
**ANALYSE DES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES
PARTIELLES
QUELQUES EXEMPLES EN MÉCANIQUE DES
FLUIDES**

**ANALYSE DES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES
QUELQUES EXEMPLES EN MÉCANIQUE DES FLUIDES**

La plupart des systèmes physiques se modélisent par des équations aux dérivées partielles non linéaires. L'objectif de ce cours est d'introduire des techniques d'analyse permettant d'étudier et de résoudre de telles équations.

Afin de mettre en application ces techniques sur un problème issu de la physique, nous avons choisi d'étudier de manière détaillée deux systèmes de la mécanique des fluides incompressibles homogènes.

Les équations de Navier-Stokes incompressibles décrivent l'évolution temporelle d'un fluide incompressible dans un domaine fixe Ω de \mathbb{R}^d ($d = 2$ ou 3). Ce fluide peut être de l'eau, ou de l'air (si la vitesse de l'écoulement reste petite devant la vitesse du son). Diverses variantes de ces équations se retrouvent en météorologie, océanographie, magnétohydrodynamique ...

Décrivons maintenant ces équations. La densité du fluide est supposée être une constante indépendante du temps et de l'espace. La vitesse de l'écoulement est donnée par le champ de vecteurs $v(t, x) = (v^1(t, x), \dots, v^d(t, x))$ qui dépend du temps et de l'espace, et qui prend ses valeurs dans \mathbb{R}^2 ou \mathbb{R}^3 suivant que l'on étudie un écoulement bidimensionnel ou tridimensionnel.

Comme la densité du fluide est constante, les volumes infinitésimaux sont préservés par le flot, ce qui impose que la divergence du champ de vitesse est nulle :

$$\operatorname{div} v = \sum_{j=1}^d \partial_{x_j} v^j = 0.$$

D'autre part une particule de fluide subit :

- une force de frottement due à la viscosité du fluide, modélisée dans notre cas de façon phénoménologique par

$$\nu \Delta v$$

où ν est la viscosité du fluide considéré, et $\Delta = \sum_{j=1}^d \partial_{x_j}^2$,

- une force de pression, qui s'écrit

$$-\nabla p$$

où $p(t, x)$ est la pression qui règne dans le fluide.

L'accélération de la particule de fluide considérée est alors

$$\frac{Dv}{Dt} = \nu \Delta v - \nabla p$$

où Dv/Dt est la dérivée particulaire, ce qui donne

$$\partial_t v + v \cdot \nabla v - \nu \Delta v = -\nabla p.$$

où le terme d'advection est défini par $v \cdot \nabla = \sum_{j=1}^d v^j \partial_{x_j}$.

Le système ainsi obtenu

$$(NS) \quad \begin{cases} \operatorname{div} v = 0, \\ \partial_t v + v \cdot \nabla v - \nu \Delta v = -\nabla p, \end{cases}$$

est une équation d'évolution, c'est-à-dire qu'une variable (à savoir t le temps) y joue un rôle particulier. À noter cependant qu'il n'existe pas d'expression simple et utilisable de $\partial_t p$. La pression est en quelque sorte définie implicitement par la contrainte $\operatorname{div} v = 0$ et "s'adapte" pour que l'on ait en permanence $\operatorname{div} v = 0$. En particulier la pression est une inconnue du système au même titre que v .

Ces équations doivent être complétées par

- une donnée initiale: valeur de v à $t = 0$,
- une donnée au bord: valeur de v sur le bord de Ω . Ici on supposera que le fluide adhère à la paroi. Par conséquent $v = 0$ sur $\partial\Omega$.

Les équations d'Euler incompressibles décrivent l'évolution d'un fluide idéal, c'est-à-dire de viscosité nulle

$$(NS) \quad \begin{cases} \operatorname{div} v = 0, \\ \partial_t v + v \cdot \nabla v = -\nabla p, \end{cases}$$

Bien qu'assez semblables au premier abord, les systèmes (NS) et (E) ont des propriétés mathématiques très différentes.

- Dans (NS) , la dérivée spatiale d'ordre le plus élevé apparaît dans le terme de viscosité : l'équation est parabolique, c'est-à-dire qu'on s'attend à ce qu'elle se comporte un peu comme l'équation de la chaleur

$$\partial_t \phi - \nu \partial_{xx} \phi = 0.$$

L'équation d'Euler (E) ne comporte pas ce terme régularisant, c'est une équation hyperbolique qui propage les singularités comme l'équation de transport

$$\partial_t \phi + a \partial_x \phi = 0,$$

et qui pourrait éventuellement en créer comme l'équation de Hopf

$$\partial_t \phi + \phi \partial_x \phi = 0.$$

- Comme l'équation (E) est une équation aux dérivées partielles d'ordre moins élevé, on ne s'attend pas non plus à pouvoir prescrire le même nombre de conditions aux bords que pour (NS) . On verra par la suite que la condition de Dirichlet n'est pas admissible pour (E) , et qu'on ne peut imposer qu'une condition de flux du type $u \cdot n = 0$, où n est la normale au bord $\partial\Omega$.
- Pour de telles conditions de bord (condition de Dirichlet homogène pour le système (NS) , condition de flux nul pour le système (E)), un calcul formel basé sur la formule de Green montre qu'on a la conservation de l'énergie

$$\frac{1}{2} \|u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \nu \int_0^t \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 = \frac{1}{2} \|u(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 \text{ pour les solutions de } (NS);$$

$$\frac{1}{2} \|u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 = \frac{1}{2} \|u(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 \text{ pour les solutions de } (E).$$

Le terme provenant de la dissipation visqueuse donne donc une estimation de régularité qui n'a pas d'analogue dans le cas des fluides idéaux.

Malgré la simplicité apparente de ces équations, leur étude mathématique est donc loin d'être totalement achevée. Si en dimension 2 (pour différentes raisons) on dispose d'une bonne théorie d'existence et d'unicité de solutions régulières pour (NS) et (E) , le cas de la dimension 3 reste essentiellement ouvert, et de nombreuses choses restent à comprendre!

TABLE DES MATIÈRES

| | |
|---|----|
| Partie I. Equations de Navier-Stokes pour les fluides incompressibles visqueux | 1 |
| 1. Le problème de Stokes | 3 |
| 1.1. Cadre fonctionnel..... | 3 |
| 1.2. Structure spectrale et résolution du problème d'évolution..... | 7 |
| 2. Solutions de Leray | 13 |
| 2.1. Approximation de Galerkin..... | 14 |
| 2.2. Compacité..... | 16 |
| 3. Stabilité et unicité | 19 |
| 3.1. Le cas bidimensionnel..... | 19 |
| 3.2. Unicité fort-faible..... | 22 |
| 3.3. Singularités pour les équations de Navier-Stokes..... | 25 |
| Partie II. Equations d'Euler pour les fluides incompressibles non visqueux | 27 |
| 4. Solutions fortes | 29 |
| 4.1. Estimations d'énergie..... | 29 |
| 4.2. Existence et unicité locales..... | 32 |
| 4.3. Solutions dissipatives..... | 36 |
| 5. Solutions 2D à vorticité bornée | 37 |
| 5.1. Définition du flot..... | 38 |
| 5.2. Le théorème de Yudovich..... | 40 |

| | |
|--|--------|
| 6. Nappes de tourbillon | 43 |
| 6.1. Une estimation d'intégrale singulière..... | 44 |
| 6.2. Fonction maximale associée à la vorticité..... | 46 |
| 6.3. Le théorème de Delort..... | 49 |
| Partie III. A propos de la limite non visqueuse | 53 |
| 7. Méthode d'énergie | 55 |
| 7.1. Convergence dans des domaines sans bord..... | 56 |
| 7.2. Critère de Kato..... | 57 |
| 8. Couches de Prandtl | 63 |
| 8.1. Techniques de couche limite..... | 63 |
| 8.2. Non validité de l'approximation de couches limites..... | 64 |
| 8.3. Instabilité des équations d'Euler..... | 66 |
| 8.4. Instabilité des équations de Prandtl..... | 70 |
| 9. Stabilisation par rotation | 73 |
| 9.1. Fluides tournants..... | 73 |
| 9.2. Couches limites d'Ekman..... | 75 |
| 9.3. Analyse double-échelle et convergence faible..... | 77 |
| A. Quelques rappels d'analyse fonctionnelle | 81 |
| A.1. Topologie et calcul différentiel..... | 81 |
| A.2. Espaces hilbertiens..... | 82 |
| A.3. Espaces de Sobolev..... | 82 |
| Bibliographie | 83 |

PARTIE I

EQUATIONS DE NAVIER-STOKES POUR LES FLUIDES INCOMPRESSIBLES VISQUEUX

CHAPITRE 1

LE PROBLÈME DE STOKES

1.1. Cadre fonctionnel

Le problème de Stokes stationnaire

$$-\Delta u + \nabla p = f, \quad \operatorname{div} u = 0$$

est l'analogie du problème de Dirichlet sur les ensembles des champs de vecteurs de divergence nulle, appelés aussi champs de vecteurs solénoïdaux.

Cette section est fondamentale pour l'étude des équations de Navier-Stokes car elle va nous fournir le cadre fonctionnel adéquat. Tout d'abord, définissons les espaces qui vont nous permettre de résoudre le problème de Stokes :

Définition 1.1.1. — Soit Ω un domaine connexe borné de \mathbb{R}^d . On désigne par $\mathcal{V}(\Omega)$ l'espace des champs de vecteurs sur Ω dont les composantes appartiennent à $H_0^1(\Omega)$. On munit $\mathcal{V}(\Omega)$ du produit scalaire

$$(f | g)_{\mathcal{V}} \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{j=1}^d (f_j | g_j)_{H_0^1} = \sum_{j=1}^d \sum_{i=1}^d (\partial_i f_j | \partial_i g_j)_{L^2}.$$

On désigne par $\mathcal{V}_\sigma(\Omega)$ l'espace des champs de vecteurs de $\mathcal{V}(\Omega)$ à divergence nulle.

