Les singularités de la duale projective

Roland Abuaf
Sous la direction de Christian Peskine

11 décembre 2009

Table des matières

Introduction

Soit $X \subset \mathbb{P}^N$ une variété projective lisse. Existe t'il un lien entre le nombre d'hypersurfaces tangentes à X, les nombres de Milnor de $H \cap X$ (où H est un hyperplan) et la normalité linéaire de celle ci ? A priori ces objets concernent trois domaines différents en géométrie (géométrie énumérative, théorie des singularités et géométrie projective) mais je vais essayer de montrer qu'il existe une variété (la duale de X) qui se situe à l'interface de ces théories. Je ne serai pas exhaustif sur le sujet car il semble que la plupart des phénomènes en géométrie algébrique soient liés à cette variété duale. Même un objet aussi "abstrait" que la catégorie dérivée des faisceaux cohérents sur X semble trouver un cadre naturel d'applications dans la théorie de la dualité projective. Je voudrais remercier Bernard Teissier et Fyodor Zak qui ont eu la gentillesse de m'expliquer certains de leurs travaux. Je suis aussi extrêmement reconnaissant envers Christian Peskine qui m'a enseigné la géométrie algébrique avec une patience constante.

1 Reflexivité et dualité

1.1 Quelques faits élémentaires en géométrie énumérative

On travaille sur $\mathbb{C}$ le corps des nombres complexes. Si V est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$, on note $\mathbb{P}(V)$ (ou parfois $\mathbb{P}^{n-1}$, si $V = \mathbb{C}^n$) l'ensemble des quotients de dimension 1 de V. Une variété projective $X \subset \mathbb{P}(V)$ est un sous-schéma fermé réduit (mais pas nécessairement irréductible) de $\mathbb{P}(V)$.

Si $X \subset \mathbb{P}(V)$ est une variété projective et x un point dans X on note $T_{X,x}$ l'espace tangent plongé de X en x, c'est à dire l'unique sous espace linéaire de $\mathbb{P}(V)$ tel que son espace tangent de Zariski en x soit égal à l'espace tangent de Zariski de X en x (notons que ces deux espaces sont naturellement plongés deans l'espace tangent de Zariski de $\mathbb{P}(V)$ en x). Si X est lisse en x et H est un hyperplan dans $\mathbb{P}(V)$, on dit que H est tangent à X en x si $T_{X,x} \subset H$.

Question 1 *Soit $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ deux coniques lisses dans $\mathbb{P}^2$. Combien y a t'il de droites qui soient simultanément tangentes à $\mathcal{C}_1$ et à $\mathcal{C}_2$?*

On peut calculer ce nombre de différentes manières, mais une, particulièrement élégante et simple, repose sur la théorie de la dualité projective.

Définition 1.1.1 *Soit $X \subset \mathbb{P}^N$ une variété lisse irréductible. l'ensemble des hyperplans de $\mathbb{P}^N$ qui sont tangents à X est appelé la duale de X, on la note X^*.*

Si on considère un hyperplan dans $\mathbb{P}^N$ comme un point dans l'espace projectif dual $\mathbb{P}^{N^*}$, alors X^* est une variété projective irréductible dans $\mathbb{P}^{N^*}$.

Si on remarque qu'un point situé dans $\mathcal{C}_1^* \cap \mathcal{C}_2^*$ est une droite $\mathbb{P}^2$ qui est tangente à $\mathcal{C}_1$ et à $\mathcal{C}_2$, notre question peut être reformulée de la manière suivante :

Question 2 *Soient $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ deux coniques lisses dans $\mathbb{P}^2$, $\mathcal{C}_1^*$ et $\mathcal{C}_2^*$ leurs duales projectives dans $\mathbb{P}^{2^*}$. Quel est le nombre de points (correctement comptés !) situés dans l'intersection $\mathcal{C}_1^* \cap \mathcal{C}_2^*$?*

Dans le contexte de la géométrie algébrique ce nombre est très facile à calculer puisque le théorème de Bézout nous assure qu'il vaut $\deg(\mathcal{C}_1^*)\deg(\mathcal{C}_2^*)$. Il ne reste plus qu'à trouver le degré de la duale projective d'une conique lisse. Les formules de Plücker [GKZ08] donne une réponse immédiate, mais on peut aussi constater que ce degré est égal au nombre de tangentes à la conique qui passent par un point général de $\mathbb{P}^2$. Un petit dessin nous permet de voir que ce nombre est 2. Et finalement :

Réponse 1 *Soient $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ deux coniques lisses dans $\mathbb{P}^2$. Il y a exactement 4 droites simultanément tangentes à $\mathcal{C}_1$ et à $\mathcal{C}_2$* [1].

