

Sur l'absolue continuité de l'entropie de la famille
quadratique

Milan PERERA et Alexandre PERRIER
sous la direction de
Viviane BALADI et Daniel SCHNELLMANN

3 décembre 2012

Introduction

Les systèmes dynamiques étudient le comportement asymptotique des itérés d'une application sur un ensemble. On appelle système dynamique topologique la donnée d'un couple (X, f) où X est un espace topologique et f une application continue de X dans X . On introduit alors la notion d'entropie topologique d'un système qui permet de mesurer le "désordre" qu'induit l'application répétée de f sur X . Cependant, cette entropie topologique n'est pas toujours facilement accessible, ni toujours bien régulière par rapport aux applications. Nous allons nous intéresser à la régularité de l'entropie topologique d'une famille à un paramètre bien connue : la famille quadratique. Plus précisément, pour $a \in [0; 4]$, en notant $f_a : [0; 1] \rightarrow [0; 1]$, $x \mapsto ax(1 - x)$ et $h_{top}(f_a)$ l'entropie topologique de f_a , nous allons montrer que l'application : $a \mapsto h_{top}(f_a)$ n'est pas absolument continue. Pour ce faire, nous allons exhiber un ensemble Δ' tel que $m(\Delta') = 0$ et $m(\{h_{top}(f_a), a \in \Delta'\}) > 0$ où m correspond à la mesure de Lebesgue.

Table des matières

1 Les outils de la théorie des systèmes dynamiques

1.1 Entropie topologique

L'entropie topologique mesure le « désordre » topologique créé par cette dynamique. Elle ne dépend que des propriétés topologiques du système *i.e.* elle est invariante par homéomorphisme. On la note h_{top} (la définition de l'entropie est détaillée dans [?, Partie 2.5]).

On utilise les définitions et notations suivantes (X est un espace métrique compact, et $f : X \rightarrow X$ une application continue)

Définition 1. Soit $\epsilon > 0$ Un ensemble $A \subset X$ est dit :

- (n, ϵ) couvrant si $\forall y \in X, \exists x \in A, \sup_{i=0..n} d(f^i(x), f^i(y)) \leq \epsilon$
On note $\text{cov}(n, \epsilon, f)$ le plus petit cardinal d'ensemble (n, ϵ) couvrant.
- (n, ϵ) séparé si $\forall x \neq y \in A, \sup_{i=0..n} d(f^i(x), f^i(y)) \geq \epsilon$
On note $\text{sep}(n, \epsilon, f)$ le plus grand cardinal d'ensemble (n, ϵ) séparé.

Définition 2 (Entropie topologique). On peut alors définir l'entropie topologique de la manière suivante :

$$\begin{aligned} h_{top}(f) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log \text{cov}(n, \epsilon) \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log \text{sep}(n, \epsilon) \end{aligned}$$

Ces deux limites sont bien définies d'après [?, partie 2.5, page 37].

1.2 Quelques éléments d'ergodicité

On présente ici la notion d'ergodicité qui joue un rôle fondamental, notamment en physique. Celle-ci permet de formaliser une certaine forme de mélange dans le comportement du système dynamique : celle-ci exprime qu'étant donné une observable et une trajectoire, la moyenne des valeurs prises par l'observable sur cette trajectoire est égale à la moyenne de l'observable. Plus précisément (les définitions sont tirées de [?]) :

Définition 3. Soit (X, \mathcal{B}, ν) un espace mesuré, où ν est finie. Soit $f : X \rightarrow X$ une fonction mesurable.

μ est dite invariante par f si :

$$\forall A \in \mathcal{B}, \nu(f^{-1}(A)) = \nu(A)$$

On dit alors que f est ergodique si :

- ν est f -invariante.
- Tout ensemble f -invariant (i.e $f^{-1}(A) = A$) est de mesure nulle ou de mesure pleine.

L'intérêt principal de cette définition est qu'elle permet d'obtenir le théorème suivant, exprimant l'égalité entre moyenne temporelle et moyenne spatiale d'une observable.

Théorème 1 (Birkhoff). Soit (X, \mathcal{B}, ν) un espace mesuré fini. Soit $f : X \rightarrow X$ une fonction mesurable préservant la mesure ν .

f est ergodique si et seulement si :

$$\forall \phi \in L^1(X, \mathcal{B}, \nu), \text{ pour p.t } x \in X, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \phi(f^k(x)) = \frac{1}{\nu(X)} \int_X \phi(v) d\nu(v)$$

Remarque : En réalité Birkhoff a énoncé un théorème plus fort dont celui-ci est un corollaire, mais c'est celui-ci qui est le plus utile en pratique.

Définition 4. Si I désigne un intervalle compact, et ν une mesure de probabilité, un point $x \in I$ tel que

$$\forall \phi \in C(I, \mathbb{R}), \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \phi(f^k(x)) = \int_I \phi(v) d\nu(v)$$

est dit typique pour ν sous f .

