

# Matrices Aléatoires et Applications

Jianfeng YAO

*sous la direction de J. Najim et E. Moulines*

4 juillet 2011

## Table des matières

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| <b>1</b> | <b>Introduction</b>                                  | <b>2</b>  |
| <b>2</b> | <b>Notations et définitions</b>                      | <b>2</b>  |
| 2.1      | Transformée de Stieltjes . . . . .                   | 2         |
| 2.2      | Modèles . . . . .                                    | 3         |
| <b>3</b> | <b>Résultats classiques</b>                          | <b>3</b>  |
| 3.1      | La loi de Marčenko-Pastur . . . . .                  | 3         |
| 3.2      | La plus grande valeur propre . . . . .               | 5         |
| 3.3      | Fluctuation de la transformée de Stieltjes . . . . . | 6         |
| 3.4      | Séparation spectrale . . . . .                       | 6         |
| <b>4</b> | <b>Estimation des valeurs propres</b>                | <b>7</b>  |
| <b>5</b> | <b>Application sur radio cognitive</b>               | <b>9</b>  |
| <b>6</b> | <b>Perspectives</b>                                  | <b>10</b> |

# 1 Introduction

Face à la complexité croissante des spectres nucléaires observés dans les années 1950, Wigner a suggéré de remplacer l'opérateur hamiltonien du noyau par une matrice aléatoire. D'où provient la notion de matrices aléatoires. Puis la théorie de matrices aléatoires a été beaucoup développée et utilisée dans plusieurs domaines. Ce court texte est pour l'objet de donner la base sur la théorie de matrices aléatoires et de voir quelques applications en télécommunication.

Le texte se comporte en trois parties. D'abord on va regarder quelques résultats classiques sur les matrices aléatoires. Ensuite on va étudier un modèle précis. Surtout on proposera un estimateur consistant et on étudiera sa fluctuation. On se terminera par l'application sur la radio cognitive.

## 2 Notations et définitions

### 2.1 Transformée de Stieltjes

Soit  $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$ , une variable aléatoire complexe centrée et de variance  $\mathbf{R}$ . Si  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_M$  sont  $M$  réalisations indépendantes de  $\mathbf{x}$ , alors

$$\mathbf{R}_M = \frac{1}{M} \sum_1^M \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i^H$$

est appelé la *matrice de covariance* où  $\mathbf{x}_i^H$  désigne la matrice hermitienne de  $\mathbf{x}_i$ . Notons  $\mathbf{X}_M = [\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_M]$  et  $\mathbf{R}_M = \frac{1}{M} \mathbf{X}_M \mathbf{X}_M^H$ . La matrice  $\mathbf{R}_M$  est aussi appelée la *matrice de Wishart*. Lorsque  $N$  est fixé, par la loi forte des grands nombres, on trouve facilement que

$$\|\mathbf{R}_M - \mathbf{R}\| \xrightarrow{p.s.} 0,$$

quand  $M$  tend vers l'infini. Ici  $\|\cdot\|$  désigne la norme usuelle, c'est-à-dire,  $\|\mathbf{X}\| = \sqrt{\text{Tr}(\mathbf{X}\mathbf{X}^H)}$ . Cependant, la convergence n'est plus vraie si  $N, M$  tendent vers l'infini.

Pour une matrice hermitienne  $A$  de taille  $N \times N$ , on introduit la mesure spectrale qui est donnée par

$$F^A(d\lambda) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{\xi_i}(d\lambda),$$

où  $\xi_j$  sont les valeurs propres de  $A$ .

L'un des outils fondamentaux est la *transformée de Stieltjes* qui est définie de la façon suivante.

**Définition 1** La transformée de Stieltjes associée à une mesure  $\mu$  est définie par : Pour  $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+$

$$m_\mu(z) = \int \frac{\mu(d\lambda)}{\lambda - z}.$$

Il y a aussi la formule d'inversion : Pour  $a$  et  $b$ , deux points de continuité de la fonction de répartition  $F^\mu$ ,

$$\mu([a, b]) = \frac{1}{\pi} \int_a^b \lim_{y \downarrow 0} \Im m_\mu(x + iy) dx.$$

Pour la mesure spectrale  $F^{\mathbf{R}_M}$ , la transformée de Stieltjes a une forme plus simple qui est :

$$m_{\mathbf{R}_M}(z) = \int \frac{F^{\mathbf{R}_M}(d\lambda)}{\lambda - z} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{1}{\lambda_i - z},$$

où  $\lambda_i$  sont les valeurs propres de  $\mathbf{R}_M$ .

