

Introduction aux modèles probabilistes et leur limites d'échelle

Yijun WAN

sous la direction de Dmitry CHELKAK

Table des Matières

1	Motivation	1
2	Modèles discrets	2
2.1	Dimère	2
2.2	Marche aléatoire à boucles effacées	3
2.3	Arbre couvrant uniforme	4
2.3.1	UST and dimers	4
2.3.2	UST and LERW	4
3	SLEs, CLEs and GFF	5
3.1	SLEs	5
3.2	CLEs	6
3.3	GFF	8
4	Questions ouvertes	9
4.1	Le cas quasi-critique	9
4.2	Convergence de double-dimères	10

1 Motivation

L'étude de modèles sur la grille carrée est un domaine qui suscite un intérêt en mécanique statistique et mathématiques. Les connaissances sur certains modèles permettent de comprendre la théorie de transitions de phase et des phénomènes critiques. Grâce aux nombreux travaux, la transition de phase

et les phénomènes critiques sont maintenant considérés comme une question réglée du point de vue de la physique. Du côté mathématique, il existe maintenant plusieurs modèles deux-dimensionnels discrets pour lesquels on peut prouver rigoureusement que le système critique discret converge vers une limite d'échelle continue. Dans ce texte, on présente les objets aléatoires (discrets et continus) reliés aux modèles sur le réseau carré. De plus, on liste les résultats connus et de nombreuses conjectures dans ce domaine.

2 Modèles discrets

2.1 Dimère

On ne considère que des graphes planaires. Un **graphe bipartie** est un graphe $\Gamma = (E, V)$ avec une coloration fixée des sommets en deux couleurs (noir et blanc) telles que les arêtes ne connectent que des sommets de couleurs différentes. Le **graphe dual** Γ^* à un graphe bipartie a pour sommets les faces f^* du graphe original et dont les arêtes e^* séparent les faces adjacentes.

Un dimère est un polymère avec seulement deux atomes. Soit Γ un graphe bipartie fini avec des poids de bord positifs $\mu : E \rightarrow \mathbb{R}_+$. Une **couverture de dimère** ou un **couplage parfait** est une collection d'arêtes tel que chaque sommet est un point d'extrémité d'un bord exactement. Les "dimères" d'une couverture de dimère sont les arêtes choisies. Soit $\Omega_d(\Gamma)$ l'ensemble des couvertures de dimère et on définit la mesure de probabilité μ_d sur Ω_d en donnant une couverture de dimère $m \in \Omega_d$ une probabilité proportionnelle au produit de ses poids de bord.

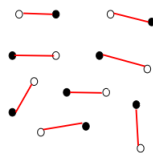


Figure 1: dimère

Kasteleyn, en même temps que Temperley et Fisher, a montré comment compter le nombre de couvertures de dimère d'une grille carrée $m \times n$, et puis sur n'importe quel graphe planaire. L'objet essentiel pour calculer la fonction

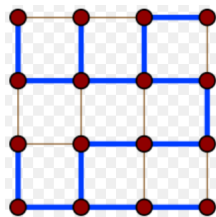


Figure 3: UST

2.3 Arbre couvrant uniforme

Définition 2.1. Un **arbre couvrant uniforme** (UST) sur un graphe connexe fini G est un sous-graphe aléatoire de G qui a été choisi uniformément parmi les sous-graphes connexes sans cycles qui contiennent tous les sommets de G .

2.3.1 UST and dimers

La bijection de Temperley donne un lien direct entre les arbres couvrants sur la grille carrée et des couvertures de dimères sur la grille carrée.

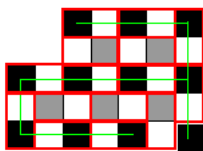


Figure 4: Bijection de Temperley

De plus, la bijection s'étend aux graphes planaires orientés (et non-orientés), où les arêtes portent des poids positifs qui induisent une pondération sur l'ensemble des arbres couvrants [Ken01].

