Probabilités libres

Pierre Tarrago

November 27, 2012

Introduction

Dans ce court exposé nous allons revoir les principaux constituants de la théorie des probabilités libres jusqu'à la construction du calcul stochastique libre. Cette théorie a été initiée dans les années 80 par Dan Voiculescu [7] pour résoudre des problèmes de théorie des operateurs. Elle s'est beaucoup développée par la suite avec la découverte d'exemples concrets en lien avec des matrices aléatoires.
L'accent sera mis sur le parallèle qui existe entre la théorie libre et la théorie classique et aucune démonstration ne sera donnée ici (se référer au citations données en bibliographie).

Contents

1 Espace de probabilité non-commutatif

Rappelons qu'un espace de probabilité classique est un triplet $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ avec Ω un ensemble donné, $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ un sous-ensemble de $\mathcal{P}(\Omega)$ et $\mathbb{P}$ une fonction de $\mathcal{F}$ dans $[0, \infty[$ satisfiant certains axiomes. Dans les faits cette définition est équivalente avec la donnée d'une certaine algèbre de fonctions $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^{\Omega}$, l'ensemble des fonctions mesurables, et d'une forme linéaire $\mathbb{E} : \mathcal{A} \mapsto \mathbb{R}$, l'intégrale par rapport à la mesure $\mathbb{P}$, telles que

$$\begin{cases} \text{si } a \in \mathcal{A} \text{ est positive, } \mathbb{E}(a) \geq 0 \\ \mathbf{1} \in \mathcal{A} \text{ et } \mathbb{E}(\mathbf{1}) = 1 \end{cases}$$

De manière analogue on peut définir de manière abstraite un espace de probabilité non-commutatif à partir d'une algèbre de von Neumann [7] (voir l'annexe pour une très rapide introduction aux algèbres de von Neumann et une explication quant à leur nécessité). On rappelle juste qu'une algèbre de von Neumann est une algèbre d'opérateurs sur un espace de Hilbert, contenant l'identité et fermé dans la topologie de la norme forte.

Définition 1 *Un espace de probabilité non commutatif (e.p.n.c) est la donnée d'un couple $(\mathcal{A}, \phi)$, avec $\mathcal{A}$ une algèbre de von Neumann et ϕ une forme linéaire continue sur $\mathcal{A}$ telle que*

$$\begin{cases} \text{si } a \in \mathcal{A},\ \phi(aa^*) \geq 0 \\ \mathbf{1} \in \mathcal{A} \text{ et } \phi(\mathbf{1}) = 1 \end{cases}$$

Une telle forme linéaire est appelée un état.

Une fois un tel espace défini, on peut redéfinir la loi d'un élément normal $a \in \mathcal{A}$ par l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}[X] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ P & \mapsto & \phi(P(a)) \end{array}$$

On vérifie aisément par le théorème spectral que cette application résulte en une mesure μ_a sur $\mathbb{C}$ à support borné par $\|a\|$. De cette manière on peut dire qu'une suite a_n d'éléments de $\mathcal{A}$ converge en loi vers $a \in \mathcal{A}$, ou $\mu_{a_n} \longrightarrow \mu_a$ si

$$\forall P \in \mathbb{C}[X], \phi(P(a_n)) \longrightarrow \phi(P(a))$$

Exemples :

- Si on suppose que $\mathbb{P}$ est une mesure à support bornée, l'espace $(L^\infty(\Omega, \mathbb{C}), \mathbb{E})$ est un espace de probabilité non commutatif qui est ... commutatif.
- L'espace $(\mathcal{M}_n(L^\infty(\Omega, \mathbb{C})), \mathbb{E}[\mathrm{Tr}(\boldsymbol{.})])$ est également un espace de probabilité non-commutatif. Cette classe d'exemple est l'une des plus importantes et justifie le lien fort entre les matrices aléatoires et les probabilités libres.
- [7] Soit G un groupe discret, e son élément neutre et $l^2(G)$ l'espace de Hilbert des fonctions complexes de carré intégrable sur G muni de la mesure de comptage. $l^2(G)$ admet comme base orthonormale les fonctions

  $$\delta_g : g' \mapsto \delta_{g,g'}$$

  Pour $g \in G$ on définit à partir de cette base l'opérateur unitaire

  $$u_g(\delta_{g'}) = \delta_{gg'}$$

  On note que $g \mapsto u_g$ est un morphisme de groupe. Notons $vN(G)$ l'algèbre de von Neumann engendrée par les u_g et définissons sur $vN(G)$ l'état ϕ_G par

