi$ . Ainsi, si  $v_{\pi(i)}$  est visité après tous les  $v_{\pi(k)}$  pour  $k < i$ , alors  $R_i$  est le temps d'atteinte de  $v_{\pi(i)}$  sachant qu'on a déjà atteint  $v_{\pi(k)}$ ,  $1 \leq k < i$ . Dans le cas contraire, on a  $R_i = 0$ . S'il y a un risque de confusion, on pourra noter  $R_i^\pi$ .

**Lemme 2.1.** Soit  $i \in \mathbb{N}$ . Alors :

$$\mathbb{P}(R_i \neq 0) = \frac{1}{i}.$$

*Démonstration.* Presque sûrement, tous les sommets sont visités, donc il existe p.s. une permutation  $\sigma$  qui décrit l'ordre de visite des sommets. Alors,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(R_i \neq 0) &= \mathbb{P} \left[ \sigma(\pi(i)) > \max_{0 \leq k < i} \sigma(\pi(k)) \right] \\ &= \mathbb{E} \left[ \mathbb{P} \left( \sigma(\pi(i)) > \max_{0 \leq k < i} \sigma(\pi(k)) \middle| \sigma \right) \right].\end{aligned}$$

Mais  $\sigma$  et  $\pi$  sont indépendants, donc conditionnellement à  $\sigma$ ,  $\sigma \circ \pi$  suit la loi uniforme sur  $\mathfrak{S}_n$ . Donc :

$$\mathbb{P} \left[ \sigma(\pi(i)) > \max_{0 \leq k < i} \sigma(\pi(k)) \middle| \sigma \right] = \frac{1}{i}.$$

D'où l'on déduit que :

$$\mathbb{P} \left[ \sigma(\pi(i)) > \max_{0 \leq k < i} \sigma(\pi(k)) \right] = \mathbb{E} \left( \frac{1}{i} \right) = \frac{1}{i}.$$

Ceci conclut la démonstration. □

**Théoreme 2.2.** *En posant*

$$\mu_- = \min_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2 \setminus \Delta} E_i T_j \quad \text{et} \quad \mu_+ = \max_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2 \setminus \Delta} E_i T_j$$

on a :

$$\mu_- \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \leq \mathbb{E}C \leq \mu_+ \sum_{i=1}^n \frac{1}{i}.$$

*Démonstration.* Ce théorème et sa preuve (ainsi que le lemme précédent) sont adaptés de [4, Theorem 2.6]. En remarquant que  $x = x \mathbb{1}_{x \neq 0}$  est toujours vrai quel que soit  $x$ ,

$$\mathbb{E}C = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}R_i = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(R_i \mathbb{1}_{\{R_i \neq 0\}}).$$

On rappelle que lorsque  $R_i \neq 0$ , on a :

$$R_i = \min\{n \in \mathbb{N} : X_{n+T_{i-1}^\pi} = v_{\pi(i)}\}.$$

Donc par Markov fort,

$$\begin{aligned}\mathbb{1}_{\{R_i \neq 0\}} \mathbb{E}(R_i | F_{T_{i-1}^\pi}) &= \mathbb{1}_{\{R_i \neq 0\}} \mathbb{E}(\min\{n \in \mathbb{N} : X_{n+T_{i-1}^\pi} = v_{\pi(i)}\} | F_{T_{i-1}^\pi}) \\ &= \mathbb{1}_{\{R_i \neq 0\}} \mathbb{E}_{X_{T_{i-1}^\pi}}(\min\{n \in \mathbb{N} : X_n = v_{\pi(i)}\}) \\ &= \mathbb{1}_{\{R_i \neq 0\}} \mathbb{E}_{X_{T_{i-1}^\pi}} T_{\pi(i)}.\end{aligned}$$

Or  $\mathbb{1}_{\{R_i \neq 0\}}$  est  $F_{T_{i-1}^\pi}$ -mesurable, donc en utilisant (1.1) :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(R_i) &= \mathbb{E} \left[ \mathbb{E} \left( \mathbb{1}_{\{R_i \neq 0\}} R_i \middle| F_{T_{i-1}^\pi} \right) \right] \\ &= \mathbb{E} \left[ \mathbb{E} \left( \mathbb{1}_{\{R_i \neq 0\}} R_i \middle| F_{T_{i-1}^\pi} \right) \right] \\ &= \mathbb{E} \left[ \mathbb{1}_{\{R_i \neq 0\}} \mathbb{E}_{X_{T_{i-1}^\pi}} T_{\pi(i)} \right].\end{aligned}$$

Or,  $\mu_- \leq \mathbb{E}_{X_{T_{i-1}^\pi}} T_{\pi(i)} \leq \mu_+$  donc :

$$\mathbb{P}(\{R_i \neq 0\}) \mu_- \leq \mathbb{E}(R_i) \leq \mathbb{P}(\{R_i \neq 0\}) \mu_+.$$

En utilisant le lemme et en sommant, on déduit :

$$\mu_- \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \leq \mathbb{E}C \leq \mu_+ \sum_{i=1}^n \frac{1}{i},$$

ce qui conclut la démonstration. □

### 2.3 Amélioration de la borne inférieure

Le lemme ci-dessous a été énoncé par Zuckerman dans [6, Lemma 2]. La preuve donnée par Zuckerman est très évasive et passe sur des résultats non triviaux. Nous nous efforcerons de la rendre plus rigoureuse.

**Lemme 2.3.** *Soit  $V' \subset V$  tel que  $\#V' \geq n^\alpha$ ,  $\alpha > 0$ , et soit  $t$  tel que pour tout sommet  $v$  de  $V'$ ,  $\frac{\#\{w \in V' : \mathbb{E}_v T_w < t\}}{\#V'} \leq n^{-\beta}$ , avec  $\beta > 0$ . Alors  $\mathbb{E}C > t(\gamma \log n - 2)$  où  $\gamma = \min(\alpha, \beta)$ .*

*Démonstration.* Soit  $v_{\text{init}} \in V'$ , et soit  $y_1, \dots, y_{n'}$  une numérotation de  $V' \setminus \{v_{\text{init}}\}$  avec  $n' = \#V' - 1$ . Le temps de recouvrement de  $V$  est supérieur au temps de recouvrement de  $V'$  en partant de  $v_{\text{init}}$ . C'est à dire,  $\mathbb{E}C \geq \mathbb{E}_{v_{\text{init}}} T_{n'}^{y \circ \pi}$ , où  $T_{n'}^{\sigma'}$ , avec  $\sigma'$  une fonction injective de  $\llbracket 1, n' \rrbracket$  dans  $\llbracket 1, n \rrbracket$  est défini comme  $T_{n'}^{\sigma}$ , où  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$  a pour restriction à  $\llbracket 1, n' \rrbracket$  la fonction  $\sigma'$  (la définition est indépendante du choix de la permutation  $\sigma$ ).