On voit que si la mesure est ergodique, quasiment tout les points sont typiques. Cependant il n'est pas aisé d'en exhiber un comme le montrera l'exemple de l'application tente.

1.3 Entropie de Kolmogorov

L'entropie de Kolmogorov mesure le « désordre » par rapport à une mesure de probabilité choisie sur le système. Suivons la définition donnée dans [?, Partie 9] :

Définition 5. Soit (X, \mathcal{A}, ν) un espace mesuré, avec ν mesure de probabilité.

ζ est une partition de X constituée d'ensembles mesurables si et seulement si :

- ζ est une partie finie de \mathcal{A} .
- $X = \bigcup_{C \in \zeta} C$
- $\forall C, C' \in \zeta, \nu(C \cap C') = 0$

Dans ce cas, on appelle entropie de ζ la quantité :

$$H(\zeta) = - \sum_{C \in \zeta} \nu(C) \log(\nu(C))$$

Cette quantité s'interprète de la manière suivante : si X est vu comme l'ensemble des états accessibles pour un système donné, la quantité $-\log(\nu(C))$ quantifie l'information apportée sur le système lorsque son état est situé dans l'ensemble C . L'entropie est alors la moyenne de ces quantités : l'information moyenne apportée par la partition sur l'état du système.

Avant de continuer, nous devons définir les termes suivants :

Définition 6. Soient ζ et ζ' deux telles partitions.

ζ est dite moins fine que ζ' si :

$$\forall C \in \zeta, \exists C' \in \zeta' : C \subset C'$$

On note de plus :

$$\zeta \vee \zeta' = \{C \cap C' \mid C \in \zeta, C' \in \zeta'\}$$

C'est la plus petite (au sens de l'inclusion) partition plus fine que ζ et ζ' .

Nous sommes alors en mesure de définir l'entropie de Kolmogorov. Dans ce qui suit f désigne une transformation $X \rightarrow X$ mesurable telle que ν est f -invariante.

Définition 7. Soit $n \in \mathbb{N}$, si ζ est une partition mesurable de X , on note :

$$\zeta^n = \bigvee_{k=0}^n f^{-k}(\zeta)$$

On montre alors (voir [?, Partie 9.3]) que

$$H(\zeta^{n+m}) \leq H(\zeta^n) + H(\zeta^m)$$

Cela permet de définir :

Définition 8 (Entropie de Kolmogorov). *Pour ζ partition mesurable de X , la limite suivante existe :*

$$h_\nu(f, \zeta) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} H(\zeta^n)$$

L'entropie de Kolmogorov de f par rapport à la mesure ν est alors définie par :

$$h_\nu(f) = \sup_{\zeta \text{ partition de } X} h_\nu(f, \zeta)$$

On peut établir un lien entre les deux mesure de l'entropie précédemment définies grâce au :

Théorème 2 (Principe variationnel). *Soit (X, f) un système dynamique topologique où X est un espace métrique compact, alors :*

$$h_{top}(f) = \sup_{\mu \in M_f} h_\mu(f)$$

où M_f est l'ensemble des mesures de probabilité f -invariantes de X .

Démonstration : Voir [?, théorème 8.6].

1.4 La famille des fonctions tentes

On définit la famille des applications tentes :

Définition 9. *Pour $b \in [0; 2]$, on note :*

$$\begin{aligned} T_b : [0; 1] &\rightarrow [0; 1] \\ x &\mapsto (b/2)(1 - |2x - 1|) \end{aligned}$$

Le graphe d'un exemple d'application tente est donné en page 12.

On peut calculer l'entropie des applications tentes :

Proposition 1. *Pour $b \in [1; 2]$, $h_{top}(T_b) = \begin{cases} \log b & \text{si } b \in [1; 2] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$*

Démonstration : On utilise un théorème liant le nombre d'intervalles où une fonction est monotone à l'entropie topologique de la fonction en suivant [?, Page 163]. Ce calcul permettra d'en déduire plus facilement l'entropie topologique de la tente. Pour cela introduisons tout d'abord quelques propriétés sur ce nombre :

Définition 10. *Soit $f : I \rightarrow I$ une fonction monotone par morceaux (I est un intervalle compact).*

On appelle nombre de branches de f , le nombre minimal d'intervalles sur lesquels f est monotone. Ce nombre est noté $l(f)$.

Proposition 2. *Soient $f, g : I \rightarrow I$ deux fonctions monotones par morceaux. Alors*

$$l(f \circ g) \leq l(f)l(g)$$

Démonstration : Soient I_1, \dots, I_p (resp J_1, \dots, J_q) les intervalles sur lesquels f (resp. g) est monotone.