  $$\phi_G(a) = (a(\delta_e), \delta_e),\ a \in vN(G)$$

  Alors $(vN(G), \phi_G)$ est un espace de probabilité non commutatif. C'est cet exemple qui a motivé la construction du concept de probabilité libre par Voiculescu. En effet supposons que le groupe initial G est le groupe libre à n générateurs $a_1, \ldots, a_n$ et nommons $A_1, \ldots, A_n$ les algèbres de von Neumann générées respectivement par $u_{a_1}, \ldots, u_{a_n}$. Maintenant prenons un éléments $x \in vN(G)$ qui s'écrit $x = b_1 b_2 \ldots b_p$ avec $b_j \in A_{i_j}$, $i_j \neq i_{j+1}$ et supposons que $\phi_G(b_j) = 0$ pour tout $1 \leq j \leq p$. Nous pouvons montrer que dans ce cas $\phi_G(x) = 0$ également. Pour le voir facilement sans s'encombrer avec le cadre des algèbres de von Neumann, restreignons-nous au cas où

  $$b_j = \sum_{k=-s_j}^{r_j} c_{j,k} u_{a_{i_j}}^k = \sum_{k=-s_j}^{r_j} c_{j,k} u_{a_{i_j}^k}$$

Comme $\phi_G(b_j) = 0$ on a $c_{0,j} = 0$ et finalement

$$\begin{aligned}\phi_G(x) &= \left(\left(\sum_{k\neq 0} c_{1,k} u^k_{a_{i_1}} \right) \dots \left(\sum_{k\neq 0} c_{p,k} u^k_{a_{i_p}} \right) \delta_e, \delta_e \right) \\ &= \sum_{k_1,\dots,k_p\neq 1} c_{1,k_1} \dots c_{p,k_p} \left(\delta_{a^{k_1}_{i_1} \dots a^{k_p}_{i_p}}, \delta_e \right) = 0\end{aligned}$$

car G étant le groupe libre à n générateurs, si $i_{j+1} \neq i_j$ et chaque $k_j \neq 0$, $a^{k_1}_{i_1} \dots a^{k_p}_{i_p} \neq e$.

Ce dernier exemple motive la définition suivante :

Définition 2 *Soit $(\mathcal{A}, \phi)$ un e.p.n.c, $(A_i)_{i\in I}$ des sous-algèbres de $\mathcal{A}$ contenant l'identité. Les sous-algèbres sont dites libres si pour tout élément $x = a_{i_1} \dots a_{i_p}$ avec $a_{i_j} \in A_{i_j}, \phi(a_{i_j}) = 0$ et $i_{j+1} \neq i_j$ on a*

$$\phi(x) = 0$$

Deux éléments a et b de $\mathcal{A}$ sont dits libres entre eux si les algèbres engendrées par ces deux éléments sont libres entre elles.

Ce concept est à mettre en parallèle avec le concept d'indépendance dans le cas commutatif que nous rappelons ici.

Définition 3 *Indépendance : Soit $(\mathcal{A}, \phi)$ un espace de variables aléatoires classiques, $(A_i)_{i\in I}$ des sous-algèbres de $\mathcal{A}$ contenant l'identité. Les sous-algèbres sont dites indépendantes si pour tout élément $x = a_{i_1} \dots a_{i_p}$ avec $a_{i_j} \in A_{i_j}, \phi(a_{i_j}) = 0$ et $i_i \neq i_j$ pour tout $0 \leq i < j \leq p$ on a*

$$\phi(x) = 0$$

Deux éléments a et b de $\mathcal{A}$ sont dits indépendants si les algèbres engendrées par ces deux éléments sont indépendantes entre elles.

Cette analogie peut-être approfondie assez loin, comme le montre cette série de résultats :

Proposition 1 *Version libre de la convolution [7]: Soit $(\mathcal{A}, \phi)$ un e.p.n.c, et $a, b \in \mathcal{A}$ auto-adjoints et libres entre eux. Alors la loi μ_{a+b} de $a + b$ dépend uniquement de μ_a et μ_b (et non de a et b) et on peut noter*

$$\mu_{a+b} = \mu_a \boxplus \mu_b$$

De même si $a, b \geq 0$, la loi de $a^{\frac{1}{2}} b a^{\frac{1}{2}}$ est uniquement déterminée par μ_a et μ_b. On la note $a \boxtimes b$.