## 2.2 Modèles

Dans ce texte, on discutera deux modèles principaux :  $\mathbf{R}_M = \frac{1}{M} \mathbf{X}_M \mathbf{X}_M^H$  et  $\mathbf{S}_M = \frac{1}{M} \mathbf{T}_N^{\frac{1}{2}} \mathbf{X}_M \mathbf{X}_M^H \mathbf{T}_N^{\frac{1}{2}}$  où

1.  $\mathbf{X}_M$  est de loi gaussienne complexe standard, *i.e.*,  $(x_{ij})$  sont iid de loi  $\mathcal{N}_1 + i\mathcal{N}_2$  où  $\mathcal{N}_1$  est indépendante de  $\mathcal{N}_2$  et  $\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2 \sim \mathcal{N}(0, \frac{1}{2})$ .
2.  $\mathbf{T}_N = \text{Diag}(\underbrace{\tau_1, \dots, \tau_1}_{N_1}, \dots, \underbrace{\tau_L, \dots, \tau_L}_{N_L})$ , *i.e.*,  $\mathbf{T}_N$  est une matrice diagonale de taille  $N \times N$  avec  $L$  valeurs propres distinctes  $\tau_1 < \dots < \tau_L$ . Chaque valeur propre  $\tau_i$  a la multiplicité  $N_i$ .
3. Supposons aussi que  $\frac{N}{M} \rightarrow c$  et  $\frac{N_i}{M} \rightarrow c_i$  pour tout  $i \in \{1, \dots, L\}$  quand  $N, M$  tendent vers l'infini. Donc la mesure spectrale de  $\mathbf{T}_N$  converge vers la mesure spectrale

$$F^{\mathbf{T}}(d\lambda) = \sum_{i=1}^L \frac{c_i}{c} \delta_{\tau_i}(d\lambda).$$

**Remarque 1** Les hypothèses qu'on fait ne sont pas optimales. Dans certains théorèmes suivants, ce n'est pas nécessaire de supposer que les entrées sont gaussiennes. Pour simplifier les notations et pour la clarté du texte, on fait ces hypothèses. Elles sont souvent plus fortes.

**Remarque 2** Le deuxième modèle est effectivement plus général que le premier. On précisera le modèle dans chaque théorème. La convergence reste toujours vraie même si le théorème est pour le premier modèle. Mais les calculs sont différents. Pour éviter les notations lourdes, on introduit le premier modèle.

## 3 Résultats classiques

### 3.1 La loi de Marčenko-Pastur

Dans cette partie, on étudie la convergence de la mesure spectrale.

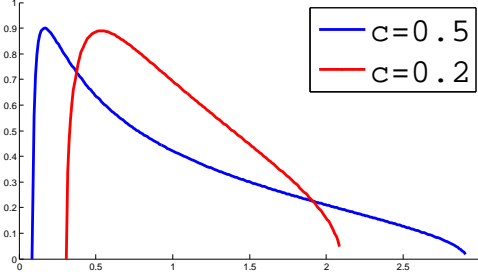


FIGURE 1 – La densité de la loi de Mačenko-Pastur

**Définition 2** La densité de la loi de Marčenko-Pastur est : Pour  $c \leq 1$ ,

$$p_c(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi xc} \sqrt{(b-x)(x-a)} & \text{si } a \leq x \leq b, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

avec  $a = (1 - \sqrt{c})^2$  et  $b = (1 + \sqrt{c})^2$ . Pour  $c > 1$ , c'est la même expression avec une masse  $1 - 1/c$  à l'origine. La densité peut aussi s'écrire comme :

$$\left(1 - \frac{1}{c}\right) \delta_0 \mathbf{I}_{c>1} + p_c(x) \mathbf{I}_{a \leq x \leq b}.$$

La Figure 1 décrit la densité de cette loi pour  $c = 0.5$  et  $c = 0.2$ .

**Théorème 1 ([1])** On considère le modèle  $\mathbf{R}_M = \frac{1}{M} \mathbf{X}_M \mathbf{X}_M^H$ . Alors, avec probabilité un, la mesure spectrale  $F^{\mathbf{R}_M}$  converge vers la loi de Marčenko-Pastur.