Alors pour $(i, j) \in \{1..p\} \times \{1..q\}$, $f \circ g$ est monotone sur $J_j \cap g^{-1}(I_i)$. Donc $f \circ g$ est monotone par morceaux, et de plus $l(f \circ g) \leq pq = l(f)l(g)$.

Proposition 3. *La suite $(l(f^n)^{\frac{1}{n}})_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente.*

Démonstration : Pour $n, m \in \mathbb{N}$, on a en effet : $l(f^{n+m}) \leq l(f^n)l(f^m)$.

La suite $(\log(l(f^n)))_{n \in \mathbb{N}}$ est donc sous additive, et positive. Par conséquent elle est convergente.

En réalité cette limite a un lien fort avec l'entropie topologique du système (I, f) .

Théorème 3 (Misiurewicz et Szlenk). *Soit $f : I \rightarrow I$ une application continue et monotone par morceaux. Alors :*

$$h_{top}(f) = \log(s(f)) \text{ avec } s(f) = \lim_{n \rightarrow +\infty} l(f^n)^{\frac{1}{n}}$$

Démonstration : On montre que f a même entropie topologique qu'une dynamique de décalage bien choisie, ce qui permettra de calculer son entropie.

On note I_1, \dots, I_p les intervalles sur lesquels f est monotone. Posons alors :

$$\Sigma_0(f) = \{(x_i)_{i \in \mathbb{N}} \mid x_i \in \{1, \dots, p\} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, \bigcap_{i=0..n} f^{-i}(I_{x_i}) \neq \emptyset\}$$

Cet ensemble est compact, car fermé et inclus dans un compact (l'ensemble $\{1, \dots, p\}^{\mathbb{N}}$ muni de la topologie produit qui est métrisable via la distance $\delta(\underline{x}, \underline{y}) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{|x_k - y_k|}{2^k}$). Il est de plus invariant sous la restriction à Σ_0 de l'application de décalage :

$$\sigma : \begin{array}{ccc} \{1, \dots, p\}^{\mathbb{N}} & \rightarrow & \{1, \dots, p\}^{\mathbb{N}} \\ (x_n)_{n \in \mathbb{N}} & \mapsto & (x_{n+1})_{n \in \mathbb{N}} \end{array}$$

Définissons l'ensemble :

$$\Sigma_I = \{(\underline{x}, x) \in \Sigma_0 \times I \mid \forall i \in \mathbb{N}, f^i(x) \in I_{x_i}\}$$

Cet ensemble est compact car fermé inclus dans Σ_0 compact, en effet si $(x_n, x_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} (\underline{y}, y)$, on a en particulier $x_n \rightarrow y$, d'où $f^i(x_n) \rightarrow f^i(y)$. Soit $i \in \mathbb{N}$, il existe n_0 tel que pour $n \geq n_0$, $x_{n+i} = y_i$. D'où $f^i(y) \in I_{y_i}$. Ce qui montre que $(\underline{y}, y) \in \Sigma_I$.

Soient les applications $\sigma_I : (\underline{x}, x) \mapsto (\sigma(\underline{x}), f(x))$, $\pi_1 : (\underline{x}, x) \mapsto \underline{x}$, et $\pi_2 : (\underline{x}, x) \mapsto x$. Nous avons les relations :

$$\pi_1 \circ \sigma_I = \sigma \circ \pi_1$$

$$\pi_2 \circ \sigma_I = f \circ \pi_2$$

De plus π_1 et π_2 sont continues surjectives. Donc par théorème de Bowen ([?, page 159]) :

$$h_{top}(\sigma) \leq h_{top}(\sigma_I) \leq h_{top}(\sigma) + \sup_{\underline{x} \in \Sigma_0} h_{top}(\sigma_I, \pi_1^{-1}(\underline{x}))$$

Or pour $\underline{x} \in \Sigma_0$, on a $\pi_1^{-1}(\underline{x}) = \underline{x} \times I(x)$ où $I(\underline{x}) = \{x \in [0; 1] \mid f^i(x) \in I_{x_i}\}$. Donc f et ses itérées sont monotones sur I_x , d'où $h_{top}(\sigma_I, \pi_1^{-1}(\underline{x})) = 0$ (en utilisant [?, Lemme 7.3, page 162]).

D'où finalement $h_{top}(\sigma) = h_{top}(\sigma_I)$.

Par un argument similaire, on peut montrer que $h_{top}(\sigma_I) = h_{top}(f) = h_{top}(\sigma)$.

Il suffit donc de calculer l'entropie topologique de σ pour conclure.

Pour cela définissons : $\mathcal{C}_n(\underline{x}) = \{y \in \Sigma_0 : y_i = x_i \mid i = 0, \dots, n-1\}$. Et posons C_n , la famille constituée de ces ensembles. Alors, nous avons $Card(C_n) = l(f^n)$.