Soit  $\pi \in \mathfrak{S}_{n'}$  une variable aléatoire indépendante de  $X$ . En utilisant la même technique que précédemment :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}R_k^{y \circ \pi} &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{n'}} \mathbb{E} \left[ \mathbb{E} \left( \mathbb{1}_{\pi=\sigma} R_k^{y \circ \sigma} \mid \mathcal{F}_{T_{k-1}^{y \circ \sigma}} \right) \right] \\ &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{n'}} \mathbb{E} \left[ \mathbb{1}_{\pi=\sigma} \mathbb{E} \left( R_k^{y \circ \sigma} \mid \mathcal{F}_{T_{k-1}^{y \circ \sigma}} \right) \right], \end{aligned}$$

car  $\mathbb{1}_{\pi=\sigma}$  est indépendant de  $R_k^{y \circ \sigma}$  et de  $\mathcal{F}_{T_{k-1}^{y \circ \sigma}}$ . Par Markov fort, et en utilisant  $x = \mathbb{1}_{x \neq 0} x$  :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left( R_k^{y \circ \sigma} \mid \mathcal{F}_{T_{k-1}^{\sigma}} \right) &= \mathbb{1}_{\{R_k \neq 0\}} \mathbb{E}_{X_{T_{k-1}^{\sigma}}} T_{y_{\sigma(k)}} \\ &\geq \mathbb{1}_{\{R_k \neq 0\}} t \mathbb{1} \left\{ \mathbb{E}_{X_{T_{k-1}^{\sigma}}} (T_{y_{\sigma(k)}}) \geq t \right\} \\ &\geq t \left( \mathbb{1}_{\{R_k \neq 0\}} - \mathbb{1} \left\{ \mathbb{E}_{X_{T_{k-1}^{\sigma}}} (T_{y_{\sigma(k)}}) < t \right\} \right). \end{aligned}$$

Donc en revenant dans la somme, on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}R_k^{y \circ \pi} &\geq t \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{n'}} \mathbb{E} \left[ \mathbb{1}_{\pi=\sigma} \left( \mathbb{1}_{\{R_k \neq 0\}} - \mathbb{1} \left\{ \mathbb{E}_{X_{T_{k-1}^{\sigma}}} (T_{y_{\sigma(k)}}) < t \right\} \right) \right] \\ &\geq t \left[ \mathbb{P}(R_k^{y \circ \pi} \neq 0) - \mathbb{E} \left( \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{n'}} \mathbb{1}_{\pi=\sigma} \mathbb{1} \left\{ \mathbb{E}_{X_{T_{k-1}^{\sigma}}} (T_{y_{\sigma(k)}}) < t \right\} \right) \right]. \end{aligned} \quad (2.1)$$

On pose

$$D = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{n'}} \mathbb{1}_{\pi=\sigma} \mathbb{1} \left\{ \mathbb{E}_{X_{T_{k-1}^{\sigma}}} (T_{y_{\sigma(k)}}) < t \right\}.$$

Les deuxièmes facteurs des termes de la somme ne dépendent que des  $k$  premières valeurs de  $\sigma$ . On peut donc regrouper les termes :

$$D = \sum_{\substack{1 \leq \sigma(1), \dots, \sigma(k-1) \leq n' \\ 1 \leq i \leq n'}} \mathbb{1} \left\{ \begin{array}{l} \forall j \in \llbracket 1, k-1 \rrbracket \\ \pi(j) = \sigma(j) \end{array} \right\} \mathbb{1}_{\{\pi(k)=i\}} \mathbb{1} \left\{ \mathbb{E}_{X_{T_{k-1}^{y \circ \sigma}}} T_{y_i} < t \right\}.$$

Reformulons l'argument de la dernière indicatrice :

$$\mathbb{E}_{X_{T_{k-1}^{y \circ \sigma}}} T_{y_i} < t \Leftrightarrow i \in \{i \in \llbracket 1, n' \rrbracket : \mathbb{E}_{X_{T_{k-1}^{y \circ \sigma}}} T_{y_i} < t\} = A_{X_{T_{k-1}^{y \circ \sigma}}}.$$

On utilise le fait que tous les  $(A_x, x \in V')$  contiennent assez peu des sommets de  $V'$  (par hypothèse). En effet :

$$\#A_x = \#\{v \in V' \setminus \{v_{\text{init}}\} : \mathbb{E}_x T_v < t\}.$$

Donc lorsque  $x \in V'$ , l'hypothèse s'applique et on a  $\#A_x \leq n^{-\beta} \#V'$ . En particulier,

$$\forall k \in \llbracket 1, n' \rrbracket \quad \forall \sigma \in \mathfrak{S}_{n'} \quad \#A_{X_{T_{k-1}^{y \circ \sigma}}} \leq n^{-\beta} \#V'.$$



Revenons-en au calcul de  $D$  :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}D &= \sum_{\substack{1 \leq \sigma(1), \dots, \sigma(k-1) \leq n' \\ 1 \leq i \leq n'}} \mathbb{E} \left[ \mathbb{1}_{\left\{ \begin{array}{l} \forall j \in \llbracket 1, k-1 \rrbracket \\ \pi(j) = \sigma(j) \end{array} \right\}} \mathbb{1}_{\{\pi(k)=i\}} \mathbb{1}_{\left\{ i \in A_{X_{T_{k-1}^{y \circ \sigma}}} \right\}} \right] \\ &= \sum_{1 \leq \sigma(1), \dots, \sigma(k-1) \leq n'} \mathbb{E} \left[ \mathbb{1}_{\left\{ \begin{array}{l} \forall j \in \llbracket 1, k-1 \rrbracket \\ \pi(j) = \sigma(j) \end{array} \right\}} \sum_{1 \leq i \leq n'} \mathbb{1}_{\{\pi(k)=i\}} \mathbb{1}_{\left\{ i \in A_{X_{T_{k-1}^{y \circ \sigma}}} \right\}} \right]. \end{aligned}$$

En remarquant que :

$$\sum_{1 \leq i \leq n'} \mathbb{1}_{\{\pi(k)=i\}} \mathbb{1}_{\left\{ i \in A_{X_{T_{k-1}^{y \circ \sigma}}} \right\}} = \mathbb{1}_{\left\{ \pi(k) \in A_{X_{T_{k-1}^{y \circ \sigma}}} \right\}},$$

on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}D &= \sum_{1 \leq \sigma(1), \dots, \sigma(k-1) \leq n'} \mathbb{E} \left[ \mathbb{1}_{\left\{ \begin{array}{l} \forall j \in \llbracket 1, k-1 \rrbracket \\ \pi(j) = \sigma(j) \end{array} \right\}} \mathbb{1}_{\left\{ \pi(k) \in A_{X_{T_{k-1}^{y \circ \sigma}}} \right\}} \right] \\ &= \mathbb{E} \left[ \sum_{1 \leq \sigma(1), \dots, \sigma(k-1) \leq n'} \mathbb{1}_{\left\{ \begin{array}{l} \forall j \in \llbracket 1, k-1 \rrbracket \\ \pi(j) = \sigma(j) \end{array} \right\}} \left[ \mathbb{1}_{\left\{ \pi(k) \in A_{X_{T_{k-1}^{y \circ \sigma}}} \right\}} \middle| X, \pi(1), \dots, \pi(k-1) \right] \right]. \quad (2.2) \end{aligned}$$

Mais comme  $\pi$  suit la loi uniforme, on en déduit que — conditionnellement à  $X$  et  $\pi_{\llbracket 1, k-1 \rrbracket}$  —  $\pi(k)$  suit la loi uniforme sur  $\llbracket 1, n' \rrbracket \setminus \{\pi(1), \dots, \pi(k-1)\}$ . Ainsi :

$$\mathbb{P} \left( \pi(k) \in A_{X_{T_{k-1}^{y \circ \sigma}}} \middle| \sigma(X, \pi(1), \dots, \pi(k-1)) \right) = \frac{\#\{i \in \llbracket 1, n' \rrbracket \setminus \{\pi(1), \dots, \pi(k-1)\} : i \in A_{X_{T_{k-1}^{y \circ \sigma}}}\}}{\#\{i \in \llbracket 1, n' \rrbracket \setminus \{\pi(1), \dots, \pi(k-1)\}\}}.$$

On majore le numérateur grossièrement par  $\#A_x$  lequel est majoré par  $n^{-\beta} \#V'$ . Quant au dénominateur, il vaut  $n' - (k-1) = \#V' - k$ . On obtient alors :

$$\mathbb{P} \left( \pi(k) \in A_{X_{T_{k-1}^{y \circ \sigma}}} \middle| \sigma(X, \pi(1), \dots, \pi(k-1)) \right) \leq \frac{n^{-\beta} \#V'}{\#V' - k}.$$