Proposition 2 *Version libre de la gaussienne [7]: Soit $S(m, \sigma^2)$ la loi semi-circulaire de centre m et de largeur σ, définie par la densité*

$$f_{SC(m,\sigma^2)}(x) = \frac{2}{\pi\sigma^2} \mathbf{1}_{x\in[m-\sigma,m+\sigma]} \sqrt{\sigma^2 - (x - m)^2}$$

Alors

$$SC(m, \sigma^2) \boxplus SC(m', \sigma'^2) = SC(m + m', \sigma^2 + \sigma'^2)$$

Proposition 3 *Version libre du théorème central limite [7]: Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite de variables libres entre elles et de même loi μ telle que $\mu(X) = 0$. Alors*

$$\frac{\sum_{i=0}^{n} a_k}{\sqrt{n}} \longrightarrow SC(0, \mu(X^2))$$

La démonstration de ces trois propositions repose sur la construction d'une fonction analytique jouant le même rôle que la fonction génératrice des cumulants dans le cas classique. Nous verrons plus en détail ceci dans la prochaine section. Terminons juste ce paragraphe sur deux résultats importants qui établissent le lien entre matrices aléatoires et probabilités libres en rendant concrète la notion de liberté.

Théorème 1 *[2] Soit A_n, B_n une suite de matrices hermitiennes bornées de taille $n \times n$ telles que $\mu_{A_n} \mapsto \mu_1$ et $\mu_{B_n} \mapsto \mu_2$ dans la topologie faible-$\star$, avec μ_1 et μ_2 à support compact. Soit U_n, V_n deux matrices unitaires aléatoires suivant la mesure de Haar. Alors si on pose $A'_n = U_n A_n U_n^*$ et $B'_n = V_n B_n V_n^*$, on a*

$$\mu_{A'_n + B'_n} \longmapsto \mu_1 \boxplus \mu_2$$

2 R-transformée et combinatoire

Revenons un instant au cas classique. La loi de la somme de deux variables aléatoires a et b indépendantes de loi respectives ν_1 et ν_2 est uniquement déterminée par ces deux lois : c'est la convolution de ν_1 et ν_2, notée $\nu_1 * \nu_2$. Il est donc possible de calculer les moments de $\nu_1 * \nu_2$ à partir de ceux de ν_1 et ν_2. Cependant la formulation est compliquée et il est plus simple de passer par des quantités alternatives. Notons Φ_X la fonction caractéristique d'une variable aléatoire X. Alors l'indépendance de a et b garantit que

$$\log \Phi_{a+b}(\xi) = \log\left(\Phi_a(\xi)\Phi_b(\xi)\right) = \log \Phi_a(\xi) + \log \Phi_b(\xi)$$

Donc si il est possible d'écrire $\log \Phi_X(\xi) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n!} c_n(X)\xi^n$ pour a, b et $a + b$, alors on a $c_n(a + b) = c_n(a) + c_n(b)$. $c_n(a)$ est appelé le $n-$ième cumulant de a. De la même manière si $(a_i)_{0\leq i\leq p}$ est une famille de variables aléatoires, on peut définir la fonction

$$G_{a_1,\ldots,a_p}(X_1, \ldots, X_p) = \log \mathbb{E} \exp\left(\sum a_i X_i\right)$$

Si elle admet un développement en série entière en 0, celle-ci devient localement

$$G_{a_1,\ldots,a_p}(X_1, \ldots, X_p) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n!} \sum_{1\leq i_1,\ldots i_n \leq p} c(a_{i_1}, \ldots, a_{i_p}) X_{i_1} \ldots X_{i_p}$$

Les coefficients $c(a_{i_1}, \ldots, a_{i_p})$ sont appelés cumulants généralisés. La linéarité de $G_{a_1,\ldots,a_p}$ dans le cas où les a_i sont indépendants implique que

$$c(a_{i_1}, \ldots, a_{i_p}) = 0 \text{ si } \exists j, k\ i_j \neq i_k$$

Enfin nous pouvons retrouver les moments d'un $n-$uplet de variables aléatoires à partir de ces cumulants généralisés. En effet notons $\mathrm{Part}(n)$ l'ensemble des partitions de l'ensemble $\{1, \ldots, n\}$. Alors on a la formule

$$\mathbb{E}(X_{i_1} \ldots x_{i_p}) = \sum_{\pi\in \mathrm{Part}(n)} \prod_{\{j_1<\cdots<j_r\} \text{ bloc de } \pi} c(X_{j_1}, \ldots, X_{j_r})$$

On peut inverser cette formule grace à la fonction de Moebius associée à l'ordre naturel sur Part(n) (induit par l'inclusion des blocs) pour obtenir les cumulants généralisés à partir des moments du $n-$uplet. Ceci donne une définition alternative de ces cumulants généralisés ne faisant pas intervenir la fonction caractéristique.
Il se trouve que l'on peut recommencer exactement la même construction dans le cas d'un e.p.n.c en utilisant les partitions non-croisées à la place des partitions [6].