1.2 Dualité et réfléxivité

Soit $\mathbb{P}(V)$ un espace projectif et soit $\mathbb{P}(V)^*$ son dual. Si $L \subset \mathbb{P}(V)$ est un espace linéaire, on note $L^\perp \subset \mathbb{P}(V)^*$ l'ensemble des hyperplans qui contiennent L. On notera que pour tout $x \in L$ on a $T_{X,x} = L$, ainsi $L^\perp$ est la duale projective de L. Le théorème qui suit est d'une importance cruciale :

Théorème 1.2.1 *Soit $L \subset \mathbb{P}(V)$ un sous espace linéaire d'un espace projectif $\mathbb{P}(V)$. Si $L^\perp \subset \mathbb{P}(V)^*$ est l'ensemble des hyperplans tangents à L alors on a l'égalité :*

$$L^{\perp\perp} = L.$$

1. Ces tangentes doivent être correctement comptées ! Si par exemple $\mathcal{C}_1$ est "tangente" à $\mathcal{C}_2$ au point x, alors $T_{\mathcal{C}_1,x} = T_{\mathcal{C}_2,x}$ doit être comptée deux fois.

On peut se demander si la même égalité tient toujours pour une variété projective lisse quelconque. On constate cependant que la duale d'une variété lisse ne sera en général pas lisse. Ainsi pour avoir un théorème de bidualité qui tiendrait pour toutes les variétés projectives (lisses) il est nécessaire de définir la duale d'une variété singulière. La principale difficulté technique est de définir l'ensemble des hyperplans tangents à X en un point singulier.

Soit $X \subset \mathbb{P}^3$ une surface et $H \subset \mathbb{P}^3$ un hyperplan. Soit f_X et f_H leurs équations dans une carte affine $\mathbb{C}^3$ donnée en coordonnées locales par x, y, z. Si t est un point lisse de X tel que $T_{X,t} \subset H$ alors un calcul facile montre que la matrice

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_X}{\partial x}(t) & \frac{\partial f_X}{\partial y}(t) & \frac{\partial f_X}{\partial z}(t) \\ \frac{\partial f_H}{\partial x}(t) & \frac{\partial f_H}{\partial y}(t) & \frac{\partial f_H}{\partial z}(t) \end{pmatrix}$$

n'a pas rang maximal. On pourrait être alors tenté de dire qu'un hyperplan H est tangent à X en s point sigulier de X, si la matrice

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_X}{\partial x}(s) & \frac{\partial f_X}{\partial y}(s) & \frac{\partial f_X}{\partial z}(s) \\ \frac{\partial f_H}{\partial x}(s) & \frac{\partial f_H}{\partial y}(s) & \frac{\partial f_H}{\partial z}(s) \end{pmatrix}$$

n'a pas rang maximal. Mais la définition même de point singulier implique que $\frac{\partial f_X}{\partial x}(s) = \frac{\partial f_X}{\partial y}(s) = \frac{\partial f_X}{\partial z}(s) = 0$. Cela impliquerait alors que tous les hyperplans passant par s seraient tangents à X en s, c'est à dire que $s^{\perp} \subset X^*$. Ainsi X^* contiendrait un hyperplan (à savoir $s^{\perp}$) et donc X^* serait réductible, fait que l'on souhaite éviter [2]. Cet exemple montre que la notion d'hyperplans tangents en un point singulier est un peu subtile. A ma connaissance, il n'existe pas de définitions "directes". Un moyen de contourner ce problème est de construire la duale sur un sous ensemble dense où X est lisse et de prendre la fermeture de Zariski de cet ensemble dans $\mathbb{P}^{N^*}$.

Définition 1.2.2 *Soit $X \subset \mathbb{P}^N$ une variété projective irréductible. Notons I_X^0 l'ensemble :*

$$I_X^0 = \{(x, H)/x \in X_{\text{lisse}}, T_{X,x} \subset H\} \subset \mathbb{P}^N \times \mathbb{P}^{N^*},$$

où X_{lisse} désigne l'ouvert dense de X où X est lisse. On note I_X la fermeture de I_X^0 dans $\mathbb{P}^N \times \mathbb{P}^{N^*}$. La duale de X, que l'on note X^*, est l'image de I_X [3] par la projection naturelle vers $\mathbb{P}^{N^*}$.