On se restreint dorénavant au cas :  $k < n^\alpha$  ;  $\#V' \geq n^\alpha$  par hypothèse et  $x \mapsto \frac{x}{x-k}$  est décroissante sur  $[n^\alpha, \#V']$  donc

$$\frac{n^{-\beta} \#V'}{\#V' - k} \leq \frac{n^{\alpha-\beta}}{n^\alpha - k}.$$

En injectant dans (2.2), on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}D &\leq \sum_{1 \leq \sigma(1), \dots, \sigma(k-1) \leq n'} \mathbb{E} \left[ \mathbb{1}_{\left\{ \begin{array}{l} \forall j \in \llbracket 1, k-1 \rrbracket \\ \pi(j) = \sigma(j) \end{array} \right\}} \frac{n^{\alpha-\beta}}{n^\alpha - k} \right] \\ &\leq \mathbb{E} \left[ \sum_{1 \leq \sigma(1), \dots, \sigma(k-1) \leq n'} \mathbb{1}_{\left\{ \begin{array}{l} \forall j \in \llbracket 1, k-1 \rrbracket \\ \pi(j) = \sigma(j) \end{array} \right\}} \right] \frac{n^{\alpha-\beta}}{n^\alpha - k}. \end{aligned}$$

Toutes les combinaisons possibles sont représentées une et une seule fois, donc la somme vaut 1, et son espérance également. On a donc  $\mathbb{E}D \leq \frac{n^{\alpha-\beta}}{n^\alpha - k}$ . En revenant dans (2.1), on a alors :

$$\mathbb{E}R_k^{y \circ \pi} \geq t\mathbb{P}(R_k^{y \circ \pi} \neq 0) - t\mathbb{E}D.$$

Or, comme précédemment,  $\mathbb{P}(R_k^{y \circ \pi} \neq 0) = \frac{1}{k}$ . Donc :

$$\mathbb{E}R_k^{y \circ \pi} \geq t\mathbb{P}(\{R_k^{y \circ \pi} \neq 0\}) - \mathbb{E}D \geq \frac{t}{k} - t \frac{n^{\alpha-\beta}}{n^\alpha - k}.$$

On avait supposé que  $k < n^\alpha$ , mais le membre de droite de l'équation ci-dessus donne une borne trop large quand  $k$  est trop grand. On négligera donc les valeurs de  $k$  telles que  $k > \frac{n^\alpha}{2}$ . Sous ces conditions, on a donc :

$$\mathbb{E}R_k^{y \circ \pi} \geq \frac{t}{k} - t \frac{n^{\alpha-\beta}}{n^\alpha - \frac{n^\alpha}{2}} = t \left( \frac{1}{k} - \frac{2}{n^\beta} \right).$$

Donc on peut minorer le temps de recouvrement de la manière suivante :

$$EC \geq \mathbb{E}_{v_{\text{init}}} T_{n'}^{y \circ \pi} = \sum_{k=1}^{n'} \mathbb{E}R_k^{y \circ \pi} \geq \sum_{k=1}^{\frac{n^\gamma}{2}} \mathbb{E}R_k^{y \circ \pi} \geq t \left( \sum_{k=1}^{\frac{n^\gamma}{2}} \frac{1}{k} - n^{\gamma-\beta} \right).$$

Or, on sait que  $H_n \geq \log n$  où  $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ , donc  $H_{\frac{n^\gamma}{2}} \geq \gamma \log n - \log 2 > \gamma \log n - 1$ . Donc :

$$EC > t(\gamma \log n - 2).$$

□

### 3 Résistances et réseaux électriques

Dans cette section, nous allons construire une analogie avec les réseaux électriques. On visualise chaque arête du graphe comme un fil électrique avec une résistance. On définira aussi la notion de courant et de flux comme des fonctions de l'ensemble des arêtes dans  $\mathbb{R}$ , et on voudra que ces fonctions respectent les lois physiques classiques (loi des nœuds, loi des mailles, loi d'Ohm). Nous verrons que la donnée d'un courant respectant ces lois permettra de trouver une borne sur le temps de recouvrement du graphe associé.

#### 3.1 Premiers résultats

Les résultats de cette sous-section sont extraits du livre de Grimmett intitulé *Probability on graphs* [3].

Soit  $R \in (0, +\infty)^E$  la résistance associée à chaque arête. Si  $\{u, v\} \notin E$  on pose alors  $R_{\{u, v\}} = +\infty$ . Soit  $s, t$  deux sommets respectivement appelées la source et la cible. On imagine qu'on connecte un générateur entre ces deux sommets. On définit  $i_{uv}$  de  $V^2$  dans  $\mathbb{R}$ , appelée intensité. À  $i_{uv}$  fixé, on pose  $U_{uv} = R_{\{u, v\}} i_{uv}$  (**loi d'Ohm**).

On dit que  $i$  respecte la **loi des nœuds** si :

$$\forall u \in V \setminus \{s, t\} \quad \sum_{v \in V} i_{uv} = 0.$$

On dit que  $i$  respecte la **loi des mailles** si pour tout cycle  $v_1, \dots, v_n, v_{n+1} = v_1$ , on a :

$$\sum_{j=1}^n U_{v_j v_{j+1}} = \sum_{j=1}^n R_{\{v_j, v_{j+1}\}} i_{v_j v_{j+1}} = 0.$$

Ces deux lois portent collectivement le nom de « **lois de Kirchhoff** ».

Si  $i$  respecte la loi des mailles, alors en prenant le cycle  $u, v$ , on a  $U_{uv} = -U_{vu}$ . De même, en utilisant la loi d'Ohm, on obtient  $i_{uv} = -i_{vu}$ . De plus, la loi des mailles est équivalente à l'existence d'une fonction  $\phi$  appelée potentiel telle que pour tout  $\{u, v\} \in E$  on ait  $U_{uv} = \phi(v) - \phi(u)$ . Pour cette raison, on utilise parfois l'appellation « différence de potentiel » comme synonyme de « tension ».

Comme les deux lois de Kirchhoff sont linéaires par rapport à la fonction  $i$ , on a le principe suivant :

**Proposition 3.1** (Principe de superposition). *Si  $i^1$  et  $i^2$  sont deux intensités de même source et cible respectant les lois de Kirchhoff, alors  $i^1 + i^2$  également.*

On s'intéresse à une généralisation des courants ne respectant pas nécessairement les lois de Kirchhoff, ce qui nous permettra de borner certaines données de nos courants effectifs.

Soit  $s \neq t \in V$ , on appelle s/t-flux une fonction  $j : V^2 \rightarrow \mathbb{R}$  telle que :

- (i)  $j$  est antisymétrique :  $j_{uv} = -j_{vu}$ .
- (ii) Lorsque  $\{u, v\}$  n'est pas une arête du graphe,  $j_{uv} = 0$ .

(iii)  $j$  respecte la loi des nœuds.

On appelle encore  $s$  et  $t$  la source et la cible du flux  $j$ . Pour tout flux  $j$ , on note  $J_u = \sum_{v \in V} j_{uv}$ . On constate que par (iii),  $J_u = 0$  pour tout  $u$  différent de  $s, t$ . De plus,

$$J_s + J_t = \sum_{u \in V} J_u = \sum_{u, v \in V} j_{uv} = \frac{1}{2} \sum_{u, v \in V} (j_{uv} + j_{vu}) = 0.$$

Ainsi,  $J_s = -J_t$  et on dit que  $|J_s|$  est la taille du flux  $j$ . En particulier, on dit qu'un flux de taille 1 est unitaire. De plus, quitte à permuter  $s$  et  $t$ , on supposera dorénavant que  $J_s > 0$ . Nous avons maintenant tous les outils pour démontrer l'existence et l'unicité d'une solution aux lois de Kirchhoff.