Il y a deux approches classiques pour la démonstration : La méthode des moments et la méthode basée sur la transformée de Stieltjes. Pour la méthode des moments, on calcule tous les moments de  $\mathbf{R}_M$  et on trouve qu'ils convergent vers les moments de la loi de Marčenko-Pastur (voir aussi [2]). Pour la transformée de Stieltjes, on utilise souvent le lemme suivant.

**Lemme 1 (Lemme de perturbation du rang 1)** Soient  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{N \times N}$  une matrice hermitienne positive,  $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^N$  un vecteur et  $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+$ , alors

$$\frac{1}{N} \text{Tr}(\mathbf{A} + \mathbf{v}\mathbf{v}^H - z\mathbf{I})^{-1} - \frac{1}{N} \text{Tr}(\mathbf{A} - z\mathbf{I})^{-1} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0.$$

On a un résultat similaire pour le deuxième modèle. Mais la loi limite est plus compliquée.

**Théorème 2 ([3])** On considère la matrice  $\mathbf{S}_M = \frac{1}{M} \mathbf{T}_N^{\frac{1}{2}} \mathbf{X}_M \mathbf{X}_M^H \mathbf{T}_N^{\frac{1}{2}}$ . Alors avec probabilité un, la mesure spectrale  $F^{\mathbf{S}_M}$  de  $\mathbf{S}_M$  converge vers une distribution  $F$  dont la transformée de Stieltjes  $m(z)$  est caractérisée par

$$m(z) = \frac{1}{c} \underline{m}(z) - \left(1 - \frac{1}{c}\right) \frac{1}{z},$$

où  $\underline{m}(z)$  est l'unique solution de l'équation

$$\underline{m}(z) = - \left( z - c \int \frac{t}{1 + t\underline{m}(z)} dF^{\mathbf{T}}(t) \right)^{-1},$$

sur l'ensemble  $\{z \in \mathbb{C}^+ : \underline{m}(z) \in \mathbb{C}^+\}$  avec  $\mathbb{C}^+ = \{z \in \mathbb{C} : \Im z > 0\}$ .

**Définition 3** On définit aussi

$$m_N(z) = \frac{M}{N} \underline{m}_N(z) - \left(1 - \frac{M}{N}\right) \frac{1}{z},$$

où  $\underline{m}_N(z)$  est l'unique solution de l'équation

$$\underline{m}_N(z) = - \left( z - c \int \frac{t}{1 + t\underline{m}_N(z)} dF^{\mathbf{T}_N}(t) \right)^{-1},$$

sur l'ensemble  $\{z \in \mathbb{C}^+ : \underline{m}_N(z) \in \mathbb{C}^+\}$ .

La fonction  $m_N(z)$  (resp.  $\underline{m}_N(z)$ ) est appelée l'équivalent déterministe associé à  $m(z)$  (resp.  $\underline{m}(z)$ ). Notons  $F_N$  (resp.  $\underline{F}_N$ ) la mesure spectrale associée à la transformée de Stieltjes  $m_N(z)$  (resp.  $\underline{m}_N(z)$ ).

En comparant  $\underline{m}_N(z)$  et  $\underline{m}(z)$ , on a remplacé  $c$  par  $\frac{N}{M}$  dans chaque relation. Comme on ne sait pas la vitesse de convergence de  $\frac{N}{M}$  à  $c$ , en général, on utilise plutôt  $\underline{m}_N(z)$  et  $m_N(z)$  au lieu de  $\underline{m}(z)$  et  $m(z)$ .

### 3.2 La plus grande valeur propre

**Théorème 3 ([4])** On considère la matrice de Wishart  $\mathbf{R}_M = \frac{1}{M} \mathbf{X}_M \mathbf{X}_M^H$ . Alors la plus grande valeur propre converge vers  $(1 + \sqrt{c})^2$  presque sûrement.

On connaît aussi la fluctuation de la plus grande valeur propre.

**Définition 4** La fonction  $F(\cdot)$  est une fonction de répartition telle que

$$F(t) = \exp \left( - \int_t^\infty (x - t) q(x)^2 dx \right),$$

où  $q$  satisfait

$$q'' = tq + 2q^3, q(t) \underset{t \rightarrow \infty}{\sim} Ai(t), \quad (1)$$

et

$$Ai(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \cos\left(\frac{1}{3}t^3 + xt\right) dt.$$

La fonction  $Ai(x)$  est appelée la fonction d'Airy; et l'équation (1) est appelée l'équation de Painlevé II.  $F(\cdot)$  est la fonction de répartition de la loi de Tracy-Widom.

