Théorème de Chow

Ye-Ping ZHANG, Wenhao OU
sous la direction de
M. François CHARLES

Table des matières

1 Fonctions Holomorphes **3**
1.1 Définitions et Propriétés Premières 3
1.2 Anneaux des Fonctions Holomorphes 8

2 Variétés Analytiques **13**
2.1 Définitions et Propriétés Premières 13
2.2 Projections Canoniques des Variétés Analytiques 20

3 Variétés Analytiques de $\mathbf{CP}^n$ et Théorème de Chow **25**
3.1 Projections Canoniques dans les Espaces Projectifs 25
3.2 Théorème de Chow 26
3.3 Application du Théorème de Chow 28

Introduction

L'étude sur des courbes définies par des polynômes donne naissance à la géométrie algébrique. Il est souvent plus intéressant de l'étudier sur un corps algébriquement clos, $\mathbb{C}$, par exemple. Vu que le corps $\mathbb{C}$ possède une structure topologique et différentielle canonique et que les fonctions polynomiales sont holomorphes, on peut utiliser les outils de l'analyse complexe pour la géométrie algébrique. De plus, il est préférable de travailler dans un espace projectif plutôt que dans un espace affine, car il existe des zéros à l'infini. Un exemple typique est l'intersection des courbes $\mathcal{C}_1 = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid x^2 - y^2 - 1 = 0\}$ et $\mathcal{C}_2 = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid x - y = 0\}$. On voit que $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ n'ont pas de point commun dans $\mathbb{C}^2$, mais elle se coupent à l'infini (penser au cas où le corps est $\mathbb{R}$ à la place de $\mathbb{C}$). Dans l'espace projectif $\mathbf{CP}^2$, on est sauvé, car $\mathcal{C}_1 = \{[x : y : z] \in \mathbf{CP}^2 \mid x^2 - y^2 - z^2 = 0\}$ et $\mathcal{C}_2 = \{[x : y : z] \in \mathbf{CP}^2 \mid x - y = 0\}$. L'espace projectif a encore des propriétés agréables, l'une est donnée par un théorème de *Chow* : toute variété analytique dans $\mathbf{CP}^n$ est algébrique. Le but de ce texte est de donc donner une preuve de ce théorème, en utilisant les méthodes de l'analyse complexe.

Dans la première partie, on va étudier des fonctions holomorphes à plusieurs variables en introduisant les théorèmes de *Weierstrass*. On va voir que l'anneau des fonctions holomorphes a des propriétés analogues à celles de l'anneau des polynômes. Ensuite, on va présenter les variétés analytiques dans une variété holomorphe et montrer quelques résultats sur les variétés analytiques dans un espace affine. Dans la troisième partie, on ne considère que les variétés analytiques dans un espace projectif et on donne une preuve du théorème de *Chow*[1] qui réalise une bijection entre les variétés analytiques projectives et les variétés algébriques projectives.

Remerciements

Nous tenons à remercier M. François CHARLES, qui nous a proposé un sujet de mémoire intéressant, donné des remarques importantes et nous fait découvrir un vaste domaine de mathématiques pittoresque. Nous remercions aussi Zhi JIANG, Lie FU et Junyi Xie qui nous ont donné des conseils précieux.

1. Il y a une preuve au cas de dimension 2 dans un article de Janos Kóllar [3], on va suivre cet article pour donner une preuve générale.

1 Fonctions Holomorphes

1.1 Définitions et Propriétés Premières

Définition 1.1.1. Soit U un ouvert de $\mathbb{C}^n$. On note $C^\infty(U)$ l'ensemble des fonctions C^∞ sur U, L'ensemble des $1-$formes différentielles sur U est engendré par

$$\{dx_i, dy_i \mid i = 1, \ldots, n\}$$

On définit

$$\frac{\partial}{\partial z_i} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x_i} - i\frac{\partial}{\partial y_i}) \qquad \frac{\partial}{\partial \bar{z}_i} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x_i} + i\frac{\partial}{\partial y_i})$$

et

$$\partial f = \sum_i \frac{\partial f}{\partial z_i} dz_i, \qquad \bar{\partial} f = \sum_i \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_i} d\bar{z}_i$$

Soit $f \in C^\infty(U)$, alors

$$df = \partial f + \bar{\partial} f = \sum_i \frac{\partial f}{\partial z_i} dz_i + \sum_j \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j} d\bar{z}_j$$

Définition 1.1.2. Soit $f \in C^\infty$, on dit que f est *holomorphe* si $\bar{\partial} f = 0$.

Proposition 1.1.3. Soit $U \subseteq \mathbb{C}^n$ un ouvert, $\mathbf{z_0} = (z_{0,1}, \ldots, z_{0,n}) \in U$, $f \in C^\infty(U)$ est holomorphe au voisinage de $\mathbf{z_0}$ si et seulement si f admet un développement en série entière au voisinage de $\mathbf{z_0}$, *i.e.*

$$f(z_1, \ldots, z_n) = \sum_{i_1, \ldots, i_n = 0}^{\infty} a_{i_1, \ldots, i_n} (z_1 - z_{0,1})^{i_1} \ldots (z_n - z_{0,n})^{i_n}$$

Preuve : Pour simplifier, on le montrera au cas de dimension 2. La preuve au cas de dimension supérieure est analogue.

Si f est holomorphe au voisinage de $\mathbf{z_0}$, l'application $z_2 \mapsto f(z_1, z_2)$ est holomorphe au voisinage de $z_{0,2}$ pour les z_1 au voisinage de $z_{0,1}$. Pour r assez petit, on utilise deux fois la formule de *Cauchy* d'une variable :

$$\begin{aligned} f(z_1, z_2) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|w_2 - z_{0,2}| = r} \frac{f(z_1, w_2) dw_2}{w_2 - z_2} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|w_2 - z_{0,2}| = r} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{|w_1 - z_{0,1}| = r} \frac{f(w_1, w_2) dw_1}{w_1 - z_1} \right) \frac{dw_2}{w_2 - z_2} \\ &= (\frac{1}{2\pi i})^2 \int_{|w_1 - z_{0,1}| = r} \int_{|w_2 - z_{0,2}| = r} \frac{f(w_1, w_2) dw_1 dw_2}{(w_1 - z_1)(w_2 - z_2)} \end{aligned}$$

En utilisant le développement

$$\frac{1}{(w_1-z_1)(w_2-z_2)} = \sum_{i_1,i_2=0}^{\infty} \frac{(z_1-z_{0,1})^{i_1}(z_2-z_{0,2})^{i_2}}{(w_1-z_{0,1})^{i_1+1}(w_2-z_{0,2})^{i_2+1}}$$

on trouve le développement local de f au point $\mathbf{z_0}$

$$f(z_1,z_2) = \sum_{i_1,i_2=0}^{\infty} a_{i_1,i_2}(z_1-z_{0,1})^{i_1}(z_2-z_{0,2})^{i_2}$$

où les coefficients sont déterminés par

$$a_{i_1,i_2} = (\frac{1}{2\pi i})^2 \int_{|w_1-z_{0,1}|=r} \int_{|w_2-z_{0,2}|=r} \frac{f(w_1,w_2)dw_1dw_2}{(w_1-z_{0,1})^{i_1+1}(w_2-z_{0,2})^{i_2+1}}$$

Réciproquement, si f se développe en série entière, on a aussi $\bar{\partial} f = 0$. ■

Exemple. Par le théorème précédent, tous les polynômes à n variables sont holomorphes sur $\mathbb{C}^n$.

Proposition 1.1.4. Soit $U \subseteq \mathbb{C}^n$ un ouvert connexe, soient f, g fonctions holomorphes sur U telles qu'il existe un ouvert $V \subseteq U$ vérifiant $f|_V = g|_V$, alors $f = g$.

Preuve : Il suffit de montrer que si f est nulle sur un ouvert non vide alors f est identiquement nulle. Or on remarque que les coefficients du développement local sont uniques, parce que

$$a_{i_1,\ldots,i_n} = \frac{\partial f}{\partial z_1^{i_1},\ldots,\partial z_n^{i_n}}(z_{0,1},\ldots,z_{0,n})$$

Soit $W = \{\mathbf{z} \in U \mid f \text{ est nulle au voisinage de } z\} = \{\mathbf{z} \in U \mid \frac{\partial f}{\partial z_1^{i_1},\ldots,\partial z_n^{i_n}}(\mathbf{z}) = 0\ ,\ \forall i_1,\ldots,i_n\}$, alors $W \subseteq U$ est ouvert, fermé et non vide, donc $W = U$. ■

Définition 1.1.5. Un *polynôme de Weierstrass* en w est une fonction holomorphe sur un ouvert $\mathbb{C} \times U \subseteq \mathbb{C}^n$ ($U \subseteq \mathbb{C}^{n-1}$ un ouvert) de la forme

$$f(w,\mathbf{z}') = w^d + a_1(\mathbf{z}')w^{d-1} + \ldots + a_d(\mathbf{z}') \qquad (\mathbf{z}' \in U, w \in \mathbb{C})$$

où $a_1,\ldots,a_d$ sont des fonctions holomorphes définies sur U. On dit qu'une fonction holomorphe g est polynomiale en w de degré d s'il existe des fonctions holomorphes $a_0,\ldots,a_d$ en $\mathbf{z}'$ telles que $f(w,\mathbf{z}') = a_0(\mathbf{z}')w^d + a_1(\mathbf{z}')w^{d-1} + \ldots + a_d(\mathbf{z}')$.

Définition 1.1.6. Soit $P = X^d + a_1 X^{d-1} + ... + a_d \in \mathbb{C}[X]$. Soient $s_1, ..., s_d$ les racines de P, alors le *discriminant* est défini par $D = \prod_{i<j}(s_i - s_j)^2$. On remarque que, D est nul si et seulement si P admet une racine multiple. Par ailleurs, D est symétrique en $s_1, ..., s_d$, par un théorème d'algèbre [2], on a il existe un polynôme Q qui ne dépend que de d tel que $D = Q(a_1, ..., a_d)$.

Exemple. Quand $d = 2$, on a

$$\begin{aligned} a_1 &= -(s_1 + s_2) \\ a_2 &= s_1 s_2 \\ Q &= (s_1 - s_2)^2 = a_1^2 - 4a_2 \end{aligned}$$

Et si $d = 3$,

$$\begin{aligned} a_1 &= -(s_1 + s_2 + s_3) \\ a_2 &= s_1 s_2 + s_2 s_3 + s_3 s_1 \\ a_3 &= -s_1 s_2 s_3 \end{aligned}$$

$$Q = (s_1 - s_2)^2 (s_1 - s_3)^2 (s_2 - s_3)^2 = a_1^2 a_2^2 - 4a_1^2 a_3 - 4a_2^3 + 18 a_1 a_2 a_3 - 27 a_3^2$$

Remarque. Le discriminant d'un polynôme de *Weierstrass* est alors une fonction holomorphe en $\mathbf{z}'$.

On connaît le théorème de *Liouville*, soit f une fonction entière sur $\mathbb{C}$ telle que f est bornée, alors f est constante. On a aussi une version pour des fonctions holomorphes à plusieurs variables.

Proposition 1.1.7. Soit f une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}^n$, s'il existe un $k \geq 0$ et une fonction $C \geq 0$ en $(z_2, ..., z_n)$ tel que $|f| \leq C|z_1^k|$ lorsque z_1 tend vers l'infini, à $(z_2, ..., z_n)$ fixé, alors f est polynomiale en z_1, de degré au plus k.

Preuve : Comme f est holomorphe sur $\mathbb{C}^n$, f est somme d'une série entière. En regroupant des termes ,on peut supposer que $f = \sum_{i=0}^{+\infty} g_i(z_2, ..., z_n) z_1^i$, avec g_i holomorphe en $z_2, ..., z_n$. Par le théorème de *Cauchy*, on a

$$g_i(\mathbf{z}') = \frac{1}{2\pi \mathtt{i}} \int_{|y|=R} \frac{f(y, \mathbf{z}')}{y^{i+1}} dy \quad \text{pour } R > 0 \text{ et } \mathbf{z}' \in \mathbb{C}^{n-1}.$$

Par hypothèse, on a, pour $i > k$, $|g_i|(\mathbf{z}') \leq \frac{C(\mathbf{z}')R^k}{R^i} \leq \frac{C(\mathbf{z}')}{R^{i-k}} \longrightarrow 0$ lorsque $R \to \infty$, pour tout $\mathbf{z}' \in \mathbb{C}^{n-1}$ fixé. Donc g_i est identiquement nulle pour $i > k$, par suite f est polynomiale en z_1. ■

2. L'algèbre des polynômes symétriques est engendrée par les polynômes symétriques élémentaires.

Proposition 1.1.8. Soit $d \in \mathbb{N}^*$ fixé, alors pour tout ouvert $U \subseteq \mathbb{C}$ contenant 0, il existe un $r > 0$ tel que pour tout $(a_1, ..., a_d) \in \mathbb{C}^d$ vérifiant $|a_i| < r$, toutes les racines du polynôme $X^d + a_1 X^{d-1} + ... + a_d$ sont dans U.