On désigne par $\mathcal{H}(\Omega)$ l'adhérence de $\mathcal{V}_\sigma(\Omega)$ dans $(L^2(\Omega))^d$ pour la topologie associée au produit scalaire

$$(f | g)_{\mathcal{H}} \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{j=1}^d (f_j | g_j)_{L^2}.$$

On désigne par $\mathcal{V}'(\Omega)$ l'espace des champs de vecteurs dont les composantes sont $H^{-1}(\Omega)$.

Enfin on définit $\mathcal{V}'_\sigma(\Omega)$ l'ensemble des formes linéaires sur $\mathcal{V}_\sigma(\Omega)$.

Si E est un sous-espace de $\mathcal{V}(\Omega)$, le polaire de E noté E^\perp est l'espace des champs de vecteurs f dans $\mathcal{V}'(\Omega)$ tels que, pour tout $v \in E$,

$$\langle f, v \rangle_{\mathcal{V}' \times \mathcal{V}} \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{j=1}^d \langle f_j, v_j \rangle_{H^{-1} \times H_0^1} = 0.$$

Si F est un sous-espace de $\mathcal{V}'(\Omega)$, le polaire F^\perp est l'espace des champs de vecteurs $v \in \mathcal{V}(\Omega)$ tels que pour tout $f \in F$, on ait $\langle f, v \rangle_{\mathcal{V}' \times \mathcal{V}} = 0$.

Afin d'alléger l'écriture, nous omettrons de mentionner l'ouvert borné Ω dans les notations.

1.1.1. Formulation variationnelle. —

Le problème de Stokes peut se voir comme un problème posé dans l'espace des formes linéaires continues sur \mathcal{V}_σ . Énonçons d'abord l'analogie du théorème de Dirichlet :

Théorème 1.1. — *Soit f un champ de vecteurs dont les composantes sont dans H^{-1} . Il existe une unique solution u dans \mathcal{V}_σ de*

$$-\Delta u - f \in \mathcal{V}_\sigma^\perp$$

ce qui signifie que, pour tout champ de vecteurs v de \mathcal{V}_σ , on a

$$(1.1.1) \quad -\langle \Delta u, v \rangle_{\mathcal{V}' \times \mathcal{V}} = \langle f, v \rangle_{\mathcal{V}' \times \mathcal{V}}.$$

De plus $\|u\|_{\mathcal{V}} = \|f\|_{\mathcal{V}'}$.

Démonstration. — On associe à f la forme linéaire sur \mathcal{V}_σ qui à tout $v \in \mathcal{V}_\sigma$ associe $\langle f, v \rangle$. Par le théorème de Lax-Milgram, il existe un unique $u \in \mathcal{V}_\sigma$ tel que

$$\forall v \in \mathcal{V}_\sigma, \quad (u | v)_{\mathcal{V}} = \langle f, v \rangle_{\mathcal{V}' \times \mathcal{V}}.$$

Par définition du produit scalaire sur \mathcal{V} , on a pour tout $h \in \mathcal{D}(\Omega)$,

$$(u | h)_{\mathcal{V}} = \sum_{j=1}^d (\partial_j u | \partial_j h)_{L^2} = \langle -\Delta u, h \rangle_{\mathcal{V}' \times \mathcal{V}}.$$

Par densité de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans \mathcal{V} , on a alors

$$\forall v \in \mathcal{V}_\sigma, \quad \langle -\Delta u, v \rangle_{\mathcal{V}' \times \mathcal{V}} = (u | v)_{\mathcal{V}} = \langle f, v \rangle_{\mathcal{V}' \times \mathcal{V}}.$$

d'où le résultat. □

Remarque 1.1.2. — *Le fait qu'un champ de vecteurs g de H^{-1} appartienne au polaire de \mathcal{V}_σ implique en particulier que pour toute fonction φ de \mathcal{D} , on a*

$$\langle g^i, -\partial_j \varphi \rangle + \langle g^j, \partial_i \varphi \rangle = 0.$$

Cela entraîne que $\partial_j g^i - \partial_i g^j = 0$, c'est-à-dire que g est de rotationnel nul.

– *On peut trouver des domaines très simples pour lesquels il existe des champs de vecteurs de H^{-1} qui sont de rotationnel nul mais qui ne sont pas des gradients.*

En effet : plaçons-nous sur le domaine du plan $\Omega \stackrel{\text{déf}}{=} \{x \in \mathbb{R}^2 / 0 < R_1 < |x| < R_2\}$ et considérons le champ de vecteurs f défini par $(-\partial_2 \log |x|, \partial_1 \log |x|)$. Nous avons alors le résultat suivant.

Proposition 1.1.3. — *Le champ de vecteurs f est de divergence et de rotationnel nuls, mais n'est pas un gradient.*

Démonstration. — Le fait que f soit de divergence nulle est immédiat et qu'il soit de rotationnel nul résulte du fait que la fonction $x \mapsto \log |x|$ est harmonique sur Ω .

Supposons par l'absurde que f soit un gradient. Comme f est C^∞ , il existe une fonction p de classe C^∞ telle que $f = -\nabla p$. Un calcul explicite montre que les trajectoires du flot de f sont périodiques. Considérons γ une trajectoire quelconque. On a alors

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(p \circ \gamma)(t) &= \left(\frac{d\gamma}{dt} \Big| \nabla p(\gamma(t)) \right)_{\mathbb{R}^2} \\ &= -|\nabla p(\gamma(t))|^2. \end{aligned}$$

La fonction $p \circ \gamma$ est donc décroissante. Par périodicité, on en déduit qu'elle est constante et l'on a donc $\nabla p(\gamma(t)) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Cette propriété étant vraie pour toute trajectoire, on conclut que $f = 0$, ce qui est visiblement contraire aux hypothèses. \square

1.1.2. Régularité de la pression. —

Comme le montre le théorème suivant, la condition d'appartenance à \mathcal{V}_σ^\perp est plus forte que la condition de rotationnel nul.

Théorème 1.2. — *On suppose que le bord du domaine est une hypersurface de classe C^1 . Soit f un élément de \mathcal{V}_σ^\perp . Alors il existe p dans L^2 tel que $f = -\nabla p$.*

Désignons par ∇L^2 l'ensemble des champs de vecteurs f à coefficients H^{-1} tels qu'il existe une fonction p de L^2 vérifiant $f = \nabla p$. Soit v un champ de vecteurs dans H_0^1 appartenant à $(\nabla L^2)^\perp$, c'est-à-dire un champ de vecteurs de \mathcal{V} tel que

$$\forall f \in \nabla L^2, \langle v, f \rangle = 0.$$

On a donc pour toute fonction p de $\mathcal{D}(\Omega)$,

$$\begin{aligned} 0 &= \langle v, \nabla p \rangle \\ &= -\langle \operatorname{div} v, p \rangle \\ &= -\int_{\Omega} \operatorname{div} v(x) p(x) dx. \end{aligned}$$

Ainsi donc $\operatorname{div} v = 0$ et donc $(\nabla L^2)^\perp \subset \mathcal{V}_\sigma$. Il en résulte donc que

$$(1.1.2) \quad (\mathcal{V}_\sigma)^\perp \subset ((\nabla L^2)^\perp)^\perp = \overline{\nabla L^2}^{H^{-1}}.$$

Ceci signifie que si f appartient à \mathcal{V}_σ^\perp , alors il existe une suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions de L^2 telle que la suite $(\nabla p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers f dans H^{-1} . Démontrer le théorème 1.2 ci-dessus revient donc à démontrer que l'image de

$$\nabla : \begin{cases} L^2 & \rightarrow H^{-1} \\ p & \mapsto \nabla p \end{cases}$$

est fermée. C'est ici, et uniquement ici, que va intervenir la régularité du bord. Sous cette hypothèse de régularité, on a en effet le

Lemme 1.1.4. — *Une distribution p de H^{-1} appartient à L^2 si et seulement si ses dérivées partielles premières appartiennent aussi à H^{-1} . De plus, il existe une constante C telle que*

$$(1.1.3) \quad \|p\|_{L^2}^2 \leq C(\|p\|_{H^{-1}}^2 + \|\nabla p\|_{H^{-1}}^2).$$

On en tire alors le corollaire suivant :

Corollaire 1.1.5. — Supposons l'inégalité (1.1.3) vraie sur Ω . Alors il existe une constante C telle que, pour toute fonction p appartenant à

$$L_0^2 \stackrel{\text{déf}}{=} \left\{ p \in L^2 / \int_{\Omega} p(x) dx = 0 \right\},$$

on ait

$$\|p\|_{L^2} \leq C \|\nabla p\|_{H^{-1}}.$$

Démonstration du Corollaire 1.1.5. — L'inégalité implique évidemment que ∇L^2 est fermé et donc le théorème 1.2. Pour démontrer ce corollaire, procédons par l'absurde en considérant une suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions de L_0^2 de norme 1 telle que la suite $(\nabla p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tende fortement vers 0 dans H^{-1} . Le théorème de Rellich-Kondrakov implique que l'inclusion de L^2 dans H^{-1} est compacte : il existe donc une fonction p de L^2 et une fonction d'extraction ϕ telles que la suite $(p_{\phi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ converge fortement vers p dans H^{-1} . En particulier, la suite $(\nabla p_{\phi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ∇p au sens des distributions. On a alors $\nabla p = 0$ et donc $p = 0$ car la fonction p est supposée de moyenne nulle sur Ω . Le passage à la limite dans l'inégalité (1.1.3) est contradictoire avec le fait que la suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est supposée de norme 1 dans L^2 . \square

