École Normale Supérieure **Analyse fonctionnelle**

2013-2014

Examen - 28 mai
Barême approximatif par exercice : 5 – 7 – 13
Documents et matériel électronique interdits.

Exercice 1 Soit H un espace de Hilbert.

1. Soit $A : D(A) \subset H \longrightarrow H$ un opérateur symétrique. Montrer que $\mathrm{Ker}(A+i) = \{0\}$. Si A est fermé, montrer que $\mathrm{Im}(A+i)$ est fermé.

2. Soit C une extension symétrique de A. Si $\mathrm{Im}(A+i) = \mathrm{Im}(C+i)$, montrer que $C = A$.

3. Si $\mathrm{Im}(A+i) = H$ mais $\mathrm{Im}(A-i) \neq H$, montrer que A n'a aucune extension autoadjointe.

Soit $H = \ell^2(\mathbb{N})$,

$$D(A) = \{u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{N}), \exists N, u_n = 0 \text{ pour } n > N \text{ et } \sum_n u_n = 0\}.$$

Pour $u \in D(A)$, on définit $Au \in H$ par

$$(Au)_n = i\left[\sum_{k=0}^{n-1} u_k - \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k\right].$$

4. Montrer que $D(A)$ est dense et que A est symétrique.

5. Montrer que $\mathrm{Im}(A+i)$ est dense.

6. Montrer que $(1,0,\ldots,0,\ldots) \in D(A^*)$ et que $(A^*+i)(1,0,\ldots,0,\ldots) = 0$. Montrer que A n'a pas d'extension autoadjointe.

Exercice 2. Dans cet exercice, on note $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d) = C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$, $\mathcal{E}(\mathbb{R}^d) = C^\infty(\mathbb{R}^d)$, et $*$ le produit de convolution. Pour $\varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^d)$ et $h \in \mathbb{R}^d$, on note $(\tau_h\varphi)(x) = \varphi(x-h)$.

1. Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ et $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$. Rappeler la définition de $T*\varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^d)$ (on pourra pour la suite admettre que l'application $L : \varphi \mapsto T*\varphi$ est continue de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ dans $\mathcal{E}(\mathbb{R}^d)$). Vérifier que $L \circ \tau_h = \tau_h \circ L$ pour tout $h \in \mathbb{R}^d$.

2. Réciproquement, soit L une application linéaire continue de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ dans $\mathcal{E}(\mathbb{R}^d)$, qui commute avec tous les τ_h. Posons

$$\langle T, \varphi\rangle = (L\check{\varphi})(0)$$

où $\check{\varphi}(x) = \varphi(-x)$. Montrer que $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ et que $L\varphi = T * \varphi$ pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$.

Les questions suivantes peuvent être traitées indépendamment des précédentes.

3. Montrer que le laplacien $\Delta : H^2(\mathbb{R}^d) \subset L^2(\mathbb{R}^d) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^d)$ est auto-adjoint. On exprimera le groupe unitaire à un paramètre associé $S(t) = e^{it\Delta}$ grâce à la transformée de Fourier.

4. Soit $\psi \in L^2(\mathbb{R}^d)$. Donner l'expression de la mesure spectrale μ_ψ pour le laplacien (i.e. la mesure μ_ψ telle que $\int_{\mathbb{R}} e^{itx} d\mu_\psi(x) = \langle \psi, S(t)\psi\rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$).

On dit que $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ est radiale si $\langle T, \varphi \circ U\rangle = \langle T, \varphi\rangle$ pour toute isométrie linéaire $U \in O(\mathbb{R}^d)$ et pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$.

5. Pour $g \in L^\infty(\mathbb{R})$, définir un opérateur $g(\Delta)$ borné sur $L^2(\mathbb{R}^d)$, ayant la propriété

$$\langle \psi, g(\Delta)\psi\rangle_{L^2} = \int_{\mathbb{R}} g(x) d\mu_\psi(x)$$

pour tout $\psi \in L^2(\mathbb{R}^d)$. Montrer qu'il existe une distribution *tempérée* et *radiale* T telle que, pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, on ait

$$g(\Delta)\varphi = T * \varphi.$$

6. Réciproquement, soit $L \in \mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^d))$. On suppose qu'il existe une distribution tempérée et radiale T telle que, pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, on ait

$$L\varphi = T * \varphi.$$

Montrer que L est de la forme $L = g(\Delta)$ avec $g \in L^\infty(\mathbb{R})$.

Problème.