**Théorème 4 ([5])** On note  $\lambda_N$ , la plus grande valeur propre de  $\mathbf{S}_M$ . Alors

$$M^{2/3} \frac{\lambda_N - \mu_{N,M}}{\sigma_{N,M}} \xrightarrow{\mathcal{L}} TW$$

où  $\mu_{N,M} = \left(\sqrt{\frac{N}{M}} + 1\right)^2$ ,  $\sigma_{N,M} = \left(\frac{M}{N}\right)^{1/6} \left(1 + \sqrt{\frac{N}{M}}\right)^{4/3}$  et  $TW$  désigne la loi de Tracy-Widom.

**Remarque 3** La convergence vers la loi de Tracy-Widom reste vraie dans le deuxième modèle, mais les expressions de  $\mu_{N,M}$  et  $\sigma_{N,M}$  sont plus compliquées.

### 3.3 Fluctuation de la transformée de Stieltjes

Un autre théorème utile pour étudier la fluctuation est le théorème central limite sur la transformée de Stieltjes.

**Théorème 5 ([6])** Considérons le cas où  $\mathbf{S}_M = \frac{1}{M} \mathbf{T}_N^{\frac{1}{2}} \mathbf{X}_M \mathbf{X}_M^H \mathbf{T}_N^{\frac{1}{2}}$ . Soient  $f_1, \dots, f_k$  des fonctions analytiques sur un ouvert qui contient l'intervalle

$$\left[ \liminf_M \lambda_{\min}^{\mathbf{S}_M} \mathbf{I}_{(0,1)}(c)(1 - \sqrt{c})^2, \limsup_M \lambda_{\max}^{\mathbf{S}_M} (1 + \sqrt{c})^2 \right].$$

Notons  $P_M(f) = N \int f(x) d(F^{\mathbf{S}_M} - F_N)(x)$ . Alors :

1. Le vecteur

$$(P_M(f_1), \dots, P_M(f_k))$$

est tendu en  $M$ .

2. Ce vecteur converge en loi vers une loi normale centrée  $\mathcal{N}(0, V)$  de variance  $V = (v_{ij})$  avec

$$v_{ij} = -\frac{1}{4\pi^2} \int_{C_1} \int_{C_2} v(z_1, z_2) f_i(z_1) f_j(z_2) dz_1 dz_2$$

où

$$v(z_1, z_2) = \frac{\underline{m}'(z_1) \underline{m}'(z_2)}{(\underline{m}(z_1) - \underline{m}(z_2))^2} - \frac{1}{(z_1 - z_2)^2}.$$

Les contours  $C_1$  et  $C_2$  sont deux contours fermés dans le sens positif sur le plan complexe et chacun contient le support  $\mathcal{S}$  de la loi limite  $F$ .

### 3.4 Séparation spectrale

Ici on s'intéresse à la position des valeurs propres.

**Théorème 6 ([7], [8])** On considère le modèle  $\mathbf{S}_M = \frac{1}{M} \mathbf{T}_N^{1/2} \mathbf{X}_M \mathbf{X}_M^H \mathbf{T}_N^{1/2}$ . On prend un intervalle  $[a, b]$  qui est en dehors du support  $\mathcal{S}_N$  de  $F_N$ .

Alors :

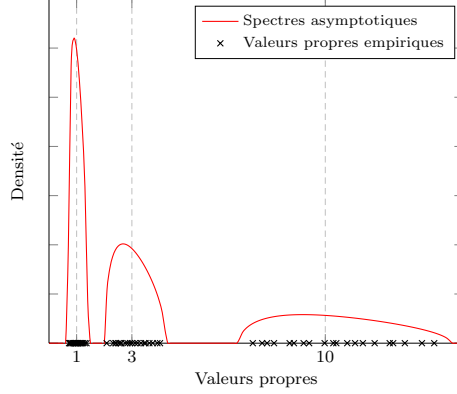


FIGURE 2 – La distribution des valeurs propres empiriques de  $\mathbf{S}_M$  avec  $L = 3$ ,  $\tau_1 = 1$ ,  $\tau_2 = 3$ ,  $\tau_3 = 10$ ,  $N/M = c = 0.1$ ,  $N = 60$  et  $N_1 = N_2 = N_3 = 20$ .