Si $\mathcal{C}_n(\underline{x}) \neq \mathcal{C}_n(\underline{y})$, alors $\forall i \in \{0, \dots, n-1\}, x_i \neq y_i$, d'où $\delta(\underline{x}, \underline{y}) \geq \frac{1}{2}$. Ainsi en choisissant un point dans chacun des éléments de \mathcal{C}_n on obtient une famille $(n, \frac{1}{2})$ séparée, d'où $l(f^n) \leq \text{sep}(n, \frac{1}{2}, f)$. Et donc, en faisant $n \rightarrow +\infty$,

$$\log(s(f)) \leq h_{\text{top}}(\sigma) = h_{\text{top}}(f)$$

Soit $p \in \mathbb{N}$, si $\mathcal{C}_{n+p}(\underline{x}) = \mathcal{C}_{n+p}(\underline{y})$, on a

$$\forall i \in \{0, \dots, n+p-1\} : x_i = y_i$$

D'où

$$\forall i \in \{0, \dots, n\}, \delta(\sigma^i(\underline{x}), \sigma^i(\underline{y})) = \sum_{k=n+p}^{+\infty} \frac{|x_k - y_k|}{2^{k-i}} \leq \frac{c}{2^p}$$

Choisissons un élément dans chacun des \mathcal{C}_{n+p} , on obtient un ensemble $(n, \frac{1}{2^p})$ -couvrant, d'où l'inégalité :

$$\text{cov}(n, \frac{1}{2^p}) \leq l(f^n)$$

Ce qui conduit à $h_{\text{top}}(f) \leq \log(s(f))$.

L'entropie de la tente s'en déduit alors :

Corollaire 1. *Soit f une fonction continue affine par morceaux, dont la pente est en valeur absolue $s \in \mathbb{R}_+^*$. Alors $h_{\text{top}}(f) = \log(s)$ si $s \geq 1$, et $h_{\text{top}}(f) = 0$ sinon.*

Démonstration : On suppose $s \geq 1$

Pour $x, y \in I$, on a $|f^i(x) - f^i(y)| \leq s^i|x - y|$ (car f est lipschitzienne de rapport s). Donc pour $n \in \mathbb{N}$, les segments $[\frac{k\epsilon}{s^n}, \frac{(k+1)\epsilon}{s^n}]$, $k = 1..E(\frac{s^n}{\epsilon})$ forment un recouvrement du segment $I = [0, 1]$. On a donc :

$$\text{cov}(n, \epsilon) \leq \frac{s^n}{\epsilon}$$

D'où :

$$\frac{1}{n} \log(\text{cov}(n, \epsilon)) \leq \log(s) - \frac{\log(\epsilon)}{n}$$

Donc $h_{\text{top}}(f) \leq \log(s)$.

Si L est un intervalle sur lequel f^n est monotone, $f^n|_L$ y est affine de pente en valeur absolue s^n , d'où $\lambda(f^n|_L(L)) = s^n \lambda(L)$.

Comme de plus I est décomposable en de tels L :

$$1 = \sum_L \lambda(L) = s^{-n} \sum_L \lambda(f^n(L)) \leq s^{-n} l(f^n)$$

D'où finalement :

$$\log(s) \leq l(f^n)^{\frac{1}{n}}$$

Et en faisant $n \rightarrow +\infty$, $\log(s) \leq h_{top}(f)$.

Si $s < 1$, f est contractante et a donc une entropie topologique nulle. En effet, soit $A = \{u_1, \dots, u_k\}$ un ensemble $(0, \epsilon)$ couvrant de cardinal minimal. Alors si $n \in \mathbb{N}$, soit $y \in I$, il existe $x \in A$ tel que $d(x, y) \leq \epsilon$. Mais alors comme f est contractante : $\forall k \in \{0, \dots, n\}, d(f^k(x), f^k(y)) \leq \epsilon$. A est donc (n, ϵ) couvrant, d'où $\text{cov}(n, \epsilon) \leq k$. Il vient donc :

$$h_{top}(f) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log(\text{cov}(n, \epsilon)) = 0$$

Pour les T_b , le supremum de l'entropie de Kolmogorov (valant l'entropie topologique) est atteint pour une unique mesure de probabilité :

Théorème 4. *Pour $b \in]1; 2]$, il existe une unique mesure absolument continue (par rapport à la mesure de Lebesgue) invariante μ_b . C'est aussi l'unique mesure qui maximise l'entropie de Kolmogorov du système (Donc $h_{top}(T_b) = h_{\mu_b}(T_b)$).*

Démonstration : Voir [?] pour l'existence, [?] pour l'unicité et enfin [?] pour la propriété de maximisation.

Théorème 5 (Bruin). *Pour presque tout $b \in]1; 2]$ (pour la mesure de Lebesgue), $c = \frac{1}{2}$ est typique pour μ_b sous T_b .*

Démonstration : Voir [?]

Remarque : Les paramètres b tels que c soit typique sous T_b pour μ_b sont donc très nombreux, cependant il n'est pas possible d'expliciter un tel paramètre.