2.3.2 UST and LERW

L'algorithme de Wilson permet de construire un UST à l'aide d'une LERW. Tout d'abord, on prend deux sommets et une marche aléatoire à boucles effacées de l'un à l'autre. Ensuite, on choisit un troisième sommet (qui n'est pas sur le chemin construit) et on lance une marche aléatoire à boucles effacées jusqu'à atteindre le chemin. Cela donne un arbre avec deux ou trois

feuilles, puis on recommence jusqu'à recouvrir tous les sommets. Peu importe la méthode qu'on utilise pour choisir les sommets de départ, on obtient toujours la distribution uniforme sur les arbres de recouvrement [Wil96].

3 SLEs, CLEs and GFF

3.1 SLEs

Définition 3.1 (SLE). L'évolution de Schramm-Loewner (chordal) avec paramètre $\kappa > 0$ (SLE) est une courbe γ générée par le terme de dérive $\sqrt{\kappa}B_t$ dans équation de Loewner, avec le mouvement brownien standard $(B_t)_{t \geq 0}$. La chaîne de Loewner associée à $SLE(\kappa)$ est la solution de l'équation définie par

$$\frac{\partial}{\partial t} g_t(z) = \frac{2}{g_t(z) - \sqrt{\kappa}B_t}, \quad g_0(z) = z, \quad z \in \mathbb{H}, .$$

L'existence et l'unicité de la loi de SLE (κ) sont obtenues à partir du théorème de Loewner. Plus précisément, dans le cas où ξ_t est un mouvement brownien et $\kappa = 8$ est résolu par Rohde et Schramm. Le cas $\kappa = 8$ a ensuite été ajouté par Lawler, Schramm et Werner dans leurs travaux sur les LERW et les UST [LSW01]. Ici, la courbe est paramétrée par la capacité, qui est

$$hcap(\gamma[0, t]) := \lim_{z \rightarrow \infty} z(g_{\gamma[0, t]}(z) - z),$$

où $g_{\gamma[0, t]}$ est l'unique application conforme de $\mathbb{H} \setminus \gamma[0, t]$ vers le demi-plan supérieur telle que $\lim_{z \rightarrow \infty} g_{\gamma[0, t]}(z) - z = 0$. Dans [FLV], Lawler et Viklund ont montré la convergence par rapport au paramètre naturel pour LERW, qui est paramétré par le contenu Minkowski $\frac{5}{4}$ -dimensionnel. Avec de tels résultats, on voit que l'information sur la longueur du chemin discret (nombre d'étapes) est codée dans la courbe limite continue.

Le principe de Schramm nous dit que SLE est l'unique courbe aléatoire qui satisfait l'invariance conforme et la propriété de Markov spatiale.

Proposition 3.2 (Propriétés de SLEs). *Soit la courbe aléatoire $\gamma : [0, \infty) \rightarrow \overline{\mathbb{H}}$ une $SLE(\kappa)$ corde. Alors,*

- Pour tout $0 < \kappa \leq 4$, γ est simple et $\gamma(0, \infty) \cap \mathbb{R} = \emptyset$.

- Pour tout $4 < \kappa < 8$, γ n'est pas simple. De plus, elle n'est pas simple sur n'importe quel intervalle: pour tout $0 \leq t_1 < t_2$, il existe $t_1 < s_1 < s_2 < t_2$ tels que $\gamma(s_1) = \gamma(s_2)$. Mais γ n'est pas couvrante. (Pour tout $z \in \mathbb{H}$, $\text{dist}(z, \gamma[0, \infty)) > 0$.)
- Pour tout $\kappa \geq 8$, γ n'est pas simple sur n'importe quel intervalle. De plus, γ est couvrante ($z \in \gamma[0, \text{infy})$ presque sûrement).
- γ est transient, c'est-à-dire que $|\gamma(t)| \rightarrow \infty$ lorsque $t \rightarrow \infty$.
- $\dim_{\mathcal{H}}(\gamma[0, \infty)) = \max(1 + \frac{\kappa}{8}, 2)$.