**Théorème 3.2.** *Soit  $s, t \in V$ . Alors il existe un unique  $s/t$ -flux unitaire respectant les lois de Kirchhoff.*

*Démonstration.* Soit  $s, t \in V$ .

Unicité : Soient  $i^1$  et  $i^2$  deux  $s/t$ -flux unitaires respectant la loi de Kirchhoff. Selon le principe de superposition, on en déduit que  $j = i^2 - i^1$  respecte également les lois de Kirchhoff, et la taille de  $j$  est 0. On suppose que  $j \neq 0$ . Alors il existe  $u_1, u_2 \in V$  tels que  $j_{u_1 u_2} > 0$ . Par la loi des noeuds appliquée en  $u_2$ , il existe un sommet  $u_3$  tel que  $j_{u_2 u_3} > 0$ . Par itération, on peut construire  $(u_i)_{1 \leq i \leq n+1}$  tel que  $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket j_{u_k u_{k+1}} > 0$ . Or, le graphe n'a que  $n$  sommets donc il existe  $1 \leq i < j \leq n+1$  tels que  $u_i = u_j$ . Donc  $(u_i, u_{i+1}, \dots, u_j)$  est un cycle ne respectant pas la loi des mailles. On déduit donc que  $j \equiv 0$  et donc  $i^1 \equiv i^2$ .

Existence : Soit  $G$  un graphe, on dit que  $\mathcal{T}$  est un arbre couvrant de  $G$  si  $\mathcal{T}$  est un sous-graphe connexe sans cycle de  $G$  ayant le même ensemble de sommets. On suppose ici que  $R \equiv 1$ . La démonstration ci-dessous s'étend au cas général. On pose  $\mathcal{N}(s, a, b, t)$  l'ensemble des arbres couvrants de  $G$  tels que l'unique chemin de  $s$  à  $t$  passe par l'arête  $\{a, b\}$  dans ce sens. On note

$$N(s, a, b, t) = |\mathcal{N}(s, a, b, t)|.$$

On note aussi  $N$  le nombre total d'arbres couvrants de  $G$ . Posons

$$i_{ab} = \frac{1}{N} (N(s, a, b, t) - N(s, b, a, t)).$$

Montrons que  $i$  définit un  $s/t$ -flux unitaire respectant les lois de Kirchhoff. Déjà,  $i$  est antisymétrique et si  $\{a, b\} \notin E$  alors  $i_{ab} = 0$ . Montrons maintenant la loi des nœuds. Soit  $\mathcal{T}$  un arbre couvrant de  $G$  et  $b \in V \setminus \{s, t\}$ . On rappelle que  $I_b = \sum_{a \in V} i_{ba}$ . Si le chemin allant de  $s$  à  $t$  dans  $\mathcal{T}$  ne passe pas par  $b$ ,  $\mathcal{T}$  n'a aucune incidence sur  $I_b$ . S'il passe par  $b$ , alors une arête arrive en  $b$  et une autre en repart, donc  $\mathcal{T}$  a une contribution nulle à  $I_b$ . En sommant sur tous les arbres,  $I_b = 0$ , ce qui vérifie la loi des nœuds.

Maintenant, pour démontrer la loi des mailles, on définit un buisson de  $G$  comme étant un couple  $(\mathcal{T}_s, \mathcal{T}_t)$  de deux arbres disjoints dont l'union des sommets est égale à  $V$  et telle que  $s$  est un sommet de  $\mathcal{T}_s$  et  $t$  un sommet de  $\mathcal{T}_t$ . À  $a, b$  fixé,  $\{a, b\}$  étant une arête de  $G$ , l'ensemble  $\mathcal{B}(s, a, b, t)$  des buissons tels que  $a$  est un sommet de  $\mathcal{T}_s$  et  $b$  un sommet de  $\mathcal{T}_t$  est en bijection avec  $\mathcal{N}(s, a, b, t)$ . On se donne un cycle  $(u_1, u_2, \dots, u_n, u_{n+1} = u_1)$ . Alors

$$\sum_{i=1}^n \phi_{v_i v_{i+1}} = \sum_{i=1}^n i_{v_i v_{i+1}}.$$

Mais chaque buisson  $\mathcal{B}$  contribue dans cette somme à hauteur de  $\frac{1}{N}(F^+ - F^-)$  où  $F^+$  est le nombre de paires  $v_j, v_{j+1}$  telles que  $v_j$  est un sommet de  $\mathcal{T}_s$  et  $v_{j+1}$  un sommet de  $\mathcal{T}_t$  et  $F^-$  défini symétriquement. Mais, comme  $(v_i)_{1 \leq i \leq n+1}$  est un cycle,  $F^+ = F^-$  et donc la somme ci-dessus est nulle, donc la loi des mailles est bien vérifiée. Enfin, dans chaque arbre couvrant  $\mathcal{T}$ , il existe un unique sommet  $b$  tel que le chemin dans  $\mathcal{T}$  de  $s$  à  $t$  contient le segment  $\{s, b\}$ . Ainsi :

$$\sum_{b \in V} N(s, s, b, t) = N \quad \text{et} \quad \forall b \in V \quad N(s, b, s, t) = 0.$$

Donc  $\sum_{b \in V} i_{sb} = 1$  et de même,  $\sum_{b \in V} i_{bt} = 1$ , ce qui prouve que  $i$  est unitaire. Donc  $i$  est bien un  $s/t$ -flux unitaire respectant les lois de Kirchhoff.  $\square$

**Définition 3.3.** On dit qu'une fonction  $f$  de  $V$  dans  $\mathbb{R}$  est harmonique (par rapport à une fonction  $w$  de  $E$  dans  $\mathbb{R}_+^*$ ) si pour tout sommet  $v \in V$ , on a le résultat suivant :

$$f(v) = \sum_{u \sim v} \frac{w_{uv}}{W_v} f(u)$$

où  $W_v$  est la somme des  $w_{uv}$  pour  $u \sim v$ . En particulier, si l'on s'abstient de préciser  $w$ , on supposera  $w_{uv} = \frac{1}{R_{uv}}$ .

**Proposition 3.4.** *Sous les lois de Kirchhoff, toute fonction potentiel est harmonique sur  $V \setminus \{s, t\}$ .*

*Démonstration.* Soit  $u$  un sommet. Donc  $I_u = 0$ , i.e :

$$I_u = \sum_{v \in V} i_{uv} = \sum_{v \in V} \frac{U_{uv}}{R_{uv}} = 0.$$

Or,  $U_{uv} = \phi(v) - \phi(u)$ , donc on a :

$$\sum_{v \in V} \frac{\phi(v) - \phi(u)}{R_{uv}} = \sum_{v \in V} \frac{\phi(v)}{R_{uv}} - \sum_{v \in V} \frac{\phi(u)}{R_{uv}}.$$

On en déduit, en posant  $w_{uv} = \frac{1}{R_{uv}}$  et  $W_u = \sum_{v \in V} w_{uv}$  que :

$$\phi(u) = \sum_{v \in V} \phi(v) \frac{w_{uv}}{W_u}.$$

Ainsi,  $\phi$  est bien harmonique. □

On définit l'énergie  $E(j)$  dissipée par le flux  $j$  de la manière suivante :

$$E(j) = \sum_{\{u,v\} \in E} R_{uv} j_{u,v}^2 = \frac{1}{2} \sum_{\substack{u,v \in V \\ u \sim v}} R_{uv} j_{uv}^2.$$

On commence par énoncer un résultat facile mais utile :

