Marches aléatoires piégées aléatoirement

Romain Allez, mémoire réalisé sous la direction de Gérard Ben Arous

7 décembre 2009

Table des matières

Résumé

Ce mémoire porte sur des marches aléatoires piégées aléatoirement et constitue une synthèse de mon mémoire de M2 que j'ai réalisé sous la direction de Gérard Ben Arous. Dans un premier temps, nous faisons une synthèse des travaux effectués à partir du modèle de piège de Bouchaud. En particulier, nous définissons les limites d'échelle pour ce modèle en dimension $d = 1$ et en dimension $d \geqslant 2$. Dans un deuxième temps, on introduit une généralisation du modèle de pièges de Bouchaud. Ce modèle plus riche étend les possiblités pour les limites d'échelle. Nous illustrons les résultats de Gérard Ben Arous sur ce modèle par un exemple.

0.1 Introduction

Définissons le modèle de pièges introduit par Bouchaud.

Définition 0.1. Soit $\tau = (\tau_i : i \in \mathbb{Z}^d)$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ indépendantes et identiquement distribuées. La marche aléatoire à taux de sauts aléatoires (X, τ) est une marche aléatoire simple symétrique à temps continu, $X = \{(X_t) : t \in \mathbb{N}, X_0 = 0\}$, où le temps passé sur un site i avant de sauter sur un autre site est aléatoire de loi exponentielle de moyenne τ_i.

Remarque. La variable aléatoire τ est l'environnement. A chaque site $i \in \mathbb{Z}^d$, on associe un piège de profondeur τ_i.

On s'intéresse dans ce mémoire aux limites d'échelle des marches aléatoires piégées aléatoirement. Rappellons le résultat classique dans le cas de la marche aléatoire simple symétrique sur $\mathbb{Z}^d$.

Théorème 0.1. *Soit $X = (X_t)_{t\in\mathbb{N}}$ la marche aléatoire simple symétrique sur $\mathbb{Z}^d$. Alors, le processus $\varepsilon X_{[\varepsilon^{-2}t]}$ converge en loi quand ε tend vers 0, vers le mouvement brownien pour la topologie de la convergence uniforme dans l'espace des fonctions càdlàg.*

Pour les marches aléatoires piégées aléatoirement, la limite d'échelle n'est pas nécessairement le mouvement brownien. Sur un environnement de pièges homogène et peu profond (c'est-à-dire que la profondeur des pièges est homogène entre les différents pièges et d'espérance finie), on montre que le processus changé d'échelle converge vers le mouvement brownien en dimension 1. Les pièges sont peu profonds et de profondeur homogène donc n'agissent pas sur la limite d'échelle du processus. Par contre, sur un environnement de pièges inhomogène et profond (c'est-à-dire quand l'espérance de la profondeur est infinie), on trouve d'autres limites originales que nous décrivons dans la suite.

0.1.1 Sur un environnement homogène et peu profond

On s'intéresse ici au cas où

$$m := E[\tau_0] < \infty$$

Théorème 0.2. *Soit (X, τ) la marche aléatoire sur $\mathbb{Z}^d$ piégée aléatoirement sur l'environnement τ. Alors, τ presque sûrement, la loi du processus $\varepsilon X_{[m\varepsilon^{-2}t]}$ conditionnellement à τ, converge faiblement quand ε tend vers 0, vers le mouvement brownien pour la topologie de la convergence uniforme dans l'espace des fonctions càdlàg.*

0.1.2 Sur un environnement inhomogène et profond

Cela correspond au cas où

$$m := E[\tau_0] = \infty$$

On suppose en fait que la loi de τ_0 est à queue lourde, dans le domaine d'attraction d'une loi stable de paramètre $\alpha \in]0; 1[$, c'est-à-dire que

$$P(\tau_0 > x) = \frac{L(x)}{x^\alpha}$$

où L est une fonction à variations lentes au voisinage de l'infini. Sous ces hypothèses, la limite d'échelle d'une marche aléatoire piégée aléatoirement sur l'environnment τ n'est pas le mouvement brownien. Commençons par définir le processus qui est la limite d'échelle de la marche aléatoire piégée aléatoirement sur τ en dimension $d = 1$ et en dimension $d \geqslant 2$.

En dimension $d = 1$

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}, P)$ un espace de probabilité.