Preuve : Soit $0 < \delta < 1$ et on pose $U = B(0, 2\delta)$, alors on prend un $r < \delta^d$. Montrons que ce r convient. Soit $(a_1, ..., a_d) \in \mathbb{C}^d$ vérifiant $|a_i| < r$ et soit z une racine de $X^d + a_1 X^{d-1} + ... + a_d$. Si $|z| \leq \delta$, rien n'est à démontrer. Sinon, on pose $u = \frac{z}{\delta}$, alors

$$|u|^d \leq \frac{|a_1|}{\delta}|u|^{d-1} + ... + \frac{|a_d|}{\delta^d} \leq \frac{r}{\delta^d}\frac{|u|^d - 1}{|u| - 1} \leq \frac{r}{\delta^d}\frac{|u|^d}{|u| - 1}$$

Donc $|u| \leq 1 + \frac{r}{\delta^d}$, par suite on a $|z| \leq \delta + \frac{r}{\delta^{d-1}} < 2\delta$. ■

Théorème 1.1.9 (théorème de préparation de *Weierstrass*)**.** Si $f : (w, \mathbf{z}') \mapsto f(w, \mathbf{z}')$ $(\mathbf{z}' \in \mathbb{C}^{n-1}, w \in \mathbb{C})$ une fonction holomorphe sur $U \subseteq \mathbb{C}^n$, $\mathbf{0} \in U$, $f(\cdot, \mathbf{0}) : w \mapsto f(w, \mathbf{0})$ n'est pas identiquement nulle et $f(\cdot, \mathbf{0})$ a un zéro de degré d au point $w = 0$, alors dans un voisinage de $\mathbf{0}$, f s'écrit de façon unique de la forme

$$f = g \cdot h$$

où g est un polynôme de *Weierstrass* de degré d en w et h une fonction holomorphe vérifiant $h(\mathbf{0}) \neq 0$.
On l'appelle *la décomposition de Weierstrass* en w.

Preuve : On notera $D(\mathbf{x}, a)$ la boule centrée en $\mathbf{x}$ de rayon a, et $C(0, a, b)$ désignera l'ensemble $\{z \in \mathbb{C} | \ a < |z| < b\}$.

Si $f(\mathbf{0}) \neq 0$, on prend $h = f$, $g = 1$. Sinon, $f(\cdot, \mathbf{z}') : w \mapsto f(w, \mathbf{z}')$ est une fonction holomorphe d'une variable et 0 est un zéro isolé de multiplicité d de $f(\cdot, \mathbf{0})$. Il existe $r > 0$ tel que $f(\cdot, \mathbf{0}')$ n'a d'autre zéro que $w = 0$ sur $\overline{D}(0, 2r)$. Par suite f ne s'annule pas sur $\overline{C}(0, r, 2r) \times \{\mathbf{0}\}$, ainsi, par continuité et compacité, il existe $r' > 0$ tel que f ne s'annule pas sur $\overline{C}(0, r, 2r) \times D(\mathbf{0}, r')$. Pour $\mathbf{z}' \in D(\mathbf{0}, r')$, le nombre de zéros de $f(\cdot, \mathbf{z}')$ sur $D(0, r)$ est

$$N(\mathbf{z}') = \frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=r} \frac{\frac{\partial f}{\partial w}(w, \mathbf{z}')}{f(w, \mathbf{z}')} dw$$

Par conséquent $N(\mathbf{z}')$ est continue sur $\mathbf{z}' \in D(\mathbf{0}, r')$ donc constante, *i.e.* $N(\mathbf{z}') = N(\mathbf{0}) = d$. On note

$$p_1(\mathbf{z}'), \ldots, p_d(\mathbf{z}')$$

les zéros de $f(\cdot,\mathbf{z}')$, et on a

$$N(k,z') = p_1^k(\mathbf{z}') + \ldots + p_d^k(\mathbf{z}') = \frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=r} \frac{w^k \frac{\partial f}{\partial w}(w,\mathbf{z}')}{f(w,\mathbf{z}')} dw$$

On a alors les $(N(k,\mathbf{z}'))_{k\in\mathbb{N}}$ sont holomorphes sur $D(\mathbf{0},r')$.

Soient $\sigma_1(\mathbf{z}'),\ldots,\sigma_d(\mathbf{z}')$ les polynômes symétriques élémentaires des $p_i(\mathbf{z}')$ de degré $1,\ldots,d$. Comme $(N(k,\mathbf{z}'))_{k\in\mathbb{N}}$ engendre l'algèbre des polynômes symétriques des $p_1(\mathbf{z}'),\ldots,p_d(\mathbf{z}')$, on a $\sigma_1(\mathbf{z}'),\ldots,\sigma_d(\mathbf{z}')$ sont holomorphes. On peut donc poser

$$g(w,\mathbf{z}') = w^d - \sigma_1(\mathbf{z}')w^{d-1} + \ldots + (-1)^d\sigma_d(\mathbf{z}')$$

qui est un polynôme de *Weierstrass*.

Pour chaque $\mathbf{z}' \in D(\mathbf{0},r')$ fixé, $g(w,\mathbf{z}')$ et $f(w,\mathbf{z}')$ ont exactement les mêmes zéros sur $D(0,r)$, donc on peut définir

$$h(w,\mathbf{z}') = \frac{f(w,\mathbf{z}')}{g(w,\mathbf{z}')}$$

Par définition, on a $h(\mathbf{0}) \neq 0$. Pour montrer que h est holomorphe, on écrit

$$h(w,\mathbf{z}') = \frac{1}{2\pi i}\int_{|u|=r} \frac{h(u,\mathbf{z}')du}{u-w}$$

Vu que g n'a pas de zéro au voisinage de $\partial D(0,r) \times D(\mathbf{0},r')$, $h = f/g$ est holomorphe au voisinage de $\partial D(0,r)\times D(\mathbf{0},r')$. Par le théorème d'intégration dépendant d'un paramètre, h est bien holomorphe.

On peut aussi montrer que la décomposition de *Weierstrass* est uniquement déterminée par la répartition des zéros de f, soit

$$f = g' \cdot h'$$

où g' est un polynôme de *Weierstrass* et h' une fonction holomorphe vérifiant $h'(\mathbf{0}) \neq 0$. Alors $\forall \mathbf{z}' \in D(\mathbf{0},r')$ on pose $p_k(\mathbf{z}')$, $1 \leq k \leq d$, les zéros de $f(\cdot,\mathbf{z}') : w \mapsto f(w,\mathbf{z}')$ dans $D(0,r)$, alors

$$g'(w,\mathbf{z}') = (w - p_1(\mathbf{z}'))\ldots(w - p_d(\mathbf{z}'))$$

D'où l'unicité. ■

Remarque. Sans contrainte sur le degré du polynôme de *Weierstrass*, on n'a pas l'unicité. Par exemple, soit $\sqrt{\cdot}$ une fonction holomorphe au voisinage de 1 telle que $(\sqrt{y})^2 = y$ et $\sqrt{1} = 1$. Alors $f(x,y) = \sqrt{y} - x$ définit une fonction holomorphe au voisinage de $(1,1) \in \mathbb{C}^2$. On cherche sa décomposition de *Weierstrass* en y.
On pose $h(x,y) = \sqrt{y} + x$. C'est une fonction holomorphe au voisinage de $(1,1)$ vérifiant $h(1,1) \neq 0$. On a $f(x,y)h(x,y) = y - x^2$. Comme $\frac{1}{h}$ est aussi holomorphe au voisinage de $(1,1)$, le polynôme de *Weierstrass* de f en y est $y - x^2$.
Par ailleurs, on a aussi : le polynôme de *Weierstrass* de $y - x^2$ en x au voisinage du point $(1,1)$ est $x - \sqrt{y}$. On remarque que même si $y - x^2$ a une forme de polynôme de *Weierstrass*, mais sa décomposition *Weierstrass* en x n'est pas triviale.

On vient de voir que la décomposition de *Weierstrass* d'un polynôme de *Weierstrass* n'est pas toujours triviale.

Définition.Proposition 1.1.10. Soit $f(w, \mathbf{z}') = w^d + a_1(\mathbf{z}')w^{d-1} + \ldots + a_d(\mathbf{z}')$ un polynôme de *Weierstrass*, on dit qu'il est *primitif* si sa décomposition de *Weierstrass* en w est triviale. On vérifie que $f(w, \mathbf{z}')$ est primitif si et seulement si $a_1(\mathbf{0}) = \ldots = a_d(\mathbf{0}) = 0$. De plus, un produit de polynômes de *Weierstrass* primitifs est encore primitif.

1.2 Anneaux des Fonctions Holomorphes

Définition 1.2.1. Soit $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n$, on note

$$\Theta_{n,\mathbf{z}} = \{\text{fonctions holomorphes au voisinage de } \mathbf{z}\}.$$

Et on définit une relation d'équivalence

$$f \sim g \text{ si et seulement si il existe un voisinage } U \text{ de } \mathbf{z} \text{ tel que } f|_U = g|_U.$$

L'anneau des fonctions holomorphes au point $\mathbf{z}$ est alors défini par

$$\mathcal{O}_{n,\mathbf{z}} = \Theta_{n,\mathbf{z}} / \sim .$$

Finalement on note $\mathcal{O}_n$ pour $\mathcal{O}_{n,\mathbf{0}}$.

Remarque. Les éléments inversibles de $\mathcal{O}_n$ sont les $f \in \mathcal{O}_n$ telles que $f(\mathbf{0}) \neq 0$. L'anneau $\mathcal{O}_n$ est local avec l'unique idéal maximal $\{f \in \mathcal{O}_n \mid f(\mathbf{0}) = 0\}$.

Remarque. Pour $\mathbf{z}, \mathbf{z}' \in \mathbb{C}^n$, $\mathcal{O}_{n,\mathbf{z}}$ et $\mathcal{O}_{n,\mathbf{z}'}$ sont isomorphes.

Remarque. Si $n = 1$, la structure de l'anneau des fonctions holomorphes est bien connue. Tout idéal de $\mathcal{O}_1$ est de la forme

$$I_k = \{f \in \mathcal{O}_1 \mid f(\mathbf{0}) = f'(\mathbf{0}) = \ldots = f^{(k-1)}(\mathbf{0}) = 0\} \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$

De plus, on a

$$I_k = z^k \mathcal{O}_1 = I_1^k$$

Donc $\mathcal{O}_1$ est un anneau principal, *a fortiori* factoriel. En fait, tous les $\mathcal{O}_n$ sont factoriels.

Théorème 1.2.2. L'anneau $\mathcal{O}_n$ est factoriel.

Preuve : On a déjà vu que $\mathcal{O}_1$ est factoriel, on va montrer le théorème par récurrence sur n.

On suppose que $\mathcal{O}_{n-1}$ est factoriel. Soit $f \in \mathcal{O}_n$. Sans perte de généralité, on peut supposer que $f(\cdot, \mathbf{0}) : z_1 \mapsto f(z_1, \mathbf{0})$ n'est pas identiquement nulle. On va écrire $f(\mathbf{z}) = f(w, \mathbf{z}')$ où $w = z_1$. Par le lemme de *Gauss*, l'anneau

$$\mathcal{O}_{n-1}[w] = \{a_0(\mathbf{z}')w^d + a_1(\mathbf{z}')w^{d-1} + \ldots + a_d(\mathbf{z}') \mid d \in \mathbb{N}, a_0, \ldots, a_d \in \mathcal{O}_{n-1}\}$$

est factoriel. Soit $f = g \cdot u$ la décomposition de *Weierstrass.* Alors g s'écrit de façon unique comme un produit des polynômes de *Weierstrass* $g_1, \ldots, g_m$ irréductibles dans $\mathcal{O}_{n-1}[w]$.

$$f = g_1 \ldots g_m \cdot u$$

On a les g_i sont irréductibles dans $\mathcal{O}_n$, en effet soit $g_i = g_{i,1} \cdot g_{i,2}$ avec $g_{i,1}$, $g_{i,2} \in \mathcal{O}_n$, alors $g_{i,1}(\cdot, \mathbf{0})$, $g_{i,2}(\cdot, \mathbf{0})$ sont non nulles. On pose $g_{i,1} = h_1 \cdot u_1$ et $g_{i,2} = h_2 \cdot u_2$ des décompositions de *Weierstrass.* Par l'unicité de la décompositon de *Weierstrass* et **théorème 1.1.10**, on a $h_1 \cdot h_2 = g_i$, mais g_i est irréductible dans $\mathcal{O}_{n-1}[w]$, donc soit $h_1 = 1$ soit $h_2 = 1$, *i.e.* soit $g_{i,1}$ est inversible soit $g_{i,2}$ est inversible.