1.  $\mathbb{P}[\text{aucune valeur propre de } \mathbf{S}_M \text{ n'est dans } [a, b] \text{ pour } M \text{ assez grand}] = 1$ .
2. Si  $c[1 - T(0)] > 1$ , alors  $x_0$ , la plus petite valeur du support  $\mathcal{S}$  de  $F$ , est strictement positive, et avec probabilité un, la plus petite valeur propre de  $\mathbf{S}_M$ ,  $\lambda_1^{\mathbf{S}_M} \xrightarrow{p.s.} x_0$  quand  $M \rightarrow \infty$ .
3. Si  $c(1 - T(0)) \leq 1$  ou  $c[1 - T(0)] > 1$  mais  $[a, b]$  n'est pas contenu dans  $(0, x_0)$ , alors l'intervalle  $[-1/m(a), -1/m(b)]$  est contenu dans  $\mathcal{S}_N^c \cap \mathbb{R}^+$  pour  $M$  assez grand. Pour  $i_n \geq 0$  tel que

$$\tau_{i_n}^{\mathbf{T}_N} > -1/m(b) \quad \text{et} \quad \tau_{i_n-1}^{\mathbf{T}_N} < -1/m(a),$$

$$\mathbb{P}(\lambda_{i_n}^{\mathbf{S}_M} > b \text{ et } \lambda_{i_n-1}^{\mathbf{S}_M} < a \text{ pour } M \text{ assez grand}) = 1.$$

La Figure 2 illustre le théorème précédent. On a pris trois valeurs propres distinctes 1, 3 et 10 avec la même multiplicité 20. En rouge, c'est la loi limite de la mesure spectrale. En noir, ce sont les positions des valeurs propres. D'après le théorème précédent, avec probabilité un, les valeurs propres sont dans les trois sauts. En outre, il y a exactement 20 valeurs propres dans chaque saut. C'est le sens de séparation exacte.

## 4 Estimation des valeurs propres

Dans cette partie, on veut estimer les valeurs propres  $\tau_1, \dots, \tau_L$ . Donc on est dans le deuxième modèle  $\mathbf{S}_M = \frac{1}{M} \mathbf{T}_N^{1/2} \mathbf{X}_M \mathbf{X}_M^H \mathbf{T}_N^{1/2}$ .

**Théorème 7 ([9])** Lorsque  $N$  est fixé, quand  $M$  tend vers  $+\infty$ , l'estimateur

$$\alpha_i = \frac{1}{N_i} \sum_{r \in \mathcal{N}_i} \lambda_r$$

est un estimateur consistant de  $\tau_i$  où  $\lambda_r$  sont les valeurs propres de  $\mathbf{S}_M$  dans l'ordre croissant et  $\mathcal{N}_k = \{\sum_{j=1}^{k-1} N_j + 1, \dots, \sum_{j=1}^k N_j\}$ . De plus,

$$M(\alpha_i - \tau_i) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 2\tau_i^2).$$

Mais ce théorème tombe en défaut si  $M, N \rightarrow \infty$  avec  $N/M \rightarrow c > 0$ . On a besoin d'un autre estimateur pour les valeurs propres.

**Théorème 8 ([10])** *Si le support  $\mathcal{S}$  de la limite  $F$  est composé de  $L$  ensembles disjoints (cf. Figure 2), alors*

$$\hat{\tau}_i = \frac{M}{N_i} \sum_{r \in \mathcal{N}_i} (\lambda_r - \mu_i)$$

où les  $\mu_i$  sont les zéros de  $m_{\mathbf{R}_N}(z)$  dans l'ordre croissant, i.e. les solutions de l'équation

$$\frac{1}{N} \sum_{r=1}^N \frac{\lambda_r}{\lambda_r - x} = \frac{M}{N}$$

avec  $\mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots \leq \mu_N$ .

Mon mémoire consiste à étudier la fluctuation de cet estimateur.

**Théorème 9 ([11])** *Avec les mêmes notations,*

$$M(\hat{\tau}_i - \tau_i) \xrightarrow[L]{} \mathcal{N}(0, \Theta)$$

où  $\Theta = (\Theta_{ij})$  et

$$\Theta_{ij} = -\frac{1}{4\pi^2 c_i c_j} \oint_{\mathcal{C}_i} \oint_{\mathcal{C}_j} \left( \frac{\underline{m}'(z_1) \underline{m}'(z_2)}{(\underline{m}(z_1) - \underline{m}(z_2))^2} \right) \frac{dz_1 dz_2}{\underline{m}(z_1) \underline{m}(z_2)}$$

où le contour  $\mathcal{C}_i$  ne contient que le  $i$ -ième saut.