On rappelle au préalable l'existence du temps local pour le mouvement brownien : pour tout $t \geqslant 0$, il existe une fonction $l(t, .)$ de $\mathbb{R}- > \mathbb{R}_+$ telle que pour tout borélien A de $\mathbb{R}$:

$$\int_0^t 1_{\{B_s \in A\}} ds = \int_A l(t, y) dy$$

On peut voir $l(t, y)$ comme la densité du temps d'occupation en y du processus $(B_t)_{t\geqslant 0}$.

Rappellons aussi la définition d'une mesure de Poisson.

Définition 0.2. Soit μ une mesure sur $\mathbb{R}^d$. Une mesure de Poisson m d'intensité μ est une mesure aléatoire sur $\mathbb{R}$ telle que : - pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tous boréliens $A_1, A_2, ..., A_n$, les variables aléatoires $m(A_1), m(A_2), ..., m(A_n)$ sont indépendantes. - pour tout A borélien de $\mathbb{R}^d$, la variable aléatoire $m(A)$ suit une loi de Poisson de paramètre $\mu(A)$.

Rappellons enfin la définition d'un processus ponctuel de Poisson.

Définition 0.3. Soit μ une mesure sur $\mathbb{R}^d$. Un processus ponctuel de Poisson d'intensité μ est l'ensemble aléatoire constitué des atomes d'une mesure de Poisson d'intensité μ.

Définition 0.4. Soit (x_i, v_i) un processus ponctuel de Poisson inhomogène sur $\mathbb{R} \times (0, \infty)$ d'intensité $dx\alpha v^{-1-\alpha} dv$. On définit alors la mesure aléatoire à support discret $\rho = \sum_i v_i \delta_{x_i}$. Conditionellement à ρ, on définit, en notant B un $(\mathcal{F}_s)$-mouvement brownien en dimension 1 et $l(t, y)$ son temps local en y, la fonction :

$$\phi_\rho(t) = \int_{\mathbb{R}} l(t, y) \rho(dy)$$

et sa fonction inverse généralisée

$$\psi_\rho(t) = \inf\{s > 0 : \phi_\rho(s) > t\}$$

On définit enfin le processus $Z(s)$ par

$$Z(s) = B(\psi_\rho(s))$$

On appelle processus de diffusion FIN le processus $Z(s)$. On le note FIN_α. La mesure ρ est l'environnement aléatoire.

Remarque. Conditionellement à ρ, le processus de diffusion FIN est bien un processus de diffusion, c'est-à-dire qu'il est continu et fortement Markovien.

Ayant défini le processus de diffusion FIN, on peut énoncer le résultat démontré par Fontes, Isopi et Newman dans [FIN02] :

Théorème 0.3. *Soit (X, τ) la marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$ piégée aléatoirement sur l'environnement τ. Alors, il existe c_ε avec $c_\varepsilon - > 0$ quand $\varepsilon - > 0$ telle que la loi du processus $\varepsilon X_{[t/(\varepsilon c_\varepsilon)]}$ converge faiblement quand ε tend vers 0, vers la loi du processus de diffusion FIN_α pour la topologie de la convergence uniforme dans l'espace des fonctions càdlàg.*

Remarque. On a une expression explicite pour c_ε :

$$c_\varepsilon = (\inf\{t \geqslant 0 : P(\tau > t) \leqslant \varepsilon\})^{-1}$$

En dimension $d \geqslant 2$

Commençons par rappeller la définition d'un subordinateur stable :

Définition 0.5. Un subordinateur stable V_κ de paramètre κ est un processus de Lévy à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ (ce qui implique que ses trajectoires sont presque sûrement croissantes) qui vérifie, pour tout $t \geqslant 0$, la relation :

$$E[\exp(-\lambda V_\kappa(t))] = \exp(-t\lambda^\kappa)$$

Définition 0.6. Soit $\mathcal{B}$ un mouvement brownien sur $\mathbb{R}$. Soit V_κ un subordinateur stable de paramètre κ indépendant de $\mathcal{B}$. On définit la fonction inverse généralisée de V_κ en posant ${V_\kappa}^{-1}(t) = \inf\{u : V_\kappa(u) > t\}$ (cette fonction est continue à droite et croissante). On pose enfin :

$$FK_\kappa(t) = \mathcal{B}({V_\kappa}^{-1}(t))$$

Le processus FK_κ ainsi défini est appelé processus Fractional Kinetics de paramètre κ.