Soit $p \in C(\mathbb{R})$ tel que $p \geq 0$ sur $\mathbb{R}$. On définit l'espace

$$V = \{v \in H^1(\mathbb{R}), \int_{\mathbb{R}} p|v|^2 < +\infty\}$$

muni du produit scalaire $\langle u, v\rangle_V = \int_{\mathbb{R}} (\overline{u'}v' + \overline{u}v + p\overline{u}v)$, et de la norme $\|.\|_V$ correspondante. On admettra que V est un espace de Hilbert séparable et que $C_c^\infty(\mathbb{R})$ est dense dans V.

On notera aussi $\langle \cdot, \cdot\rangle_2$ le produit scalaire dans $L^2(\mathbb{R})$, et $\|\cdot\|_2$ la norme.

On suppose qu'il existe $\delta > 0$ et $A > 0$ tels que $p(x) \geq \delta$ si $|x| \geq A$. On note a la forme sesquilinéaire $a(u, v) = \int_{\mathbb{R}} (\overline{u'}v' + p\overline{u}v)$.

1. Si u est dans $H^1(\mathbb{R})$, montrer que sa transformée de Fourier est dans $L^1(\mathbb{R})$.

2. Montrer que a est coercive sur V, c'est-à-dire qu'il existe $\beta > 0$ tel que $a(u,u) \geq \beta \|u\|_V^2$ pour tout $u \in V$. En déduire que, pour tout $f \in L^2(\mathbb{R})$, il existe un unique $u \in V$ tel que

$$a(u,v) = \int_{\mathbb{R}} \overline{f} v \text{ pour tout } v \in V. \tag{1}$$

3. Si $f \in L^2(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R})$, montrer que la fonction u de la question précédente vérifie

$$\begin{cases} u \text{ est de classe } C^2, \\ -u'' + pu = f, \\ u(x) \longrightarrow 0 \text{ quand } |x| \longrightarrow +\infty. \end{cases} \tag{2}$$

Fixons $\chi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ une fonction positive valant 1 au voisinage de 0. On note $\chi_n(x) = \chi(x/n)$.

4. Soit u une fonction qui vérifie les conditions (2). Montrer que

$$a(\chi_n u, \chi_n u) = \int \overline{f} \chi_n^2 u + \int (\chi_n')^2 u^2.$$

En déduire que $u \in V$ et qu'on a (1).

Dans la suite, on suppose que $\lim_{|x| \longrightarrow +\infty} p(x) = +\infty$.

5. Montrer que l'injection de V dans $L^2(\mathbb{R})$ est compacte. On pourra démontrer l'inégalité

$$\|\tau_h u - u\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq h \|u'\|_{L^2(\mathbb{R})}$$

valable pour tout $u \in H^1(\mathbb{R})$, en notant $\tau_h u(x) = u(x-h)$.

6. Pour $f \in L^2(\mathbb{R})$, on note $u = Tf$ la solution de (1). Montrer que $T : L^2(\mathbb{R}) \longrightarrow L^2(\mathbb{R})$ est compact et autoadjoint.

7. Montrer qu'il existe une suite $(\lambda_n)_{n \geq 1}$ de nombres positifs, $\lambda_n \longrightarrow +\infty$, et une base hilbertienne (e_n) de $L^2(\mathbb{R})$ telle que pour tout n,

$$e_n \in V \cap C^2(\mathbb{R})$$

$$-e_n'' + pe_n = \lambda_n e_n$$

Dans la suite, on ordonne les λ_n en ordre croissant :

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_n \leq \lambda_{n+1} \ldots$$

(par définition, chaque valeur propre est répétée selon sa multiplicité).

8. Pour $u \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, comparer $a(u, e_n)$ et $\langle u, e_n \rangle_2$. Si $u \in L^2(\mathbb{R})$, montrer que

$$u \in V \Longleftrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n |\langle u, e_n \rangle_2|^2 < +\infty.$$

9. Montrer que λ_1 est donné par le principe variationnel suivant :

$$\lambda_1 = \inf \left\{ \frac{a(u,u)}{\|u\|_2^2}, u \in V, u \neq 0 \right\}.$$

Montrer que l'inf est atteint, et que si v est une fonction qui réalise le minimum, on a $-v'' + pv = \lambda_1 v$ et v de classe C^2.

10. Expliquer pourquoi les zéros d'une solution non triviale de l'équation

$$-v'' + pv = \lambda_1 v$$

sont isolés.

11. Soit v une solution non triviale de $-v'' + pv = \lambda_1 v$, on suppose que v s'annule en un point $a \in \mathbb{R}$. On définit

$$\tilde{v} = v \mathbb{1}_{[a,+\infty)}.$$

Montrer que $\tilde{v} \in V$, que $a(\tilde{v}, \tilde{v}) = \lambda_1 \|\tilde{v}\|_2^2$, et en déduire une contradiction.

12. Montrer que l'espace des solutions de $-v'' + pv = \lambda_1 v$ est de dimension 1, et que toute solution non nulle ne s'annule pas.