**Proposition 3.5.** *Soit  $\psi : V \rightarrow \mathbb{R}$  et soit  $j$  un s/t-flow. Alors :*

$$[\psi(t) - \psi(s)] J_s = \frac{1}{2} \sum_{u,v \in V} [\psi(v) - \psi(u)] j_{uv}.$$

*Démonstration.* Soit  $\psi : V \rightarrow \mathbb{R}$  et soit  $j$  un s/t-flow. Alors :

$$\begin{aligned} \sum_{u,v \in V} [\psi(v) - \psi(u)] j_{uv} &= - \sum_{v \in V} \psi(v) J_v - \sum_{u \in V} \psi(u) J_u \\ &= -2[\psi(s) J_s + \psi(t) J_t]. \end{aligned}$$

Or  $J_s = -J_t$  ce qui donne bien le résultat attendu. □

En particulier, on peut déduire de ce résultat que si  $i$  satisfait les lois de Kirchhoff, alors l'énergie dissipée par  $i$  vérifie  $E(i) = [\phi(t) - \phi(s)] I_s$ . C'est-à-dire que l'énergie dissipée par  $i$  entre  $s$  et  $t$  est la même que l'énergie dissipée dans une simple arête  $s, t$  portant la même différence de potentiel et la même intensité. La résistance effective de  $s, t$  est définie comme la résistance d'une telle arête :

$$R_{\text{eff}}(s, t) = \frac{\phi(t) - \phi(s)}{I_s} = \frac{E(i)}{I_s^2}.$$

On note  $R_{\text{eff}}^*$  et on appelle résistance du graphe le maximum de toutes les résistances effectives.

**Proposition 3.6.** *On donne ici deux lois permettant de calculer la résistance effective dans des cas simples.*

1. Deux résistances  $r_1$  et  $r_2$  placées en série sont équivalentes à une résistance effective  $r = r_1 + r_2$ .
2. Deux résistances  $r_1$  et  $r_2$  placées en dérivation sont équivalentes à une résistance effective  $r = (r_1^{-1} + r_2^{-1})^{-1}$ .

**Théoreme 3.7** (Principe de Thomson). *Soit  $s, t \in V$ . Alors, l'unique s/t-flux unitaire minimisant l'énergie dissipée est l'unique flux  $i$  respectant les lois de Kirchhoff :*

$$E(i) = \min\{E(j) : j \text{ un s/t-flux unitaire}\}.$$

*Démonstration.* Soit  $j$  un  $s/t$ -flux unitaire, et  $i$  l'unique  $s/t$ -flux unitaire vérifiant les lois de Kirchhoff. On pose  $k = j - i$ . Alors :

$$\begin{aligned} 2E(j) &= \sum_{\substack{u,v \in V \\ u \sim v}} R_{uv} j_{uv}^2 = \sum_{\substack{u,v \in V \\ u \sim v}} R_{uv} (i_{uv} + k_{uv})^2 \\ &= \sum_{\substack{u,v \in V \\ u \sim v}} R_{uv} i_{uv}^2 + \sum_{\substack{u,v \in V \\ u \sim v}} R_{uv} k_{uv}^2 + 2 \sum_{\substack{u,v \in V \\ u \sim v}} R_{uv} i_{uv} k_{uv}. \end{aligned}$$

Le 1<sup>er</sup> terme vaut  $2E(i)$ , le 2<sup>e</sup> est positif, étudions le 3<sup>e</sup>. Soit  $\phi$  la fonction potentiel associée à  $i$  :

$$\sum_{\substack{u,v \in V \\ u \sim v}} R_{uv} i_{uv} k_{uv} = \sum_{\substack{u,v \in V \\ u \sim v}} [\phi(v) - \phi(u)] k_{uv} = [\phi(t) - \phi(s)] K_s = 0.$$

En additionnant les trois termes, on en déduit donc que  $E(j) \geq E(i)$ .  $\square$

Il semble évident que le fait d'augmenter une résistance augmente également la résistance effective du flot. C'est ce qu'énonce le principe suivant, qui est un corollaire du principe de Thomson.

**Corollaire 3.8** (Principe de Rayleigh). *La résistance effective d'un réseau est une fonction croissante des résistances  $(R_{uv}, (u, v) \in V^2)$ .*

*Démonstration.* Soit  $(R_{uv}, (u, v) \in V^2)$  et  $(R'_{uv}, (u, v) \in V^2)$  des résistances sur  $G$  telles que  $R_{uv} \leq R'_{uv}$ . Soit  $i$  et  $i'$  les uniques  $s/t$ -flux unitaires respectant les lois de Kirchhoff associés respectivement à  $R$  et  $R'$ . Alors :

$$\begin{aligned} R_{\text{eff}}(s, t) &= \frac{1}{2} \sum_{\substack{u,v \in V \\ u \sim v}} R_{uv} i_{uv}^2 \\ &\leq \frac{1}{2} \sum_{\substack{u,v \in V \\ u \sim v}} R_{uv} i'_{uv}{}^2 && \text{par le principe de Thomson} \\ &\leq \frac{1}{2} \sum_{\substack{u,v \in V \\ u \sim v}} R'_{uv} i'_{uv}{}^2 = R'_{\text{eff}}(s, t), \end{aligned}$$

ce qui conclut la démonstration.  $\square$

Ce principe permet de majorer aisément la résistance effective d'un graphe en modifiant les résistances des arêtes. Par exemple, mettre sur une arête une résistance nulle revient à contracter l'arête concernée dans le graphe. De même, mettre une résistance infinie sur une arête revient à la supprimer du graphe.

### 3.2 Lien avec le *commute time*

On définit maintenant la notion de *commute time*<sup>1</sup> entre  $u$  et  $v$  noté  $C_{uv}$  comme suit :  $C_{uv}$  est le temps moyen nécessaire pour aller de  $u$  à  $v$  puis revenir en  $u$ . Plus formellement, avec les notations précédentes :

$$C_{uv} = \mathbb{E}_u T_v + \mathbb{E}_v T_u.$$

**Théorème 3.9.** *Soit  $u, v \in V$ . Alors le commute time entre  $u$  et  $v$  est proportionnel à la résistance effective (entre  $u$  et  $v$ ) et au nombre d'arêtes du graphe. Plus précisément :*

$$C_{uv} = 2m R_{\text{eff}}(u, v),$$

où  $m = \#E$  désigne le nombre d'arêtes du graphe.

*Démonstration.* Ce théorème ainsi que la démonstration que nous présentons (avec certes un peu plus de formalisme) est extrait de [2, Theorem 2.1].

---

1. Cette notion, intraduisible en français, désigne le temps total de trajet que met un employé pour aller au travail et en revenir.

Notons  $i^{uv}$  le  $u/v$ -flux unitaire respectant les lois de Kirchhoff. Par convention,  $i^{uu} \equiv 0$ . Soit  $U^{uv}$  la tension associée. Notons maintenant

$$i^u = \sum_{v \in V} d(v)i^{uv} \quad \text{et} \quad U^u = \sum_{v \in V} d(v)U^{uv}.$$

Si  $x \sim y$ , alors  $U_{xy}^u = i_{xy}^u$ . On rappelle que  $I_w^{uv} = \sum_{w' \sim w} i_{ww'}^{uv}$ . Donc, par la loi des nœuds,  $I_w^{uv} = 0$  quand  $w \notin \{u, v\}$  et  $I_u^{uv} = -I_v^{uv} = 1$ . Ainsi :

$$I_v^u := \sum_{w \in V} d(w)I_v^{uw} = -d(v).$$

Posons  $\psi : v \mapsto U_{uv}^u$ . Alors :

$$\begin{aligned} \psi(v) &= U_{uv}^u \\ &= \frac{1}{d(v)} \sum_{w \sim v} U_{uw}^u + \frac{1}{d(v)} \sum_{w \sim v} U_{vw}^u \quad (\text{car } U_{uv} = U_{uv} + U_{vu}) \\ &= \frac{1}{d(v)} \sum_{w \sim v} \psi(w) + \frac{1}{d(v)} \sum_{w \sim v} i_{vw}^u \\ &= \frac{1}{d(v)} \sum_{w \sim v} \psi(w) + \frac{1}{d(v)} (-I_v^u) \quad (\text{Par définition de } I_v^u) \\ \psi(v) &= \frac{1}{d(v)} \sum_{w \sim v} \psi(w) + 1. \end{aligned}$$