Démonstration du Lemme 1.1.3. — Le point crucial ici est que le domaine Ω est de classe C^1 , c'est-à-dire que le bord du domaine est une hypersurface de classe C^1 . Sous cette hypothèse, il existe une famille finie $(U_k)_{1 \leq k \leq N}$ d'ouverts de \mathbb{R}^d qui recouvre le bord de $\partial\Omega$ et telle que, pour tout k , il existe un C^1 -difféomorphisme χ_k de U_k sur V_k tel que

$$\chi_k(U_k \cap \bar{\Omega}) = V_k \cap \bar{\mathbb{R}_+^d} \quad \text{avec} \quad \mathbb{R}_+^d \stackrel{\text{déf}}{=} \{x = (x_1, \dots, x_d) = (x', x_d) / x_d \geq 0\}.$$

Il existe de plus un ouvert U_0 dont l'adhérence est incluse dans Ω et tel que la famille $(U_k)_{0 \leq k \leq N}$ recouvre $\bar{\Omega}$. On considère alors une partition de l'unité $(\varphi_k)_{0 \leq k \leq N}$ de classe C^∞ subordonnée à la famille $(U_k)_{0 \leq k \leq N}$. Soit p une distribution de H^{-1} ; on écrit

$$p = \sum_{k=0}^N p_k \quad \text{avec} \quad p_k \stackrel{\text{déf}}{=} \varphi_k p.$$

Il est clair que $\|p_k\|_{H^{-1}} \leq C \|p\|_{H^{-1}}$. De plus, si ∇p appartient à H^{-1} , alors, comme on a $\nabla p_k = p \nabla \varphi_k + \varphi_k \nabla p$, il en résulte que

$$\|\nabla p_k\|_{H^{-1}} \leq C (\|p\|_{H^{-1}} + \|\nabla p\|_{H^{-1}}).$$

Il suffit maintenant de démontrer l'inégalité (1.1.3) pour chaque p_k . Comme la distribution p_0 est à support compact inclus dans Ω , la propriété est évidente pour p_0 car p_0 et ses dérivées premières appartiennent à $H^{-1}(\mathbb{R}^d)$ et l'on peut donc utiliser la transformée de Fourier. Lorsque $k \geq 1$, nous allons utiliser les redressements du bord. Il est clair que, comme χ_k est un difféomorphisme de classe C^1 , l'application $v \mapsto v \circ \chi_k^{-1}$ est continue de $H_0^1(V_k \cap \mathbb{R}_+^d)$ dans $H_0^1(U_k \cap \Omega)$. Par dualité et changement de variable, on en déduit la continuité de l'application

$$\chi_k^* : \begin{cases} H^{-1}(U_k \cap \Omega) & \longrightarrow & H^{-1}(V_k \cap \mathbb{R}_+^d) \\ f & \longmapsto & v \mapsto \langle f, (J\chi_k \circ \chi_k^{-1})v \circ \chi_k^{-1} \rangle. \end{cases}$$

On est alors ramené à démontrer la propriété sur \mathbb{R}_+^d . Pour cela, on définit les applications Q et R par

$$Q : \begin{cases} H^1(\mathbb{R}^d) & \longrightarrow & H_0^1(\mathbb{R}_+^d) \\ u & \longmapsto & (Qu)(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x_d < 0, \\ u(x) + 3u(x', -x_d) - 4u(x', -2x_d) & \text{si } x_d \geq 0 \end{cases} \end{cases}$$

et

$$R : \begin{cases} H^1(\mathbb{R}^d) & \longrightarrow H_0^1(\mathbb{R}_+^d) \\ u & \longmapsto (Ru)(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x_d < 0 \\ u(x) - 3u(x', -x_d) + 2u(x', -2x_d) & \text{si } x_d \geq 0. \end{cases} \end{cases}$$

Le fait que les opérateurs Q et R envoient continûment $H^1(\mathbb{R}^d)$ dans $H_0^1(\mathbb{R}_+^d)$ et $L^2(\mathbb{R}^d)$ dans $L^2(\mathbb{R}_+^d)$ est un exercice facile. De plus, on a

$$(1.1.4) \quad \frac{\partial}{\partial x_j} \circ Q = Q \circ \frac{\partial}{\partial x_j} \quad \text{si } j \neq d \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial x_d} \circ R = Q \circ \frac{\partial}{\partial x_d}.$$

On considère les applications transposées sur H^{-1} , c'est-à-dire que l'on pose

$${}^tQ : \begin{cases} H^{-1}(\mathbb{R}_+^d) & \longrightarrow H^{-1}(\mathbb{R}^d) \\ f & \longmapsto {}^tQf / \langle {}^tQf, v \rangle \stackrel{\text{déf}}{=} \langle f, Qv \rangle \end{cases}$$

et de même pour R . On a bien sûr les formules suivantes d'après la composition des applications transposées et les relations (1.1.4):

$$(1.1.5) \quad \frac{\partial}{\partial x_j} \circ {}^tQ = {}^tQ \circ \frac{\partial}{\partial x_j} \quad \text{si } j \neq d \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial x_d} \circ {}^tQ = {}^tR \circ \frac{\partial}{\partial x_d}.$$

En appliquant ces relations à la distribution $\tilde{p}_k \stackrel{\text{déf}}{=} \chi_k^* p_k$ de $H^{-1}(\mathbb{R}_+^d)$, on trouve que

$${}^tQ \tilde{p}_k \in H^{-1}(\mathbb{R}^d) \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial x_j} ({}^tQ \tilde{p}_k) \in H^{-1}(\mathbb{R}^d).$$

En lisant cette propriété en terme de transformation de Fourier, on a immédiatement que ${}^tQ \tilde{p}_k$ est une fonction de $L^2(\mathbb{R}^d)$ et l'on a

$$\|{}^tQ \tilde{p}_k\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \leq C(\|{}^tQ \tilde{p}_k\|_{H^{-1}(\mathbb{R}^d)}^2 + \|\nabla {}^tQ \tilde{p}_k\|_{H^{-1}(\mathbb{R}^d)}^2).$$

Comme Q est l'identité sur les fonctions à support dans \mathbb{R}_+^d , la restriction de ${}^tQ \tilde{p}_k$ à \mathbb{R}_+^d est \tilde{p}_k . On a donc

$$\|\tilde{p}_k\|_{L^2(\mathbb{R}_+^d)}^2 \leq C(\|\tilde{p}_k\|_{H^{-1}(\mathbb{R}_+^d)}^2 + \|\nabla \tilde{p}_k\|_{H^{-1}(\mathbb{R}_+^d)}^2).$$

Donc les p_k sont dans L^2 et l'on a

$$\|p_k\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C(\|p\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 + \|\nabla p\|_{H^{-1}(\Omega)}^2).$$

Le lemme 1.1.4 est démontré. \square

Remarque 1.1.6. — Pour un ouvert Ω quelconque on peut en fait démontrer l'existence d'une fonction p de L_{loc}^2 telle que, si f appartient à \mathcal{V}_σ^\perp , alors $f = -\nabla p$.

1.2. Structure spectrale et résolution du problème d'évolution

Dans ce paragraphe, nous allons étudier les propriétés spectrales de l'opérateur de Stokes dans un domaine borné. Plus précisément, nous allons établir un résultat de diagonalisation basé sur la théorie générale des opérateurs auto-adjoints compacts.

Cette étude est fondamentale car elle va nous fournir un mode d'approximation des solutions du système de Navier-Stokes.

1.2.1. Spectre de l'opérateur de Stokes. —

Théorème 1.3. — Soit Ω un domaine borné de \mathbb{R}^d . Il existe une base hilbertienne $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de \mathcal{H} et une suite croissante $(\lambda_k^2)_{k \in \mathbb{N}}$ tendant vers l'infini telles que

$$-\Delta e_k + \nabla \pi_k = \lambda_k^2 e_k,$$

où π_k est dans $L_{loc}^2(\Omega)$ pour tout k . De plus, $(\lambda_k^{-1} e_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de \mathcal{V}_σ muni du produit scalaire H_0^1 .

Pour démontrer ce théorème, introduisons l'opérateur \mathcal{B} suivant :

$$\mathcal{B} : \begin{cases} \mathcal{H} & \longrightarrow \mathcal{V}_\sigma \\ f & \longmapsto u / -\Delta u - f \in \mathcal{V}_\sigma^\perp. \end{cases}$$

Cet opérateur satisfait les propriétés suivantes.

Lemme 1.2.1. — L'opérateur \mathcal{B} appartient à $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, est auto-adjoint positif, injectif et d'image dense dans \mathcal{H} .

Démonstration. — Considérons un couple (f, g) de \mathcal{H}^2 . Soit $u = \mathcal{B}f$ et $v = \mathcal{B}g$. Par définition de \mathcal{B} , on a

$$\begin{aligned} (\mathcal{B}f|g)_{L^2} &= (g|\mathcal{B}f)_{L^2}, \\ &= \langle -\Delta v, u \rangle_{\mathcal{V}' \times \mathcal{V}}, \\ &= (\nabla u | \nabla v)_{L^2}, \\ &= \langle -\Delta u, v \rangle_{\mathcal{V}' \times \mathcal{V}} = (f|\mathcal{B}g)_{L^2}. \end{aligned}$$

Donc l'opérateur \mathcal{B} est bien auto-adjoint.