Les processus SLEs sont les limites d'échelle de nombreux modèles discrets:

- SLE(2) est la limite de la marche aléatoire à boucles effacées [LSW01]
- SLE(3) est la limite de l'interface du modèle d'Ising critique [CDCH⁺14]
- SLE(4) est la limite de la ligne de niveau du champ libre Gaussien discret [SS09]
- SLE(16/3) est la limite de l'interface du modèle FK critique [CDCH⁺14]
- SLE(6) est la limite de l'interface du modèle de la percolation critique sur le réseau triangulaire [Smi01]
- SLE(8) est la limite de la courbe d'exploration d'un arbre couvrant uniforme [LSW01].

3.2 CLEs

Définition 3.3 (CLE). Un **ensemble de boucles conforme** (CLE) simple dans un domaine planaire borné D est une collection aléatoire \mathcal{L} de boucles dénombrables fermées simples disjointes dans D avec la propriété de Markov conforme suivante: si A est un sous-ensemble fixé simplement connexe de D , sachant que l'ensemble aléatoire A' des points qui ne sont pas sur ou entourés par une boucle qui intersecte A^c , la loi des boucles strictement contenue dans A est donnée par le produit d'un ensemble de boucles indépendantes, et ceci pour chaque composantes de A' . Les lois se transportent exactement par application conforme.

En effet, CLE est la seule famille de boucles à un paramètre qui satisfait les propriétés d'invariance conforme et la propriété de Markov spatiale. (version de configuration des boucles comme indiquée dans la définition). Celle-ci peut être aussi considérée comme une autre définition équivalente. Il y a des résultats sur le lien entre CLE et les autres objets:

- CLE(3) est la limite de la collection des interfaces dans le modèle d'Ising critique [BH16];
- CLE(6) est la limite de la collection des interfaces dans la percolation critique [CN06];
- CLE(4) est la limite des lignes de niveau du GFF discet [SS09];
- CLE(4) est les lignes de niveau du GFF continu [WW17];
- CLE($\frac{16}{3}$) est la limite de l'ensemble d'interfaces en boucle dans le modèle de FK-Ising [KS16].

Comme on peut s'y attendre, chaque boucle de CLE est une boucle de type SLE, avec le même paramètre κ . On peut réaliser une construction du CLE en utilisant des variantes de branchement de SLE(κ) [She09].

On introduit une autre méthode pour construire CLE à partir de soupe de boucles browniennes. Soit $\mu(z, \cdot; t)$ la loi du mouvement brownien complexe standard ($B_s, 0 \leq s \leq t$) avec $B_0 = z$. On peut écrire

$$\mu(z, \cdot; t) = \int_{\mathbb{C}} \mu(z, w; t) dA(w),$$

où dA est la mesure de Lebesgue et $\mu(z, w; t)$ est $|\mu(z, w; t)|$ fois la loi $\mu^\#(z, w; t)$ du pont brownien de z à w au temps t avec

$$|\mu(z, w; t)| = (2\pi t)^{-1} \exp\left\{-\frac{|z-w|^2}{2t}\right\}.$$

La mesure $\mu(z, z)$ est donc définie par

$$\mu(z, z) = \int_0^\infty \frac{1}{2\pi t} \mu^\#(z, z; t) dt,$$

Ensuite, la mesure des boucles browniennes μ^{loop} est définie par

$$\mu^{loop} = \int_{\mathbb{C}} \frac{1}{t_\gamma} \mu(z, z) dA(z) = \int_{\mathbb{C}} \int_0^\infty \frac{1}{2\pi t^2} \mu^\#(z, z; t) dt dA(z),$$

où dA signifie la mesure de Lebesgue en \mathbb{C} . Notons que c'est une mesure sur boucles sans racines car μ^{loop} ne dépend pas du choix de la racine. Grâce à l'invariance conforme des trajectoires du mouvement brownien, on obtient une mesure qui est conformément invariante. Le *Brownian loop soup* avec intensité λ est un nuage Poissonien de la mesure $\lambda\mu^{loop}$. Rappelons que les boucles appartenant à des domaines différents sont indépendantes. Intuitivement, l'ensemble des bords les plus externes des boucles browniennes donne une configuration des boucles simples qui satisfait la propriété de Markov spatiale.