Mais  $\xi : v \mapsto \mathbb{E}_v T_u$  respecte la même propriété. En effet, en distinguant suivant le premier sommet visité après  $v$ , on trouve :

$$\xi(v) = \frac{1}{d(v)} \sum_{w \sim v} \xi(w) + 1.$$

Ainsi,  $\chi = \psi - \xi$  est harmonique sur  $V \setminus \{u\}$  et  $\chi(u) = \psi(u) - \xi(u) = 0 - 0$ . Donc  $\chi = 0$  et  $\psi = \xi$ , i.e. :

$$\mathbb{E}_v T_u = U_{uv}^u.$$

Symétriquement on a aussi :

$$\mathbb{E}_u T_v = U_{vu}^v.$$

Montrons maintenant que  $j = \frac{1}{2m}(i^u - i^v)$  est le  $u/v$ -flux unitaire respectant les lois de Kirchhoff. Déjà,  $j$  est antisymétrique et nul sur les paires qui ne sont pas des arêtes du graphe. Puis, si  $w \in V \setminus \{u, v\}$

$$J_w = \frac{1}{2m}(I_w^u - I_w^v) = \frac{1}{2m} \left( \sum_{x \in V} d(x)(I_w^{ux} - I_w^{vx}) \right) = \frac{1}{2m} d(w)(I_w^{uw} - I_w^{vw}) = 0.$$

Donc  $j$  est bien un  $u/v$ -flux. Calculons sa taille :

$$J_u = \frac{1}{2m}(I_u^u - I_u^v) = \frac{1}{2m} \left( \sum_{x \in V} d(x)(I_u^{ux} - I_u^{vx}) \right) = \frac{1}{2m} \left( \sum_{x \in V \setminus \{u\}} d(x) - (-d(u)) \right) = 1.$$

Et la loi des mailles étant vérifiée pour tous les  $(i^{uv}, (u, v) \in V^2)$  elle l'est pour  $i^u$  et  $i^v$  donc également pour  $j$ . Donc  $j$  est l'unique  $u/v$ -flux unitaire respectant les lois de Kirchhoff. On a donc par définition de la résistance effective :

$$R_{\text{eff}}(u, v) = \frac{1}{2m}(U_{uv}^u - U_{uv}^v) = \frac{1}{2m}(\mathbb{E}_v T_u + \mathbb{E}_u T_v).$$

On en déduit donc que :

$$C_{uv} = 2mR_{\text{eff}}(u, v),$$

ce qui conclut la démonstration. □

### 3.3 Résistance du tore

La résistance du tore est calculée dans [2, Theorem 6.1]. La démonstration que nous présentons est également issue de cet article.

**Théoreme 3.10.** *En dimension 2, la résistance effective de  $T_k^2$  est  $\Theta(\log k)$ .*

*De plus, il existe  $c, C > 0$  tels que pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$  suffisamment grand et pour tout  $d \geq 3$  :*

$$\frac{c}{d} \leq R_{\text{eff}}^* \leq \frac{C}{d}$$

*Démonstration.* Commençons par la borne inférieure dans le cas où  $d \geq 3$ . Pour minorer la résistance effective, on va donc diminuer des résistances : on choisit de passer toutes les résistances à 0 hormis celles des  $2d$  arêtes partant de l'origine. En se rappelant que cette opération correspond à une contraction d'arête, on obtient donc un graphe à deux sommets  $s$  et  $t$  reliés par  $2d$  arêtes où  $s$  est l'origine et  $t$  la contraction de tous les autres sommets. Donc  $R_{\text{eff}}^* \geq R_{\text{eff}}(0, u) \geq R'_{\text{eff}}(s, t) = \frac{1}{2d}$ . Pour  $d = 2$ , on munit  $T_k^2$  de la distance  $\|\cdot\|_1$ , qui est la distance dans le graphe. On contracte les sommets à même distance de l'origine, et on contracte ensemble tous les sommets à distance supérieure à  $\lfloor \frac{k}{2} \rfloor$ . On obtient alors la figure 1, où les sommets sont numérotés jusqu'à  $\lfloor \frac{k}{2} \rfloor$ . Alors les sommets  $i$  et

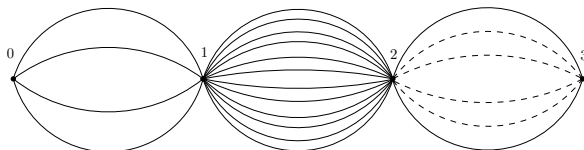


FIGURE 1 – Résultat de la contraction d'un tore

$i + 1$  sont reliés par  $8i + 4$  arêtes. Ainsi, la résistance effective entre deux sommets du tore est supérieure à celle entre 0 et  $x$  dans ce nouveau graphe, où  $x = d(u, v)$  si  $d(u, v) < k/2$ , et  $x = \frac{d(u, v)}{2}$  sinon. En particulier, on a :

$$R_{\text{eff}}(u, v) \geq \sum_{i=0}^{\frac{1}{2}d(u, v)-1} \frac{1}{8i + 4} \geq \frac{1}{8} \log \frac{d(u, v)}{2}.$$

En particulier,  $R_{\text{eff}}^* \geq \Theta(\log k)$ .

Intéressons nous maintenant à la borne supérieure. L'idée est en utilisant le principe de Thomson, de construire un flux qui ressemble au flux respectant Kirchhoff. Donc on cherche à construire un flux qui soit plus fort sur les bords que vers l'intérieur. On construira d'abord des pseudo-flux, avec plusieurs cibles et/ou plusieurs sources. On généralise la notion d'énergie à ces pseudo-flux de manière naturelle. On va construire 3 pseudo-flux  $c_1$ ,  $c_2$  et  $c_3$  qui respectent les mêmes propriétés asymptotiques de sorte que  $c_1 + c_2 + c_3$  soit un flux.

On construit  $c_1$  sur  $T_k^d$  de la manière suivante : Si  $|u| = \sum_{i=1}^d u_i$  est la longueur de  $u$ , et  $|u| \leq k$ , alors on pose :

$$c_1(u, u + e_i) = \frac{u_i + 1}{(|u| + 1) \binom{|u|+d}{d-1}}.$$

On pose également  $c_1(v, u) = -c_1(u, v)$  et  $c_1$  est nul partout ailleurs. Soit  $u$  tel que pour tout  $i$ ,  $u_i \neq 0$  et  $|u| \leq k$ . Alors :

$$\begin{aligned} I_u &= \sum \frac{u_i + 1}{|u| + 1} \frac{1}{\binom{|u|+d}{d-1}} - \sum \frac{u_i}{|u|} \frac{1}{\binom{|u|+d-1}{d-1}} \\ &= \frac{|u| + d}{|u| + 1} \frac{(d-1)! (|u| + 1)!}{(|u| + d)!} - \frac{(d-1)! |u|!}{(|u| + d - 1)!} \\ &= \frac{(d-1)! |u|!}{(|u| + d - 1)!} - \frac{(d-1)! |u|!}{(|u| + d - 1)!} = 0. \end{aligned}$$

Si  $0 < |u| \leq k$ , alors la somme est toujours définie, et vaut encore  $I_u$ , car le terme provenant de  $c_0(u, u - e_i)$  est nul lorsque  $u_i = 0$ . Si  $u = 0$ , alors  $I_u = 1 - \frac{d}{\binom{k+d-1}{d-1}}$ , le 1 venant des circuits sortant de 0 vers les points de longueur 1, et le deuxième terme venant des circuits entrant depuis les points du type  $ke_i$ . Enfin, si  $|u| = k$ , alors  $I_u = \frac{-1}{\binom{k+d-1}{d-1}}$ .