En réalité les applications tente font partie d'une famille plus large de dynamiques sur un segment :

Définition 11 (Application unimodale). *Soit $f : [0; 1] \rightarrow [0; 1]$ continue. f est dite unimodale s'il existe $c \in [0; 1]$ tel que :*

- $f(0) = 0$ et $f(1) = 0$
- $f|_{[0;c]}$ est C^1 et strictement croissante
- $f|_{[c;1]}$ est C^1 et strictement décroissante

c est alors appelé le point critique de f .

T_b pour $b \in [0; 2]$ est donc unimodale, et son point critique noté c est toujours $\frac{1}{2}$.

1.5 Famille quadratique et lien avec les fonctions tentes

On définit la famille des applications quadratiques :

Définition 12. Pour $a \in [0; 4]$, on note :

$$\begin{aligned} f_a : [0; 1] &\rightarrow [0; 1] \\ x &\mapsto ax(1 - x) \end{aligned}$$

On remarque de plus que f_a est unimodale pour $a \in [0; 4]$.

Le graphe d'une application quadratique est donné en page 10.

La dynamique des ces applications est bien plus complexe malgré une expression analytique simple. Pour faciliter l'étude de ces applications, on dispose d'une **semi**-conjugaison topologique avec une application tente de même entropie topologique.

Théorème 6 (Milnor-Thurston). Soit $f : I \rightarrow I$ une fonction continue, strictement monotone par morceaux telle que $h_{top}(f) > 0$. Soit $s = \exp(h_{top}(f))$.

Alors il existe $T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ application continue, affine par morceaux avec pente s en valeur absolue, et $\lambda : I \rightarrow [0, 1]$ continue, croissante telle que

$$\lambda \circ f = T \circ \lambda$$

Démonstration : La démonstration se trouve dans [?, Page 166]

Corollaire 2. Pour tout $a \in [0; 4]$ il existe Λ_a continue croissante surjective telle que en notant $T_{k(a)}$ l'application tente de pente $k(a) = \exp(h_{top}(f_a))$, on ait :

$$\Lambda_a \circ f_a = T_{k(a)} \circ \Lambda_a$$

De plus, on a :

$$\Lambda_a(c) = c$$

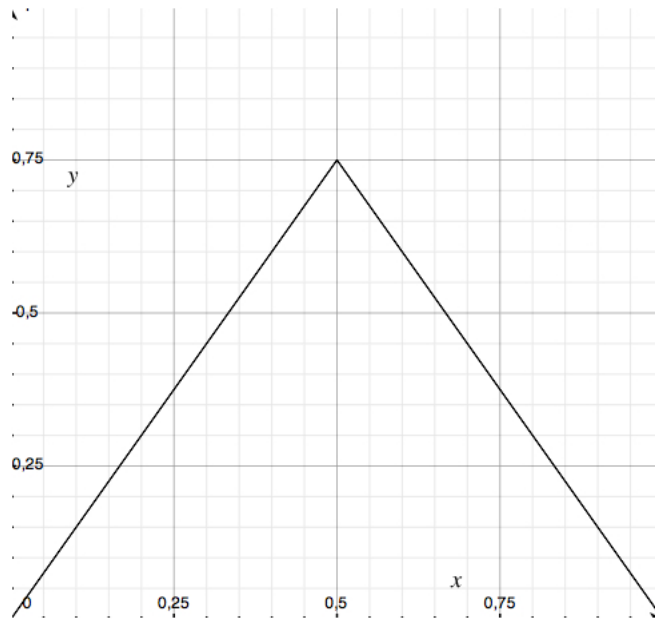


FIGURE 1 – Application T_b pour $b = 1,5$



FIGURE 2 – Application f_a pour $a = \pi$

Démonstration : Montrons d'abord que Λ_a est surjective. En appliquant la semi-conjugaison en 1, on obtient : $\Lambda_a(1) = T_{k(a)}(\Lambda_a(1))$ d'où $\Lambda_a(1) = 0$ ou 1 puis 1 car Λ_a est non nulle puis comme elle est croissante de $[0; 1]$ dans $[0; 1]$, elle est surjective. Montrons maintenant que $T_{k(a)}$ est croissante sur $[0; \Lambda_a(c)]$: Si $c_1 \leq c_2 \in [0; \Lambda_a(c)]$, il existe $u_1 \leq u_2$ tels que $c_i = \Lambda_a(u_i)$ (car Λ_a est surjective croissante). Alors :

$$T_{k(a)}(c_1) = T_{k(a)}(\Lambda_a(u_1)) = \Lambda_a(f_a(u_1)) \leq \Lambda_a(f_a(u_2)) \leq T_{k(a)}(\Lambda_a(u_2)) = T_{k(a)}(c_2)$$

De même on montre que $T_{k(a)}$ est décroissante sur $[\Lambda_a(c); 1]$. Donc nécessairement $\Lambda_a(c) = c$.