Remarque. Le processus Fractional Kinetics ne vérifie pas la propriété de Markov forte et n'est pas continu.

Théorème 0.4. *Soit (X, τ) la marche aléatoire sur $\mathbb{Z}^d$ $(d \geqslant 2)$ piégée aléatoirement sur l'environnement τ. Alors, τ presque sûrement, il existe $f(\varepsilon)$ avec $f(\varepsilon) - > 0$ quand $\varepsilon - > 0$ telle que la loi du processus $f(\varepsilon)X_{[t/(\varepsilon)]}$, conditionnellemnt à τ, converge faiblement quand ε tend vers 0, vers la loi du processus Fractional Kinetics de paramètre α pour la topologie de la convergence uniforme dans l'espace des fonctions càdlàg.*

Remarque. Introduisons l'horloge de la marche aléatoire X piégée aléatoirement sur l'environnement τ. On note $(S(u))_{u\in\mathbb{N}}$ cette variable aléatoire que l'on définit par

$$S(u) = \sum_{i=0}^{[u]-1} s_{Z(i)}(i)$$

où les variables aléatoires $(s_z(i))_{z\in\mathbb{Z}, i\in N}$ sont telles que $s_z(i), i \in N$ sont i.i.d de loi exponentielle de paramètre τ_z et où Z est la marche aléatoire simple symétrique associée à X. Avec cette définition, on a : $X(t) = Z(j)$ quand $S(j) \leqslant t \leqslant S(j+1)$.

Donnons l'intuition des résultats que l'on vient d'énoncer. L'espérance de la somme $S(u)$ est une somme de variables aléatoires de loi dans le domaine d'attraction d'une loi stable de paramètre α. En effet, $s_z(i)$ est de moyenne τ_z. Donc, si ces variables aléatoires étaient indépendantes, cette somme mise à l'échelle convergerait vers une loi stable. En dimension $d = 2$, la marche aléatoire simple symétrique est suffisament peu récurrente pour que l'espérance de la somme $S(u)$ ressemble à une somme de variables aléatoires indépendantes. La marche aléatoire simple ne revient pas trop souvent sur les mêmes sites. En dimension $d = 1$, la somme $S(u)$ ne ressemble par contre plus du tout à une somme de variables aléatoires indépendantes. En effet, la marche aléatoire simple en dimension 1 est très récurrente. Et alors, la limite d'échelle du processus construit à partir de l'espérance de la somme $S(u)$ n'est plus un subordinateur stable de paramètre α mais le processus $\phi(t)$. En fait, les pièges profonds marquent en quelque sorte la limite en dimension $d = 1$, c'est-à-dire que leur influence est déterminante. Tandis qu'en dimension $d = 2$, la marche aléatoire simple les visite suffisament peu souvent pour qu'elle ne s'en souvienne pas et que seule l'influence en moyenne de tous les pièges soit déterminante pour la limite d'échelle.

0.2 Un modèle plus général

On s'intéresse maintenant à une généralisation du modèle de piège de Bouchaud en dimension 1.

Définition 0.7. Soit Z une marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}$. Soit $(\nu_z, z \in \mathbb{Z})$ une famille de variables aléatoires à valeurs dans les mesures de probabilité sur $\mathbb{R}_+$. Conditionellement à $(\nu_z, z \in \mathbb{Z})$, on définit une famille de variables aléatoires $(s_z(i))_{z\in\mathbb{Z},i\in\mathbb{N}}$ indépendantes et telle que la loi de $s_z(i)$ soit ν_z pour tout $z \in \mathbb{Z}$ et pour tout $i \in \mathbb{N}$. On définit alors la variable aléatoire $S(u)$ par

$$S(u) = \sum_{i=0}^{[u]-1} s_{Z(i)}(i)$$

On pose $X(t) = Z(j)$ quand $S(j) \leqslant t \leqslant S(j+1)$. Le processus $(X(t))_{t\in[0,T]}$ est appelé marche aléatoire piégée aléatoirement sur l'environnement $(\nu_z, z \in \mathbb{Z})$.