3.3 GFF

La définition du champ libre continu utilise nécessairement des concepts abstraits, car il n'existe pas de base dans l'espace de fonctions gaussiennes. Au lieu de cela, on prend une fonction généralisée aléatoire, c'est-à-dire une distribution au sens de Schwartz.

Étant donné un domaine borné $D \subset \mathbb{R}^2$ et (e_n) une base orthonormée de $H^1(D)$ (avec produit scalaire $(f, g) = \int_D (\nabla f) \cdot (\nabla g)$) composée de fonctions propres du Laplacien Δ sur D avec condition au bord du Dirichlet tel que

$$\Delta e_n = \lambda_n e_n, \quad e_n = 0 \text{ sur } \partial D.$$

Définition 3.4 (GFF). Soient f, g deux fonctions lisse sur D , avec condition au bord du Dirichlet. Le **champ libre gaussien** φ est une distribution de Schwartz aléatoire telle que

$$\text{Cov}[\langle \varphi, f \rangle, \langle \varphi, g \rangle] = \int_D f(x)g(x)G(x, y),$$

où G est la fonction de Green associé au Laplacien sur D . En décomposant dans la base orthonormée (e_n) , φ s'écrit alors sous la forme:

$$\varphi = \sqrt{2\pi} \sum_n \frac{\alpha_n}{\sqrt{-\lambda_n}} e_n,$$

où α_n sont des variables gaussiennes standards i.i.d.

Récemment, il a été montré qu'une distribution aléatoire en deux dimensions qui satisfait la propriété d'invariance conforme et la propriété de Markov dans un domaine est un multiple du champ libre gaussien (la preuve nécessite seulement l'existence d'un moment d'ordre quatre) [BPR18].

Le GFF continu est la limite d'échelle non seulement du GFF discret, mais aussi de la fonction de hauteur des pavages de dominos planaires uniformes [Ken01]. En outre, les liens profonds entre GFF, le champ du temps d'occupation de la soupe de boucles brownienne et CLE (4) sont connus [QW15].

4 Questions ouvertes

4.1 Le cas quasi-critique

Rappelons que la terminologie “critique” signifie généralement le fait que l'on considère une famille de modèles à un paramètre p , et il existe une transition de phase à une valeur spéciale p_c à laquelle on travaille. Cependant, au-delà de la compréhension de la phase critique, l'objectif principal de la physique statistique est d'étudier la transition de phase en elle-même et en particulier le comportement des propriétés macroscopiques pour $p > p_c$. Dans la limite d'échelle, on obtient de nombreuses directions possibles dans lesquelles on peut perturber le modèle comme pour le cas continu. Par exemple, dans le cas du modèle d'Ising, deux paramètres jouent un rôle pour caractériser la transition de phase: la température et le champ magnétique. La première possibilité est de perturber le champ magnétique extérieur par

$$\Phi^\delta := h\delta^{\frac{15}{8}} \sum_{x \in \delta\mathbb{Z}^2} \sigma_x \delta_s,$$

où δ est le pas de réseau et la renormalisation $\delta^{\frac{15}{8}}$ permet de rendre la limite d'échelle non-triviale [CJN17]. On s'intéresse par la limite quand $\delta \rightarrow 0_+$ et le comportement de la limite quand $h \rightarrow 0_+$. L'autre direction est de perturber la température par

$$T = T_c + \delta m$$

Si l'on définit mSLE(3) comme la limite du modèle d'Ising massif avec paramètre de température $T_c + \delta m$, en supposant l'existence de cette limite, on obtient la configuration de percolation lorsque $m \rightarrow +\infty$ ($T \rightarrow \infty$), dont la limite d'échelle est SLE(6). Pour cette raison, on espère que mSLE(3) que l'on vient de définir possède une limite SLE(6) quand $m \rightarrow +\infty$. Si l'on veut aller plus loin, un résultat ambitieux serait de montrer la convergence de mSLE(κ) quand m tend vers 0 ou ∞ pour κ générique.