Le fait que \mathcal{B} soit borné et positif est dû au calcul suivant : soit f un champ de vecteurs dans \mathcal{H} et notons $u = \mathcal{B}f$. Alors, en vertu de l'inégalité de Poincaré, on a

$$(f|\mathcal{B}f)_{L^2} = \langle -\Delta u, u \rangle_{\mathcal{V}' \times \mathcal{V}} = \|\nabla u\|_{L^2}^2 \geq C\|u\|_{L^2}^2 = C\|\mathcal{B}f\|_{L^2}^2.$$

Pour démontrer que \mathcal{B} est injectif, observons que le noyau de \mathcal{B} est égal à $\mathcal{V}_\sigma^\perp \cap \mathcal{H}$, qui est exactement l'orthogonal de \mathcal{V}_σ au sens du produit scalaire L^2 . Par définition, \mathcal{V}_σ est dense dans \mathcal{H} . Donc on a $\mathcal{V}_\sigma^\perp = \{0\}$. Comme l'adhérence de l'image de \mathcal{B} est égale à l'orthogonal du noyau de \mathcal{B} , l'image de \mathcal{B} est dense dans \mathcal{H} . \square

Lemme 1.2.2. — L'opérateur \mathcal{B} est un opérateur compact de \mathcal{H} dans \mathcal{H} .

Démonstration. — Par définition de \mathcal{B} , nous avons

$$\begin{aligned} \|\mathcal{B}f\|_{H_0^1}^2 &= \langle -\Delta \mathcal{B}f, \mathcal{B}f \rangle \\ &= \langle f, \mathcal{B}f \rangle \\ &\leq C\|f\|_{\mathcal{H}}\|\mathcal{B}f\|_{H_0^1}. \end{aligned}$$

Donc l'image de la boule unité de \mathcal{H} est un ensemble borné de \mathcal{V}_σ . Le théorème de Rellich-Kondrakov implique que cet ensemble est d'adhérence compacte. D'où le lemme. \square

Revenons à la démonstration du théorème 1.3. Comme l'opérateur \mathcal{B} est d'image dense, on peut d'ores et déjà affirmer qu'il n'est pas de rang fini. Par positivité de \mathcal{B} , le théorème de diagonalisation des opérateurs autoajoints compacts implique donc l'existence d'une base hilbertienne $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de \mathcal{H} et d'une suite croissante $(\lambda_k^2)_{k \in \mathbb{N}}$ tendant vers l'infini telles que $\mathcal{B}e_k = \lambda_k^{-2}e_k$. Par définition de \mathcal{B} et grâce à la remarque 1.1.6 cela implique qu'il existe une fonction $\tilde{\pi}_k$ de $L_{loc}^2(\Omega)$ telle que

$$\begin{aligned} e_k &= -\Delta \mathcal{B}e_k + \nabla \tilde{\pi}_k \\ &= -\lambda_k^{-2} \Delta e_k + \nabla \tilde{\pi}_k. \end{aligned}$$

En posant $\pi_k = \lambda_k^2 \tilde{\pi}_k$, il est alors clair que

$$\begin{aligned} (e_k | e_{k'})_{\mathcal{V}} &= \langle -\Delta e_k, e_{k'} \rangle_{\mathcal{V}' \times \mathcal{V}} \\ &= \langle -\nabla \pi_k + \lambda_k^2 e_k, e_{k'} \rangle_{\mathcal{V}' \times \mathcal{V}} \\ &= \lambda_k^2 (e_k | e_{k'})_{\mathcal{H}} \\ &= \lambda_k^2 \delta_{k,k'}. \end{aligned}$$

En revenant à la définition de $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$ et en utilisant le fait que $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de \mathcal{H} , on conclut alors que $(\lambda_k^{-1} e_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de \mathcal{V}_σ . \blacksquare

Revenons maintenant à l'espace \mathcal{V}'_σ qui est la restriction des formes linéaires sur \mathcal{V} aux éléments de \mathcal{V}_σ . Définissons

$$\mathcal{V}'_\sigma \stackrel{\text{déf}}{=} \{f \in \mathcal{V}' / \|f\|_{\mathcal{V}'_\sigma}^2 \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{j \in \mathbb{N}} \langle f, e_j \rangle_{\mathcal{V}' \times \mathcal{V}}^2 \lambda_j^{-2} < +\infty\}.$$

On a alors le résultat suivant.

Proposition 1.2.1. — *L'ensemble des restrictions à \mathcal{V}_σ des éléments de \mathcal{V}'_σ coïncide avec l'espace \mathcal{V}'_σ et il y a égalité des normes.*

Démonstration. — Si $f \in \mathcal{V}'_\sigma$ alors f est une forme linéaire continue sur \mathcal{V}_σ donc il est évident qu'on a l'inclusion $\mathcal{V}'_\sigma \subset \mathcal{V}'_\sigma$. De plus, si $v \in \mathcal{V}_\sigma$, on peut écrire $v = \sum_{j \in \mathbb{N}} (v | \lambda_j^{-1} e_j)_{\mathcal{V}} \lambda_j^{-1} e_j$ donc, par continuité de f ,

$$\langle f, v \rangle_{\mathcal{V}' \times \mathcal{V}} = \sum_{j \in \mathbb{N}} \lambda_j^{-1} \langle f, e_j \rangle_{\mathcal{V}' \times \mathcal{V}} (v | \lambda_j^{-1} e_j)_{\mathcal{V}}$$

puis, en vertu de l'inégalité de Cauchy-Schwarz et de l'égalité de Parseval,

$$|\langle f, v \rangle_{\mathcal{V}' \times \mathcal{V}}| \leq \sqrt{\sum_{j \in \mathbb{N}} \lambda_j^{-2} \langle f, e_j \rangle_{\mathcal{V}' \times \mathcal{V}}^2} \|v\|_{\mathcal{V}} = \|f\|_{\mathcal{V}'_\sigma} \|v\|_{\mathcal{V}}.$$

Inversement soit $f \in \mathcal{V}'_\sigma$, et montrons que

$$\sum_{j \in \mathbb{N}} \langle f, e_j \rangle_{\mathcal{V}' \times \mathcal{V}}^2 \lambda_j^{-2} < +\infty.$$

Soit donc $v \in \mathcal{V}_\sigma$. Comme $v = \sum_{j \in \mathbb{N}} (e_j | v)_{\mathcal{H}} e_j = \sum_{j \in \mathbb{N}} \langle e_j, v \rangle_{\mathcal{V}' \times \mathcal{V}} e_j$, on a

$$\langle f, v \rangle_{\mathcal{V}' \times \mathcal{V}} = \sum_{j \in \mathbb{N}} \lambda_j^{-1} \langle f, e_j \rangle_{\mathcal{V}' \times \mathcal{V}} \langle \lambda_j e_j, v \rangle_{\mathcal{V}' \times \mathcal{V}}.$$

Par définition on sait que $|\langle f, v \rangle_{\mathcal{V}' \times \mathcal{V}}| \leq \|f\|_{\mathcal{V}'_\sigma} \|v\|_{\mathcal{V}}$. Or, comme $v \in \mathcal{V}_\sigma$, on a d'après le théorème 1.3,

$$\langle \lambda_j e_j, v \rangle_{\mathcal{V}' \times \mathcal{V}} = \lambda_j^{-1} \langle -\Delta e_j, v \rangle_{\mathcal{V}' \times \mathcal{V}} = (\lambda_j^{-1} e_j | v)_{\mathcal{V}}.$$

En conséquence,

$$\forall v \in \mathcal{V}_\sigma, \quad \left| \sum_{j \in \mathbb{N}} \lambda_j^{-1} \langle f, e_j \rangle_{\mathcal{V}' \times \mathcal{V}} \lambda_j^{-1} (e_j | v)_\mathcal{V} \right| \leq \|f\|_{\mathcal{V}'_\sigma} \|v\|_\mathcal{V}.$$

Le résultat suit du fait que, en vertu de l'égalité de Parseval, la suite $(\lambda_j^{-1} e_j | v)_\mathcal{V}$ est de carré sommable et de norme $\|v\|_\mathcal{V}$. La suite $\lambda_j^{-1} \langle f, e_j \rangle_{\mathcal{V}' \times \mathcal{V}}$ est donc aussi de carré sommable, et de norme au plus $\|f\|_{\mathcal{V}'}$. \square

Définition 1.2.3. — Définissons

$$P_k : \begin{cases} \mathcal{V}' & \rightarrow \mathcal{V}'_\sigma \\ f & \mapsto \sum_{j \leq k} \langle f, e_j \rangle_{\mathcal{V}' \times \mathcal{V}} e_j \end{cases} \quad \text{et} \quad \mathbf{P} : \begin{cases} L^2 & \rightarrow \mathcal{H} \\ f & \mapsto \sum_{j \in \mathbb{N}} (f | e_j)_{L^2} e_j. \end{cases}$$

Remarque 1.2.4. — Les opérateurs P_k sont les projecteurs spectraux du problème de Stokes et \mathbf{P} est le projecteur de Leray sur les champs de vecteurs de divergence nulle.

Proposition 1.2.2. — L'inclusion de \mathcal{H} dans \mathcal{V}'_σ est compacte.