On a montré l'existence de la décomposition en produit des facteurs irréductibles. Il nous reste à montrer l'unicité.

Soit $f = h_1 \ldots h_s$ avec h_i irréductible dans $\mathcal{O}_n$, alors aucune des $h_i(\cdot, \mathbf{0})$ n'est identiquement nulle. On a $h_i = g_i' \cdot u_i'$ décomposition de *Weierstrass.* Comme les h_i sont irréductibles dans $\mathcal{O}_n$, les g_i' sont irréductibles dans $\mathcal{O}_{n-1}[w]$. Encore par l'unicité de la décomposition de *Weierstrass*, on a

$$g_1 \ldots g_m \cdot u = f = h_1 \ldots h_s = g_1' \ldots g_s' \cdot u_1' \ldots u_s'$$

implique

$$g_1 \dots g_m = g'_1 \dots g'_s$$

Comme $\mathcal{O}_{n-1}[w]$ est factoriel, on a $s = k$ et $g_i = g'_i$ à permutation près, d'où l'uncité de la décomposition. ■

Remarque. Soit $f \in \mathcal{O}_n$ telle que $f(\cdot, \mathbf{0})$ n'est pas identiquement nulle, alors on a la décomposition de *Weierstrass* $f = g \cdot u$ où $g \in \mathcal{O}_{n-1}[w]$ et u inversible dans $\mathcal{O}_n$. On a f est irréductible dans $\mathcal{O}_n$ si et seulement si g est irréductible dans $\mathcal{O}_{n-1}[w]$.

Pour aller plus loin, on admet un théorème d'algèbre.

Proposition 1.2.3. Soit R un anneau factoriel, $u, v \in R[t]$ sont premiers entre eux, alors il existe $\alpha, \beta \in R[t]$ premiers entre eux et $\gamma \in R$ non nul tels que

$$\alpha u + \beta v = \gamma$$

De plus, γ est unique *i.e.* si α', β' et $\gamma' \in R$ vérifient les mêmes hypothèses et $\alpha' u + \beta' v = \gamma'$, alors $\gamma = \gamma' \cdot s$ où s est inversible dans R. γ s'appelle le résultant de u et v.

Plus généralement, soient $u_1, ..., u_k \in R[t]$ premiers entre eux, alors il existe $\alpha_1, ..., \alpha_k \in R[t]$ premiers entre eux et $\gamma \in R$ non nul tels que

$$\alpha_1 u_1 + ... + \alpha_k u_k = \gamma$$

Proposition 1.2.4 (Nullstellensatz)**.** Soit $U \subseteq \mathbb{C}^n$ un ouvert tel que $\mathbf{0} \in U$. Soient f, g holomorphes sur U telles que f est irréductible dans $\mathcal{O}_n$ et $\{f = 0\} \subseteq \{g = 0\}$. On a alors f divise g dans $\mathcal{O}_n$.

Preuve : Sans perte de généralité, on suppose que $f, g \in \mathcal{O}_{n-1}[w]$ sont des polynômes de *Weierstrass* primitifs. Soit f de degré $d > 0$, alors $\frac{\partial f}{\partial w}$ est de degré $d - 1$ et f, $\frac{\partial f}{\partial w}$ sont premiers entre eux. On a le résultant de f et $\frac{\partial f}{\partial w}$

$$\gamma = \alpha f + \beta \frac{\partial f}{\partial w} \qquad (\alpha, \beta \in \mathcal{O}_n \text{ premiers entre eux}, 0 \neq \gamma \in \mathcal{O}_{n-1})$$

Il n'est pas très difficile de voir que pour $\mathbf{z}' \in \mathbb{C}^{n-1}$ fixé, si $\gamma(\mathbf{z}') \neq 0$, $w \mapsto f(\mathbf{z}', w)$ n'a pas de zéro multiple.

En appliquant la division euclidienne, on a

$$g = f \cdot h + r \qquad (h, r \in \mathcal{O}_{n-1}[w],\ \deg r < d)$$

par suite $\{f=0\} \subseteq \{r=0\}$.

Si $r \neq 0$, puisque les ensembles $\{\mathbf{z}' \in \mathbb{C}^{n-1} \mid w \mapsto r(w,\mathbf{z}')$ identiquement nulle$\}$ et $\{\mathbf{z}' \in \mathbb{C}^{n-1} \mid \gamma(\mathbf{z}') = 0\}$ sont nulle part denses, il existe $\mathbf{z}'$ tel que $w \mapsto r(w,\mathbf{z}')$ ne s'annule pas identiquement et $\gamma(\mathbf{z}') \neq 0$. Alors $w \mapsto f(w,\mathbf{z}')$ a d zéros distincts, et $w \mapsto r(w,\mathbf{z}')$ a au plus $\deg r < d$ zéros, ceci implique $\{f=0\} \nsubseteq \{r=0\}$. Absurde. Donc $r=0$ et f divise g. ■

Dans la preuve précédente, on a utilisé la division euclidienne pour des polynômes de *Weierstrass*. En fait, on peut montrer un résultat plus général qui est très important pour étudier $\mathcal{O}_n$.

Théorème 1.2.5 (division de *Weierstrass*)**.** Soit $g(w,\mathbf{z}') \in \mathcal{O}_{n-1}[w]$ un polynôme de *Weierstrass* de degré d. Alors pour chaque $f \in \mathcal{O}_n$, on a

$$f = g \cdot h + r$$

où $r(w,\mathbf{z}') \in \mathcal{O}_{n-1}[w]$ de degré $< d$ et $g \in \mathcal{O}_n$.

Preuve : Comme les preuves précédentes, il existe r, $r' > 0$ tels que g n'a pas de zéro dans un voisinage de $\partial D(0,r) \times D(\mathbf{0}, r')$. Définissons

$$h(w,\mathbf{z}') = \frac{1}{2\pi i} \int_{|u|=r} \frac{f(u,\mathbf{z}')du}{g(u,\mathbf{z}') \cdot (u-w)}$$

Par le théorème d'intégration dépendant d'un paramètre, on sait que h est holomorphe, et $r = f - g \cdot h$ aussi. On a

$$\begin{aligned} r(\mathbf{z}', w) &= f(w,\mathbf{z}') - g(w,\mathbf{z}') \cdot h(w,\mathbf{z}') \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|u|=r} \left(f(u,\mathbf{z}') - g(w,\mathbf{z}') \frac{f(u,\mathbf{z}')}{g(u,\mathbf{z}')} \right) \frac{du}{u-w} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|u|=r} \frac{g(u,\mathbf{z}') - g(w,\mathbf{z}')}{u-w} \frac{f(u,\mathbf{z}')}{g(u,\mathbf{z}')} du \end{aligned}$$

Soit

$$g(w,\mathbf{z}') = w^d + a_1(\mathbf{z}')w^{d-1} + \ldots + a_d(\mathbf{z}')$$

alors

$$\begin{aligned} &\frac{g(u,\mathbf{z}') - g(w,\mathbf{z}')}{u-w} \\ &= (u^{d-1} + u^{d-2}w + \ldots + w^{d-1}) + a_1(\mathbf{z}') \cdot (u^{d-2} + \ldots + w^{d-2}) + \ldots + a_d(\mathbf{z}') \\ &= p_1(u,\mathbf{z}') \cdot w^{d-1} + \ldots + p_d(u,\mathbf{z}') \end{aligned}$$

avec $p_k(u, \mathbf{z}') \in \mathcal{O}_{n-1}[u]$. D'où

$$r(\mathbf{z}', w) = q_1(\mathbf{z}') \cdot w^{d-1} + \ldots + q_d(\mathbf{z}')$$

avec

$$q_k(z') = \frac{1}{2\pi i} \int_{|u|=r} p_k(\mathbf{z}', u) \frac{f(u, \mathbf{z}')}{g(u, \mathbf{z}')} du$$

On a donc $r(w, \mathbf{z}') \in \mathcal{O}_{n-1}[w]$ et $\deg r < d$. ■

Grâce au théorème précédent, on peut montrer que $\mathcal{O}_n$ est noethérien.

Théorème 1.2.6. $\mathcal{O}_n$ est noethérien.

Preuve : On va monter par récurrence sur n.

$\mathcal{O}_1$ est principal, donc il est noethérien. Supposons que $\mathcal{O}_{n-1}$ est noethérien.

Soit $I \subseteq \mathcal{O}_n$ un idéal non nul. Avec les coordonées bien choisies, on peut supposer qu'il existe $g \in I$ tel que $g \neq 0$ et $g \in \mathcal{O}_{n-1}[w]$. Soit $J = I \cap \mathcal{O}_{n-1}[w]$, alors par la division de *Weierstrass*, on a

$$\forall f \in I, \ \exists h \in \mathcal{O}_n, \text{ tel que } f - g \cdot h \in J$$

Donc J et g engendrent I. Maintenant il suffit de montrer que J est engendré par un nombre fini d'éléments. Or par l'hypothèse de récurrence, $\mathcal{O}_{n-1}$ est noethérien, donc $\mathcal{O}_{n-1}[w]$ l'est aussi. Donc J, un idéal de $\mathcal{O}_{n-1}[w]$, est engendré par un nombre fini d'éléments. ■

2 Variétés Analytiques

2.1 Définitions et Propriétés Premières

On définit d'abord une variété holomorphe qui est analogue à une variété réelle au sens usuel. On rappelle qu'une fonction de $\mathbb{C}^n$ dans $\mathbb{C}^m$ est dite holomorphe si ses composantes sont holomorphes.

Définition 2.1.1. Soit X un espace topologique à base dénombrable. On dit que X est une *variété holomorphe de dimension* n s'il vérifie les conditions suivantes :

1 Il existe un recouvrement d'ouverts $(U_i)_{i\in I}$ de X tel que pour tout $i \in I$, il existe un ouvert $V_i \subseteq \mathbb{C}^n$ et un homéomorphisme ϕ_i de U_i dans V_i.

2 Pour $i, j \in I$, $\phi_j \circ \phi_i^{-1}$ est holomorphe de $\phi_i(U_i \cap U_j)$ dans $\phi_j(U_i \cap U_j)$.

Dans ce cas, chaque U_i s'appelle une carte de X. Une fonction entre deux variétés holomorphes est dite holomorphe si elle est holomorphe lorsqu'elle se lit dans des cartes.

Remarque. Le théorème d'inversion locale, le théorème d'immersion et le théorème de submersion sont encore valables pour des variétés holomorphes.

Remarque. La structure holomorphe est rigide. Par exemple, il n'existe pas de partition de l'unité holomorphe non triviale dans une variété holomorphe connexe.

Définition 2.1.2. Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit H le groupe des actions par une homothétie non nulle sur $\mathbb{C}^{n+1}$. L'espace projectif $\mathbf{CP}^n$ est l'espace quotient $H\backslash(\mathbb{C}^{n+1})^*$. Un point $\mathbf{z} \in \mathbf{CP}^n$ possède une coordonnée homogène $[x_0 : ... : x_n]$ s'il représente l'orbite de $(x_0, ..., x_n)$. On note π la projection canonique de $(\mathbb{C}^{n+1})^*$ dans $\mathbf{CP}^n$.