Bien que beaucoup de mathématiciens pensent que la convergence de modèle discret vers les limites d'échelles continues est vraie dans le cas non-critique, il manque des démonstrations rigoureuses par manque d'invariance conforme, voir [MS09]. Dans une partie de mon mémoire de M2, on a exposé tous les détails de la preuve de la convergence de LERW massif (la marche aléatoire effacée en boucle avec possibilité de "tuer" le processus) vers SLE(2). Ce résultat est utilisé par Camia pour définir la soupe de boucles brownienne comme la limite d'échelle d'une soupe de boucles en marche aléatoire avec une possibilité d'être "tué" [Cam13]. Aussi [GPS18], il est possible de démontrer que la percolation quasi-critique et la percolation dynamique sur le réseau triangulaire a une limite d'échelle dans l'espace "quad-crossing" des configurations de percolation si la percolation paramètre p ne converge ni trop rapide ni trop doucement vers $\frac{1}{2}$. Dans ce cas, la loi de la limite d'échelle est singulière par rapport à celle de SLE(6), même si elle est encore avec support dans l'ensemble de courbes avec dimension de Hausdorff $\frac{7}{4}$ [NW09]. D'ailleurs, la propriété markovienne et la covariance conforme de ces nouveaux objets en limites sont également établies. Dans [DCGP14], les auteurs ont étudié le modèle FK-Ising quasi-critique et découvert un phénomène qui est complètement absent dans le cas de la percolation standard.

4.2 Convergence de double-dimères

Une configuration de double-dimères est l'union de deux couvertures de dimères: un graphe avec des boucles et des arrêtes doublées. La mesure du double-dimère est la mesure de probabilité définie en prenant l'union de deux couvertures de dimère indépendantes.

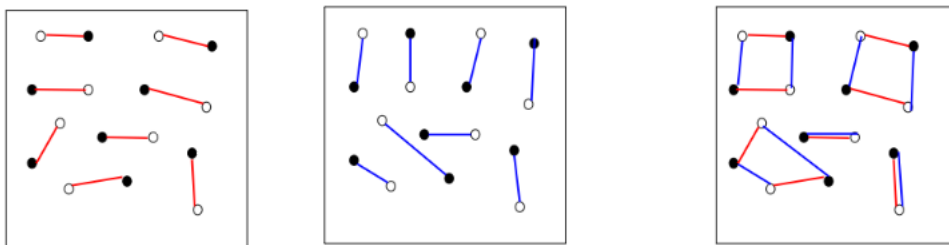


Figure 5: double-dimère

Si l'on discrétise le domaine au sens de Temperley, (on sait presque rien

en dehors le cas de Temperley), il existe certains résultats importants sur les dimères: la convergence des fonctions de hauteur de dimères vers GFF [Ken01], l’universalité des fluctuations de la fonction de hauteur associée au modèle dimère est après généralisée dans [BLR16] et le fait que les lignes de niveau du GFF sont $CLE(4)$ [SS09, WW17]. Ces résultats nous permettent de deviner la convergence des ensembles de boucles dans les configurations de double-dimères vers $CLE(4)$. Plus récemment, cette prédiction a reçu encore plus de soutien grâce aux travaux révolutionnaires dans [Ken14, Dub18] et sur la convergence des observables topologiques pour le double-dimère, qui est suffisante pour identifier la limite des configurations de boucles, voir [BC18]. Néanmoins, il manque encore un argument du type RSW pour les interfaces de double dimère afin d’obtenir la tension de la famille des mesures de probabilités.

Remerciement: l’auteur remercie Rémy pour sa correction des milliers d’erreurs en français.

References

- [BC18] Mikhail Basok and Dmitry Chelkak. Tau-functions a la dubédat and probabilities of cylindrical events for double-dimers and $CLE(4)$. *ArXiv e-prints*, 2018.
- [BH16] S. Benoist and C. Hongler. The scaling limit of critical Ising interfaces is $CLE(3)$. *ArXiv e-prints*, April 2016.
- [BLR16] N. Berestycki, B. Laslier, and G. Ray. Universality of fluctuations in the dimer model. *ArXiv e-prints*, March 2016.
- [BPR18] N. Berestycki, E. Powell, and G. Ray. A characterisation of the Gaussian free field. *ArXiv e-prints*, February 2018.
- [Cam13] F. Camia. Off-criticality and the massive Brownian loop soup. *ArXiv e-prints*, September 2013.
- [CDCH⁺14] Dmitry Chelkak, Hugo Duminil-Copin, Clément Hongler, Antti Kemppainen, and Stanislav Smirnov. Convergence of Ising interfaces to Schramm’s SLE curves. *Comptes Rendus Mathématiques de l’Académie des Sciences*, 352(2):157–161, 2014.