Démonstration. — Pour tout u dans \mathcal{H} , nous avons

$$\begin{aligned} \|P_k u - u\|_{\mathcal{V}'_\sigma}^2 &= \sum_{j > k} \lambda_j^{-2} (\langle u, e_j \rangle_{\mathcal{V}' \times \mathcal{V}})^2 \\ &\leq \lambda_k^{-2} \sum_{j > k} (\langle u, e_j \rangle_{\mathcal{V}' \times \mathcal{V}})^2 \\ &\leq \lambda_k^{-2} \|u\|_{\mathcal{H}}^2. \end{aligned}$$

Donc l'inclusion de \mathcal{H} dans \mathcal{V}'_σ est la limite dans $\mathcal{L}(\mathcal{H}; \mathcal{V}'_\sigma)$ de la projection P_k , dont l'image est bien évidemment de dimension finie. Comme l'espace des opérateurs compacts est fermé (en particulier il contient l'adhérence des opérateurs continus de rangs finis), on obtient alors le résultat souhaité. \square

Retenons le résultat suivant qui nous sera fort utile au chapitre suivant.

Proposition 1.2.3. — L'opérateur \mathbf{P} peut être prolongé en une application linéaire continue de \mathcal{V}' dans \mathcal{V}'_σ . De plus on a

$$\|P_k\|_{\mathcal{L}(\mathcal{V}'; \mathcal{V}'_\sigma)} \leq 1 \quad \text{et} \quad \forall f \in \mathcal{V}', \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \|P_k f - \mathbf{P} f\|_{\mathcal{V}'_\sigma} = 0.$$

Démonstration. — La seule chose à vérifier est que

$$\sum_j \lambda_j^{-2} (\langle f, e_j \rangle_{\mathcal{V}' \times \mathcal{V}})^2 \leq \|f\|_{\mathcal{V}'}^2.$$

C'est une conséquence immédiate de la proposition 1.2.1. \square

1.2.2. Le problème de Stokes dépendant du temps. —

Le problème d'évolution associé à l'opérateur de Stokes est le suivant

$$(S) \quad \begin{cases} \partial_t u - \nu \Delta u = f - \nabla p, \\ \operatorname{div} u = 0, \\ u|_{\partial\Omega} = 0, \quad u|_{t=0} = u_0 \in \mathcal{H}. \end{cases}$$

Définissons d'abord ce que nous entendons par solution du problème (S).

Définition 1.2.4. — Soit $u_0 \in \mathcal{H}$ et $f \in L_{loc}^2(\mathbb{R}^+; \mathcal{V}'_\sigma)$. Nous dirons que u est solution de (S) avec donnée initiale u_0 et force extérieure f si u appartient à l'espace $\mathcal{C}(\mathbb{R}^+; \mathcal{V}') \cap L_{loc}^1(\mathbb{R}^+; \mathcal{V}_\sigma)$ et satisfait, pour tout $\Psi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+; \mathcal{V}_\sigma)$,

$$\begin{aligned} \langle u(t), \Psi(t) \rangle_{\mathcal{V}' \times \mathcal{V}} + \int_{[0,t] \times \Omega} (\nu \nabla u : \nabla \Psi - u \cdot \partial_t \Psi)(t', x) dx dt' \\ = \langle u_0, \Psi(0) \rangle_{\mathcal{V}' \times \mathcal{V}} + \int_0^t \langle f(t'), \Psi(t') \rangle_{\mathcal{V}' \times \mathcal{V}} dt'. \end{aligned}$$

Nous avons le théorème suivant.

Théorème 1.4. — Le système (S) admet une unique solution u qui, de plus, appartient à $\mathcal{C}(\mathbb{R}^+; \mathcal{H}) \cap L_{loc}^2(\mathbb{R}^+; \mathcal{V}_\sigma)$. Cette solution est donnée par

$$u = \sum_j U_j(t) e_j \quad \text{avec} \quad U_j(t) = (u_0 | e_j)_{\mathcal{H}} e^{-\nu \lambda_j^2 t} + \int_0^t e^{-\nu \lambda_j^2 (t-t')} \langle f(t'), e_j \rangle_{\mathcal{V}' \times \mathcal{V}} dt',$$

et satisfait l'égalité d'énergie

$$\frac{1}{2} \|u(t)\|_{L^2}^2 + \nu \int_0^t \|\nabla u(t')\|_{L^2}^2 dt' = \frac{1}{2} \|u_0\|_{L^2}^2 + \int_0^t \langle f(t'), u(t') \rangle_{\mathcal{V}' \times \mathcal{V}} dt'.$$

Démonstration. — Pour démontrer l'unicité, considérons une fonction u de $\mathcal{C}(\mathbb{R}^+; \mathcal{V}') \cap L_{loc}^1(\mathbb{R}^+; \mathcal{V}_\sigma)$ telle que, pour tout $\Psi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+; \mathcal{V}_\sigma)$,

$$\langle u(t), \Psi(t) \rangle_{\mathcal{V}' \times \mathcal{V}} + \int_{[0,t] \times \Omega} (\nu \nabla u : \nabla \Psi - u \cdot \partial_t \Psi)(t', x) dx dt' = 0.$$

Cette égalité est en particulier vraie pour $\Psi(t) = e_j$. Grâce au théorème 1.3, nous avons

$$\langle u(t), e_j \rangle_{\mathcal{V}' \times \mathcal{V}} + \nu \lambda_j^2 \int_0^t \langle u(t'), e_j \rangle_{\mathcal{V}' \times \mathcal{V}} dt' = 0.$$

Cela implique directement que $\int_0^t \langle u(t'), e_j \rangle_{\mathcal{V}' \times \mathcal{V}} dt' = 0$ pour tout $t \geq 0$, puis que $u \equiv 0$.

Pour démontrer l'existence, supposons tout d'abord que la force extérieure f_k appartienne à l'espace $\mathcal{C}(\mathbb{R}^+; \text{Im } P_k)$ et la condition initiale u_0 , à $P_k \mathcal{H}$. En vertu du théorème 1.3, (S) se réduit alors à une équation différentielle ordinaire dont l'unique solution est

$$(1.2.1) \quad u_k(t) = \sum_{j \leq k} (P_k u_0 | e_j)_{\mathcal{H}} e^{-\nu \lambda_j^2 t} e_j + \int_0^t e^{-\nu \lambda_j^2 (t-t')} \langle f_k(t'), e_j \rangle_{\mathcal{V}' \times \mathcal{V}} e_j dt'.$$

D'après le théorème de convergence dominée de Lebesgue, nous avons, pour tout T strictement positif,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^T \|P_k f(t) - f(t)\|_{\mathcal{V}'_\sigma}^2 dt = 0.$$

Par ailleurs, l'ensemble des fonctions continues sur $[0, T]$ à valeurs dans $\text{Im } P_k$ est dense dans $L_{loc}^2(0, T; \text{Im } P_k)$. Donc pour toute force extérieure f de $L_{loc}^2(\mathbb{R}^+; \mathcal{V}'_\sigma)$, il existe une suite $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de fonctions appartenant à $\mathcal{C}(\mathbb{R}^+; \mathcal{V}'_\sigma)$ telle que, pour tout k , la fonction f_k soit à valeurs dans $\text{Im } P_k$ et telle que, pour tout T strictement positif, on ait

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^T \|f_k(t) - f(t)\|_{\mathcal{V}'_\sigma}^2 dt = 0.$$

La suite $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ définie par (1.2.1) satisfait

$$\|u_k(t) - u_{k+\ell}(t)\|_{L^2}^2 \leq 2\|P_k u_0 - P_{k+\ell} u_0\|_{L^2}^2 + 2 \sum_{j \leq k+\ell} \left(\int_0^t e^{-\nu \lambda_j^2(t-t')} |\langle f_k(t') - f_{k+\ell}(t'), e_j \rangle| dt' \right)^2.$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$\begin{aligned} \|u_k(t) - u_{k+\ell}(t)\|_{L^2}^2 &\leq 2\|P_k u_0 - P_{k+\ell} u_0\|_{L^2}^2 + \sum_{j \leq k+\ell} \int_0^t \frac{1}{\nu \lambda_j^2} |\langle f_k(t') - f_{k+\ell}(t'), e_j \rangle|^2 dt' \\ &\leq 2\|P_k u_0 - P_{k+\ell} u_0\|_{L^2}^2 + \frac{1}{\nu} \int_0^t \|f_k(t') - f_{k+\ell}(t')\|_{\mathcal{V}'_\sigma}^2 dt', \end{aligned}$$

où l'on a utilisé la proposition 1.2.1. De même,

$$\begin{aligned} \nu \int_0^t \|\nabla(u_k - u_{k+\ell})(t')\|_{L^2}^2 dt' &\leq 2\|P_k u_0 - P_{k+\ell} u_0\|_{L^2}^2 \\ &\quad + \sum_{j \leq k+\ell} \int_0^t \frac{1}{\nu \lambda_j^2} |\langle f_k(t') - f_{k+\ell}(t'), e_j \rangle|^2 dt' \\ &\leq 2\|P_k u_0 - P_{k+\ell} u_0\|_{L^2}^2 + \frac{1}{\nu} \int_0^t \|f_k(t') - f_{k+\ell}(t')\|_{\mathcal{V}'_\sigma}^2 dt'. \end{aligned}$$

Cela implique que la suite $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $L_{loc}^\infty(\mathbb{R}^+; \mathcal{H}) \cap L_{loc}^2(\mathbb{R}^+; \mathcal{V}_\sigma)$. Désignons par u sa limite. Par définition de u_k , nous avons, pour tout $\Psi \in C^1(\mathbb{R}^+; \mathcal{V}_\sigma)$,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle u_k(t), \Psi(t) \rangle &= \langle \dot{u}_k(t), \Psi(t) \rangle + \langle u_k(t), \dot{\Psi}(t) \rangle \\ &= \nu \langle \Delta u_k(t), \Psi(t) \rangle + \langle f_k(t), \Psi(t) \rangle + \langle u_k(t), \dot{\Psi}(t) \rangle \\ &= - \int_\Omega \left(\nu \nabla u_k : \nabla \Psi - u_k \cdot \partial_t \Psi \right)(t, x) dx + \langle f_k(t), \Psi(t) \rangle. \end{aligned}$$

Par intégration en temps, ceci donne

$$\begin{aligned} \int_\Omega u_k(t, x) \cdot \Psi(t, x) dx + \int_{[0, t] \times \Omega} \left(\nu \nabla u_k : \nabla \Psi - u_k \cdot \partial_t \Psi \right)(t', x) dx dt' \\ = \int_\Omega P_k u_0(x) \cdot \Psi(0, x) dx + \int_0^t \langle f_k(t'), \Psi(t') \rangle_{\mathcal{V}' \times \mathcal{V}} dt'. \end{aligned}$$

Vu que la suite $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ tend vers u dans $L_{loc}^\infty(\mathbb{R}^+; \mathcal{H}) \cap L_{loc}^2(\mathbb{R}^+; \mathcal{V}_\sigma)$ et $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ tend vers f dans $L_{loc}^2(\mathbb{R}^+; \mathcal{V}'_\sigma)$, on conclut que u est solution de (S).