Proposition 2.1.3. $\mathbf{CP}^n$ est une variété holomorphe de dimension n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Preuve : On a $\mathbf{CP}^n$ est bien à base dénombrable, car $(\mathbb{C}^{n+1})^*$ l'est. Soit $U_0 = \{[x_0 : ... : x_n] |\ x_0 \neq 0\}$, alors U_0 est un ouvert car $\pi^{-1}(U_0) = \{(x_0, ..., x_n) |\ x_0 \neq 0\}$ est un ouvert de $(\mathbb{C}^{n+1})^*$. On pose ϕ_0 une fonction de U_0 dans $\mathbb{C}^n$ qui envoie $[x_0 : ... : x_n]$ à $\frac{1}{x_0}(x_1, ..., x_n)$. On a ϕ_0 est bien définie et on vérifie que c'est un homéomorphisme. De manière analogue, on peut définir les U_i, ϕ_i pour $i = 1, ..., n$. On constate que les U_i recouvrent $\mathbf{CP}^n$. On a donc $\mathbf{CP}^n$ vérifie la prémière condition dans la **Définition 2.1.1**. Montrons qu'il vérifie aussi la deuxième.

On suppose que $n > 0$. Soit, par exemple, $\mathbf{z} \in U_0 \cap U_1$, on prend une coordonnée homogène de $\mathbf{z}$, soit $[z_0 : ... : z_n]$. Alors $\phi_0(\mathbf{z}) = \frac{1}{z_0}(z_1, ..., z_n)$ et $\phi_1(\mathbf{z}) = \frac{1}{z_1}(z_0, z_2, ..., z_n)$. On a donc $g = \phi_j \circ \phi_i^{-1}$ de $\{(x_1, ..., x_n)|\ x_1 \neq 0\}$ dans lui-même est définie par $g(x_1, ..., x_n) = \frac{1}{x_1}(1, x_2, ..., x_n)$. g est bien holomorphe. Comme les U_i jouent un rôle symétrique, on a finalement $\mathbf{CP}^n$ est une variété holomorphe. ■

Définition 2.1.4. Un sous-ensemble A dans $\mathbf{CP}^n$ est une *variété algébrique* s'il existe des polynômes homogènes $f_1, ..., f_k$ à $n + 1$ variables telles que $A = \{[x_0 : ... : x_n]|\ f_1(x_0, ..., x_n) = ... = f_k(x_0, ..., x_n) = 0\}$.

Remarque. Cette définition a bien un sens. En effet, si f est un polynôme homogène, alors $f(x_0, ..., x_n) = 0$ implique $f(\lambda x_0, ..., \lambda x_n) = 0$ pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$.

Définition 2.1.5. Un fermé A dans une variété holomorphe X est une *variété analytique* dans X si pour tout point $\mathbf{z} \in X$, il existe un ouvert $U(\mathbf{z}) \ni \mathbf{z}$ et des fonctions holomorphes $f_1, ..., f_k$ telles que $A \cap U(\mathbf{z}) = \{\mathbf{y} \in U(\mathbf{z}) | f_1(\mathbf{y}) = ... = f_k(\mathbf{y}) = 0\}$.

Exemple. Il arrive qu'une variété analytique est aussi une sous-variété holomorphe. Par exemple la courbe $\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2|\ x^2 - y = 0\}$ est une sous-variété holomorphe de $\mathbb{C}^2$ car la dérivée partielle de $x^2 - y$ par rapport à y vaut toujours 1 (on applique le théorème de submersion).

Exemple. Il existe des variétés analytiques qui ne peuvent pas être globalement définies par des fonctions holomorphes [2]. Par exemple, on considère $G_1 = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2|\ |x| < \frac{1}{2}$ et $|y| < 1\}$ et $G_2 = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2|\ |x| < 1$ et $\frac{1}{2} < |y| < 1\}$, alors $G = G_1 \cup G_2$ est un ouvert connexe dans $\mathbb{C}^2$. Prenons $A = \{(x, y) \in G_1|\ x - y = 0\}$, alors A est une variété analytique dans G. On dit que A n'est pas définie globalement par des fonctions holomorphes. En effet soit f une fonction holomorphe sur G, alors par le théorème de prolongement de *Hartogs* [6], on peut prolonger f analytiquement en une fonction holomorphe, notée encore f, sur le polydisque $\{(x, y) \in \mathbb{C}^2|\ |x| < 1$ et $|y| < 1\}$. On a donc si f est nulle sur A, alors elle est nulle sur $\{(x, y) \in \mathbb{C}^2|\ |x| < 1$, $|y| < 1$ et $x = y\}$ car $z \mapsto f(z, z)$ est holomorphe. On obtient finalement que si A est globalement définie par des fonctions holomorphes, alors A contient $\{(x, y) \in G|\ x = y\}$, absurde.

Proposition 2.1.6. Une variété algébrique A dans $\mathbf{CP}^n$ est une variété analytique.

Preuve : On suppose que A est définie par des polynômes homogènes f_i. Soit $\mathbf{z} = [z_0 : ... : z_n] \in \mathbf{CP}^n$. Sans perte de généralité, on suppose que $z_0 \neq 0$. On a $f_i(z_0, ..., z_n) = 0$ si et seulement si $f_i(1, \frac{z_1}{z_0}, ..., \frac{z_1}{z_0}) = 0$. Posons g_i de $\mathbb{C}^n$ dans $\mathbb{C}$ définie par $g_i(x_1, ..., x_n) = f_i(1, x_1, ..., x_n)$, alors g_i est holomorphe car c'est polynomiale. Soit $h_i = g_i \circ \phi_0$. Alors h_i est une fonction holomorphe sur U_0 et $A \cap U_0 = \{\mathbf{x} \in \mathbf{CP}^n | \ h_i(\mathbf{x}) = 0\}$. Cela montre aussi que A est fermée. On a donc A est une variété analytique.

Une propriété intéressante sur les variétés analytiques est donnée dans les théorèmes suivants. Une variété analytique peut rarement "couper" l'espace. Ce n'est plus vrai pour la géométrie réelle. Par exemple, une droite réelle coupe un plan réel en deux parties disjointes.

Proposition 2.1.7. Si X est une variété holomorphe connexe et A est une variété analytique dans X, alors soit A est nulle part dense, soit $A = X$.

Preuve : On suppose d'abord X est une boule ouverte de $\mathbb{C}^n$ et $A = \{\mathbf{y} \in X | f_1(\mathbf{y}) = ... = f_k(\mathbf{y}) = 0\}$ avec $f_1, ..., f_k$ holomorphes sur X. Si A n'est pas nulle part dense, les f_i sont nulles sur un ouvert de X donc sont identiquement nulle. Donc $A = X$.

En cas général, comme X est connexe, il est donc connexe par arc. On peut donc rejoindre deux points de X par un nombre fini de "boules ouvertes". Donc par ce que l'on a démontré, si A n'est pas nulle part dense, alors elle "remplit" toutes ces "boules ouvertes", donc $A = X$. ■

Proposition 2.1.8. Si X est une variété holomorphe connexe et soit A une variété analytique dans X nulle part dense, alors $X \backslash A$ est encore connexe.

Preuve : Avec la même idée que **Théorème 2.1.7**, il suffit de considérer le cas où X est une boule ouverte de $\mathbb{C}^n$ et $A = \{\mathbf{y} | f_1(\mathbf{y}) = ... = f_k(\mathbf{y}) = 0\}$. avec $f_1, ..., f_k$ holomorphes dans X. Dans ce cas là, soit D une droite passant $z_0 \in X \backslash A$ et $z_1 \in X \backslash A$. Alors par **Théorème 2.1.7**, soit $D \cap A = D \cap X$, soit $D \cap A$ est discret. Dans le deuxième cas, $D \cap (X \backslash A)$ est connexe. On a donc $X \backslash A$ est connexe. ■

Soit $U \ni z$ un ouvert de $\mathbb{C}$ et soit f est une fonction holomorphe sur $U \backslash \{z\}$ et bornée au voisinage de z, alors on sait que f admet un prolongement sur U tout entier. On a aussi un théorème analogue pour ces variétés holomorphes de dimension supérieure.

Proposition 2.1.9 (prolongement de *Riemann*)**.** Soit A une variété analytique nulle part dense de X. Soit f une fonction holomorphe de $X\backslash A$, bornée sur un voisinage de chaque point de A, alors f se prolonge analytiquement sur X.

Preuve : Vu que c'est une propriété locale, on peut supposer que X est un ouvert dans $\mathbb{C}^n$. Soit $\mathbf{z}_0 \in A$, alors il existe une droite D passant par $\mathbf{z}_0$ et un ouvert $U(\mathbf{z}_0) \ni \mathbf{z}_0$ tel que $A \cap U(\mathbf{z}_0) \cap D$ est un singleton. Quitte à changer les coordonnées, on peut supposer que $\mathbf{z}_0 = 0$ et $D = \mathbb{C}\mathbf{e}_1$ (où $(\mathbf{e}_i)_{1\leq i\leq n}$ est la base canonique). On a donc un polydisque

$$P = \{\mathbf{z} = (z_1, \mathbf{z}') \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^{n-1} | \, |z_1| < r_1, |\mathbf{z}'| < r\}$$

tel que $A \cap \{\mathbf{z}| \, |z_1| = r_1, |\mathbf{z}'| < r\} = \emptyset$ et $A \cap P = \{f_1 = \ldots = f_r = 0\}$ où les f_i sont holomorphes sur P. Donc il existe i tel que $f_i(\cdot, \mathbf{0})$ ne s'annule pas identiquement. Avec r' assez petit, pour un $\mathbf{c}' \in \mathbb{C}^{n-1}$ tel que $|\mathbf{c}'| < r$, on a $B = \{\mathbf{z}| \, |z_1| \leq r_1, \mathbf{z}' = \mathbf{c}'\}$ est une boule de dimension 1 et $B \cap A \subseteq B \cap \{f_i = 0\}$ est discret par la décomposition de *Weierstrass*. Par le théorème de prolongement sur $\mathbb{C}$, on a la restriction de f sur $B\backslash A$ se prolonge sur B, donc f se prolonge en une fonction, notée encore f, sur P qui est holomorphe en z_1. Par le théorème de *Cauchy*, on a

$$f(z_1, \mathbf{z}') = \frac{1}{2\pi \mathtt{i}} \int_{|y|=r_1} \frac{f(y, \mathbf{z}')}{y - z_1} dy, \text{ pour } |z_1| < r_1 \text{ et } |\mathbf{z}'| < r.$$

La partie à droite est analytique sur P par le théorème d'intégration dépendant d'un paramètre, la partie à gauche aussi. Donc f se prolonge sur X. ■

On va voir dans la suite qu'une variété analytique ressemble bien à une variété holomorphe.

Définition 2.1.10. Un point $\mathbf{z} \in A$ est dit *régulier* (ou *lisse*) s'il existe un ouvert $U(\mathbf{z}) \ni \mathbf{z}$ et des fonctions holomorphes telles que $A \cap U(\mathbf{z}) = \{\mathbf{y}|f_1(\mathbf{y}) = ... = f_d(\mathbf{y}) = 0\}$ et le rang de la matrice jacobienne $\mathrm{rg}(\mathbf{J}_{\mathbf{z}}(f_1, ..., f_d)) = d$. On note A^* l'ensemble des points réguliers. Dans le cas contraire, $\mathbf{z}$ est dit *singulier*. On note A_s l'ensemble des points singuliers.

Remarque. Dans un voisinage d'un point régulier, A est une sous-variété holomorphe de codimension d.

Remarque. Un point singulier existe. Considérons par exemple la courbe $\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \,|\, x^2 - y^2 = 0\}$, $(0, 0)$ est alors un point singulier. En effet, si $\mathcal{C}$ est une variété holomorphe au voisinage de 0, elle est aussi une variété réelle si on identifie $\mathbb{C}^2$ à $\mathbb{R}^4$. Mais dans ce cas, elle est union de deux plans réels non liés. Absurde ! Cependant, on va montrer que l'ensemble des points réguliers est dense dans A.

Lemme 2.1.11. Soit $f(w, \mathbf{z}'), g(w, \mathbf{z}') \in \mathcal{O}_{n-1}[w]$ polynômes de *Weierstrass* primitifs irréductibles, alors au voisinage de $\mathbf{0}$, $\{f = 0\} \cap \{g = 0\}$ est nulle part dense dans $\{f = 0\}$

Preuve : Soit $\gamma = \alpha f + \beta g$, le résultant de f, g. On a alors $\{f = 0\} \cap \{g = 0\} \subseteq \{\gamma = 0\}$. Donc il suffit de montrer que $\{f = 0\} \cap \{\gamma = 0\}$ est nulle part dense dans $\{f = 0\}$. Soit W un ouvert et $\mathbf{z}_0 \in W \cap \{f = 0\}$, par **théorème 1.1.8**, il existe $\mathbf{z}_1 \in W$ tel que $\gamma(\mathbf{z}_1) \neq 0$. Ceci montre que $\{f = 0\} \cap \{\gamma = 0\}$ est nulle part dense dans $\{f = 0\}$. ■

Lemme 2.1.12. Soit h une fonction holomorphe non constante sur un ouvert connexe $U \in \mathbb{C}^n$, alors sur $A = \{\mathbf{z} \in U |\ h(\mathbf{z}) = 0\}$, il existe un point régulier.