De façon équivalente, le processus X attend un temps s_z de loi ν_z sur le site z (indépendament de tout le reste) avant de sauter sur le site $z-1$ avec probabilité $1-p$ ou sur le site $z+1$ avec probabilité p. On remarquera que le processus X n'est pas forcément Markovien.

Dans toute la suite, on supposera que les mesures aléatoires $\nu_z, z \in \mathbb{Z}$ sont indépendantes et identiquement distribuées. On notera P leur distribution et E l'espérance sous la mesure de probabilité P (P est une mesure de probabilité sur l'ensemble des mesures de probabilité sur $\mathbb{R}_+$). On notera

$$m_\nu = \int t\nu(dt)$$

et m_z pour m_{ν_z}.

Remarque. Sur un environnement de pièges homogène et peu profond, on montre encore que le processus changé de temps et d'échelle converge vers le mouvement brownien en dimension 1. Les pièges sont peu profonds et de profondeur homogène donc n'agissent pas sur la limite d'échelle du processus. Par contre, sur un environnement de pièges inhomogène et profond, on trouve, selon les hypothèses supplémentaires que l'on fait sur la loi de l'environnement aléatoire, deux limites distinctes : le mouvement brownien piégé aléatoirement et le processus Fractional Kinetics. On voit que ce modèle plus général permet de trouver la limite d'échelle Fractional Kinetics en dimension $d = 1$. Le simple modèle de Bouchaud ne permettait pas de trouver un modèle discret correspondant au processus Fractional Kinetics alors que celui-ci est tout à fait bien défini en dimension 1. Le mouvement brownien piégé aléatoirement est bien sûr un mouvement brownien changé de temps mais qui ne ressemble finalement pas au processus de FIN diffusion ni d'ailleurs au processus de Fractional Kinetics (il porte sa propre horloge ; celle-ci dépend de sa trajectoire). Plus la profondeur du piège que le processus visite est grande, plus le temps qu'il reste sur ce piège est grand. En fait, la participation individuelle d'un piège très profond donné est non négligeable et c'est la participation des pièges les plus profonds qui compte. Pour le processus Fractional Kinetics, c'est très différent. L'horloge est indépendante du mouvement brownien et à accroissements stationnaires et indépendants. La participation des pièges les plus profonds est négligeable et c'est la participation moyenne (sur tous les pièges) qui compte. Ce processus apparaît comme limite d'échelle lorsque l'environnement est inhomogène et profond et que le processus "ne visite que peu de fois" chaque piège profond. Par exemple, en dimension 2, nous avons vu qu'il est la limite d'échelle du processus défini par le modèle de Bouchaud (voir l'article de Ben Arous et Černy [BČ06]). Dans ce modèle, le processus suit une trajectoire récurrente mais moins récurrente que dans le cas de la dimension 1 (la marche aléatoire simple symétrique est transiente en dimension > 2) et donc ne revient "pas trop souvent" sur chaque piège profond. C'est pourquoi la participation d'un piège profond donné est négligeable. Dans le modèle de Bouchaud en dimension 1, chaque piège profond est visité une infinité de fois (la marche aléatoire simple symétrique est "très" récurrente en dimension 1). Ainsi, un piège profond donné a une participation active et c'est pourquoi la limite d'échelle sera le mouvement brownien piégé aléatoirement dans ce cas.

0.3 Exemples

0.3.1 Un exemple avec une transition de phase

Soit τ_0 une variable aléatoire à valeurs dans $(1, +\infty)$ qui admet une densité par rapport à la mesure de Lebesgue valant

$$p(x) = \alpha x^{-1-\alpha}$$

On vérifie que

$$\lim_{x \to \infty} x^\alpha P[\tau_0 > x] = 1$$

Soit $\tau = (\tau_z, z \in \mathbb{Z})$ une famille de variables aléatoires *i.i.d.* de même loi que τ_0.

Soit $\beta \geqslant 0$, on définit, pour tout $z \in \mathbb{Z}$, une mesure aléatoire ν_z par

$$\nu_z = (1 - {\tau_z}^{-\beta})\delta_1 + {\tau_z}^{-\beta}\delta_{\tau_z}$$

On définit maintenant le processus X comme une marche aléatoire piégée aléatoirement sur l'environnement $(\nu_z, z \in \mathbb{Z})$.