Pour démontrer que u vérifie bien l'égalité d'énergie, on applique l'égalité ci-dessus à $\Psi = u_k$, puis on fait tendre k vers $+\infty$. \square

CHAPITRE 2

SOLUTIONS DE LERAY

Dans ce chapitre, on démontre que toute donnée initiale d'énergie finie (en un sens que l'on précisera plus loin) engendre au moins une solution de (NS) d'énergie finie et définie pour tout temps positif. Ce résultat remarquable a été établi en 1934 par J. Leray alors que ni la notion de distribution, ni celle d'espace de Sobolev n'avaient été inventées ! On présente ici une démonstration "moderne" utilisant des outils d'analyse fonctionnelle.

Dans tout ce chapitre, Ω désigne un domaine borné de \mathbb{R}^d avec $d = 2$ ou 3 . Nous allons commencer par définir ce que nous entendons par solution des équations de Navier-Stokes.

Définition 2.0.5. — Nous dirons que u est une solution de Leray de (NS) avec donnée initiale $u_0 \in \mathcal{H}$ et force extérieure $f \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^+; \mathcal{V}'_\sigma)$ si u appartient à $L^\infty(\mathbb{R}^+; \mathcal{H}) \cap L^2_{loc}(\mathbb{R}^+; \mathcal{V}_\sigma) \cap \mathcal{C}(\mathbb{R}^+; \mathcal{V}')$ et pour toute fonction Ψ appartenant à $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+; \mathcal{V}_\sigma)$, on a

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u(t, x) \cdot \Psi(t, x) \, dx + \int_{[0, t] \times \Omega} \left(\nu \nabla u : \nabla \Psi - u \otimes u : \nabla \Psi - u \cdot \partial_t \Psi \right) (t, x) \, dx \, dt \\ = \int_{\Omega} u_0(x) \cdot \Psi(0, x) \, dx + \int_0^t \langle f(t'), \Psi(t') \rangle_{\mathcal{V}' \times \mathcal{V}} \, dt'. \end{aligned}$$

Nous pouvons maintenant énoncer le *théorème de Leray*.

Théorème 2.1. — Soient $u_0 \in \mathcal{H}$ et $f \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^+; \mathcal{V}'_\sigma)$. Il existe une solution u de (NS) au sens de la définition 2.0.5 avec donnée initiale u_0 et force extérieure f . De plus, cette solution satisfait l'inégalité d'énergie

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\Omega} |u(t, x)|^2 \, dx + \nu \int_0^t \int_{\Omega} |\nabla u(t', x)|^2 \, dx \, dt' \\ \leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} |u_0(x)|^2 \, dx + \int_0^t \langle f(t', \cdot), u(t', \cdot) \rangle_{\mathcal{V}' \times \mathcal{V}} \, dt'. \end{aligned}$$

Les étapes principales de la démonstration sont les suivantes:

- construction d'une suite de solutions approchées à l'aide de la structure spectrale de l'opérateur de Stokes (*méthode de Galerkin*),
- utilisation d'un résultat de compacité,
- passage à la limite dans les différents termes du système de Navier-Stokes.

2.1. Approximation de Galerkin

2.1.1. Construction des solutions approchées. — On procède de manière analogue à celle utilisée pour démontrer le théorème 1.4. Posons $\mathcal{H}_k \stackrel{\text{déf}}{=} P_k \mathcal{H}$. C'est un espace vectoriel de dimension $k + 1$. on peut trouver une suite $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de fonctions de $\mathcal{C}(\mathbb{R}^+; \mathcal{V}'_\sigma)$ telle que, pour tout k , la fonction f_k soit à valeurs dans \mathcal{H}_k et telle que, pour tout T strictement positif, on ait

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^T \|f_k(t) - f(t)\|_{\mathcal{V}'_\sigma}^2 dt = 0.$$

Pour construire des solutions approchées, nous avons besoin d'établir quelques propriétés sur le terme non linéaire.

Définition 2.1.1. — Soit Q l'application bilinéaire définie par

$$Q : \begin{cases} \mathcal{V} \times \mathcal{V} & \rightarrow \mathcal{V}' \\ (u, v) & \mapsto \operatorname{div}(u \otimes v). \end{cases}$$

Comme l'opérateur div envoie continûment $L^2(\Omega)$ dans $H^{-1}(\Omega)$, l'inclusion de Sobolev assure que Q est continue. Dans la suite, le lemme suivant sera fort utile.

Lemme 2.1.2. — On a, pour $d \in \{2, 3, 4\}$,

$$\|Q(u, v)\|_{\mathcal{V}'} \leq C \|u\|_{H_0^1}^{\frac{d}{4}} \|v\|_{H_0^1}^{\frac{d}{4}} \|u\|_{L^2}^{1-\frac{d}{4}} \|v\|_{L^2}^{1-\frac{d}{4}}.$$

En outre pour tout u dans \mathcal{V}_σ et tout v dans \mathcal{V} ,

$$(2.1.1) \quad \langle Q(u, v), v \rangle_{\mathcal{V}' \times \mathcal{V}} = 0.$$

De plus, si u et v sont dans \mathcal{V}_σ , on a

$$|\langle Q(u, u) - Q(v, v), u - v \rangle| \leq C \|u - v\|_{H_0^1}^{1+\frac{d}{4}} \|u - v\|_{L^2}^{1-\frac{d}{4}} \min \left\{ \|u\|_{H_0^1}^{\frac{d}{4}} \|u\|_{L^2}^{1-\frac{d}{4}}, \|v\|_{H_0^1}^{\frac{d}{4}} \|v\|_{L^2}^{1-\frac{d}{4}} \right\}.$$

Démonstration. — En combinant le théorème d'injection de Sobolev et l'inégalité de Hölder, on obtient

$$\begin{aligned} \|u \otimes v\|_{L^2} &\leq \|u\|_{L^4} \|v\|_{L^4} \\ &\leq C \|u\|_{H^{d/4}} \|v\|_{H^{d/4}}, \end{aligned}$$

ce qui implique la première inégalité par interpolation.

Pour démontrer (2.1.1), supposons que u et v aient leurs composantes dans $\mathcal{D}(\Omega)$. En intégrant par parties, on a

$$\begin{aligned} \langle Q(u, v), v \rangle_{\mathcal{V}' \times \mathcal{V}} &= \int (\operatorname{div}(u \otimes v) \cdot v)(x) dx \\ &= \sum_{\ell, m=1}^d \int \partial_m (u^m(x) v^\ell(x)) v^\ell(x) dx \\ &= - \sum_{\ell, m=1}^d \int u^m(x) v^\ell(x) \partial_m v^\ell(x) dx \\ &= \frac{1}{2} \int |v(x)|^2 \operatorname{div} u(x) dx. \end{aligned}$$

Comme les formes trilinéaires apparaissant dans le membre de gauche de la première ligne et le membre de droite de la dernière ligne sont continues sur \mathcal{V}^3 et comme, par définition, \mathcal{D} est dense dans \mathcal{V} , la

formule ci-dessus reste vraie pour u et v dans \mathcal{V} . Si de plus u est dans \mathcal{V}_σ alors le dernier terme est nul, ce qui donne (2.1.1).

La dernière inégalité résulte des calculs algébriques suivants. Grâce à (2.1.1), nous avons

$$\begin{aligned} \langle Q(u, u) - Q(v, v), u - v \rangle &= \langle Q(u - v, u), u - v \rangle + \langle Q(v, u - v), u - v \rangle \\ &= \langle Q(u - v, u), u - v \rangle. \end{aligned}$$

Ainsi nous avons

$$|\langle Q(u, u) - Q(v, v), u - v \rangle| \leq \|Q(u - v, u)\|_{\mathcal{V}'} \|u - v\|_{H_0^1}.$$

Les deux premières inégalités du lemme impliquent le résultat. \square

Introduisons maintenant la famille d'équations différentielles ordinaires suivantes

$$(NS_k) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt} u_k &= \nu P_k \Delta u_k - F_k(u_k) + f_k \\ u_k(0) &= P_k u_0, \end{cases}$$

avec $F_k(u) \stackrel{\text{déf}}{=} P_k Q(u, u)$.

Vu que $P_k \Delta$ est une application linéaire de \mathcal{H}_k dans lui-même, elle est continue car \mathcal{H}_k est de dimension finie. Il résulte alors des propriétés de continuité de Q et P_k que l'application

$$\begin{cases} \mathbb{R}^+ \times \mathcal{H}_k &\longrightarrow \mathcal{H}_k \\ (t, z) &\longmapsto \nu P_k \Delta z - F_k(z) + f_k(t) \end{cases}$$

vérifie les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz.