Le théorème qui suit est la pierre angulaire de la théorie de la dualité projective [Kle86] :

Théorème 1.2.3 (réfléxivité) *Soit $X \subset \mathbb{P}^N$ une variété projective irréductible. Soit I_X et X^* comme ci dessus, alors :*

$$I_X = I_{X^*} \text{ [4]}.$$

Sous les mêmes hypothèses ce théorème implique bien sûr que $X^{**} = X$ mais en fait le résultat est beaucoup plus fort. Si H est un hyperplan tangent à X (c'est à dire un point de X^*) notons X_H le schéma $X_H = \kappa(\lambda|_{I_X}^{-1}(H))$, où $\kappa : \mathbb{P}^N \times \mathbb{P}^{N^*} \to \mathbb{P}^N$ et $\lambda : \mathbb{P}^N \times \mathbb{P}^{N^*} \to \mathbb{P}^{N^*}$ sont les projections naturelles. C'est par définition le schéma des points où H est "tangent" à X [5] et est égal, par le théorème de réfléxivité, au schéma des hyperplans de $\mathbb{P}^{N^*}$ qui sont "tangents" à X^* en H. On obtient ainsi une description de X_H quand H est un point lisse de X^* :

Corollaire 1.2.4 *Soit $X \subset \mathbb{P}^N$ une variété projective irréductible et H un hyperplan tangent à X. Si H est un point lisse de X^*, alors X_H est schématiquement un espace linéaire de dimension* $\operatorname{codim}(X^*) - 1$.

---

2. Notons que pour définir un hyperplan tangent à X en s point singulier de X, on pourrait imposer que le rang de cette matrice en s soit strictement inférieur à son rang lorsque H est tangent à X en un point lisse, ce qui revient à $\frac{\partial f_H}{\partial x}(s) = \frac{\partial f_H}{\partial y}(s) = \frac{\partial f_H}{\partial z}(s) = 0$. Ceci est bien sûr impossible car H est un espace linéaire !

3. Pour le géomètre algébriste : I_X est la fermeture dans $\mathbb{P}^N \times \mathbb{P}^{N^*}$ de $\mathbb{P}(N_{X_{smooth}/\mathbb{P}^N}(-1))$.

4. Pour le géomètre symplectique : la fermeture dans $\Omega_{\mathbb{P}^N}(1)$ de l'espace total du fibré $N^*_{X_{smooth}/\mathbb{P}^N}(1)$ est par construction une variété conique lagrangienne et un théorème bien connu garantit que toute sous-variété conique lagrangienne de $\Omega_{\mathbb{P}^N}(1)$ peut se voir comme la fermeture de $N^*_{Y/\mathbb{P}^N}(1)$, pour une certaine variété $Y \subset \mathbb{P}^N$ quasiprojective. L'identification $\Omega_{\mathbb{P}^N}(1) = \Omega_{\mathbb{P}^{N^*}}(1)$ permet alors de conclure.

5. Qui peut ne pas être égal, même topologiquement, à la fermeture de l'ensemble $\{x \in X_{smooth}, T_{X,x} \subset H\}$

Ce corollaire permet de calculer la dimension de la duale d'une courbe non dégénérée :

Corollaire 1.2.5 *Soit $X \subset \mathbb{P}^N$ une courbe irréductible de degré au moins 2, alors X^* est une hypersurface.*

En effet une telle courbe ne contient pas de droites !

1.3 Le théorème de normailté linéaire de Zak

On rappelle qu'une variété projective $X \subset \mathbb{P}^N$ est dite intersection complète si X est l'intersection schématique du bon nombre d'hypersurfaces dans $\mathbb{P}^N$. A la fin des années 70, Hartschorne proposa de nombreux problèmes liés aux variétés projectives de petite codimension. L'un d'entre eux concerne les intersections complètes :

Conjecture 1.3.1 *Soit $X \subset \mathbb{P}^N$ une variété projective lisse de dimension n, si $n > 2N/3$ alors X est une intersection complète.*

Cette conjecture (ou un contre-exemple) semble être encore aujourd'hui hors de portée. On a essayé de construire des contre-exemples en utilisant certains fibrés vectoriels particuliers sur l'espace projectif, mais curieusement ces constructions acquièrent des singularités quand la dimension de X se rapproche de $2N/3 + 1$ (on pourra consulter [DPM08]).