Grâce à ce corollaire, on établit un lien entre les applications quadratiques et les applications tentes, que nous allons exploiter à multiples reprises par la suite.

Ainsi, en utilisant la correspondance obtenue par le théorème de Milnor-Thurston, on obtient un résultat analogue au théorème 4 sur les applications quadratiques.

Lemme 1. *Soit $a \in [0; 4]$ Posons pour E Borélien de I :*

$$\nu_a(E) = \mu_{k(a)}(\Lambda_a(E))$$

*Alors ν_a est f_a invariante, et de plus $h_{\nu_a}(f) = h_{\mu_{k(a)}}(T_{k(a)}) = h_{top}(f_a)$
Donc ν_a maximise l'entropie de Kolmogorov de f_a .*

Démonstration : Voir [?]

2 Paramètre Collet-Eckmann et non absolue continuité

2.1 Les applications Collet-Eckmann

Définition 13. *Soit f une application unimodale.
 f est dite Collet-Eckmann si et seulement si :*

$$\exists \rho > 1, \exists C > 0 : \forall n \geq 1, |(f^n)'(f(c))| \geq C\rho^n$$

On note alors :

$$\mathcal{CE} = \{a \in [0, 4] : f_a \text{ est Collet-Eckmann}\}$$

Exemple : f_4 est Collet-Eckmann.

En effet on note que $f_4(c) = 1$, et donc pour $n \geq 2, (f_4)^n(c) = 0$.

De plus, pour $n \geq 1$, comme $\forall x \in [0; 1], f_4^{n+1}(x) = 4f_4^n(x)(1 - f_4^n(x))$, nous avons la formule suivante :

$$\forall x \in [0; 1], (f_4^{n+1})'(x) = 4(f_4^n)'(x)(1 - f_4^n(x)) - 4f_4^n(x)(f_4^n)'(x)$$

On obtient donc pour $n \geq 1$:

$$\begin{aligned} (f_4^{n+1})'(f_4(c)) &= 4 \times (f_4^n)'[f_4(c)] \times [1 - \underbrace{f_4^{n+1}(c)}_{=0}] - 4 \times \underbrace{f_4^{n+1}(c)}_{=0} \times (f_4^n)'(f_4(c)) \\ &= 4(f_4^n)'(f_4(c)) \end{aligned}$$

Par récurrence sur $n \geq 1$, on a donc :

$$(f_4^n)'(f_4(c)) = -4^n$$

D'où :

$$|(f_4^n)'(f_4(c))| \geq 1 \times 4^n$$

f_4 est donc Collet-Eckmann.

Nous allons à présent nous intéresser à l'ensemble des paramètres Collet-Eckmann \mathcal{CE} , c'est-à-dire l'ensemble des a tels que f_a est Collet-Eckmann.

Théorème 7 (Sands). *Pour presque tout $a \in [1; 2]$ Si $f : [0; 1] \rightarrow [0; 1]$ satisfait :*

- f est unimodale
- La dérivée de Schwarz de f ($Sf(x) = \frac{f'''(x)}{f'(x)} - \frac{3}{2}(\frac{f''(x)}{f'(x)})^2$ pour x différent du point critique) est strictement négative.
- Il existe $O_1, O_2 > 0$, et $l \geq 2$ tels que $\forall x \in [0; 1], x \neq c, O_1|x - c|^{l-1} \leq f(x) \leq O_2|x - c|^{l-1}$
- $f'(0) > 1$
- $h_{top}(f) = \log a$

Alors f est Collet-Eckmann.

Démonstration : Le théorème est montré dans [?, Page 79, théorème 53].

Corollaire 3. *Pour presque tout $b \in [1; 2]$, si $h_{top}(f_a) = \log b$, alors $a \in \mathcal{CE}$.*

Ces hypothèses sont vérifiées dans la démonstration du théorème 8. Comme $h_{top}(f_0) = 0$ et $h_{top}(f_4) = \log(2)$, et que l'application $a \mapsto h_{top}(f_a)$ est continue (voir dernière sous-section). On déduit que l'ensemble $\{h_{top}(f_a) | a \in \mathcal{CE}\}$ est de mesure pleine (dans $[0; \log 2]$), c'est-à-dire l'image de \mathcal{CE} par $a \mapsto h_{top}(f_a)$ est de mesure pleine (dans $[0; \log 2]$).