Définition 4 *Une partition $P \in Part(n)$ est dite non croisée si pour tous blocs $B, B' \in P$, $\{i_1 < i_2\} \subset B$ et $\{j_1 < j_2\} \subset B'$ avec $i_1 < j_1 < i_2$ on a la relation*

$$i_1 < j_1 < j_2 < i_2$$

On note $NC(n)$ l'ensemble des partitions non-croisées. C'est un ensemble partiellement ordonné par la même relation que pour l'ensemble des partitions.

Soient $a_1, \ldots, a_n \in \mathcal{A}$ des éléments d'un e.p.n.c. On peut définir les cumulants libres généralisés $k(a_{i_1}, \ldots, a_{i_r})$ par récurrence avec la formule

$$\phi(a_1 \ldots a_n) = \sum_{\pi \in NC(n)} \sum_{\{i_1 < \cdots < i_p\} \text{ bloc de } \pi} k(a_{i_1}, \ldots, a_{i_p})$$

Et on définit le $n-$ième cumulant libre d'un élément a par la formule

$$k_n(a) = k(a, \underbrace{\ldots}_{\text{n fois}}, a)$$

De manière analogue avec le cas commutatif, on a le résultat suivant

Proposition 4 *Dire que les a_i sont libres entre eux équivaut à la condition*

$$k(a_{i_1}, \ldots, a_{i_r}) = 0 \text{ si } \exists i_s, i_t \text{ tels que } i_s \neq i_t$$

D'autre part si a et b sont libres entre eux

$$k_n(a + b) = k_n(a) + k_n(b)$$

Pour $a \in \mathcal{A}$ posons $G_a(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{\phi(a^n)}{z^{n+1}}$ et $R_a(z) = \sum_{n \geq 0} k_{n+1}(a) z^n$. Nous avons notamment que si a et b sont libres entre eux, $R_{a+b} = R_a + R_b$. De plus la construction des $k_n(a)$ donnée auparavant implique la formule d'inversion [6]

$$G_a(R_a(z) + \frac{1}{z}) = z$$

Or il se trouve que G_a est juste la transformée de Cauchy de la mesure μ_a, c'est à dire $G_a(z) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{z-x} d\mu_a(x)$ ($z \notin$ Supp(μ)). Ceci donne une machinerie [7] pour calculer la somme libre de deux lois μ et ν (à condition que ce soit une loi à densité):

- Calculer la transformée de Cauchy de μ et ν
- En déduire par un calcul d'inversion R_μ et R_ν.

- Calculer $G_{\mu\boxplus\nu}$ en appliquant $R_\mu + R_\nu$ dans la formule d'inversion.
- Retrouver la densité de $\mu \boxplus \nu$ grace à la formule générale pour λ mesure réelle à densité
$$d\lambda(x) = \lim_{t\to 0} \mathrm{Im}[G_\lambda(x+it)]$$

Dans les faits l'algorithme n'est souvent pas facile à réaliser car la formule d'inversion est difficile à utiliser. Il permet cependant par exemple de calculer la somme libre de deux mesures de Dirac, ou bien de deux mesures semi-circulaires [2].

3 Calcul stochastique libre

Dans cette dernière section nous allons introduire le calcul stochastique libre, dont la construction est encore une fois très semblable à la construction classique, mise à part la non commutativité. Il s'appuie essentiellement sur le mouvement brownien libre. Avant toute chose nous pouvons définir l'espérance conditionnelle libre. Nous supposerons dans la suite que $\mathcal{A}$ possède un état ϕ tracial et fidèle (c'est à dire $\phi(ab) = \phi(ba)$ et $\phi(aa^*) > 0$). Ceci est en réalité très peu restrictif dans le cadre des probabilités libres.