Preuve : Quitte à faire un changement de coordonnées, on peut supposer que $\mathbf{0} \in A$. De plus, par le théorème de préparation de *Weierstrass*, on peut remplacer h par un polynôme de *Weierstrass* $f \in \mathcal{O}_{n-1}[z_1]$ primitif. Par **théorème 2.1.11**, on peut supposer que f est irréductible. Alors f et $\frac{\partial f}{\partial z_1}$ sont premiers entre eux, et donc par **théorème 1.2.3**, $\frac{\partial f}{\partial z_1}$ n'est pas identiquement nulle sur A. Donc il existe un point $\mathbf{z} \in A$ tel que $\frac{\partial f}{\partial z_1}(\mathbf{z}) \neq 0$. Par suite, on a $\mathbf{z}$ est régulier. ■

Proposition 2.1.13. L'ensemble des points réguliers de A est dense dans A.

Preuve : C'est une propriété locale. Soit U un ouvert tel que $U \cap A = \{\mathbf{z}|\ f_1(\mathbf{z}) = ... = f_k(\mathbf{z}) = 0\}$. Soit $\mathbf{z}_0 \in U \cap A$, on peut supposer que $\mathrm{rg}(\mathbf{J}_{\mathbf{z}_0}(f_1, \ldots, f_k)) = \mathrm{rg}(\mathbf{J}_{\mathbf{z}_0}(f_1, ..., f_d)) = d$. On peut donc choisir les coordonnées $(x_1, \ldots, x_n)$ telles que $x_1 = f_1, \ldots, x_d = f_d$. Donc, au voisinage de $\mathbf{z}_0$, A est dans l'espace $\{x_1 = \ldots = x_d = 0\}$. Si f_{d+1} n'est pas constante là-dessus, alors par le lemme précédent, il existe un point $\mathbf{z}_1$ et $h \in \mathcal{O}_{n,\mathbf{z}_1}$ tels que $\{f_{d+1} = 0\} = \{h = 0\}$ au voisinage de $\mathbf{z}_1$ et $\mathrm{rg}(\mathbf{J}_{\mathbf{z}_1}(f_1, \ldots, f_d, h)) = d + 1$. Pour simplifier, on note encore $h = f_{d+1}$. On continue ce procédé jusqu'à $f_{r+1} = \ldots = f_k = 0$ sur $\{f_1 = \ldots = f_r = 0\}$ au voisinage d'un point $\mathbf{y}$, alors $\mathbf{y}$ est régulier. ■

Maintenant, on va s'intéresser à l'ensemble des variétés analytiques dans un espace.

Proposition 2.1.14. Soit X une variété holomorphe de dimension n, $\{A_i\}_{i\in I}$ une famille quelconque de variétés analytiques dans X, alors l'intersection des A_i est encore une variété analytique dans X. En plus, si I est fini, alors l'union des A_i est aussi une variété analytique dans X.

Preuve : On va juste donner une idée de démonstration, une preuve détaillée est donnée dans [2] pp.123-142. C'est une propriété locale donc on peut se restreindre à un ouvert $U \subseteq \mathbb{C}^n$ qui peut se réduire d'une phrase à l'autre. On suppose $\mathbf{0} \in \cap A_i \subseteq U$. On sait que des A_i sont définie par des fonctions holomorphes f_λ et on va construire $\cap A_i$ de proche en proche. On a $K = f_1$ définit une variété analytique S_1 dans U, S_1^* n'a qu'un nombre fini de composantes connexes et sur chaque composante, la codimension est 1. Ensuite, s'il y a une f_2 indépendant de f_1, on rajoute f_2 dans K, alors K définit S_2 dans U. On a aussi S_2 n'a qu'un nombre fini de composantes connexes et sur chaque composante, la codimension est 1 ou 2. On procède de même manière et on va s'arrêter car une variété holomorphe dans U est toujours de codimension au moins n. On obtient alors une varété analytique S, et on peut vérifier que S est localement égale à $\cap A_i$. ■

Définition 2.1.15. Soit Ω un espace topologique. Ω est dit *irréductible* s'il n'est pas réunion de deux fermés propres.

Définition 2.1.16 (topologie de Zariski analytique)**.** Soit X une variété holomorphe de dimension n, alors il existe une unique structure topologique sur X telle que les fermés sont les variétés analytiques de X. C'est la *topologie de Zariski analytique.* Une variété analytique A est dit *irréductible* si elle est irréductible lorsqu'elle est munie de la topologie induite par la topologie de Zariski analytique.

Il y a un lien très fort entre la connexité et l'irréductibilité pour une variété analytique.

Définition.Proposition 2.1.17. Une variété analytique A est irréductible si et seulement si A^*, l'ensemble de ses points réguliers, est connexe. Dans ce cas, on définit la dimension (codimension) de A comme celle de A^* en tant que variété holomorphe. C'est bien définie par connexité.

Preuve : Supposons d'abord A^* connexe, alors pour toute sous-variété analytique fermée Y de A, $Y \cap A^*$ est une variété analytique de A^*. Si $A = Y_1 \cup Y_2$ avec Y_1, Y_2 sous-variétés analytiques fermées, alors l'une parmi $Y_1 \cap A^*$ et $Y_2 \cap A^*$ est d'intérieur non vide dans A^*. Par **Théorème 2.1.7**, elle est A^*. Donc l'une parmi Y_1 et Y_2 est égale à A. La réciproque est beaucoup plus compliquée, ici on va juste donner une idée. On va montrer que l'adhérence d'une composante connexe A_1^* de A^* est encore une variété. On reprend les notations de la preuve du **théorème 2.1.14** et on suppose que $\mathbf{0}$ est dans ∂A_1^*. On peut en effet montrer que l'adhérence de chaque composante connexe de S^* est une variété analytique. On a $\overline{A_1^*}$ est localement l'adhérence de la réunion des composantes connexes de S^* qui rencontrent A_1^*. On a donc $\overline{A_1^*}$ est une variété analytique. ■

Ici, on a une généralisation du **théorème 2.1.7**.

Proposition 2.1.18. Soient A, B deux variétés analytiques de X avec A irréductible. S'il existe un ouvert U de X tel que $A \cap U \subseteq B \cap U$, alors $A \subseteq B$.

Preuve : A^* est une sous-variété holomorphe connexe de de dimension d de X. On a $A^* \cap B$ est une variété analytique de A^*. Comme $A \cap U \subseteq B \cap U$, $A^* \cap B$ n'est pas nulle part dense dans $A*$, donc $A^* \cap B = A^*$. Comme A^* est dense dans A et B est fermée, on a $A \subseteq B$. ■

On sait que tout espace topologique noethérien peut se décomposer en réunion de composantes irréductibles. La topologie de Zariski analytique a la même propriété.

Proposition 2.1.19. Soit W une variété analytique, alors il existe une famille de variétés analytiques irréductibles $\{A_i\}_{i \in I}$ tels que $A_i \not\subseteq A_j$ si $i \neq j$ et que $W = \bigcup_{i \in I} A_i$. Et pour tout point $\mathbf{z} \in W$, il existe un ouvert $U \ni \mathbf{z}$ tel qu'il n'existe qu'un nombre fini de A_i telles que $U \cap A_i \neq \emptyset$. Chaque A_i est une *composante irréductible* de W.

Preuve : C'est la même idée que **théorème 2.1.17**. Les A_j sont en effet les adhérences des composantes connexes de W^*. Le recouvrement est localement fini car S^* a un nombre fini de composantes connexes où S est définie dans la preuve du **théorème 2.1.14**. ■

Exemple. Soit $U = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2\}$, $A = \{x = 0\}$ et $B = \{y = 0\}$ sont deux variétés analytiques irréductibles parce que $A_s = B_s = \emptyset$. $A \cup B$ n'est pas irréductible, elle a deux composantes irréductibles : A, B. On a $A \cap B = \{\mathbf{0}\}$ un point singulier.

Exemple. On donne une variété analytique irréductible ayant un point singulier. Soit $U = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2\}$, $V = \{x^2 = y^3\}$, on a $V \backslash \{\mathbf{0}\} \subseteq V^*$. Donc V est irréductible. On prend l'application

$$f : \mathbb{C} \to U, t \mapsto (t^3, t^2)$$

On a alors f est bijective, holomorphe, donc V est irréductible. Supposons que $\mathbf{0}$ est régulier. Comme $t^3/t^2 \longrightarrow 0$ quand t vers 0, on a le plan tangent en $\mathbf{0}$ est $T_{\mathbf{0}}V = \{x = 0\}$. Il existe alors une fonction holomorphe $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ et W un voisinage de $\mathbf{0}$ tels que $V \cap W = \{(x, y) \in W | = g(y)\}$. Mais pour chaque $y_0 \neq 0$, $V \cap \{y = y_0\}$ n'est pas un singleton. Absurde. Donc $\mathbf{0}$ est singulier.

2.2 Projections Canoniques des Variétés Analytiques

On rappelle qu'un domaine de $\mathbb{C}^n$ est un ouvert connexe $\mathbb{C}^n$.

Théorème 2.2.1. Soit D un domaine de $\mathbb{C}^{n-1}$, soit W une variété analytique dans $X = \mathbb{C} \times D \subseteq \mathbb{C}^n$. On suppose que la codimension de W est 1 sur chaque composante irréductible et que la projection $p : X \longrightarrow D$ est propre. Alors il existe une unique fonction holomorphe f, polynomial en z_1 unitaire de degré minimal, telle que $W = \{\mathbf{z} | \, f(\mathbf{z}) = 0\}$.

Dans ce cas, on voit que W ressemble à une graphe sur D. Pour montrer ce théorème, on va d'abord montrer quelques lemmes, sous les mêmes conditions. Dans la suite, on note $\mathcal{O}(D)$ l'ensemble des fonctions holomorphes sur D.

Lemme 2.2.2. Pour tout $\mathbf{z}' \in D$, il n'y a qu'un nombre fini de points dans W au-dessus de $\mathbf{z}'$.

Preuve : Montrons par l'absurde. Supposons le contraire, alors comme p est propre, on peut supposer que $M = W \cap L$ est infini et compact avec $L = \{(z_1, \mathbf{z}') | \, \mathbf{z}' = \mathbf{z}'_0\}$ une droite complexe. Alors il y a un point d'accumulation $\mathbf{x}$ sur M. Il existe donc un ouvert $U \ni \mathbf{x}$ et des fonctions holomorphes $f_1, ..., f_k$ telles que $W \cap U = \{\mathbf{y} \in U | f_1(\mathbf{y}) = ... = f_k(\mathbf{y}) = 0\}$. Comme les zéros communs des f_i s'accumulent sur $L \cap U$, les f_i sont identiquement nulles sur $L \cap U$, *i.e.* $L \cap U \subseteq W \cap U$. On a donc, par le **théorème 2.1.18**, $L \subseteq W$ car L est irréductible. ■

Lemme 2.2.3. *W est localement définie par une fonction holomorphe P polynomiale en z_1. De plus, l'ensemble des zéros du discriminant de P est nulle part dense.*

Preuve : Soit $\mathbf{z}_0 = (z_{01}, \mathbf{z'}_0) \in W$, alors il existe un ouvert $U \ni \mathbf{z}_0$ et des fonctions holomorphes $f_1, ..., f_k$ telles que $W \cap U = \{\mathbf{y} \in U | f_1(\mathbf{y}) = ... = f_k(\mathbf{y}) = 0\}$. Quitte à prendre U assez petit, on peut supposer que $\mathbf{z}_0$ est le seul point de $W \cap U$ sur $\mathbf{z'}_0$. Il existe donc une f_i, par exemple f_1 qui n'est pas identiquement nulle sur $L = \{(z_1, \mathbf{z'}) | \ \mathbf{z'} = \mathbf{z'}_0\}$. Quitte à rajouter les autres f_i par f_1, on peut supposer que toutes les f_i ne s'annulent pas identiquement sur L. Par **proposition 1.1.8** et théorème de *Weierstrass*, quitte à réduire encore une fois U, on peut supposer qu'il existe des polynômes de *Weierstrass* primitifs P_i dans U tels que les zéros de f_i dans U sont exactement les zéros de P_i dans $p^{-1}(p(U))$.

