Examen Algèbre 2

Il n'est pas nécessaire de tout faire pour avoir la note maximale.

Exercice 1. Pour tout $n \geq 2$, calculer le discriminant $\operatorname{disc}(X^n + aX + b)$.

Exercice 2. On considère les polynômes suivants :

$$f_1 = X^3 - 3X + 1, \qquad f_2 = X^4 + 4, \qquad f_3 = X^6 + 3$$

et on note L_j le corps de décomposition de f_j sur $\mathbf{Q}$. Déterminer les degrés $[L_j : \mathbf{Q}]$ et les groupes de Galois $\operatorname{Gal}(L_j/\mathbf{Q})$.

Exercice 3. Soit $\zeta_n = e^{2\pi i/n}$. Pour quelles valeurs de $n \geq 1$ le corps $\mathbf{Q}(\zeta_n)$ (resp. $\mathbf{Q}(\zeta_n) \cap \mathbf{R} = \mathbf{Q}(\zeta_n + \zeta_n^{-1})$) s'écrit-t-il sous la forme $\mathbf{Q}(\sqrt{a_1}, \ldots, \sqrt{a_r})$, où $a_j \in \mathbf{Q}^*$? Expliciter les a_j dans chaque cas.

Exercice 4. Soit $n > 2$ un entier. On note $\zeta_{2^n} = e^{2\pi i/2^n}$, $K_n = \mathbf{Q}(\zeta_{2^n})$ et $K_n^{\pm} = \mathbf{Q}(\zeta_{2^n} \pm \zeta_{2^n}^{-1})$.

(a) Montrer que $5^{2^{n-3}} \equiv 1 + 2^{n-1} \pmod{2^n}$.

(b) Montrer que $\operatorname{Gal}(K_n/\mathbf{Q}) \xrightarrow{\sim} \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/2^{n-2}\mathbf{Z}$ et que $\operatorname{Gal}(K_n^{\pm}/\mathbf{Q}) \xrightarrow{\sim} \mathbf{Z}/2^{n-2}\mathbf{Z}$.

(c) Montrer que l'on a, pour tout choix de $n-3$ signes,

$$\mathbf{Q}(\zeta_{2^n} + \zeta_{2^n}^{-1}) = \mathbf{Q}\Big(\sqrt{2 \pm \sqrt{2 \pm \cdots \pm \sqrt{2 \pm \sqrt{2}}}}\Big), \qquad \mathbf{Q}(\zeta_{2^n} - \zeta_{2^n}^{-1}) = \mathbf{Q}\Big(i\sqrt{2 \pm \sqrt{2 \pm \cdots \pm \sqrt{2 \pm \sqrt{2}}}}\Big).$$

(d) Montrer que le réseau de sous-corps de K_n est donné par le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & & & & K_n \arrow[dl, dash] \arrow[d, dash] \arrow[dr, dash] & \\
 & & & K_{n-1} \arrow[dr, dash] \arrow[dl, dotted, dash] & K_n^- \arrow[d, dash] & K_n^+ \arrow[dl, dash] \\
 & & K_4 \arrow[dl, dash] \arrow[d, dash] \arrow[dr, dash] & & K_{n-1}^+ \arrow[dl, dotted, dash] & \\
 & K_3 \arrow[dl, dash] \arrow[d, dash] \arrow[dr, dash] & K_4^- \arrow[d, dash] & K_4^+ \arrow[dl, dash] & & \\
K_2 \arrow[dr, dash] & K_3^- \arrow[d, dash] & K_3^+ \arrow[dl, dash] & & & \\
 & \mathbf{Q} & & & &
\end{tikzcd}$$

Si vous le souhaitez, vous pouvez remplacer l'un des exercices ci-dessus par l'exercice suivant.

Exercice ∞. Soient $K \hookrightarrow L \hookrightarrow M$ des corps.

(a) Si $\alpha \in M$ (resp. $t \in M$) est algébrique (resp. transcendant) sur K, alors on a $[K(\alpha) : K] = [K(\alpha, t) : K(t)]$.

(b) Si $K \hookrightarrow M$ est une extension de corps de type fini et $K \hookrightarrow L$ est une extension algébrique, alors $[L : K] < \infty$.

(c) Si $K \hookrightarrow M$ est une extension de corps de type fini, alors $K \hookrightarrow L$ l'est aussi.