Définition 5 *Soit $\mathcal{B}$ une sous-algèbre de von Neumann de $\mathcal{A}$. Une espérance conditionnelle de $\mathcal{A}$ dans $\mathbb{B}$ est une application linéaire*

$$\mathbb{E}_\mathcal{B} : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$$

vérifiant que pour tout $b, b' \in \mathcal{B}$, $a \in \mathcal{A}$, on a

$$\mathbb{E}_\mathcal{B}(bab') = b\mathbb{E}_\mathcal{B}(a)b'$$

Cette définition pose un problème d'existence qui est résolu par le théorème suivant [3]:

Théorème 2 *Soit $\mathcal{A}$ une algèbre de von Neumann munie d'une trace finie et fidèle ϕ et soit $\mathcal{B}$ une sous-algèbre de von Neumann de $\mathcal{A}$. Il existe une application*
$$\mathbb{E}_\mathcal{B} : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$$
vérifiant la condition de la définition précédente. De plus on a pour $b \in \mathcal{B}$ et $a \in \mathcal{A}$
$$\phi\left(\mathbb{E}_\mathcal{B}[a]b\right) = \phi(ab)$$

En particulier si a est libre avec $\mathcal{B}$, $\mathbb{E}_\mathcal{B}(a) = \phi(a)$. En revanche l'implication inverse n'est pas garantie. Il est donc plus sûr de construire le mouvement Brownien libre sans faire appel à l'espérance conditionnelle.

Définition 6 *Un mouvement Brownien libre dans $(\mathcal{A}, \phi)$, avec ϕ tracial et fidèle, est la donnée de:*

- *une suite croissante de sous-algèbres de von Neumann $(\mathcal{A}_t)_{t\geq 0}$ (appelée aussi filtration)*

- *une famille d'opérateurs auto-adjoints $(S_t)_{t\geq 0}$ avec $S_t \in \mathcal{A}_t$ et telle que*

$$\forall 0 \leq s < t, S_t - S_s \sim SC(0, t-s) \text{ et } S_t - S_s \text{ est libre avec } \mathcal{A}_s$$

Si $s < t$ on a en particulier avec l'espérance conditionnelle du théorème précédent $\mathbb{E}_{\mathcal{A}_s}(S_t) = S_s$.

On peut se demander si un tel processus existe. La construction de $(S_t)_{t\geq 0}$ est instructive puisqu'elle repose sur un exemple canonique d'e.p.n.c.

Construction de $(S_t)_{t\geq 0}$ Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert. On appelle espace de Fock $\mathcal{F}(\mathcal{H})$ associé à $\mathcal{H}$ l'algèbre libre associative engendrée par $\mathcal{H}$ (c'est à dire $\sum_n \mathcal{H}^{\otimes n}$). C'est un espace de Hilbert en prenant le produit hermitien

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}^{\otimes n} \times \mathcal{H}^{\otimes m} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (f_1 \otimes \dots \otimes f_n, g_1 \otimes \dots \otimes g_m) & \longmapsto & \delta_{m,n} \prod (f_i, g_i)_{\mathcal{H}} \end{array}$$

Pour $h \in \mathcal{H}$ on définit l'opérateur création l_h sur $\mathcal{F}(\mathcal{H})$ par l'application

$$f_1 \otimes \dots \otimes f_n \mapsto h \otimes f_1 \otimes \dots \otimes f_n$$

et on définit sur $\mathcal{B}[\mathcal{F}(\mathcal{H})]$ l'état tracial

$$\tau(A) = (\Omega, A\Omega)$$

Alors il découle directement de ces définitions que si $(h, h')_{\mathcal{H}} = 0$, $l_h + l_h^*$ et $l_{h'} + l_{h'}^*$ sont libres entre eux. De plus on peut vérifier grace à la R-transformée [7] que la loi de $\mu_{l_h + l_h^*}$ est la loi d'une variable aléatoire semi-circulaire de moyenne nulle et de variance $(h, h)_{\mathcal{H}}$. A partir de ces considérations il devient possible de construire un mouvement Brownien libre. Il suffit de prendre comme espace de Hilbert initial l'espace $L^2(0, \infty)$, de poser

$$S_t = l_{\mathbf{1}_{(0,t)}} + l^*_{\mathbf{1}_{(0,t)}}$$

et de prendre pour $\mathcal{A}_t$ l'algèbre de von Neumann engendrée par $(S_s)_{s\leq t}$.
Encore une fois il est possible d'obtenir une approximation plus concrète de ce mouvement Brownien libre [6] :