Théorème 8. *Soit $a \in \mathcal{CE}$, il existe une unique mesure de probabilité absolument continue et invariante par f_a qui est notée η_a .*

Démonstration : On utilise ici [?, Théorème 4.1 page 373] :

Théorème 9 (Nowicki et Van Strien). *Soit $f : I \rightarrow I$ une application unimodale (de point critique c) C^3 dont la dérivée de Schwarz est strictement négative telle qu'il existe $O_1, O_2 > 0, l \geq 1$ tels que :*

$$O_1|x - c|^{l-1} \leq |f'(x)| \leq O_2|x - c|^{l-1}$$

Supposons de plus :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (f^k)'(f(c)) < +\infty$$

Alors il existe une unique mesure de probabilité absolument continue (par rapport à la mesure de Lebesgue) qui est de plus ergodique et d'entropie positive.

Ce résultat utilise des hypothèses plus fortes que celles utilisées (à savoir la condition Collet-Eckmann), c'est cependant la référence la plus claire à notre disposition (les articles originaux sont peu précis sur les conditions à utiliser).

En effet f_a est C^3 .

Sa dérivée de Schwarz vérifie :

$$\forall x \in [0, 1], x \neq \frac{1}{2}, Sf_a(x) = -6\left(\frac{1}{1-2x}\right)^2 < 0$$

Et enfin, sa dérivée est égale à :

$$\forall x \in [0, 1], f_a'(x) = a(1-2x) = 2a\left(\frac{1}{2} - x\right)$$

Donc :

$$\forall x \in [0, 1], (2a - \epsilon) \left| \frac{1}{2} - x \right| \leq |f'_a(x)| \leq (2a + \epsilon) \left| \frac{1}{2} - x \right|$$

où $\epsilon < 2a$: la dérivée est donc d'ordre 2. Et enfin :

$$\forall n \geq 1, |(f_a^n)'(f_a(c))|^{-\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{\sqrt{C_a}} \frac{1}{\sqrt{\rho_a^n}}$$

D'où, comme $\rho_a > 1$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |(f_a^n)'(f_a(c))|^{-\frac{1}{2}} < +\infty$$

Ainsi le Théorème est démontré.

On a à présent, pour les applications quadratiques Collet-Eckmann, une mesure ν_a , f_a -invariante et maximisant l'entropie de Kolmogorov (ie $h_{\nu_a}(f_a) = h_{top}(f_a)$) d'après le Lemme 1 et η_a qui est l'unique mesure de probabilité absolument continue et f_a -invariante d'après la proposition précédente. Or, ces deux mesures sont presque partout distinctes :

Théorème 10 (Avila et Morera). *Les assertions suivantes sont vraies presque partout (pour la mesure de Lebesgue, selon le paramètre $a \in \mathcal{CE}$) :*

1. c est typique pour η_a sous f_a .
2. η_a n'est pas la mesure qui maximise l'entropie de Kolmogorov.

Démonstration :

Premier point : Voir [?, Théorème B]

Second point : Soit $a \in \mathcal{CE}$ tel que η_a maximise l'entropie de Kolmogorov. Alors Λ_a est absolument continue. Par [?, page 363] il existe donc U voisinage de c et $\alpha > 0$ sur lequel Λ_a est $\mathcal{C}^{1+\alpha}$.

On suppose alors par l'absurde qu'il existe $n \geq 1$ tel que $f_a^n(c) \in U$. Soit J le plus grand intervalle de la forme $[c; x]$ inclus dans U . $f_{|J}$ est bijective. Donc en se restreignant à J , on a (en confondant abusivement f_a et sa restriction à J) :

$$\forall x \in f_a^n(J), \Lambda_a(x) = T_{k(a)}^n \circ \Lambda_a \circ (f_a^{-1})^n(x)$$

Donc :

$$\forall x \in f_a^n(J), x \neq f_a^n(c), \Lambda'_a(x) = [(f_a^{-1})^n]'(x) (T_{k(a)}^n \circ \Lambda_a)' \circ (f_a^{-1})^n(x)$$

Or :

$$|[(f_a^{-1})^n]'(x)| \xrightarrow{x \rightarrow f_a^n(c)} +\infty$$

Par conséquent Λ_a ne peut être $\mathcal{C}^{1+\alpha}$ en $f_a^n(c)$, c'est absurde !

Or pour presque tout $a \in \mathcal{CE}$, c est typique pour η_a sous f_a et $c \in \text{supp}(\eta_a)$, c est donc valeur d'adhérence de $(f_a^n(c))_{n \in \mathbb{N}}$. Par ce qui précède, dans ce cas, η_a ne maximise pas l'entropie de Kolmogorov.

Rappel (Théorème 5) : Pour presque tout $b \in [1; 2]$, c est typique sous T_b pour la mesure μ_b .

2.2 La démonstration du théorème

Le résultat suivant a été démontré dans [?, Thm 9.1] (on démontre en [?, Cor 10.2] la monotonie).

Théorème 11. $a \mapsto h_{top}(f_a)$ est continue et croissante.

Malheureusement, on ne peut pas obtenir plus de régularité pour cette application, en effet le but de cette section est de démontrer (à l'aide des résultats précédemment établis) le théorème suivant, dont la démonstration a été esquissée dans l'article [?, Page 216] et qui constitue le résultat principal du présent mémoire :

Théorème 12. L'application $a \mapsto h_{top}(f_a)$ n'est pas absolument continue.