Ensuite on aimerait estimer la variance.

**Théorème 10 ([11])**  $\hat{\Theta}_{ij}$  est un estimateur consistant de  $\Theta_{ij}$  où

$$\hat{\Theta}_{ij} = \frac{M^2}{N_i N_j} \left[ \sum_{(i,j) \in \mathcal{N}_i \times \mathcal{N}_j, i \neq j} \frac{-1}{(\mu_i - \mu_j)^2 m'_{\mathbf{S}_M}(\mu_i) m'_{\mathbf{S}_M}(\mu_j)} + \delta_{ij} \sum_{i \in \mathcal{N}_k} \left( \frac{m'''_{\mathbf{S}_M}(\mu_i)}{6m'_{\mathbf{S}_M}(\mu_i)^3} - \frac{m''_{\mathbf{S}_M}(\mu_i)^2}{4m'_{\mathbf{S}_M}(\mu_i)^4} \right) \right],$$

où  $\delta_{ab}$  est le symbole de Kronecker, i.e.  $\delta_{ab} = 1$  si et seulement si  $a = b$  et

$$m_{\mathbf{S}_M}(z) = \frac{M}{N} m_{\mathbf{S}_M}(z) - \left(1 - \frac{M}{N}\right) \frac{1}{z}.$$



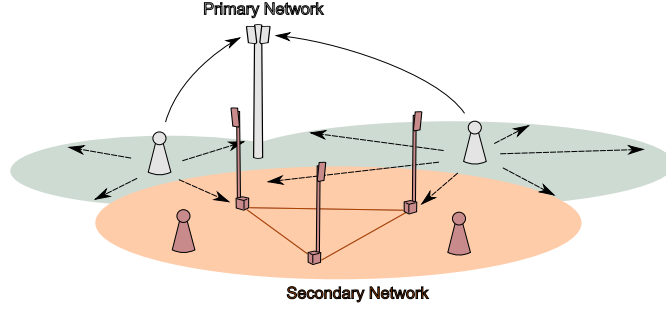


FIGURE 3 – Radio cognitive

## 5 Application sur radio cognitive

Considérons un réseau primaire qui est composé de  $K$  transmetteurs. Le transmetteur  $k$  envoie  $n_k$  codes orthogonaux  $\mathbf{w}_{k,1}, \dots, \mathbf{w}_{k,n_k} \in \mathbb{C}^N$ . On considère aussi le second réseau qui a pour l'objet de déterminer la distance de transmetteur primaire (voir Figure 3). D'un point de vue de détecteur, l'utilisateur primaire  $k$  a la puissance  $P_k$ . Alors, à l'instant  $m$ , le détecteur reçoit le vecteur

$$\mathbf{y}^{(m)} = \sum_{k=1}^K \sqrt{P_k} \sum_{j=1}^{n_k} \mathbf{w}_{k,j} x_{k,j}^{(m)} + \sigma \mathbf{n}^{(m)}, \quad (2)$$

avec  $\sigma \mathbf{n}^{(m)} \in \mathbb{C}^N$  un bruit à l'instant  $m$  qui est supposé gaussien et  $x_{k,j}^{(m)}$  le signal transmis par l'utilisateur  $k$  sur le code  $j$  à l'instant  $m$ , qu'on suppose aussi gaussien. On suppose que le détecteur connaît parfaitement  $\sigma^2$ .

L'Equation (2) peut s'écrire sous la forme

$$\mathbf{y}^{(\mathbf{m})} = \mathbf{W} \mathbf{P}^{\frac{1}{2}} \mathbf{x}^{(\mathbf{m})} + \sigma \mathbf{n}^{(\mathbf{m})},$$

avec  $\mathbf{W} = [\mathbf{w}_{1,1}, \dots, \mathbf{w}_{1,n_1}, \mathbf{w}_{2,1}, \dots, \mathbf{w}_{K,n_K}] \in \mathbb{C}^{N \times n}$ ,  $n \triangleq \sum_{k=1}^K n_k$ ,  $\mathbf{P} \in \mathbb{C}^{n \times n}$  une matrice diagonale avec entrées  $P_i$  de multiplicité  $n_i$  pour  $i = 1, \dots, K$ , et  $\mathbf{x}^{(m)} = [\mathbf{x}_1^{(m)t}, \dots, \mathbf{x}_K^{(m)t}]^t \in \mathbb{C}^n$  où  $\mathbf{x}_k^{(m)} \in \mathbb{C}^{n_k}$  est un vecteur avec  $j$ -ième entrée  $x_{k,j}^{(m)}$ .