Théorème 3 *Soit $B_t^N = \frac{1}{\sqrt{n}}(B_{ij}(t))_{1\leq i,j\leq n}$ la matrice symétrique dont les coefficients $B_{ij}(t)$ sont des mouvements Browniens standards classiques et indépendants entre eux (modulo la symétrie). Considerons sur ces matrices l'état*

$$\phi_N(B_t^N) = \frac{1}{N}\mathbb{E}\, Tr(B_t^N)$$

Alors pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $t_1, \dots, t_n \geq 0$ on obtient à la limite

$$\lim_{N\to\infty} \phi_N\left(B_{t_1}^N \dots B_{t_n}^N\right) = \phi(S_{t_1} \dots S_{t_n})$$

L'existence d'un mouvement Brownien libre permet de construire un calcul stochastique libre à partir de celui-ci [6] . Dans le cas classique nous étions amené à considérer des intégrales stochastiques du type $\int_{\mathbb{R}^+} A_t dB_t$ avec $(A_t)_{t\geq 0}$ un processus adapté à la filtration du mouvement Brownien. Dans le cas non-commutatif nous devons faire attention au fait que les variables ne commutent pas. Nous devons donc considérer des multiplications à gauche et à droite. Commençons comme dans le cas classique par définir le cas le plus simple :

Définition 7 *Un biprocessus simple adapté* $(U_t)_{t\geq 0}$ *est une application de* $[0,\infty)$ *dans* $\mathcal{A}\otimes\mathcal{A}^{op}$ *(*$\mathcal{A}^{op}$ *est l'algèbre* $\mathcal{A}$ *avec l'opération multiplication* $a\times_{op} b = ba$*) telle qu'il existe* $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n < \infty$ *et pour tout* $0 \leq i \leq n-1$ $A_i, B_i \in \mathcal{A}_{t_i}$ *avec*

$$U_t = \begin{cases} A_i \otimes B_i & t_i \leq t < t_{i+1} \\ 0 & t_n \leq t \end{cases}$$

Pour un tel processus on définit l'intégral stochastique

$$\int U_t \sharp dS_t = \sum_{i=0}^{n-1} A_i (S_{t_{i+1}} - S_{t_i}) B_i$$

Définissons sur $\mathcal{A}$ le produit hermitien

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : A, B \longmapsto \phi(B^* A)$$

On peut canoniquement étendre ce produit hermitien à $\mathcal{A}\otimes\mathcal{A}^{op}$. La propriété importante de cette intégrale est que pour U, V deux biprocessus simples adaptés on a l'égalité

$$\phi\left(\left(\int U\sharp dS\right)\left(\int V\sharp dS\right)^*\right) = \int \langle U_t, V_t\rangle_{\mathcal{A}\otimes\mathcal{A}^{op}} dt$$

Le terme de droite de la dernière égalité définit un produit scalaire sur l'ensemble des biprocessus simples adaptés. On peut donc prendre le complété $\mathcal{B}_2$ de cet espace avec ce produit scalaire. On peut ainsi étendre l'intégrale stochastique libre en une application

$$\int : \mathcal{B}_2 \longrightarrow L^2(\mathcal{A})$$

De plus on a une inégalité de type Burkhorlder-Gundy [6] semblable au cas classique.

Proposition 5 *Si* $\int \|A_t\|^2 \|B_t\|^2 dt$ *est fini on a l'inégalité*

$$\| \int U_t \sharp dS_t \| \leq 2\sqrt{2}\left(\int \|A_t\|^2 \|B_t\|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}$$

Donc si on introduit l'espace $\mathcal{B}_\infty$, complété de l'espace des biprocessus simples adaptés vérifiant $\int \|A_t\|^2\|B_t\|^2 dt < \infty$ sous la norme

$$\| \cdot \|_\infty : U = (A_t, B_t) \longmapsto \left(\int \|A_t\|^2 \|B_t\|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}$$

on peut étendre l'intégrale stochastique en une application

$$\int : \mathcal{B}_\infty \longrightarrow \mathcal{A}$$

L'avantage de cette application est que grâce à l'inclusion de l'image dans $\mathcal{A}$, on peut sans problème multiplier deux intégrales stochastiques.

Formule d'Itô [1] Pour établir la formule d'Itô dans le cas libre, il faut définir des opérateurs différentiels qui prennent en compte la non-commutativité.

Définition 8 *Soit* $f(x) = \sum f_n x^n$. *On définit les opérateurs* ∂ *et* Δ_t *par les formules*

$$\partial f(X) = \sum f_n \sum_{k=0}^{n-1} X^k \otimes X^{n-k-1}$$

$$\Delta_t f(x) = \frac{\partial}{\partial x} \int \frac{f(x) - f(y)}{x - y} d\mu_{S_t}(y)$$

avec $\mu_{S_t} \sim SC(0, t)$.

