Partiel Algèbre 2

Il n'est pas nécessaire de faire tout pour avoir la note maximale.

Exercice 1. Soit K un corps de caractéristique $\mathrm{car}(K) \neq 2$. Soient $a, b \in K^*$, $b \notin K^{*2}$. On note $K_1 = K(\sqrt{b})$ et $L = K(\alpha)$, où $\alpha^2 = a + \sqrt{b}$.

a) Déterminer $K^* \cap K_1^{*2}$.
b) Quand est-ce que l'on a $L = K_1$?
c) Quand est-ce qu'il existe $\beta \in L$ tel que $\beta^2 = a - \sqrt{b}$? [*On pourra considérer* $K_1^* \cap L^{*2}$.]
d) Déterminer $K^* \cap L^{*2}$.
e) Quand est-ce qu'il existe $b' \in K^*$ (à déterminer) tel que $L = K(\sqrt{b}, \sqrt{b'})$?

Exercice 2. Soit $n \geq 1$ un entier. Montrer :

a) Il existe $u_n \in \mathbf{R}[X]$ tel que $u_n \equiv X \pmod{(X^2+1)}$ et $u_n^2 + 1 \equiv 0 \pmod{(X^2+1)^n}$.
b) La classe $u_n \pmod{(X^2+1)^n} \in \mathbf{R}[X]/(X^2+1)^n$ est unique. Donner une formule pour $u_{n+1} \pmod{(X^2+1)^{n+1}} \in \mathbf{R}[X]/(X^2+1)^{n+1}$ en termes de $u_n \pmod{(X^2+1)^n}$.
c) Les formules

$$\alpha_n : \mathbf{C}[Y] \longrightarrow \mathbf{R}[X]/(X^2+1)^n, \qquad a + bi \mapsto a + bu_n, \qquad Y \mapsto X - u_n$$

définissent un morphisme surjectif de $\mathbf{R}$-algèbres.
d) α_n induit un isomorphisme de $\mathbf{R}$-algèbres $\overline{\alpha}_n : \mathbf{C}[Y]/(Y^n) \xrightarrow{\sim} \mathbf{R}[X]/(X^2+1)^n$.
e) Pour tout polynôme non constant $f \in \mathbf{R}[X]$ il existe un isomorphisme de $\mathbf{R}$-algèbres

$$\mathbf{R}[X]/(f) \xrightarrow{\sim} \prod_{j=1}^{M} \mathbf{R}[X]/(X^{a_j}) \times \prod_{k=1}^{N} \mathbf{C}[Y]/(Y^{b_k}) \qquad (a_j,\, b_k \geq 1).$$

f) Que se passe-t-il si l'on remplace $\mathbf{R}$ dans e) par un corps parfait (resp. par un corps qui n'est pas parfait) ?

Exercice 3. Soit A un groupe abélien, soit $n \geq 1$ un entier. On note $S(A, n)$ l'ensemble de tous les sous-groupes $X \subset A$ d'indice $(A : X) = n$. Montrer :

a) Si $(A : X) = n$, alors $nA \subset X$.
b) Il existe une bijection entre $S(A, n)$ et $S(A/nA, n)$.
c) Si $m \geq 1$ et $\mathrm{pgcd}(m, n) = 1$, alors il existe une bijection entre $S((\mathbf{Z}/mn\mathbf{Z})^N, mn)$ et $S((\mathbf{Z}/m\mathbf{Z})^N, m) \times S((\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})^N, n)$, pour tout $N \geq 1$.
d) $S(\mathbf{Z}^2, 2)$ contient trois éléments, à savoir :

$$\mathbf{Z}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \oplus \mathbf{Z}\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}, \qquad \mathbf{Z}\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} \oplus \mathbf{Z}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \qquad \mathbf{Z}\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} \oplus \mathbf{Z}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}.$$

e) Pour tout diviseur positif $a \mid n$ il existe précisement a éléments $X \in S(\mathbf{Z}^2, n)$ tels que $X \cap (\mathbf{Z} \oplus 0) = a\mathbf{Z} \oplus 0$ (donner une liste explicite de X). En déduire que

$$|S(\mathbf{Z}^2, n)| = \sum_{a \mid n} a$$

f) Expliciter les séries génératrices

$$\sum_{r=0}^{\infty} |S(\mathbf{Z}^2, p^r)|\, T^r, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} |S(\mathbf{Z}^2, n)|\, n^{-s},$$

où p est un nombre premier.
g) Que se passe-t-il si l'on remplace $\mathbf{Z}^2$ par $\mathbf{Z}^3$ (ou par $\mathbf{Z}^m$) ?