Cela entraîne l'existence d'une suite $(T_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de réels strictement positifs et d'une suite $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de solutions maximales de (NS_k) appartenant à $\mathcal{C}^1([0, T_k]; \mathcal{H}_k)$.

2.1.2. Estimations sur les solutions approchées. —

Afin d'estimer $\|u_k(t)\|_{L^2}^2$, on prend le produit scalaire L^2 de (NS_k) avec $u_k(t)$. On obtient

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_k(t)\|_{L^2}^2 = \nu (\Delta u_k(t) | u_k(t))_{L^2} - (F_k(u_k(t)) | u_k(t))_{L^2} + (f_k(t) | u_k(t))_{L^2}.$$

Par définition de F_k et comme $P_k^2 = P_k = {}^t P_k$, le lemme 2.1.2 implique que

$$(F_k(u_k(t)) | u_k(t))_{L^2} = \langle Q(u_k(t), u_k(t)), u_k \rangle_{\mathcal{V}' \times \mathcal{V}} = 0.$$

On en déduit que

$$(2.1.2) \quad \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_k(t)\|_{L^2}^2 + \nu (u_k(t) | u_k(t))_{\mathcal{V}} = \langle f_k(t), u_k(t) \rangle_{\mathcal{V}' \times \mathcal{V}}.$$

Par intégration en temps, on obtient l'égalité d'énergie suivante pour le système Navier-Stokes approché:

$$(2.1.3) \quad \forall t \in [0, T_k[, \quad \frac{1}{2} \|u_k(t)\|_{L^2}^2 + \nu \int_0^t \|\nabla u_k(t')\|_{L^2}^2 dt' = \frac{1}{2} \|u_k(0)\|_{L^2}^2 + \int_0^t \langle f_k(t'), u_k(t') \rangle_{\mathcal{V}' \times \mathcal{V}} dt'.$$

En utilisant l'inégalité bien connue $2ab \leq a^2 + b^2$, on obtient

$$(2.1.4) \quad \|u_k(t)\|_{L^2}^2 + \nu \int_0^t \|\nabla u_k(t')\|_{L^2}^2 dt' \leq \|u_k(0)\|_{L^2}^2 + \frac{1}{\nu} \int_0^t \|f_k(t')\|_{\mathcal{V}'}^2 dt'.$$

Ceci implique que u_k reste borné pour tout temps dans \mathcal{H}_k , et donc que $T_k = +\infty$. De plus, la majoration en norme $L_{loc}^\infty(\mathbb{R}^+; \mathcal{H}) \cap L_{loc}^2(\mathbb{R}^+; \mathcal{V}_\sigma)$ de $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est uniforme en k .

2.2. Compacité

Pour passer à la limite dans (NS_k) , nous avons besoin d'un peu de compacité. L'inégalité d'énergie obtenue au paragraphe précédent donne une estimation de régularité uniforme par rapport aux variables spatiales. Pour obtenir de la compacité forte dans L^2 , il faut alors contrôler la dépendance par rapport au temps.

2.2.1. Régularité en temps et convergence forte. —

Lemme 2.2.1. — *Si $d = 2$ (resp. $d = 3$), la suite $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est bornée dans $C_{loc}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^+; \mathcal{V}')$ (resp. dans $C_{loc}^{\frac{1}{4}}(\mathbb{R}^+; \mathcal{V}')$).*

Démonstration. — Vu que $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est bornée dans $L_{loc}^2(\mathbb{R}^+; \mathcal{V}_\sigma)$, la suite $(-\Delta u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est bornée dans l'espace $L_{loc}^2(\mathbb{R}^+; \mathcal{V}')$. Le fait que la suite $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ soit bornée dans $L_{loc}^2(\mathbb{R}^+; \mathcal{V}')$ découle de sa définition. D'après le lemme 2.1.2, on obtient que

$$\|F_k(u_k(t))\|_{\mathcal{V}'} \leq C \|\nabla u_k\|_{L^2}^{\frac{d}{2}} \|u_k\|_{L^2}^{2-\frac{d}{2}}.$$

Grâce à l'estimation d'énergie (2.1.3), on en déduit que la suite $(\dot{u}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est bornée dans l'espace $L_{loc}^{\frac{4}{d}}(\mathbb{R}^+; \mathcal{V}')$. Étant donné que, en vertu de l'inégalité de Hölder, on a

$$\|u_k(t) - u_k(t')\|_{\mathcal{V}'} \leq |t - t'|^{1-\frac{d}{4}} \|\dot{u}_k\|_{L^{\frac{4}{d}}([t, t']; \mathcal{V}')} ,$$

la proposition est démontrée. \square

De cette proposition, nous allons déduire le corollaire suivant.

Corollaire 2.2.2. — *Il existe un champ de vitesses $u \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+; \mathcal{V}') \cap L_{loc}^2(\mathbb{R}^+; \mathcal{V}_\sigma)$ tel que, à extraction près, la suite $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers u :*

- fortement dans $L_{loc}^\infty(\mathbb{R}^+; \mathcal{V}')$,
- faiblement dans $L^2([0, T]; \mathcal{V}_\sigma)$ pour tout $T > 0$.

De plus, $u \in L_{loc}^\infty(\mathbb{R}^+; \mathcal{H})$ et, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, la suite $(u_k(t))_{k \in \mathbb{N}}$ converge faiblement vers $u(t)$ dans \mathcal{H} . Enfin, u vérifie l'inégalité d'énergie pour tout t et, pour tout $p \in [2, +\infty[$ et $T > 0$, on a

$$(2.2.1) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \|u_k - u\|_{L^p([0, T]; L^2)} = 0.$$

Démonstration. — Fixons d'abord un entier strictement positif N . D'après le lemme précédent, la suite $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est équicontinue sur $[0, N]$ et à valeurs dans \mathcal{V}' . D'autre part, cette suite est également bornée dans $\mathcal{C}([0, N]; \mathcal{H})$. Or, d'après le lemme 1.2.2, l'inclusion de \mathcal{H} dans \mathcal{V}'_σ est compacte. Le théorème d'Ascoli assure donc qu'il existe $u \in \mathcal{C}([0, N]; \mathcal{V}')$ tel qu'à une extraction près, la suite $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ tende vers u dans l'espace $\mathcal{C}([0, N]; \mathcal{V}')$.

Par ailleurs, l'ensemble $L^2([0, N]; \mathcal{V}_\sigma)$ est un espace de Hilbert. Quitte à extraire encore, on peut donc exiger en sus que la suite converge faiblement vers u dans $L^2([0, N]; \mathcal{V}_\sigma)$.

Ensuite, en faisant tendre N vers l'infini et en reprenant le procédé d'extraction diagonal utilisé dans la preuve du théorème d'Ascoli, on obtient finalement un champ $u \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+; \mathcal{V}') \cap L_{loc}^2(\mathbb{R}^+; \mathcal{V}_\sigma)$ tel qu'une sous-suite de $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ (que l'on continuera à noter $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$) tende fortement vers u dans $\mathcal{C}_{loc}(\mathbb{R}^+; \mathcal{V}')$ et faiblement dans $L_{loc}^2(\mathbb{R}^+; \mathcal{V}_\sigma)$.

Pour prouver le résultat de convergence faible dans \mathcal{H} à t fixé, on utilise le fait que $(u_k(t))_{k \in \mathbb{N}}$ est bornée dans l'espace de Hilbert séparable \mathcal{H} . En vertu du théorème de compacité faible, il existe donc un élément $\tilde{u}(t)$ de \mathcal{H} tel qu'une sous-suite de $(u_k(t))_{k \in \mathbb{N}}$ converge faiblement vers $\tilde{u}(t)$. Mais l'inclusion de \mathcal{H} dans \mathcal{V}' étant compacte, cette même sous-suite converge fortement vers $\tilde{u}(t)$ dans \mathcal{V}' . Par unicité de la limite, on a donc $\tilde{u}(t) = u(t)$ et on peut alors conclure que $(u_k(t))_{k \in \mathbb{N}}$ converge faiblement vers $u(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}^+$.

On en déduit que pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, on a

$$\|u(t)\|_{L^2}^2 \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \|u_k(t)\|_{L^2}^2 \quad \text{et} \quad \int_0^t \|\nabla u(t)\|_{L^2}^2 dt \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_0^t \|\nabla u_k(t)\|_{L^2}^2 dt.$$

En passant à la limite dans l'égalité d'énergie (2.1.3), on trouve l'inégalité voulue car la vitesse initiale $u_k(0) = P_k u_0$ converge fortement vers u_0 dans \mathcal{H} et la suite de forces extérieures $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers f dans $L_{loc}^2(\mathbb{R}^+; \mathcal{V}')$.