On pose

$$\gamma = \frac{\alpha}{1-\beta}$$

Théorème 0.5. *Si $\gamma \geqslant 1$ (ou, de façon équivalente $\alpha + \beta \geqslant 1$), alors on a*

$$m := E[m_0] < \infty$$

et le processus $\varepsilon X(m\varepsilon^{-2}.)$ converge en loi vers le mouvement brownien dans l'espace $D([0,T])$ muni de la topologie de la convergence uniforme.

Si $\gamma < 1$ et $\alpha > \beta$ alors, en posant $q_0(\varepsilon) = \varepsilon^{1+1/\gamma}$, le processus $\varepsilon X(q_0(\varepsilon)^{-1}.)$ converge en loi vers le processus FIN_γ dans l'espace $D([0,T])$ muni de la topologie de la convergence uniforme.

Si $\gamma < 1$ et $\alpha < \beta$ alors, en posant $\kappa = \alpha + \beta$ et $q(\varepsilon) = \Delta_{\alpha,\beta}\varepsilon^{2/\kappa}$ (on explicitera la valeur de la constante $\Delta_{\alpha,\beta}$ au cours de la preuve), le processus $\varepsilon X(q(\varepsilon)^{-1}.)$ converge en loi vers le processus FK_κ dans l'espace $D([0,T])$ muni de la topologie de la convergence uniforme.

Si $\gamma < 1$ et $\alpha = \beta < 1/2$ alors, en posant $q_0(\varepsilon) = \varepsilon^{1+1/\gamma}$, le processus $\varepsilon X(q_0(\varepsilon)^{-1}.)$ converge en loi vers un mouvement brownien piégé aléatoirement dans l'espace $D([0,T])$ muni de la topologie de la convergence uniforme. La mesure de probabilité qui correspond à ce mouvement brownien piégé aléatoirement est la mesure δ_f où f est la fonction définie par $f(\lambda) = 1 - e^{-\lambda}$, c'est-à-dire l'exposant de Lévy-Khintchine d'un processus de Poisson.

Remarque. Discussion heuristique. Si $\beta = 0$, le modèle correspond au modèle de Bouchaud sur $\mathbb{Z}$. Dans ce cas, le processus changé de temps et d'échelle converge en loi vers le processus de FIN diffusion de paramètre α (voir l'article de Fontes, Isopi et Newman [FIN02]). On peut donc conjecturer que si β est suffisament petit, la scaling limit sera encore le processus de FIN diffusion. Par contre, si β est grand, la probabilité d'explorer des pièges profonds est très petite. Le processus aura donc tendance à ne pas visiter souvent un piège profond donné. Un piège profond donné n'aura pas d'influence individuellement car peu visité par le processus. Cela fait penser au comportement du processus dans le cas du modèle de Bouchaud en dimension supérieure ou égale à deux. Le processus ne revient pas très souvent sur les pièges profonds (la marche aléatoire simple symétrique en dimension 2 est "peu" récurrente). On conjecture donc que si β est suffisament grand, la limite d'échelle sera le processus Fractional Kinetics. Le cas critique correspond à $\alpha = \beta$. On arrive à déterminer la nature du cas critique. On est dans le domaine du mouvement brownien piégé aléatoirement.

0.3.2 Le modèle de peigne

Définition 0.8. Soit $(N_z, z \in \mathbb{Z})$ une famille de variables aléatoires *i.i.d.* à queue lourde vérifiant

$$P[N_0 = n] = \zeta(1+\alpha)^{-1} n^{-1-\alpha}, \alpha > 0$$

Pour $z \in \mathbb{Z}$, soit G_z le segment de longueur N_z contenant N_z sites. On appelle $\mathcal{G}_{peigne}$ le graphe en forme de peigne où les dents du peigne sont les $G_z, z \in \mathbb{Z}$. On considère X la marche aléatoire symétrique sur le graphe $\mathcal{G}_{peigne}$ et on note X_{peigne} la projection de X sur l'axe $\mathbb{Z}$.

Le modèle ainsi défini, la "scaling limit" est soit le mouvement brownien, soit le processus Fractional Kinetics. Lorsque $\alpha \geqslant 1$, les dents sont "courtes" et le processus changé de temps et d'échelle converge vers le mouvement brownien. Lorsque $\alpha < 1$, les dents sont longues mais le processus ne visite pas les pièges en entier à cause de la structure du graphe. Le processus changé de temps et d'échelle converge vers le processus Fractional Kinetics.