On rappelle les définitions de variétés tangentes et sécantes.

Définition 1.3.2 *Soit $X \subset \mathbb{P}^N$ une variété projective lisse. La variété sécante de X, que l'on note $S(X)$, est la fermeture dans $\mathbb{P}^N$ de la variété couverte par les bisécantes à X.*

Désormais on va supposer que toutes nos variétés sont non dégénérées, c'est à dire qu'elles ne sont pas incluse dans un hyperplan de l'espace projectif dans lequel elles sont plongées [6].

Définition 1.3.3 *Soit $X \subset \mathbb{P}^N$ une variété projective irréductible. La variété X est dite linéairement normale si il n'existe pas de variété non dégénérée $X' \subset \mathbb{P}^{N+1}$ telle que X soit l'image isomorphe de X' par une projection linéaire [7].*

Il est facile de prouver que les intersections complètes sont linéairement normales (la réciproque étant bien sûr fausse). Au début des années 80, Zak apporte une réponse partielle aux "conjectures" de Hartschorne.

Théorème 1.3.4 (Théorème de normalité linéaire de Zak) *Soit $X \subset \mathbb{P}^{\mathbb{N}}$ une variété projective irréductible de dimension n. Si $n > \frac{2(N-1)}{3}$ alors X est linéairement normale.*

Il est géométriquement clair que $X' \subset \mathbb{P}^{N+1}$ peut être projeté isomorphiquement vers $\mathbb{P}^N$ depuis un point si et seulement si $S(X') \neq \mathbb{P}^{N+1}$. On a donc :

Théorème 1.3.5 (Théorème de normalité linéaire de Zak) *Soit $X' \subset \mathbb{P}^{N+1}$ une variété projective de dimension n. Si $n > \frac{2(N-1)}{3}$ alors $S(X') = \mathbb{P}^{N+1}$.*

On va donner la preuve de ce résultat dans le cas où X est lisse. La démonstration ne nécessite que des changements mineurs dans le cas général. Rappelons tout d'abord le lemme de Terracini. Ce résultat va nous permettre de relier la duale de X' à $S(X')$:

6. Pour le géomètre algébriste : cela revient à demander $H^0(X, \mathcal{I}_X(1)) = 0$, où $\mathcal{I}_X$ est le faisceau d'idéaux de X dans $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}$.

7. Pour le géomètre algébriste : cela revient à demander que l'application naturelle $H^0(X, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(1)) \to H^0(X, \mathcal{O}_X(1))$ soit surjective.

Lemme 1.3.6 (Lemme de Terracini) *Soit $X \subset \mathbb{P}^N$ une variété projective irréductible. Si z est un point général dans $S(X)$ alors*

$$T_{S(X),z} = \langle T_{X,x}, T_{X,y} \rangle,$$

pour $x, y \in X$ des point généraux tels que $z \in \langle x, y \rangle$ [8].

Soit maintenant une variété projective $X' \subset \mathbb{P}^{N+1}$ telle que $\dim(X') > \frac{2(N-1)}{3}$ et telle que $S(X') \neq \mathbb{P}^{N+1}$.

Par le lemme de Terracini, si z est un point général dans $S(X')$ et H_z est un hyperplan contenant $T_{S(X'),z}$ alors l'ensemble $\{x \in X$ tel que $< x, z >$ est une bisécante à $X\}$ est inclus dans X'_{H_z} [9]. Mais un calcul facile montre que cet ensemble à dimension $2\dim(X') + 1 - \dim(S(X'))$, ce qui implique $\dim(X'_{H_z}) \geq \frac{N+2}{3}$. Le théorème suivant permet de conclure.

Théorème 1.3.7 (Théorème des tangences de Zak) *Soit $X \subset \mathbb{P}^N$ une variété projective irréductible et H un hyperplan. Si X_H désigne le lieu de tangence de H avec X, alors* $\dim(X_H) \leq N - 1 - \dim(X)$.

Dans notre situation le théorème des tangences dit que $\dim(X'_{H_z}) \leq \frac{N-1}{3}$ et donc une contradiction.