Donc
$$U \cap W = \{\mathbf{y} \in U | P_1(\mathbf{y}) = \ldots = P_k(\mathbf{y}) = 0\}$$
Soit P le pgcd des P_i unitaire, alors on pose $P_i = PQ_i$ avec les Q_i premiers entre eux. On a

$$U \cap W = \{\mathbf{y} \in U | P(\mathbf{y}) = 0\} \cup \{\mathbf{y} \in U | Q_1(\mathbf{y}) = \ldots = Q_k(\mathbf{y}) = 0\}$$

Par le théorème de Bézout, il existe des fonctions holomorphes R_i polynomiales en z_1 et une fonction holomorphe non nulle h en $\mathbf{z'}$ telles que $\sum_{i=1}^{k} Q_i R_i = h$. Donc les zéros communs des Q_i sont aussi zéros communs de P_1 et h. Mais $\{\mathbf{y} \in U | \ P_1(y) = h(y) = 0\}$ est soit vide soit une variété analytique de codimension plus grand que 2 au voisinage d'un point régulier. Par hypothèse sur la codimension on a $\{\mathbf{y} \in U | \ Q_1(y) = ... = Q_k(y) = 0\} \subseteq \{\mathbf{y} \in U | P(\mathbf{y}) = 0\}$.

Quitte à simplifier les facteurs multiples de P, on peut supposer que P est sans facteurs multiples. On a donc $W \cap U = \{\mathbf{y} \in U | \ P(\mathbf{y}) = 0\}$. Par **lemme 2.1.11**, l'ensemble des zéros du discriminant de P est nulle part dense. ■

Remarque. On a aussi montré un autre résultat, c'est que $p(U \cap W)$ est un voisinage de $\mathbf{z'}_0$ dans D. En effet, par le théorème de *d'Alembert-Gauss*, pour tout $\mathbf{z'} \in p(U)$, le polynôme P (de degré strictement positif) admet une racine. Donc $\mathbf{z'} \in p(U \cap W)$, ensuite $p(U \cap W) = p(U)$.

Lemme 2.2.4. *$p(W) = D$.*

Preuve : Par la remarque précédente, on a $p(W)$ est un ouvert de D. Or comme p est propre et D est métrique, p est fermée, donc $p(W)$ est un fermé de D. On a finalement $p(W) = D$, car D est connexe. ■

On est prêt à démontrer le théorème.

Preuve du théorème : Soit $\mathbf{z}' \in D$, alors il y a r points $\mathbf{z}_1, ..., \mathbf{z}_r$ de W là-dessus. Soit E un voisinage compact de $\mathbf{z}'$ dans D, parce que $p|_W$ est propre, il existe $r > 0$ tel que $p^{-1}(E) \cup W \subseteq D(0, r) \times E$. Par les lemmes précédents, pour chaque $\mathbf{z}_i$, il existe des ouverts $E_{\mathbf{z}_i} \subseteq E$ et $F_{\mathbf{z}_i} \subseteq D(0, r)$ tels que

$$(F_{\mathbf{z}_i} \times E_{\mathbf{z}_i}) \cap W = \{\mathbf{y} \in \mathbb{C} \times E_{\mathbf{z}_i} | P_i(\mathbf{y}) = 0\}$$

où P_i est un polynôme de *Weierstrass* en z_1. Pour chaque $(\mathbf{z} \in \overline{D}(0, r) \times \{\mathbf{z}'\}) \backslash \{\mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_r\}$, il existe des ouverts $E_{\mathbf{z}} \subseteq E$ et $F_{\mathbf{z}} \subseteq \mathbb{C}$ tels que

$$(F_{\mathbf{z}} \times E_{\mathbf{z}}) \cap W = \emptyset$$

On a alors les $F_{\mathbf{z}}$ forment un recouvrement ouvert de $\overline{D}(0, r)$. On peut donc extraire un sous-recouvrement fini, $F_{\mathbf{z}_1}, \ldots, F_{\mathbf{z}_r}, F_{\mathbf{z}_{r+1}}, \ldots, F_{\mathbf{z}_s}$.

Soit $V(\mathbf{z}') \subseteq E_{\mathbf{z}_1} \cap \ldots \cap E_{\mathbf{z}_s}$ un voisinage ouvert de $\mathbf{z}'$. On a donc

$$W \cap (\mathbb{C} \times V(\mathbf{z}')) = \{\mathbf{y} \in \mathbb{C} \times V(\mathbf{z}') | (P_1 \cdot \ldots \cdot P_r)(\mathbf{y}) = 0\}$$

On note alors $P_{\mathbf{z}'} = P_1 \cdot \ldots \cdot P_r$.

Soit $P_{\mathbf{z}'}(y_1, \mathbf{y}') = y_1^s + a_1(\mathbf{y}')y_1^{s-1} + ... + a_s(\mathbf{y}')$. On peut supposer que $P_{\mathbf{z}'}$ est sans facteurs multiples, alors l'ensemble $\Delta_{\mathbf{z}'}$ des zéros de son discriminant est nulle part dense dans $V(\mathbf{z}')$. Et sur un point en dehors de $\Delta_{\mathbf{z}'}$, W a exactement s points et les $a_i(\mathbf{y}')$ sont des fonctions symétriques des premiers coordonnées de ces s points. Donc les a_i sont uniquement déterminés sur $V(\mathbf{z}') \backslash \Delta_{\mathbf{z}'}$ donc sur $V(\mathbf{z}')$ par densité.

Soient $\mathbf{z}'_1$, $\mathbf{z}'_2$ deux points distincts de D. Soient $P_{\mathbf{z}'_1}(y_1, \mathbf{y}') = y_1^s + a_1(\mathbf{y}')y_1^{s-1} + ... + a_s(\mathbf{y}')$ et $P_{\mathbf{z}'_2}(y_1, \mathbf{y}') = y_1^t + b_1(\mathbf{y}')y_1^{t-1} + ... + b_t(\mathbf{y}')$. Supposons que $V = V(\mathbf{z}'_1) \cap V(\mathbf{z}'_2) \neq \emptyset$. Alors V est un ouvert de D et $V \cap (\Delta_{\mathbf{z}'_1} \cup \Delta_{\mathbf{z}'_2})$ est nulle part dense dans V. Par l'unicité qu'on a démontrée, on a $s = t$ et $a_i(\mathbf{y}') = b_i(\mathbf{y}')$ sur V.

Par connexité, les a_i peuvent être définies globalement sur D. On obtient donc une unique fonction holomorphe P polynomiale en z_1 unitaire. P est localement définie par des $P_{\mathbf{z}'}$ et on a $W = \{\mathbf{y} | \ P(\mathbf{y}) = 0\}$. ■

Corollaire 2.2.5. L'ensemble des zéros du discriminant de P, noté Δ, est nulle part dense dans D. Le degré de P est le nombre de points de W audessus d'un point $\mathbf{z}' \in D\backslash\Delta$.

Proposition 2.2.6. Soit D un domaine de $\mathbb{C}^{n-1}$. Soit $P \in \mathcal{O}(D)[X]$ sans facteurs multiples, alors P définit une fonction holomorphe de $\mathbb{C} \times D$, noté encore P. Soit W l'ensemble des zéros de P, alors W est irréductible si et seulement si P est irréductible dans $\mathcal{O}(D)[X]$.

Preuve : Si W n'est pas irréductible, chacune de ses composantes irréductibles est définie par un élément P_i de $\mathcal{O}(D)[X]$ sans facteurs multiples par le théorème précédent. On a donc W possède un nombre fini de composantes irréductibles et $P = \prod P_i$.

Réciproquement, soit $P = P_1P_2$ une décomposition non triviale de P, alors $W = W_1 \cup W_2$, avec W_i l'ensemble des zéros de P_i, $i = 1, 2$. ■

Proposition 2.2.7. Soit D un domaine de $\mathbb{C}^{n-1}$, soit W une variété analytique dans $X = \mathbb{C} \times D \subseteq \mathbb{C}^n$. On suppose que la projection $p : X \longrightarrow D$ est propre. Alors $p(W)$ est une variété analytique de D.

Pour montrer ce théorème, on va d'abord citer un résultat d'algèbre [3]. Soient $P_k(X) = X^{n_k} + a_{k,1}X^{n_k-1} + ... + a_{k,n_k} \in \mathbb{C}[X]$, $k = 1, ..., r$.

Soient $s_i^{(k)}$, $i = 1, ..., n_k$ les racines de P_k. On considère la fonction

$$R(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{r-1}) = \prod_{i_1, i_2, \ldots, i_r} (\lambda_1 s_{i_1}^{(1)} + \ldots + \lambda_{r-1} s_{i_{r-1}}^{(r-1)} - (\lambda_1 + \ldots + \lambda_{r-1}) s_{i_r}^{(r)})$$

On constate que R est identiquement nulle si et seulement si les P_k possèdent une racine commune. Par ailleurs, pour tout $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{r-1})$ fixé, $R(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{r-1})$ est symétrique en $s_i^{(k)}$ pour tout k. Par un théorème d'algèbre, on a qu'il existe un polynôme $Q_{(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_{r-1})}$ tel que $R(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{r-1}) = Q_{(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_{r-1})}(a_{k,i})$, $i = 1, ..., n_k$ et $k = 1, ..., n$.

Preuve du théorème : On suppose que $\mathbf{0} \in D$. Alors il existe un nombre fini de point au dessus de $\mathbf{0}$ sur W. Soit $\mathbf{z}$ un tel point et soit U un voisisnage de $\mathbf{z}$. En fin on suppose que $W \cap U$ est définie par $f_1, ..., f_r$ des polynôme *Weierstrass* en z_1. On a alors $p(U \cap W)$ est l'ensemble des zéros communs des $Q_{(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_{r-1})}$. Comme les coefficients des f_i sont holomorphes au voisinage

3. Il y a un résultat plus général [4].

de $\mathbf{0} \in D$, les $Q_{(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_{r-1})}$ étant des polynômes des coefficients des f_i sont aussi holomorphes. On a ainsi $p(W)$ est une variété analytique. $\blacksquare$

Proposition 2.2.8. Soit D un domaine de $\mathbb{C}^{n-1}$, soit W une variété analytique dans $X = \mathbb{C} \times D \subseteq \mathbb{C}^n$. On suppose que la projection $p : X \longrightarrow D$ est propre et que chaque composante irréductible de W est de codimension au moins 2, alors $p(W) \subsetneq D$.

Preuve : On va d'abord montrer que, pour chaque $\mathbf{z} \in W$, il existe U un voisinage de $\mathbf{z}$ tel que $p(U \cap W)$ est nulle part dense dans D. Soit V un voisinage de $\mathbf{z}$ tel que $V \cap W = \{f_1 = \ldots = f_k = 0\}$ où les f_i sont des fonctions holomorphes. Comme la projection est propre, on peut supposer que les f_i sont des polynômes de *Weierstrass*. Alors les f_i sont premiers entre eux dans $\mathcal{O}_{n,\mathbf{z}}$, sinon on a une composante irréductible de codimension 1 dans W, absurde. Soit $\gamma = \alpha_1 f_1 + \ldots + \alpha_k f_k$ le résultant. Alors il existe $U \subseteq V$ un voisinage de $\mathbf{z}$ tel que $p(U \cap W) \subseteq \{\gamma = 0\}$. Donc $p(U \cap W)$ est nulle part dense.

Parce que la projection est propre, par compacité, on peut montrer que $p(W)$ est nulle par dense dans D. Donc $p(W) \subsetneq D$. $\blacksquare$

3 Variétés Analytiques de $\mathbf{CP}^n$ et Théorème de Chow

Dans cette partie, on va utiliser quelques notations. On désigne la coordonnée homogène d'un point de $\mathbf{CP}^n$ par $[x_0 : ... : x_n]$. On note $H_i = \{[x_0 : ... : x_n] \in \mathbf{CP}^n | \ x_i = 0\}$ pour $i = 0, ..., n$, et $U_i = \mathbf{CP}^n \backslash H_i$. On pose aussi p une fonction de $\mathbf{CP}^n \backslash [1 : 0, ..., 0]$ dans H_0 telle que $p([x_0 : ... : x_n]) = [0 : x_1 : ... : x_n]$. Finalement soit φ_i l'homéomorphisme de U_i dans $\mathbb{C}^n$ qui envoie $[x_0 : ... : x_{i-1} : 1 : x_{i+1} : ... : x_n]$ à $(x_0, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_n)$. Si A est une variété analytique, on note A^* l'ensemble de ses points réguliers.