Majorons à présent l'énergie dans le cas où  $d = 2$ . Alors il y a  $2l$  arêtes reliant les sommets de longueur  $l$  et  $l + 1$ . Chacune de ces arêtes porte un flux inférieur à  $\frac{1}{l}$ , donc l'énergie portée par toutes ces arêtes est inférieure à  $\frac{2}{l} = O\left(\frac{1}{l}\right)$  quand  $l \rightarrow +\infty$ . Donc  $E(c_1) = O(\log k)$  quand  $k \rightarrow +\infty$ . De plus, pour  $d \geq 3$ , il y a  $N_l = d \binom{l+d-1}{d-1}$  arêtes reliant des sommets de longueur  $l$  et  $l + 1$ , et chacune porte un flux inférieur à  $j_l = \frac{1}{\binom{l+d}{d-1}}$ . Donc l'énergie portée par ces arêtes est inférieure à  $N_l j_l^2$ . Montrons que  $\sum_{l=0}^k N_l j_l^2 \leq \frac{C}{d}$  où  $C$  ne dépend ni de  $k$ , ni de  $d$ . Soit  $l > 0$ , alors :

$$\begin{aligned} N_l j_l^2 &= d \binom{l+d-1}{d-1} \frac{1}{\binom{l+d}{d-1}^2} \\ &= d \cdot \frac{l+1}{l+d} \cdot \frac{1}{\binom{l+d}{d-1}} \\ &\leq \frac{d!(l+1)!}{(l+d)!} \quad (\text{car } \frac{l+1}{l+d} \leq 1) \\ &\leq \frac{d!}{(l+2) \dots (l+d)} \\ &\leq \frac{4!}{(l+2)(l+3)d} \quad (\text{car } k \leq l-1+k \text{ et } d \leq l+d) \end{aligned}$$

Donc  $\sum_{l=0}^k N_l j_l^2 \leq \frac{9}{d}$ .

On pose ensuite  $c_2^{(u)}$  comme étant l'opposé de  $c_1$  translaté de  $u$ , où  $u$  est un quelconque sommet, i.e :

$$c_2^{(u)}(v, w) = -c_1(u+v, u+w).$$

Alors  $c_i$  et  $c_2^{(u)}$  ont même énergie. De plus,  $c_2^{(u)}$  a pour sources exactement les  $u+x$  où  $x$  est une cible de  $c_1$  et a pour unique cible  $u$ . Soit  $P = (u_0 = 0, u_1, \dots, u_r = u)$  le chemin qui va de l'origine à  $u$  en se déplaçant dans les dimensions une par une de manière croissante :

$$\forall i \in \llbracket 1, r-1 \rrbracket \exists j_i \in \llbracket 1, d \rrbracket u_{i+1} = u_i + e_{j_i} \quad \text{et } i \mapsto j_i \text{ est croissante.}$$

Pour toute cible  $x$  de  $c_1$ , on pose

$$c_3^{(u)}(x + u_i, x + u_{i+1}) = \frac{1}{\binom{k+d-1}{d-1}} \quad \text{et} \quad c_3^{(u)}(u_i, u_{i+1}) = \frac{d}{\binom{k+d-1}{d-1}}.$$

Majorons maintenant l'énergie de  $c_3^{(u)}$  :

$$E(c_3^{(u)}) = N_{\text{cibles}} \times \frac{|u|}{\binom{k+d-1}{d-1}^2} + |u| \left( \frac{d}{\binom{k+d-1}{d-1}} \right)^2.$$

Or,  $|u| \leq kd$ . De plus,  $N_{\text{cibles}} = \binom{k+d-1}{d-1} - d \leq \binom{k+d-1}{d-1}$ . Donc :

$$E(c_3^{(u)}) \leq \frac{kd}{\binom{k+d-1}{d-1}} + \frac{kd^3}{\binom{k+d-1}{d-1}^2}.$$

Étudions les deux termes séparément.

$$\begin{aligned} \frac{kd}{\binom{k+d-1}{d-1}} &= \frac{k \cdot d! \cdot k!}{(k+d-1)!} \\ &= \frac{k \cdot d!}{(k+1) \dots (k+d-1)} \\ &\leq \frac{1}{d} \cdot \frac{d!}{(k+2) \dots (k+d-2)} \quad \text{car } d \leq k+d-1 \\ &\leq \frac{3!}{d} \quad \text{car } j \leq k-2+j \end{aligned}$$



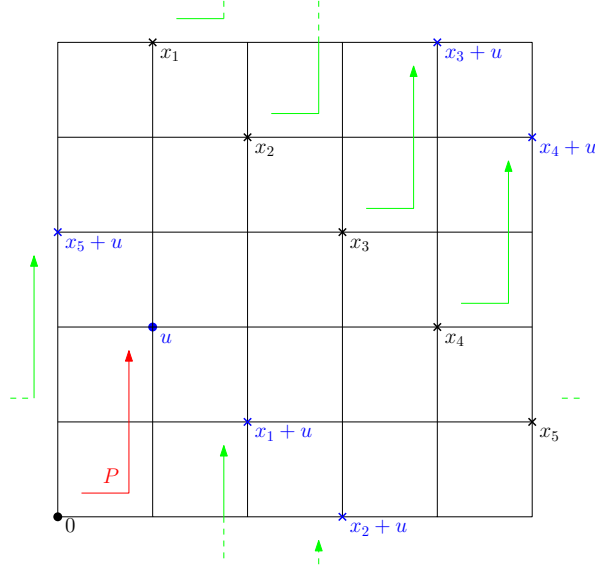


FIGURE 2 – Notations pour la définition de  $c_3^{(u)}$  sur  $T_6^2$ . Les points  $x_1, \dots, x_5$  sont les cibles de  $c_1$

Pour le deuxième terme, supposons  $k \geq 2$

$$\begin{aligned}
\frac{kd^3}{\binom{k+d-1}{d-1}^2} &= \frac{1}{d} \cdot \frac{d^2 \cdot k \cdot d!^2 \cdot k!^2}{(k+d-1)!^2} \\
&= \frac{1}{d} \cdot \frac{d^2 \cdot k \cdot d!^2 \cdot k!^2}{(k+1)^2 \dots (k+d-1)^2} \\
&\leq \frac{1}{d} \cdot \frac{d!^2}{(k+1)(k+2)^2 \dots (k+d-2)^2} \\
&\leq \frac{1}{d} \cdot \frac{d! \cdot 2}{(k+2) \dots (k+d-2)} \\
&\leq \frac{1}{d} \cdot 12
\end{aligned}$$

Donc on a bien  $E(c_3^{(u)}) \leq \frac{18}{d}$ , pour  $k$  suffisamment grand. Puis,  $c^{(u)} = c_1 + c_2^{(u)} + c_3^{(u)}$  a pour unique cible  $u$  et pour unique source  $0$ , et est de taille 1. De plus, on montre aisément que  $E(c_1 + c_2) \leq 2E(c_1) + 2E(c_2)$ . Ainsi, en utilisant le principe de Thomson :

$$R_{\text{eff}}^* = E(i) \leq E(c^{(u)}) = E(c_1 + c_2^{(u)} + c_3^{(u)}) \leq 4E(c_1) + 4E(c_2^{(u)}) + 2E(c_3^{(u)}) \leq \frac{96}{d}.$$