On peut enrichir la définition du modèle de peigne pour pouvoir retrouver la limite type "mouvement brownien piégé aléatoirement". On introduit un drift le long des dents du peigne qui pousse le processus "au fond des pièges", le processus est alors contraint de visiter les pièges en quasi totalité et le processus de FIN diffusion va apparaître parmi les "scaling limits" possibles.

On indice par $(z,n), z \in \mathbb{Z}, 0 \leqslant n < N_z$ tous les sites du graphe $\mathcal{G}_{peigne}$ de façon à ce que les sites de l'axe principale ait une deuxième coordonnée nulle. Quand X_{peigne} n'est pas sur l'axe principale, il suit une marche aléatoire driftée vers le bas, c'est-à-dire que pour tout $0 < n < N_z$, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[X_{peigne}(k+1) = (z,n+1) | X_{peigne}(k) = (z,n)] &= \frac{1+g(N_z)}{2} \\
\mathbb{P}[X_{peigne}(k+1) = (z,n-1) | X_{peigne}(k) = (z,n)] &= \frac{1-g(N_z)}{2} \\
\mathbb{P}[X_{peigne}(k+1) = (z,N_z-1) | X_{peigne}(k) = (z,N_z)] &= 1
\end{aligned}$$

Et si $X_{peigne} = (z,0)$, il saute sur un des trois sites $(z-1,0), (z+1,0)$ et $(z,1)$ avec égale probabilité.

On voit dans les démonstrations que un choix "sympathique" pour g serait

$$g(N) = \beta \frac{\ln N}{N}$$

pour $\beta > 0$.

Montrons que notre modèle général s'applique à ce cas particulier. Soit V la marche aléatoire sur $[0,N] \cap \mathbb{Z}$ réfléchie sur la frontière N définie par : $V_0 = 1$ et

$$V_n = \begin{cases} V_{n-1} + \xi_n & si \quad V_{n-1} < N \\ V_{n-1} - 1 & si \quad V_{n-1} = N \end{cases}$$

où les ξ_i sont des variables aléatoires de Bernoulli vérifiant

$$\mathbb{P}(\xi_1 = 1) = p = 1 - \mathbb{P}(\xi_1 = -1), p \leqslant 1/2$$

Soit $\tau(N) = \inf\{n \geqslant 0 : V_n = 0\}$. On note ϑ_N la loi de $\tau(N)$ lorsque l'on prend $p = (1+g(N))/2$. On note $\nu'_z = \vartheta_{N_z}$. Maintenant, soit ν_z la loi de la variable aléatoire

$$\sum_{k=1}^{K} \tau_i$$

où les τ_i sont des variables aléatoires *i.i.d.* de loi ν'_z et où K est une variable aléatoire de loi géométrique de paramètre $2/3$.

Il est clair que X_{peigne} est une marche aléatoire piégée aléatoirement sur l'environnement $(\nu_z, z \in \mathbb{Z})$.

On note comme d'habitude $m_\nu = \int t\nu(dt)$ et $m = E[m_\nu]$.

On peut maintenant énoncer le résultat.

Théorème 0.6. *Si $\alpha \geqslant 1$ et $1 + 2\beta < \alpha$, alors le processus $\varepsilon X_{peigne}(m\varepsilon^{-2}.)$ converge en loi vers le mouvement brownien dans l'espace $D([0,T])$ muni de la topologie de la convergence uniforme.*

Si $\alpha \geqslant 1$ et $1 + 2\beta > \alpha$, alors, en posant $\gamma = \alpha/(1+2\beta)$ et $q_0(\varepsilon) = \varepsilon^{1+1/\gamma}$, le processus $\varepsilon X_{peigne}(q_0(\varepsilon)^{-1}.)$ converge en loi vers le processus FIN_γ dans l'espace $D([0,T])$ muni de la topologie de la convergence uniforme.