Selon le temps  $m$ , on obtient la matrice  $\mathbf{Y} = [\mathbf{y}^{(1)}, \dots, \mathbf{y}^{(M)}] \in \mathbb{C}^{N \times M}$  donnée par

$$\mathbf{Y} = \mathbf{W} \mathbf{P}^{\frac{1}{2}} \mathbf{X} + \sigma \mathbf{N} = \begin{bmatrix} \mathbf{W} \mathbf{P}^{\frac{1}{2}} & \sigma \mathbf{I}_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{N} \end{bmatrix},$$

où  $\mathbf{X} = [\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(M)}]$  and  $\mathbf{N} = [\mathbf{n}^{(1)}, \dots, \mathbf{n}^{(M)}]$ .

Les vecteurs  $(\mathbf{y}^{(m)})$  sont gaussiens centrés et de covariance  $\mathbf{R} \triangleq \mathbf{W} \mathbf{P} \mathbf{W}^H + \sigma^2 \mathbf{I}_N$ . Comme  $\sigma^2$  est connu, il suffit d'estimer les valeurs propres de  $\mathbf{W} \mathbf{P} \mathbf{W}^H +$

$\sigma^2 \mathbf{I}_N$ . Donc le modèle est équivalent à

$$\mathbf{R}_M \triangleq \frac{1}{M} \mathbf{Y} \mathbf{Y}^H = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \mathbf{y}^{(m)} \mathbf{y}^{(m)H}.$$

On se ramène au deuxième modèle.

## 6 Perspectives

Il y a encore beaucoup de sujets à étudier. D’abord, on veut enlever l’hypothèse sur la condition de séparabilité (cf. Figure 2). Ensuite on veut estimer les multiplicités. Ainsi, on veut faire des études pour un modèle plus compliqué.

## Références

- [1] V. A. Marčenko and L. A. Pastur, “Distributions of eigenvalues for some sets of random matrices,” *Math USSR-Sbornik*, vol. 1, no. 4, pp. 457–483, Apr. 1967.
- [2] Z. Bai and J. W. Silverstein, “Spectral Analysis of Large Dimensional Random Matrices,” *Springer Series in Statistics*, 2009.
- [3] J. W. Silverstein and Z. D. Bai, “On the empirical distribution of eigenvalues of a class of large dimensional random matrices,” *Journal of Multivariate Analysis*, vol. 54, no. 2, pp. 175–192, 1995.
- [4] Y. Q. Yin, Z. D. Bai, and P. R. Krishnaiah, “On the limit of the largest eigenvalue of the large dimensional sample covariance matrix,” *Probability Theory and Related Fields*, vol. 78, no. 4, pp. 509–521, 1988.
- [5] C. A. Tracy and H. Widom, “On orthogonal and symplectic matrix ensembles,” *Communications in Mathematical Physics*, vol. 177, no. 3, pp. 727–754, 1996.
- [6] Z. D. Bai and J. W. Silverstein, “CLT of linear spectral statistics of large dimensional sample covariance matrices,” *Annals of Probability*, vol. 32, no. 1A, pp. 553–605, 2004.
- [7] —, “No Eigenvalues Outside the Support of the Limiting Spectral Distribution of Large Dimensional Sample Covariance Matrices,” *Annals of Probability*, vol. 26, no. 1, pp. 316–345, Jan. 1998.
- [8] —, “Exact Separation of Eigenvalues of Large Dimensional Sample Covariance Matrices,” *The Annals of Probability*, vol. 27, no. 3, pp. 1536–1555, 1999.

- [9] T. W. Anderson, "Asymptotic theory for principal component analysis," *Annals of Mathematical Statistics*, vol. 34, no. 1, pp. 122–148, Mar. 1963.
- [10] X. Mestre, "Improved estimation of eigenvalues of covariance matrices and their associated subspaces using their sample estimates," *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. 54, no. 11, pp. 5113–5129, Nov. 2008.
- [11] J. Yao, R. Couillet, J. Najim, E. Moulines, and M. Debahh, "CLT for Eigen-Inference Methods in Cognitive Radios," in *International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing*, Prague, Czech, 2011.