Ainsi, avec  $c = \frac{1}{2}$  et  $C = 96$ , on obtient bien le résultat annoncé.  $\square$

## 4 Temps de recouvrement du tore

**Théoreme 4.1.** *Il existe  $c, C > 0$  tels que pour tout  $d \geq 3$ , pour tout  $k$  assez grand, en posant  $n = k^d$ , on a :*

$$cn \log n \leq \mathbb{E}C(T_k^d) \leq Cn \log n.$$

*Démonstration.* Soit  $u, v$  deux sommets du tore. Par symétrie du tore, on a

$$\mathbb{E}_u T_v = \frac{1}{2} C_{uv} = m R_{\text{eff}}(u, v)$$

Or, comme démontré plus haut,  $\frac{1}{2d} \leq R_{\text{eff}}(u, v) \leq R_{\text{eff}}^*$ . Donc  $\mu_- \geq \frac{n}{2}$  et  $\mu_+ \leq 96n$ . Ainsi, en appliquant le théorème 2.2, on en déduit que :

$$\frac{1}{2}n \sum_{j=1}^n \frac{1}{j} \leq \mathbb{E}C(T_k^d) \leq 96n \sum_{j=1}^n \frac{1}{j}$$

Ainsi, pour  $n$  assez grand, et pour  $c = \frac{1}{2}$  et  $C_\epsilon = 96 + \epsilon$ , on obtient bien le résultat demandé.  $\square$

On peut maintenant appliquer l'ensemble des résultats prouvés au cas du tore de dimension 2. Ce résultat est dû à Zuckerman [6, Theorem 4].

**Théorème 4.2.** *Soit  $k \in \mathbb{N}^*$ . On pose  $n = k^2$ . Alors :*

$$\mathbb{E}C(T_k^2) = \Theta(n \log^2 n) = \Theta(k^2 \log^2 k).$$

*Démonstration.* D'après le théorème 2.2,

$$\mathbb{E}C(T_k^2) = O(\mu_+ \times \log n).$$

Mais, la régularité du tore permet de déduire que :  $\mathbb{E}_u T_v = \mathbb{E}_v T_u$ . Donc  $\mathbb{E}_u T_v = \frac{1}{2} C_{uv}$ . Mais par le théorème 3.9, on sait que  $C_{uv} = 2m R_{\text{eff}}(u, v)$ . Ainsi :

$$\begin{aligned} \mu_+ &= \max_{u, v \in V^2} \mathbb{E}_u T_v = \frac{1}{2} \max_{u, v \in V^2} C_{uv} \\ &= n \max_{u, v \in V^2} R_{\text{eff}}(u, v) = m R_{\text{eff}}^* \\ &= O(n \log n). \end{aligned}$$

Ainsi,  $\mathbb{E}C(T_k^2) = O(n \log^2 n)$ .

Soit  $t = \frac{1}{32} n \log n$  et  $V' = V$ ,  $\alpha = 1$  et  $\beta = \log_n(\frac{\sqrt{n}}{4})$ . Dans la preuve du théorème précédent, on a démontré que :

$$\mathbb{E}_u T_v > \frac{1}{8} n \log \frac{d(u, v)}{2}$$

Soit  $v \in V' = V$ . Si  $d(u, v) \geq l = 2n^{\frac{1}{4}}$ , alors  $\mathbb{E}_u T_v > \frac{1}{8} n \log(n^{\frac{1}{4}}) = t$ . Donc il y a au plus  $2l^2 = 4\sqrt{n}$  sommets  $v$  tels que  $\mathbb{E}_u T_v < t$ . Donc le lemme 2.3 s'applique avec  $\beta = \log_n(\frac{\sqrt{n}}{4})$  et on en déduit que :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}C(T_k^2) &> \frac{1}{8} n \log(n^{\frac{1}{4}}) (\log_n(\frac{\sqrt{n}}{4}) \log n - 2) \\ &> \frac{1}{64} n \log(n) (\log(n) - 8). \end{aligned}$$

Donc on a bien  $\mathbb{E}C(T_k^2) = \Omega(n \log^2 n)$ . En combinant les deux, on a bien  $\mathbb{E}C(T_k^2) = \Theta(n \log^2 n)$ .  $\square$

Pour compléter la liste, on s'intéresse au tore de dimension 1. Le temps de recouvrement est alors connu exactement (et simplement) grâce à Wilf [5]. La démonstration présentée ici lui est également due.

**Théorème 4.3.** *Soit  $k \in \mathbb{N}^*$ . On pose  $n = k$ . Alors :*

$$\mathbb{E}C(T_k^1) = \binom{n}{2}.$$

*Démonstration.* Soit  $j$  un entier strictement positif inférieur à  $n-1$ . Considérons le premier instant où  $j$  sommets ont été visités. On cherche à calculer l'espérance du temps nécessaire pour visiter un nouveau sommet. Déjà, l'ensemble des sommets visités forme une ligne au bord de laquelle se trouve la marche. Si l'on note  $1, 2, \dots, j$  les sommets visités et  $z_r$  l'espérance du temps nécessaire pour visiter un nouveau sommet en partant de  $r$ . Alors, en prenant comme convention  $z_0 = z_{j+1} = 0$ , on a  $z_r = 1 + \frac{1}{2}(z_{r-1} + z_{r+1})$ . Avec les deux conditions aux bornes, il y a une unique solution :

$$z_r = (j+1-r)r.$$

En particulier,  $z_1 = z_{j+1} = j$ . Donc l'espérance du temps nécessaire pour atteindre un nouveau sommet est  $j$ . Ainsi, l'espérance du temps total nécessaire est :

$$\mathbb{E}C(T_k^1) = 1 + 2 + \dots + (n-1) = \binom{n}{2}.$$

$\square$

## Conclusion

Ainsi, on a notre réponse au problème que se posait Herbert Wilf : En supposant que son écran d'ordinateur avait une définition d'environ  $100 \times 100$  pixels (ce qui semble être un assez bon écran pour les années 1980), et en considérant que le point peut traverser les bords de l'écran, alors on peut assimiler l'écran au tore  $T_{100}^2$ . Son temps de recouvrement est donc de l'ordre de  $8 \times 10^4$  déplacements. Ainsi, s'il y a un déplacement à chaque seconde, cela prendrait de l'ordre d'une journée.

En dehors de ce résultat (fort passionnant au demeurant), les résistances introduites et utilisées dans ce mémoire peuvent également être utilisées dans d'autres contextes en raison notamment de leur robustesse. Il est par exemple possible de démontrer la récurrence (respectivement transience) de la marche aléatoire uniforme sur un réseau de dimension 2 (respectivement de dimension strictement supérieure à 2), comme démontré dans [3, Theorem 1.32].

## Références

- [1] Jean-François Le Gall, *Intégrations, probabilités et processus aléatoires*, FIMFA, Septembre 2006
- [2] A. K. Chandra, P. Raghavan, W. L. Ruzzo, R. Smolensky, and P. Tiwari. The electrical resistance of a graph captures its commute and cover times. *Comput. Complexity*, 6(4) :312–340, 1996/97.
- [3] G. Grimmett. *Probability on graphs*, volume 1 of *Institute of Mathematical Statistics Textbooks*. Cambridge University Press, Cambridge, 2010. Random processes on graphs and lattices.
- [4] P. Matthews. Covering problems for Brownian motion on spheres. *Ann. Probab.*, 16(1) :189–199, 1988.
- [5] H. S. Wilf. The editor’s corner : the white screen problem. *Amer. Math. Monthly*, 96(8) :704–707, 1989.
- [6] D. Zuckerman. A technique for lower bounding the cover time. *SIAM J. Discrete Math.*, 5(1) :81–87, 1992.