La preuve du théorème des tangences nous emmenerait trop loin, mais je me dois de souligner qu'il constitue certainement le résultat le plus important en géométrie projective de ces trentes dernières années. Il a permis de résoudre d'anciennes conjectures (e.g. finitude de l'application de Gauss, bornes pour la dimension de la duale, amplitude de certains diviseurs de ramification, théorèmes de Bertini non génériques etc...) et son extension au cas où X est singulière est encore loin d'être complètement satisfaisante (on pourra consulter les ouvrages [Zak93] et [FOV99]).

8. Le symbole $\langle \sharp, \natural \rangle$, désigne le sous espace linéaire de $\mathbb{P}^N$ engendré par $\sharp$ and $\natural$.
9. On rappelle que X'_{H_z} est la projection sur X' de la fibre au dessus de H_z du morphisme conormal. Cet ensemble est appelé le "lieu de tangence" de H_z avec X.

2 Singularités de la duale

2.1 Quelques résultats classiques

Soit $X \subset \mathbb{P}^N$ une variété projective irréductible, on a vu que les points lisses X^* sont des hyperplans qui sont tangents à X le long d'espaces linéaires [10]. Désormais on s'interesse aux point singuliers de la duale. Prenons le cas simple d'une courbe dans $\mathbb{P}^2$, les formules de Plücker donnent un résultat intéressant :

Théorème 2.1.1 (Formules de Plücker) *Soit $X \subset \mathbb{P}^2$ une courbe irréductible de degré d ayant pour seules singularités, κ cusps [11] et ν nodes [12] et telle que les singularités de X^* sont des cusps ou des nodes. On note d^*, κ^*, ν^*, le degré, le nombre de cusps et le nombre de nodes de X^*, alors on a les relations suivantes :*

$$d^* = d(d-1) - 3\kappa - 2\nu,$$

$$\kappa^* = 3d(d-2) - 8\kappa - 6\nu,$$

$$d = d^*(d^*-1) - 2\kappa^* - 3\nu^*.$$

La preuve de ce résultat est extrêmement intéressante. Elle montre qu'une droite "simplement" tangente à X en exactement deux points lisses est un node de X^* et une droite qui est une tangente "double" à X en un point lisse [13] est un cusp dans X^*.

On souhaite naturellement généraliser cette analyse des points singuliers de X^* dans le cas où X est de dimension quelconque. Soit H un hyperplan, quand le lieu de tangence de H avec X est fini, Dimca donne dans [Dim86] une description complète de la situation. Son théorème est sans doute le premier à fournir une intuition claire de ce que pourrait être la situation générale.

Rappelons tout d'abord quelques définitions.

Définition 2.1.2 *Soit $f : \mathbb{C}^N \to \mathbb{C}$ un morphisme algébrique. On suppose que l'hypersurface $f(z_1, ..., z_N) = 0$ a une singularité isolée en $(0, ..., 0)$. Cette singularité est dite non dégénérée si la matrice héssienne de f :*

$$\left(\frac{\partial f_i \partial f_j}{\partial z_i \partial z_j} \right)_{1 \leq i \leq N, 1 \leq j \leq N}$$

est iversible en $(0, ..., 0)$. La singularité est dite dégénérée dans le cas contraire.

On définit les nombres de Milnor :

Définition 2.1.3 *Soit $f : \mathbb{C}^N \to \mathbb{C}$ un morphisme algébrique tel que l'hypersurface $f(z_1, ..., z_N) = 0$ a une singularité isolée en $(0, ..., 0)$. Alors pour tout morphisme algébrique $g : \mathbb{C}^N \to \mathbb{C}$ tel que $g(z_1, ..., z_N) = 0$ soit lisse $(0, ..., 0)$, et pour tout $t \in \mathbb{C}$ assez proche de 0, l'hypersurface $(f + tg)(z_1, ..., z_N) = 0$ [14] a exactement $\mu(f)$ singularités isolées et elles sont toutes non dégénérées. Ce nombre est indépendant du choix de g comme ci dessus et de t, si $|t|$ est assez petit, et est appelé le nombre de Milnor [15] de f en 0.*

Le nombre de Milnor d'une singularité isolée $(f, 0)$ est égal au nombre de singularités isolées non dégénérées qui ont été "empilées" pour obtenir $(f, 0)$. Si on "bouge" un peu $(f, 0)$ dans une "bonne" famille, alors un membre général de cette famille aura excatement $\mu(f)$ singularités isolées non dégénérées.