Supposons maintenant que f est assez régulière (analytique par exemple). Alors on a la formule d'Itô libre

$$f(S_t) = f(S_0) + \int_0^t \partial f(S_s) \sharp dS_s + \frac{1}{2} \int_0^t \Delta_s f(S_s) ds$$

Nous allons terminer cette introduction en donnant deux opérations qui s'apparentent à une définition libre du calcul de Malliavin [4]. Nous nous plaçons sur l'algèbre $\mathcal{S}(\mathcal{H})$ engendrée par les opérateurs $(l_h + l_h^*)_{h \in \mathcal{H}}$. Cette algèbre présente la propriété de pouvoir être injectée dans l'espace de Fock $\mathcal{F}(\mathcal{H})$:

Proposition 6 *L'application*

$$A \in \mathcal{S}(\mathcal{H}) \mapsto A\Omega \in \mathcal{F}(\mathcal{H})$$

est une application injective. C'est même une isométrie si on munit $\mathcal{S}(\mathcal{H})$ *du produit scalaire* $\langle \cdot, \cdot \rangle$. *On peut donc l'étendre en une isométrie*

$$i : L^2(\mathcal{S}(\mathcal{H}), \langle \cdot \rangle) \to \mathcal{F}(\mathcal{H})$$

Il est donc possible de raisonner sur $\mathcal{F}(\mathcal{H})$ et d'induire ce raisonnement sur $\mathcal{S}(\mathcal{H})$. Définissons donc les opérateurs gradient et divergence sur $\mathcal{F}(\mathcal{H})$

Définition 9 *L'opérateur gradient est l'opérateur densément défini par*

$$\nabla : \begin{array}{ccc} \mathcal{F}(\mathcal{H}) & \longrightarrow & \mathcal{F}(\mathcal{H}) \otimes \mathcal{H} \otimes \mathcal{F}(\mathcal{H}) \\ h_1 \otimes \cdots \otimes h_n & \longmapsto & \sum_{j=1}^n (h_1 \otimes \cdots \otimes h_{j-1}) \otimes h_j \otimes (h_{j+1} \otimes \cdots \otimes h_n) \end{array}$$

avec $\nabla\Omega = 0$.
L'opérateur divergence est l'opérateur densément défini par

$$\delta : \begin{array}{ccc} \mathcal{F}(\mathcal{H}) \otimes \mathcal{H} \otimes \mathcal{F}(\mathcal{H}) & \longrightarrow & \mathcal{F}(\mathcal{H}) \\ (h_1 \otimes \cdots \otimes h_n) \otimes h \otimes (g_1 \otimes \cdots \otimes g_m) & \longmapsto & h_1 \otimes \cdots \otimes h_n \otimes h \otimes g_1 \otimes \cdots \otimes g_m \end{array}$$

Grace à i ces applications peuvent se transposer sur l'ensemble des éléments de $\mathcal{S}(\mathcal{H})$ consistant en l'algèbre $\mathcal{S}_{alg}(\mathcal{H})$ générée les polynômes en $(l_h + l_h^*)_{h \in \mathcal{H}}$. On peut montrer que le domaine de ∇ est justement la fermeture de $\mathcal{S}_{alg}(\mathcal{H})$ dans $\mathcal{F}(\mathcal{H})$. De plus ∇ et δ sont adjoints l'un de l'autre.
Plus particulièrement l'opérateur gradient possède des propriétés [4] semblables au gradient classique.

Proposition 7 *L'opérateur gradient rapporté à $\mathcal{S}_{alg}(\mathcal{H})$ est une dérivation. C'est à dire pour $A, B \in \mathcal{S}_{alg}(\mathcal{H})$*

$$\nabla(AB) = (\nabla A) \centerdot B + A \centerdot (\nabla B)$$

Où la multiplication à gauche et à droite se sous-entend avec le terme le plus proche dans le produit tensoriel.