- [CJN17] F. Camia, J. Jiang, and C. M. Newman. Exponential decay for the near-critical scaling limit of the planar Ising model. *ArXiv e-prints*, July 2017.
- [CN06] F. Camia and C. M. Newman. SLE(6) and CLE(6) from critical percolation. *ArXiv Mathematics e-prints*, November 2006.
- [DCGP14] Hugo Duminil-Copin, Christophe Garban, and Gábor Pete. The near-critical planar FK-Ising model. *Communications in Mathematical Physics*, 326(1):1–35, Feb 2014.
- [Dub18] Julien Dubédat. Double dimers, conformal loop ensembles and isomonodromic deformations. *J. Eur. Math. Soc.*, Sept 2018.
- [FLV] Gregory F. Lawler and Fredrik Viklund. Convergence of loop-erased random walk in the natural parametrization.
- [GPS18] Christophe Garban, Gábor Pete, and Oded Schramm. The scaling limits of near-critical and dynamical percolation. *J. Eur. Math. Soc.*, 20(5):1195 – 1268, 2018.
- [Kas61] P.W. Kasteleyn. The statistics of dimers on a lattice: I. the number of dimer arrangements on a quadratic lattice. *Physica*, 27(12):1209 – 1225, 1961.
- [Ken01] Richard Kenyon. Dominos and the Gaussian free field. *Ann. Probab.*, 29(3):1128–1137, 07 2001.
- [Ken14] Richard Kenyon. Conformal invariance of loops in the double-dimer model. *Communications in Mathematical Physics*, 326(2):477–497, Mar 2014.
- [KS16] A. Kemppainen and S. Smirnov. Conformal invariance in random cluster models. II. Full scaling limit as a branching SLE. *ArXiv e-prints*, September 2016.
- [Law88] Gregory F. Lawler. Loop-erased self-avoiding random walk in two and three dimensions. *Journal of Statistical Physics*, 50(1):91–108, Jan 1988.

- [LSW01] G. F. Lawler, O. Schramm, and W. Werner. Conformal invariance of planar loop-erased random walks and uniform spanning trees. *ArXiv Mathematics e-prints*, December 2001.
- [MS09] Nikolai Makarov and Stanislav Smirnov. Off-critical lattice models and massive SLEs. 2009.
- [NW09] Pierre Nolin and Wendelin Werner. Asymmetry of near-critical percolation interfaces. *Journal of the American Mathematical Society*, 22(3):797–819, 2009.
- [QW15] W. Qian and W. Werner. Decomposition of Brownian loop-soup clusters. *ArXiv e-prints*, September 2015.
- [She09] Scott Sheffield. Exploration trees and conformal loop ensembles. *Duke Math. J.*, 147(1):79–129, 03 2009.
- [Smi01] Stanislav Smirnov. Critical percolation in the plane: conformal invariance, Cardy’s formula, scaling limits. *Comptes Rendus de l’Académie des Sciences - Series I - Mathematics*, 333(3):239 – 244, 2001.
- [SS09] Oded Schramm and Scott Sheffield. Contour lines of the two-dimensional discrete Gaussian free field. *Acta Math.*, 202(1):21–137, 2009.
- [Wil96] David Bruce Wilson. Generating random spanning trees more quickly than the cover time. In *Proceedings of the Twenty-eighth Annual ACM Symposium on Theory of Computing*, STOC ’96, pages 296–303. ACM, 1996.
- [WW17] Menglu Wang and Hao Wu. Level lines of Gaussian free field i: Zero-boundary GFF. *Stochastic Processes and their Applications*, 127(4):1045 – 1124, 2017.