3.1 Projections Canoniques dans les Espaces Projectifs

Définition 3.1.1. Soit S un hyperplan de $\mathbf{CP}^n$ et α un point de $\mathbf{CP}^n$ qui n'appartient pas à S. On définit une projection $p_{\alpha,S}$ de $\mathbf{CP}^n \backslash \{\alpha\}$ dans S de manière suivante : pour tout $x \in \mathbf{CP}^n \backslash \{\alpha\}$, il existe une unique droite projective l qui relie x et α, $p_{\alpha,S}(x)$ est alors l'unique point dans l'intersection de l et S.

Remarque. La projection $p_{\alpha,S}$ est holomorphe. En effet, par un changement des coordonnées, on peut supposer que $S = H_0$, $\alpha = [1 : 0 : ... : 0]$ et $p_{\alpha,S} = p$. Alors dans la carte U_0, on a $\phi \circ p \circ \phi^{-1}(x_1, ..., x_n) = (x_2, ..., x_n)$.

Proposition 3.1.2. Soit W une variété analytique de $\mathbf{CP}^n$, alors il existe un nombre fini de variétés analytiques irréductibles $A_1, ..., A_s$, tels que $A_i \nsubseteq A_j$ si $i \neq j$ et que $W = \bigcup_{i=1}^{s} A_i$. Autrement dit, W a un nombre fini de composantes irréductibles.

Preuve : Par **théorème 2.1.19**, il existe une famille de variétés analytiques irréductibles $\{A_i\}_{i \in I}$ tels que $A_i \nsubseteq A_j$ si $i \neq j$ et que $W = \bigcup_{i \in I} A_i$. Et pour tout point $z \in W$, il existe un ouvert $U \ni \mathbf{z}$ tel qu'il n'existe qu'un nombre fini de A_i telles que $U \cap A_i \neq \emptyset$. Or, comme W est fermée dans le compact $\mathbf{CP}^n$ donc compact, on a I est fini. ■

Lemme 3.1.3. Soit $i \in \{1, \dots, n\}$, soit W une variété analytique dans $\mathbf{CP}^n$ telle que $[1 : 0 : ... : 0] \notin W$, alors $\widetilde{p}$, la restriction de p sur $W \cap U_i$ dans son image, est propre.

Preuve : p est bien définie sur W car $[1 : 0 : ... : 0] \notin W$. Comme W est compacte, on a p de W dans son image est propre car p est continue. Soit

K un compact de $p(W \cap U_i)$, alors $p^{-1}(K)$ est un compact et inclus dans $W \cap U_i$. D'où $\widetilde{p}^{-1}(K)$ est un compact de $W \cap U_i$. Donc $\widetilde{p}$ est propre. ■

Au cas général, si $\alpha \notin W$, alors la restriction de $p_{\alpha,S}$ sur W dans son image est propre. Par **théorème 2.2.7**, on obtient le lemme suivant.

Lemme 3.1.4. Sous les hypothèse précedentes, $p_{\alpha,S}(W)$ est une variété analytique dans S.

De plus, on a aussi un lemme pour la irréductibilité.

Lemme 3.1.5. Soit W une variété analytique irréductible de $\mathbf{CP}^n$. Si $W \nsubseteq H_i$, alors $\varphi_i(W \cap U_i)$ est une variété analytique irréductible de $\mathbb{C}^n$.

Preuve : W^* est une variété holomorphe de dimension $d > 0$, connexe. On a $W^* \cap H_i$ est une variété analytique de W^*. Comme $W \nsubseteq H_i$, $W^* \nsubseteq H_i$. Donc $W^* \cap H_i$ est nulle part dense dans W^*, d'où $W^* \backslash H_i$ est encore connexe. Donc $\varphi_i(W \cap U_i)$ est irréductible. ■

Lemme 3.1.6. Soit W une variété algébrique dans H_0, alors $p^{-1}(W) \cup \{[1 : 0... : 0]\}$ est une variété algébrique de $\mathbf{CP}^n$.

Preuve : Il suffit de montrer au cas où W est définie par un polynôme homogène P en $(x_1, ..., x_n)$. On a alors $p^{-1}(W) \cup \{[1 : 0... : 0]\}$ est définie par un polynôme homogène à $n + 1$ variables qui est égal à P. ■

Lemme 3.1.7. Soit W une variété analytique irréductible dans $\mathbf{CP}^n$ de codimension > 1, alors pour chaque $z \notin W$, il existe une projection $p_{\alpha,S}$ telle que $p_{\alpha,S}(W)$ et $p_{\alpha,S}(z)$ sont bien definis et $p_{\alpha,S}(z) \notin p_{\alpha,S}(W)$, *i.e.* $p_{\alpha,S}$ sépare W et z.

Preuve : Choisissons S tel que $z \notin S$. Par **proposition 2.2.8** et **lemme 3.1.3**, $p_{z,S}(W) \subsetneq S$. Soit $\alpha \notin p_{z,S}(W)$, par la définition de la projection, l'unique droite passant z et α ne rencontre pas W. Encore par la définition de la projection, $p_{\alpha,S}$ sépare W et z. ■

3.2 Théorème de Chow

On a vu dans **proposition 2.1.6** qu'une variété algébrique de $\mathbf{CP}^n$ est analytique. La réciproque est encore vraie, c'est le théorème de *Chow* :

Théorème 3.2.1 (Théorème de *Chow*). Toute variété analytique de $\mathbf{CP}^n$ est une variété algébrique.

Remarque. Ce résultat est évidemment faut dans un ouvert d'un espace affine $\mathbb{C}^n$. On rappelle qu'une variété algébrique dans un ouvert d'un espace affine est une varété analytique globalement définie par des polynômes.

On va d'abord prouver un cas particulier du théorème de *Chow*.

Proposition 3.2.2. Soit W une variété analytique irréductible dans $\mathbf{CP}^n$. Si W est de dimension $n-1$, alors W est algébrique et définie par un polynôme homogène.

Preuve : On peut supposer que $W \neq H_i$ pour tout i, alors $W \nsubseteq H_i$. Comme $W \neq \mathbf{CP}^n$, on peut encore supposer que $[1:0:...:0] \notin W$. On a donc p de $W \cap U_1$ dans son image est propre. On prend la carte U_1 (*i.e.* on applique φ_1), alors $V_1 = \varphi_1(W \cap U_1)$ est une variété analytique irréductible de codimension 1 de $\mathbb{C}^n$. Dans cette carte, la projection p correspond à la projection qui envoie $(x_0, x_2, ..., x_n)$ à $(0, x_2, ..., x_n)$. Donc par **théorème 2.2.1**, il existe une fonction holomorphe $P_1 \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^{n-1})[X]$ de degré minimal de la forme $P_1(x_0, x_2, ..., x_n) = x_0^k + g_1(x_2, ..., x_n)x_0^{k-1} + ... + g_k(x_2, ..., x_n)$ telle que V_1 est l'ensemble des zéros de P_1 dans $\mathbb{C}^n$.

De même façon, on pose $V_2 = \varphi_2(W \cap U_2)$, et il existe une fonction holomorphe $P_2(y_0, y_1, y_3, ..., y_n) = y_0^s + h_1(y_1, y_3, ..., y_n)y_0^{s-1} + ... + h_s(y_1, y_3, ..., y_n)$ de degré minimal telle que V_2 est l'ensemble des zéros de P_2 dans $\mathbb{C}^n$. On remarque que sur $U_1 \cap U_2$, $[z_0 : ... : z_n] = [x_0 : 1 : x_2 : ... : x_n] = [y_0 : y_1 : 1 : y_3 : ... : y_n]$ si et seulement si $y_i = \frac{x_i}{x_2}$ pour $i \neq 1, 2$ et $y_1 = \frac{1}{x_2}$. Donc $\varphi_1(W \cap U_1 \cap U_2)$ est une variété analytique de $\mathbb{C} \times D$ avec $D = \{(x_2, ..., x_n) | \ x_2 \neq 0\}$ connexe ouvert. Et $\varphi_1(W \cap U_1 \cap U_2)$ est aussi définie par $(\frac{x_0}{x_2})^s + h_1(\frac{1}{x_2}, \frac{x_3}{x_2}, ..., \frac{x_n}{x_2})(\frac{x_0}{x_2})^{s-1} + ... + h_s(\frac{1}{x_2}, \frac{x_3}{x_2}, ..., \frac{x_n}{x_2})$, *i.e.* par $Q_2(x_0, x_2, ..., x_n) = x_0^s + x_2 h_1(\frac{1}{x_2}, \frac{x_3}{x_2}, ..., \frac{x_n}{x_2})x_0^{s-1} + ... + x_2^s h_s(\frac{1}{x_2}, \frac{x_3}{x_2}, ..., \frac{x_n}{x_2})$. Donc par l'unicité donnée par **corollaire 2.2.5**, on a $s = k$ et $g_i(x_2, ..., x_n) = x_2^i h_i(\frac{1}{x_2}, \frac{x_3}{x_2}, ..., \frac{x_n}{x_2})$ pour tout $i = 1, ..., k$, et tout $(x_2, ..., x_n) \in D$. Or comme g_i est holomorphe sur $\mathbb{C}^n$, $x_2^i h_i(\frac{1}{x_2}, \frac{x_3}{x_2}, ..., \frac{x_n}{x_2})$ l'est aussi. Pour tout $(x_3, ..., x_n)$ fixé, $h_i(\frac{1}{x_2}, \frac{x_3}{x_2}, ..., \frac{x_n}{x_2})$ est bornée lorsque $x_2 \to \infty$. Donc par **théorème 1.1.7**, on a g_i est polynomiale en x_2 pour tout i.

Avec les mêmes procédés, on a g_i est polynomiale en x_j, pour $i = 1, ..., k$ et $j = 2, ..., n$. Donc toutes les g_i sont des polynômes. En homogénéisant P_1, on a un polynôme homogène P en $(x_0, x_1, ..., x_n)$ tel que $W \cap U_1$ est définie par P. Soit $V = \{[x_0 : ... : x_n] |\ P(x_0, ..., x_n) = 0\}$, alors $W \subseteq V$ par **théorème 2.1.7**. Réciproquement, si $V \neq W$, alors soit $V = W \cup A_1 ... \cup A_l$, la décomposition canonique de V en composantes irréductibles. On a $A_i \subseteq H_1$, pour tout i, car $W^* \cap U_1$ est connexe. Or V^* est de dimension $n-1$, on ne peut qu'avoir $l = 1$ et $A_1 = H_1$, absurde car P est unitaire en x_0. Donc $V = W$. ■

On va maintenant prouver le théorème de *Chow* pour une variété analytique irréductible de codimension au mois 2, ce qui termine la preuve du théorème :

Preuve du théorème : On va montrer par récurrence sur la dimension n. Si $n = 2$, toute variété analytique irréductible non triviale est de codimension 1. On peut donc appliquer le théorème précédent. Supposons que le théorème est vrai pour $n = 2, ..., k$, $k \geq 2$. Montrons cela au cas $n = k+1$. Soit W une variété analytique irréductible de codimension au mois 2 dans $\mathbf{CP}^n$. Soit $\alpha \notin W$ et soit S un hyperplan qui ne contient pas α, alors $p_{\alpha,S}(W)$ est une variété analytique dans S. Par hypothèse de récurrence, on a $p_{\alpha,S}(W)$ est algébrique ainsi que $p_{\alpha,S}^{-1}(p_{\alpha,S}(W)) \cup \{\alpha\}$ par **théorème 3.1.6**.

Par **théorème 3.1.7**, on a

$$W = \bigcap_{\alpha \notin W, \alpha \notin S} (p_{\alpha,S}^{-1}(p_{\alpha,S}(W)) \cup \{\alpha\}).$$

Donc W est définie par une famille F de polynômes homogènes. Comme l'anneau des polynômes est noethérien, on peut soustraire une sous-famille finie de F qui engendre le même idéal que F dans $\mathbb{C}[x_0, ..., x_n]$. Donc W est algébriqe. ■

3.3 Application du Théorème de Chow

On a vu que la notion de la géométrie algébrique et celle de la géométrie analytique sont équivalentes dans un espace projectif complexe. En sachant qu'une variété analytique irréductible est toujours connexe, on obtient un résultat de la géométrie algébrique : dans un espace projectif complexe, une variété algébrique irréductible est toujours connexe. Mais ce n'est pas vrai en général.