10. Qui peuvent bien sûr être des points. C'est le cas si X^* est une hypersurface.
11. On rappelle qu'un cusp est un point double d'une courbe plane où il y a exactement une tangente "double" à la courbe. La courbe $x^3 = y^2$ a un cusp en $(0, 0)$.
12. On rapelle qu'un node est un point double d'une courbe plane où il y a exactement deux tangentes distinctes à la courbe. La réunion de droites se coupant en $(0, 0)$ possède un node en $(0, 0)$.
13. Ce qui signifie que ce point est de flexion dans X.
14. Pour le singulariste/géomètre différentiel : on reconnaitra une morsification complexe de f.
15. Pour le géomètre algébriste : Ce nombre est aussi égal à $\dim(\frac{\mathcal{O}_{\mathbb{C}^N,0}}{J(f)})$, où $J(f)$ est l'idéal jacobien de f. D'après le Nullstellensatz, ce nombre est fini si et seulement si $f = 0$ a une singularité isolée en 0.

Il est important de noter que le nombre de Milnor de f en 0 est en général bien plus grand que la multiplicité de $f = 0$ en 0 [16].

On peut maintenant énoncer un cas particulier du théorème de Dimca :

Théorème 2.1.4 *Soit $X \subset \mathbb{P}^N$ une hypersurface lisse et soit H un hyperplan tel que le lieu de tangence de H avec X soit fini. Alors la multiplicité de H dans X^* est donnée par la formule :*

$$m_{X^*}(H) = \sum_{x \in (X \cap H)_{sing}} \mu(X \cap H, x).$$

On notera que si x est un point singulier de $X \cap H$ alors, par hypothèse, on peut trouver une carte affine $\mathbb{C}^{N-1}$ de H dans laquelle $X \cap H$ n'a qu'une singularité isolée en x. L'équation de $X \cap H$ donne un morphisme algébrique $f : \mathbb{C}^{N-1} \to \mathbb{C}$ tel que $f = 0$ soit schématiquement $X \cap H$ dans cette carte. Le nombre de Milnor ainsi obtenu ne dépend pas de la carte (suffisamment petite) ainsi choisie. Le nombre de Milnor de $X \cap H$ en x doit être entendu en ce sens.

Dans sa plus grande généralité, le théorème de Dimca s'applique à toutes les varietés lisses, sous l'hypothèse cruciale que le lieu de tangence avec l'hyperplan considéré soit fini. Les nombres de Milnor que nous avons définis sont remplacés par des nombres de Milnor "généralisés" mais la formule reste la même.

Un corollaire trivial du théorème de Dimca est le suivant :

Corollaire 2.1.5 *Soit $X \subset \mathbb{P}^N$ une variété projective lisse. Soit H un hyperplan tangent à X en exactement k points, alors la multiplicité de H dans X^* est supérieure ou égale à k.*

2.2 Lieux de tangence infinis et un théorème d'addition

Il semble naturel de vouloir généraliser la formule de Dimca dans le cas où les lieux de tangence considérés sont infinis. Parusiński et Aluffi démontrent dans [Par91] et [Alu95] une telle formule. Néanmoins leur résultat est assez technique et les outils utilisés rendent difficiles les interprétations géométriques de cette formule. De manière assez surprenante, la conjecture suivante n'a jamais été énoncée sous cette forme :

Conjecture 2.2.1 *Soit $X \subset \mathbb{P}^N$ une variété projective non dégénérée et H un hyperplan. Si H est tangent à X en k points généraux alors H est un point de multiplicité k dans X^*.*

Zak énonce dans [Zak04] un résultat analogue et donne un sens précis au mot général. Malheureusement il ne propose qu'un sketch de la preuve et une des assertions de ce sketch semble non trivial. Finalement, en utilisant des techniques développées par Lê et Teissier [LT88], je suis en mesure de démontrer le théorème suivant, qui généralise l'énoncé de Zak et donne une réponse à la conjecture dans le cas où X^* est une hypersurface :

Théorème 2.2.2 (Théorème d'addition) *Soit $X \subset \mathbb{P}^N$ une variété projective (non nécessairement lisse) irreductible et non dégénérée telle que X^* soit une hypersurface. Soit $L \subset \mathbb{P}^N$ un espace linéaire. Notons l la multiplicité dans X^* d'un point général de $L^\perp$ et supposons que pour $x \in X$ general, on a $< L, T_{X,x} > \neq \mathbb{P}^{\mathbb{N}}$. Alors pour $x \in X$ general, la multiplicité dans X^* du point général de $< L, T_{X,x} >^\perp$ est supérieure ou égale à $l+1$.*

Prenons un espace linéaire quelconque L et soit H_L un hyperplan général contenant L. On veut savoir ce qui se passe si on "ajoute" x (un point général de X) au lieu de tangence H_L avec X. C'est à dire que si H_M est un hyperplan général qui contient $M =< L, T_{X,x} >$, on se demande quelle est la multiplicité de H_M dans X^*. Le théorème d'addition dit ce à quoi on s'attend : la multiplicité de H_M dans X^* sera strictement supérieure à celle de H_L.