Nous allons maintenant considérer l'ensemble $\Delta = \{a \in \mathcal{CE} \text{ vérifiant (1) et (2)}\}$, qui, au vu du théorème 8, a la mesure de l'ensemble des paramètres Collet-Eckmann.

Proposition 4. Soit $\Delta = \{a \in \mathcal{CE} \text{ vérifiant (1) et (2)}\}$.

Alors $\Delta_0 = \{h_{top}(f_a) | a \in \Delta\} \cap [0; \log(2)]$ est de mesure de Lebesgue nulle.

Démonstration : Supposons par l'absurde que cet ensemble est de mesure non nulle. Il en est de même pour $\exp(\Delta_0) = \{k(a) := \exp(h_{top}(f_a)) | a \in \Delta\} \cap [1; 2]$. Il est donc d'intersection non vide avec l'ensemble des $b \in [1; 2]$, tels que c est typique sous T_b pour la mesure μ_b (Théorème 5). On a alors $k(a) \in \exp(\Delta_0)$ tel que c est typique pour $\mu_{k(a)}$ sous $T_{k(a)}$ et c est typique pour η_a sous f_a .

Pour $\phi : [0; 1] \rightarrow [0; 1]$ continue, on a donc

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \phi \circ T_{k(a)}^j(c) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int \phi d\mu_{k(a)} = \int \phi \circ \Lambda_a d\nu_a$$

Or :

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \phi \circ T_{k(a)}^j(c) &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \phi \circ T_{k(a)}^j(\Lambda_a(c)) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \phi \circ \Lambda_a \circ f_a^j(c) \\ &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int \phi \circ \Lambda_a d\eta_a \end{aligned}$$

Ainsi, on a :

$$\forall \phi \text{ continue, } \int \phi \circ \Lambda_a d\nu_a = \int \phi \circ \Lambda_a d\eta_a$$

On en déduit que $\nu_a = \eta_a$. Donc η_a maximise l'entropie de Kolmogorov de f_a , c'est absurde!

Démonstration du théorème 12 : Nous avons donc trouvé un ensemble Δ dont l'image par l'application $a \mapsto h_{top}(f_a)$ intersectée par $[0; \log 2]$ est de mesure nulle. Posons à présent $\Delta' = \mathcal{CE} \setminus \Delta$. Comme (1) et (2) sont vrais presque partout dans \mathcal{CE} (Théorème 8), la mesure de Lebesgue de Δ' est nulle. Or l'ensemble $\{h_{top}(f_a) | a \in \mathcal{CE}\}$ est de mesure pleine dans $[0; \log 2]$ (Théorème 5). Ainsi, comme l'image de Δ est de mesure nulle dans $[0; \log 2]$ (proposition précédente), l'image de $\mathcal{CE} \setminus \Delta$ est de mesure non nulle. On a donc trouvé un ensemble Δ' tel que $m(\Delta') = 0$ et $m(\{h_{top}(f_a) | a \in \Delta'\}) > 0$. On en conclut que $a \mapsto h_{top}(f_a)$ n'est pas absolument continue.

Références

- [AM] A. Avila, C. G. Moreira, *Statistical properties of unimodal maps : physical measures, periodic points and pathological laminations*, Publications Mathématiques de l'IHÉS 101 (2005), 1–67.
- [BS] M. Brin and G. Stuck, "Introduction to Dynamical Systems", *Cambridge University Press*, Cambridge, 2002.
- [Br] H. Bruin, *For almost every tent-map, the turning point is typical*, Fund. Math. 155 (1998), no.3, 215–235.

- [LaY] A. Lasota and J.A. Yorke, *On the existence of invariant measures for piecewise monotonic transformations*, Trans. Amer. Math. Soc. 186 (1973), 481–488.
- [LiY] T.-Y. Li and J.A. Yorke, *Ergodic transformations from an interval into itself*, Trans. Amer. Math. Soc. 235 (1978), 183–192.
- [M] M. Misiurewicz, *Absolutely continuous measures for certain maps of an interval*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. 53 (1981), 17–51.
- [MS] W. de Melo and S. van Strien, "One-Dimensional Dynamics", *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete*, Springer, Berlin, 1993.
- [MT] J. Milnor and W. Thurston, *On iterated maps of the interval : I, II*, Preprint 1977. Published in Lect. Notes in Math. 1342, Springer, Berlin New York (1988) 465–563.
- [S] D. Sands, *Topological conditions for positive Lyapunov exponents in unimodal maps*, Ph.D. thesis, Cambridge, 1994.
- [W] P. Walters, "An introduction to ergodic theory", *Graduate Texts in Mathematics*, Springer, Berlin, 1982.