Exemple. Soient $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\}$, $W = \{xy = 1\}$, alors W est irréductible mais non connexe.

Dans l'exemple précédent, si l'on prolonge U dans $\mathbf{RP}^2$ de la manière naturelle, on a $\overline{W}$ est algébrique et connexe dans $\mathbf{RP}^2$. Mais il existe des variétés algébriques irréductibles (au sens algébrique) non connexes dans $\mathbf{RP}^2$.

Exemple. Considérons $W = \{(x_1^2 - 2x_3^2)^2 + x_3^2x_2^2 - x_3^4 = 0\}$ dans $\{[x_1 : x_2 : x_3]\} = \mathbf{RP}^2$. C'est une variété algébrique irréductible. Dans la carte $\{x_3 \neq 0\}$ on pose $x = \frac{x_1}{x_3}$, $y = \frac{x_2}{x_3}$. Dans cette carte, W est définie par $(x^2 - 2)^2 + y^2 - 1 = 0$, on peut voir que W a au moins deux composantes connexes.

Pour les espaces complexe affines, l'assertion est correcte.

Proposition 3.3.1. Soit $W \subseteq \mathbb{C}^n$ une variété algébrique irréductible (au sens algébrique), alors W est connexe.

Preuve : On a l'injection

$$j : \mathbb{C}^n \to \mathbf{CP}^n, (z_1, \ldots, z_n) \mapsto [1 : z_1 : \ldots : z_n].$$

De plus $j : \mathbb{C}^n \to Im(j)$ est un isomorphisme (entre des variétés holomorphes). Soit $H = \{[0 : z_1 : \ldots : z_n] \in \mathbf{CP}^n\}$, alors $\mathbf{CP}^n = Im(j) \cup H$.

Soit $P \in \mathbb{C}[z_1, \ldots, z_n]$, $P(z_1, \ldots, z_n) = \Sigma c_{i_1,\ldots,i_n} z_1^{i_1} \ldots z_n^{i_n}$ un polynôme de degré d, on note $\widetilde{P}(z_0, z_1, \ldots, z_n) = \Sigma c_{i_1,\ldots,i_n} z_0^{d-i_1-\ldots-i_n} z_1^{i_1} \ldots z_n^{i_n}$ un polynôme homogène de degré d.

Si $W \subseteq \mathbb{C}^n$ est définie par $P_1, \ldots, P_s$, on note $\widetilde{W} \subseteq \mathbf{CP}^n$ la variété analytique définie par $\widetilde{P_1}, \ldots, \widetilde{P_s}$. On a trouvé une variété analytique $\widetilde{W}$ dans $\mathbf{CP}^n$ telle que $\widetilde{W} \cap Imj = W$. Soit

$$\Sigma_W = \{\widetilde{W} \text{ variété analytique dans } \mathbf{CP}^n | \ \widetilde{W} \cap Im\{j\} = W\}$$

$$J(W) = \bigcap_{\widetilde{W} \in \Sigma_W} \widetilde{W}.$$

Par **Proposition 2.1.14**, $J(W)$ est une variété analytique dans $\mathbf{CP}^n$. De plus, $J(W)$ n'a pas de composante irréductible dans H. Par le **théorème de *Chow***, on peut montrer que l'application J de $\{$variétés algébriques dans $\mathbb{C}^n\}$ dans $\{$variétés analytiques dans $\mathbf{CP}^n$ n'ayant pas de composante irréductible dans H $\}$ est bijective.

Donc, si W est irréductible (au sens algébrique), alors $J(W)$ est irréductible (au sens analytique). Par **Propositon 2.1.17**, $J(W)^*$ est connexe. On a $J(W)^*$ une variété holomorphe connexe et $J(W)^* \cap H \subseteq J(W)^*$ une variété analytique inclu strictement dans $J(W)^*$. Par **Proposition 2.1.7** et **Proposition 2.1.8**, $W^* = J(W)^* \backslash H$ est connexe, donc $W = \overline{W^*}$ est connexe. ■

Définition 3.3.2. Une fonction de $\mathbf{CP}^n$ dans lui-même est dite *analytique* si elle est localement définie par une fonction holomorphe. Un *automorphisme analytique* de $\mathbf{CP}^n$ est une fonction analytique bijective de $\mathbf{CP}^n$ dans lui-même dont l'inverse est aussi analytique. On remarque que tout élément f de $\mathbf{GL}_{n+1}(\mathbb{C})$ induit un automorphisme analytique de $\mathbf{CP}^n$, noté encore f, de manière naturelle : $f : [x_0 : ... : x_n] \mapsto f([x_0 : ... : x_n])$.

Théorème 3.3.3. Tout automorphisme analytique de $\mathbf{CP}^n$ est induit par un élément de $\mathbf{GL}_{n+1}(\mathbb{C})$.

Pour le montrer, on va admettre un théorème de Bézout [7]. Soient $P_i \in \mathbb{C}[X_1, ..., X_{n+1}]$ des polynômes homogènes irréductibles, $i = 1, ..., n$. Alors, en comptant la multiplicité, le nombre des racines communes des P_i dans $\mathbf{CP}^n$ est exactement $\prod_{i=1}^n \deg P_i$.

Grâce à ce théorème, on a le lemme suivant.

Lemme 3.3.4. Soit ϕ un automorphisme de $\mathbf{CP}^n$, alors ϕ laisse l'ensemble des hyperplans stable.

Preuve : Il suffit de montrer que $\phi(H_0)$ est un hyperplan. Montrons par l'absurde. Comme ϕ est un automorphisme, l'image de H_0 par ϕ est une variété analytique V de $\mathbf{CP}^n$. Comme H_0 est inversible, on a V est irréductible de codimension 1 et partout régulier. Par le **proposition 3.2.2**, V est donnée par un polynôme homogène irréductible f_0. Supposons le contraire, alors $\deg f_0 \geq 2$. On suppose que $\phi(H_i)$ est définie par un polynôme homogène irréductible f_i, alors, comme ϕ est bijectif, les f_i admet une l'unique racine $\mathbf{z} \in \mathbf{CP}^n$. Or, par le théorème de Bézout, c'est une racine multiple car $\deg f_0 \geq 2$, donc $rg(\mathbf{J_z}(f_1, ..., f_i)) < n$. Absurde, puisque ϕ est un automorphisme.

On va prouver le théorème maintenant.

Preuve du théorème : On va procéder par récurrence sur n

Montrons le cas où $n = 1$, soit ϕ un automorphisme. Quitte à composer un élément de $\mathbf{GL}_2(\mathbb{C})$, on peut supposer que $\phi([1 : 0]) = [1 : 0]$ et que $\phi([0 : 1]) = [0 : 1]$. Alors il existe deux fonctions holomorphes h_1 et h_2 sur $\mathbb{C}$ telles que $\phi([1 : x]) = [1 : h_1(x)]$ et $\phi([y : 1]) = [h_2(y) : 1]$. On a donc, pour tout $x \in \mathbb{C}$ non nul, $h_1(\frac{1}{x}) = \frac{1}{h_2(x)}$. Supposons que $h_1(x) = O(x^k)$ en 0, alors par **théorème 1.1.7**, h_2 est polynomiale de degré au plus k. On en déduit que h_1 et h_2 sont polynomiales, par suite $h_1(x) = ax^k$ et $h_2(x) = a^{-1}x^k$ avec

$k \in \mathbb{N}$ et a non nul. Comme h_1 est bijective, on a $k = 1$. Donc ϕ est induit par $[x : y] \mapsto [x : ay]$

Supposons que c'est vrai pour $n = 1, ..., k$, avec $k \geq 1$. Montrons le résultat pour $n = k + 1$.

Fixons un automorphisme ϕ de $\mathbf{CP}^n$, par le lemme précédent, on a $V = \phi(H_0)$ est un hyperplan de $\mathbf{CP}^n$. Quitte à faire un changement de coordonnées, on peut supposer que $V = H_0$ et donc restreindre ϕ à H_0. Par hypothèse de récurrence, cette restriction est un élément de $\mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$. On peut en outre supposer que c'est l'identité de H_0 quitte à faire un changement de coordonnées de H_0.

Comme ϕ est un automorphisme, il réalise une bijection biholomorphe de U_0 dans lui-même. Grâce à φ_0, on peut identifier U_0 à $\mathbb{C}^n$ et on va alors montrer que $g = \varphi_0 \circ \phi \circ \varphi_0^{-1}$ est affine dans $\mathbb{C}^n$.

Soit $F = \{(x_1, ...x_n) | \, x_1 = k\}$ un hyperplan affine de $\mathbb{C}^n$, alors E, l'adhérence de $\varphi_0^{-1}(F)$, est un hyperplan de U_0. On a donc $\phi(E)$ est un hyperplan de $\mathbf{CP}^n$. Par hypothése de récurrence, il existe $t_0 \neq 0, t_1, ..., t_n \in \mathbb{C}$ tels que $\phi([1 : k : 0 : ... : 0]) = [t_0 : ... : t_n]$ et $\phi([1 : k : x_2 : ... : x_n]) = [t_0 : t_1 : x_2 + t_2 : ... : x_n + t_n]$. Donc $g(k, x_2, ..., x_n) = \frac{1}{t_0}(t_1, t_2 + x_2, ..., t_n + x_n)$, *i.e.* g est affine sur F. Par des changements de coordonnées, on montre que g est affine sur tous les hyperplans affines et par suite g est affine sur toutes les droites. Donc par **théorème 1.1.7**, g est affine sur $\mathbb{C}^n$. Enfin, on a ϕ est induit par un élément de $\mathbf{GL}_{n+1}(\mathbb{C})$. ■

On peut améliorer le résultat. En effet, $f \in \mathbf{GL}_{n+1}$ induit l'identité sur $\mathbf{CP}^n$ si et seulement si f est une homothétie. On a donc $\mathbf{Aut}(\mathbf{CP}^n) \simeq \mathbf{PGL}_{n+1}(\mathbb{C})$.

Dans les articles de *Serre* [8] [9], on peut voir des définitions plus abstraites des variétés analytiques et des variétés algébriques. Ce sont analogues à celle des variétés holomorphes, *i.e.* on introduit des cartes. Vu que les fonctions polynomiales sont holomorphes, on peut munir une variété algébrique d'une structure de variété analytique. *Serre* montre trois théorèmes intéressants sur ce type de variétés et on peut en déduire une autre preuve du théorème de *Chow*. Comme une application du théorème de *Chow*, on montre qu'une variété analytique compacte possède au plus une structure de variété algébrique. Par ailleurs, considérons l'espace quotient $X = \mathbb{C}^2/\Lambda$ où Λ est un réseau isomorphe à $\mathbb{Z}^4$. On peut munir X d'une structure de variété analytique de manière naturelle. X est compact mais en général X ne possède pas de structure de variété algébrique [10] pp.140-141.

Références

[1] Lars Hormond : An Introduction to Complex Analysis in Several Variables, North-Holland 1973

[2] Klaus Fritzsche , Hans Grauet : From Holomorphic Functions to Complex Manifolds, Springer-Verlag 2002

[3] Janos Kollar : The Structure of Algebraic Threefolds : An Introduction to Mori's Program, AMS, Oct 1987, Vol 17

[4] Kunio Kakié : The resultant of several homogeneous polynomials in two indetermiantes, AMS, Jan 1976, Vol 54

[5] Waiter Rudin : Real And Complex Analysis, McGraw-Hill Book Company 1987

[6] Tomasz Sobieszek : On the Hartogs extension theorem, Annales Polonici Mathematici 80 (2003)

[7] William Fulton : Intersection Theory, Springer-Verlag 1984

[8] Jean-pierre Serre : Géométrie algébrique et Géométrie analytique, Annales de l'institut Fourier, tome 6(1956)

[9] Jean-pierre Serre : Faisceaux Algébriques Cohérentes, The Annals of Mathematics, 2nd Ser., Vol 61, No.2.(Mar., 1955)

[10] V.I. Danilov, V.V. Shokurov : Algebraic Geometry I : Algebraic Curves, Algebraic Manifolds and Schemes, Springer-Verlag 1994