Proposition 8 *Si on définit la forme bilinéaire $[\centerdot, \centerdot]_{\mathcal{H}}$ par*

$$[\centerdot, \centerdot]_{\mathcal{H}} \begin{array}{ccc} (\mathcal{S}_{alg}(\mathcal{H}) \otimes \mathcal{H} \otimes \mathcal{S}_{alg}(\mathcal{H})) \times \mathcal{H} & \to & \mathcal{S}_{alg}(\mathcal{H}) \otimes \mathcal{S}_{alg}(\mathcal{H}) \\ (A \otimes h_1 \otimes B, h_2) & \mapsto & (h_1, h_2)_{\mathcal{H}} A \otimes B \end{array}$$

Alors on a l'égalité suivante, équivalente libre de l'intégration par partie, pour $A \in \mathcal{S}_{alg}(\mathcal{H})$ et $h \in \mathcal{H}$

$$\phi \otimes \phi([\nabla A, h]_{\mathcal{H}}) = \phi(A(l_h + l_h^*))$$

Pour éclairer la forme linéaire de la dernière proposition, observons ce que cela donne dans le cas où $\mathcal{H} = L^2([0, \infty))$. Dans ce cas on peut voir qu'un élément de $(\mathcal{S}_{alg}(\mathcal{H}) \otimes \mathcal{H} \otimes \mathcal{S}_{alg}(\mathcal{H})) \times \mathcal{H}$ est un biprocessus simple et que la forme bilinéaire est donc pour $U \in (\mathcal{S}_{alg}(\mathcal{H}) \otimes \mathcal{H} \otimes \mathcal{S}_{alg}(\mathcal{H}))$ et $h \in \mathcal{H}$

$$[U, h]_{\mathcal{H}} = \int U_t \overline{h(t)} dt$$

Ces opérateurs présentent une forme beaucoup plus explicite dans le cadre de l'expansion par chaos des processus libres, que nous ne présenterons pas ici. Ils permettent d'obtenir des théorèmes de comparaison entre la loi de variables aléatoires non commutatives engendrées par un mouvement Brownien libre et une loi semi-circulaire [4] (de manière analogue au théorème de Nualart et Peccati dans le cas classique [5]).

4 Appendice : Algèbre de von Neumann

Dans ce court appendice nous expliquons rapidement pour quelles raisons l'apparition d'algèbres de von Neumann est naturelle dans le contexte des probabilités libres. Rappelons la définition d'une algèbre de von Neumann :

Définition 10 *Une algèbre de von Neumann $\mathcal{A}$ est une sous-algèbre fortement fermée de l'espace des opérateurs bornés sur un espace de Hilbert H. Cela équivaut au fait qu'elle est égale à son bicommutant (c'est à dire $\mathcal{A}'' = \mathcal{A}$).*

Rappel La topologie forte est la topologie de la convergence ponctuelle en norme. C'est à dire que $A_n \to A$ si et seulement si pour tout $\xi \in H$

$$\|A_n(\xi) - A(\xi)\| \to 0$$

En particulier pour tout espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, $L^\infty(\Omega)$ est une algèbre de von Neumann, comme sous-algèbre fortement fermée de $\mathcal{B}(L^2(\Omega))$. On peut montrer que dans ce cas la topologie forte est équivalente à la convergence simple (alors que la topologie norme est équivalente à la topologie convergence

uniforme).
La propriété importante des algèbres de von Neumann est qu'une algèbre de von Neumann $\mathcal{A}$ est engendrée par les projections contenues dans $\mathcal{A}$ [3] (au sens que c'est la fermeture forte de l'espace engendré algébriquement par ces projections). C'est justement la généralisation de l'espace des fonctions mesurables bornées sur un espace de probabilité, qui sont engendrées comme limite simple de combinaisons linéaires d'indicatrices d'événements mesurables.

References

[1] P. Biane and R. Speicher. Stochastic calculus with respect to free brownian motion and analysis on wigner space. *Probability theory and related fields*, 112(3):373–409, 1998.

[2] Philippe Biane. Free probability for probabilists, 1998.

[3] V.F.R. Jones. von neumann algebras. *Lecture Notes from http://www. math. berkeley. edu/˜ vfr/MATH20909/VonNeumann2009. pdf*, 2003.

[4] T. Kemp, I. Nourdin, G. Peccati, and R. Speicher. Wigner chaos and the fourth moment. *The Annals of Probability*, 40(4):1577–1635, 2012.

[5] D. Nualart and G. Peccati. Central limit theorems for sequences of multiple stochastic integrals. *The Annals of Probability*, 33(1):177–193, 2005.

[6] R. Speicher. Free calculus. *arXiv preprint math/0104004*, 2001.

[7] D.V. Voiculescu, K.J. Dykema, and A. Nica. *Free random variables*, volume 1. Amer Mathematical Society, 1992.