16. On pourra prendre pour définition de la multiplicité de $f = 0$ en 0 le plus grand entier m tel que toute les déribées partielles de f d'ordre $i \leq m-1$ s'annulent en 0.

Corollaire 2.2.3 *Soit $X \subset \mathbb{P}^N$ une variété projective non dégénérée telle que X^* soit une hypersurface. Si H est un hyperplan tangent à X en k points généraux alors H est un point de multiplicité supérieure ou égale à k dans X^*.*

Dans le cas où X^* est une hypersurface, le point général de $L^\perp$ a multiplicité l dans X^* si et seulement si pour tout P_L espace linéaire de codimension 2 qui ne rencontre pas L proprement, toute petite déformation P_L^ϵ de P_L est incluse dans l'intersection de l hyperplans disctincts tangents à X au voisinage de $L \cap X$. Bien que cela semble très intuitif, il n'est pas du tout trivial de montrer que si un point général de $L^\perp$ a multiplicité l dans X^*, alors un point général de $M^\perp = < L, T_{X,x} >^\perp$ a multiplicité au moins $l+1$ dans X^*.

La difficulté vient du fait que si P_M est un espace de codimension 2 qui ne rencontre pas proprement M, et donc $T_{X,x}$, une petite déformation de P_M rencontre en général $T_{X,x}$ proprement. Dans l'espace duale, cela signifie que si ${P_M}^\perp$ est une droite qui passe par H_M, pour prouver que H_M est de multiplicté $l+1$ dans X^*, on doit prouver que TOUTE petite déformation de ${P_M}^\perp$ rencontre X^* au voisinage de H_M en $l+1$ points. On ne peut pas imposer à la déformation de ${P_M}^\perp$ de passer par un point de $T_{X,x}^\perp$.

Références

[Alu95] Paolo Aluffi. Singular schemes of hypersurfaces. *Duke Math. J.*, 80(2) :325–351, 1995.

[Dim86] Alexandru Dimca. Milnor numbers and multiplicities of dual varieties. *Rev. Roumaine Math. Pures Appl.*, 31(6) :535–538, 1986.

[DPM08] Pietro De Poi and Emilia Mezzetti. Congruences of lines in $\mathbb{P}^5$, quadratic normality, and completely exceptional Monge-Ampère equations. *Geom. Dedicata*, 131 :213–230, 2008.

[FOV99] H. Flenner, L. O'Carroll, and W. Vogel. *Joins and intersections.* Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 1999.

[GKZ08] I. M. Gelfand, M. M. Kapranov, and A. V. Zelevinsky. *Discriminants, resultants and multidimensional determinants.* Modern Birkhäuser Classics. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 2008. Reprint of the 1994 edition.

[Kle86] Steven L. Kleiman. Tangency and duality. In *Proceedings of the 1984 Vancouver conference in algebraic geometry*, volume 6 of *CMS Conf. Proc.*, pages 163–225, Providence, RI, 1986. Amer. Math. Soc.

[LT88] Dũng Tráng Lê and Bernard Teissier. Limites d'espaces tangents en géométrie analytique. *Comment. Math. Helv.*, 63(4) :540–578, 1988.

[Par91] A. Parusiński. Multiplicity of the dual variety. *Bull. London Math. Soc.*, 23(5) :429–436, 1991.

[Zak93] F. L. Zak. *Tangents and secants of algebraic varieties*, volume 127 of *Translations of Mathematical Monographs.* American Mathematical Society, Providence, RI, 1993. Translated from the Russian manuscript by the author.

[Zak04] Fyodor L. Zak. Determinants of projective varieties and their degrees. In *Algebraic transformation groups and algebraic varieties*, volume 132 of *Encyclopaedia Math. Sci.*, pages 207–238. Springer, Berlin, 2004.