Si $\alpha < 1$, on pose $\kappa = (1+\alpha)/2$. De plus, si $\beta = 0$ alors on pose $q_{FK}(\varepsilon) = \varepsilon^{2/\kappa}$ et si $\beta > 0$, on définit les quantités $d_{FK}(\varepsilon)$ et $q_{FK}(\varepsilon)$ par

$$\frac{d_{FK}(\varepsilon)^{2\kappa}}{\ln(d_{FK}(\varepsilon))} = \varepsilon^{-2}, q_{FK}(\varepsilon) = \frac{\ln^2 d_{FK}(\varepsilon)}{d_{FK}(\varepsilon)^{2+2\beta}}$$

Alors, dans les deux cas, le processus $\varepsilon X_{peigne}(q_{FK}(\varepsilon)^{-1}.)$ converge en loi vers le processus FK_κ dans l'espace $D([0,T])$ muni de la topologie de la convergence uniforme.

Remarque. Discussion heuristique. Discutons d'abord le cas où le drift est nul. Si $\alpha > 1$, les dents du peigne sont courtes et la limite d'échelle sera le mouvement brownien. Si $\alpha < 1$, on peut se demander si on sera dans le domaine du processus fractional kinetics ou dans le domaine du mouvement brownien piégé aléatoirement. Mais, vu la structure du graphe, le processus ne va pas jusqu'au fond du piège et ressort assez vite si le drift est nul. Le processus ne se souvient pas de la profondeur des pièges qu'il visite. Ainsi, la participation d'un piège très profond donné est négligeable devant la participation moyenne de tous les pièges. On est donc dans le domaine du processus fractional kinetics. En plus, on peut remarquer que le processus, lorsqu'il est sur l'axe principal, a tendance à ne pas descendre dans le piège ce qui favorise l'appartenance au domaine fractional kinetics. Discutons maintenant le cas où le drift est non nul. Si $\alpha > 1$, les dents sont courtes et le drift reste relativement grand (on rappelle qu'il décroit en $\frac{\ln N}{N}$). Donc si β est grand, la profondeur des pièges augmente et nous ne sommes plus forcément dans le domaine du mouvement brownien. Dans ce cas, c'est la participation individuelle des pièges profonds qui est privilègiée. En effet, si le processus descend dans un piège, le drift important va l'entraîner jusqu'au fond du piège et le processus va rester longtemps dans ce piège profond. Maintenant, si $\alpha < 1$, les dents sont très longues et le drift est petit à cause de la décroissance en $\frac{\ln N}{N}$. On se retrouve ainsi dans le cas d'un drift nul. Le processus a tendance à ne visiter que très partiellement les pièges et c'est une participation moyenne de tous les pièges qui compte plus qu'une participation individuelle des p ! ièges les plus profonds.

Bibliographie

[Ber96] J.Bertoin, Lévy processes, Cambridge Tracts in Mathematics, vol.121, Cambridge University Press, Cambridge, 1996.

[BČ06] G.Ben Arous et J. Černý, Scaling limit for trap models on $\mathbb{Z}^d$, Annales of Probability, 2006.

[BČ06b] G.Ben Arous et J. Černý, Dynamics of Traps Models, Course at the Les Houches Summer School on Mathematical Statistical Physics, Elsevier 2006.

[BČ05] G.Ben Arous et J. Černý, Bouchaud's model exhibits two different aging regimes in dimension one, Ann. Appl. Probab., Vol 15, No. 2, pp 1161-1192, 2005.

[Dur96] Richard Durrett, Stochastic Calculus : a practical introduction, Boca Raton, Florida : CRC Press, 1996.

[F71] W.E.Feller, An introduction to probability theory and its applications, second edition, vol.2. Wiley, New York, 1971.

[FIN02] L.R.G. Fontes, M.Isopi et C.M.Newman (2002). Random walk with strongly inhomogeneous rates and singular diffusions : convergence, localization and aging in one dimension, Ann.Probab.30 (2002), no.2, 579-604.

[IM65] K. Itô et H.P.McKean, Jr., Diffusion processes and their sample paths, Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Band 125, Academic Press Inc., Publishers, New york, 1965.

[Sto63] C.Stone, Limit theorems for random walks, birth and death processes, and diffusion processes, Illinois J.Math.7 (1963), 638-660.

[Var01] S.R.S. Varadhan, Probability theory, Courant Institut of Mathematical Sciences ; Providence, R.I. : American Mathematical Society, c2001.

[Whi02] W.Whitt, Stochastic-process limits, Springer Series in operation Research, Springer-Verlag, New York, 2002, An introduction to stochastic-process limits and their applications to queues.