Finalement, on a

$$\begin{aligned} \|u_k(t) - u(t)\|_{\mathcal{H}}^2 &= \langle u_k(t) - u(t), u_k(t) - u(t) \rangle_{\mathcal{V}' \times \mathcal{V}} \\ &\leq \|u_k(t) - u(t)\|_{\mathcal{V}'} (\|\nabla u_k\|_{L^2} + \|\nabla u(t)\|_{L^2}). \end{aligned}$$

Comme la suite $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est bornée dans $L_{loc}^2(\mathbb{R}^+; \mathcal{V})$ et, pour tout $T > 0$,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|u_k - u\|_{L^\infty([0, T]; \mathcal{V}')} = 0,$$

une intégration en temps sur $[0, T]$ combinée à l'utilisation de l'inégalité de Cauchy-Schwarz permet d'obtenir la convergence (forte) vers u de la suite $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ dans l'espace $L_{loc}^2(\mathbb{R}^+; \mathcal{H})$. La convergence dans $L_{loc}^p(\mathbb{R}^+; \mathcal{H})$ pour tout $p \in [2, +\infty[$ s'obtient à l'aide de l'inégalité de Hölder, et des bornes uniformes dans $L_{loc}^\infty(\mathbb{R}^+; \mathcal{H})$ pour $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$. \square

2.2.2. Passage à la limite dans la suite de systèmes approchés. —

La convergence démontrée par le corollaire 2.2.2 est cruciale pour passer à la limite dans (NS_k) . D'après la section précédente, nous savons que la suite $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ tend vers u fortement dans $L_{loc}^p(\mathbb{R}^+; \mathcal{H})$ et faiblement dans $L_{loc}^\infty(\mathbb{R}^+; \mathcal{H}) \cap L_{loc}^2(\mathbb{R}^+; \mathcal{V})$. Conformément à la définition de la notion de solution de (NS) , considérons une fonction Ψ dans $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+; \mathcal{V}_\sigma)$. Comme u_k est une solution de (NS_k) , nous avons

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle u_k(t), \Psi(t) \rangle &= \langle \dot{u}_k(t), \Psi(t) \rangle + \langle u_k(t), \dot{\Psi}(t) \rangle \\ &= \langle P_k \Delta u_k(t), \Psi(t) \rangle + \langle P_k Q(u_k(t), u_k(t)), \Psi(t) \rangle \\ &\quad + \langle f_k(t), \Psi(t) \rangle + \langle u_k(t), \dot{\Psi}(t) \rangle. \end{aligned}$$

Comme il est maintenant habituel, nous écrivons que

$$\begin{aligned} \langle P_k \Delta u_k(t), \Psi(t) \rangle &= -\nu \int_{\Omega} \nabla u_k(t, x) : \nabla P_k \Psi(t, x) dx, \\ \langle P_k Q(u_k(t), u_k(t)), \Psi(t) \rangle &= \int_{\Omega} u_k(t, x) \otimes u_k(t, x) : \nabla P_k \Psi(t, x) dx, \\ \langle u_k(t), \dot{\Psi}(t) \rangle &= \int_{\Omega} u_k(t, x) \cdot \partial_t \Psi(t, x) dx. \end{aligned}$$

Par intégration en temps entre 0 et t , nous en déduisons que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u_k(t, x) \Psi(t, x) dx + \int_{[0, t] \times \Omega} \left(\nu \nabla u_k : \nabla P_k \Psi - u_k \otimes u_k : \nabla P_k \Psi - u_k \cdot \partial_t \Psi \right) (t, x) dx dt \\ = \int_{\Omega} u_k(0, x) \cdot \Psi(0, x) dx + \int_0^t \langle f_k(t'), \Psi(t') \rangle dt'. \end{aligned}$$

Il s'agit maintenant de passer à la limite. Par le théorème de Lebesgue, la suite $(\nabla P_k \Psi)_{k \in \mathbb{N}}$ tend fortement vers $\nabla \Psi$ dans $L^2_{loc}(\mathbb{R}^+; L^2)$. La convergence faible de u_k dans $L^2_{loc}(\mathbb{R}^+; \mathcal{V})$ assure que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{[0, t] \times \Omega} \left(\nu \nabla u_k : \nabla P_k \Psi - u_k \cdot \partial_t \Psi \right) (t, x) dx dt = \int_{[0, t] \times \Omega} \left(\nu \nabla u : \nabla \Psi - u \cdot \partial_t \Psi \right) (t, x) dx dt.$$

Le fait que la suite $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge dans $\mathcal{C}(\mathbb{R}^+; \mathcal{V}')$ implique que, pour tout réel positif t ,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} u_k(t, x) \Psi(t, x) dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \langle u_k(t), \Psi(t) \rangle = \langle u(t), \Psi(t) \rangle.$$

Comme $u(t)$ appartient à L^2 pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, on a donc

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} u_k(t, x) \Psi(t, x) dx = \langle u(t), \Psi(t) \rangle = \int_{\Omega} u(t, x) \Psi(t, x) dx.$$

Les deux termes associés à la donnée initiale et la force extérieure convergent de par la construction des f_k et par le fait que $P_k u_0$ tend vers u_0 dans L^2 .

Pour passer à la limite dans le terme non linéaire, nous allons utiliser la convergence forte énoncée au corollaire 2.2.2. Par interpolation, la suite $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ tend fortement vers u dans $L^2_{loc}(\mathbb{R}^+; L^4)$. Comme la suite $(\nabla P_k \Psi)_{k \in \mathbb{N}}$ tend fortement vers $\nabla \Psi$ dans $L^\infty(\mathbb{R}^+; L^2)$ on en déduit d'après l'inégalité de Hölder que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{[0, t] \times \Omega} (u_k \otimes u_k : \nabla P_k \Psi)(t, x) dx dt = \int_{[0, t] \times \Omega} (u \otimes u : \nabla \Psi)(t, x) dx dt.$$

Nous avons démontré que u est solution de (NS) au sens de la définition 2.0.5. Cela conclut la démonstration du théorème 2.1.

CHAPITRE 3

STABILITÉ ET UNICITÉ

3.1. Le cas bidimensionnel

Dans le cas de la dimension deux, les solutions de Leray de (NS) sont uniques et même stables. Plus précisément, nous avons le théorème suivant.

Théorème 3.1. — *Pour toute donnée u_0 dans \mathcal{H} et f dans $L^2_{loc}(\mathbb{R}^+; \mathcal{V}'_\sigma)$, la solution de Leray est unique, continue en temps à valeurs dans \mathcal{H} , et satisfait, pour tout (s, t) tel que $0 \leq s \leq t$,*

$$\frac{1}{2} \|u(t)\|_{L^2}^2 + \nu \int_s^t \|\nabla u(t')\|_{L^2}^2 dt' = \frac{1}{2} \|u(s)\|_{L^2}^2 + \int_s^t \langle f(t'), u(t') \rangle dt'.$$

De plus, les solutions de Leray sont stables au sens suivant. Soit u (resp. v) une solution de Leray associée à u_0 (resp. v_0) dans \mathcal{H} et f (resp. g) dans $L^2_{loc}(\mathbb{R}^+; \mathcal{V}'_\sigma)$ alors,

$$\|(u - v)(t)\|_{L^2}^2 + \nu \int_0^t \|\nabla(u - v)(t')\|_{L^2}^2 dt' \leq \left(\|u_0 - v_0\|_{L^2}^2 + \frac{2}{\nu} \int_0^t \|(f - g)(t')\|_{\mathcal{V}'_\sigma}^2 dt' \right) \exp\left(\frac{CE^2(t)}{\nu^4}\right)$$

$$\text{avec } E(t) \stackrel{\text{déf}}{=} \min \left\{ \|u_0\|_{L^2}^2 + \frac{1}{\nu} \int_0^t \|f(t')\|_{\mathcal{V}'_\sigma}^2 dt', \|v_0\|_{L^2}^2 + \frac{1}{\nu} \int_0^t \|g(t')\|_{\mathcal{V}'_\sigma}^2 dt' \right\}.$$

Ces résultats de stabilité reposent sur l'étude du problème de Stokes, en considérant le terme non linéaire comme un terme source. Le point clef de la preuve est le lemme d'approximation suivant.

Lemme 3.1.1. — *Soit u une solution de Leray associée à u_0 dans \mathcal{H} et f dans $L^2_{loc}(\mathbb{R}^+; \mathcal{V}'_\sigma)$. Soit $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ la suite de solutions de (NS_k) . Alors pour tout réel strictement positif T , on a*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\sup_{t \in [0, T]} \|u_k(t) - u(t)\|_{L^2}^2 + \nu \int_0^T \|\nabla(u_k - u)(t)\|_{L^2}^2 dt \right) = 0.$$

Démonstration du théorème 3.1. — Le lemme 3.1.1 implique immédiatement que la suite $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers u dans $L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^+; \mathcal{H})$. Par unicité de la limite et du fait que chaque u_k est continue en temps à valeurs dans \mathcal{H} , on en déduit que u est l'unique solution de Leray et qu'elle appartient à $\mathcal{C}(\mathbb{R}^+; \mathcal{H})$. Par ailleurs, par intégration de (2.1.2) entre s et t , on obtient

$$\frac{1}{2} \|u_k(t)\|_{L^2}^2 + \nu \int_s^t \|\nabla u_k(t')\|_{L^2}^2 dt' = \frac{1}{2} \|u_k(s)\|_{L^2}^2 + \int_s^t \langle f_k(t'), u_k(t') \rangle dt'.$$

En passant à la limite lorsque k tend vers l'infini, on trouve l'égalité d'énergie.

Pour démontrer la stabilité, estimons $w_k \stackrel{\text{déf}}{=} u_k - v_k$ dans l'espace d'énergie. En considérant le terme non linéaire comme un terme source et en résolvant le problème de Stokes (théorème 1.4), on obtient

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|w_k(t)\|_{L^2}^2 + \nu \int_0^t \|\nabla w_k\|_{L^2}^2 dt' &= \frac{1}{2} \|w_k(0)\|_{L^2}^2 \\ &\quad + \int_0^t \left(\langle f_k - g_k, w_k \rangle + \langle Q(u_k, u_k) - Q(v_k, v_k), w_k \rangle \right) dt', \\ &\leq \frac{1}{2} \|w_k(0)\|_{L^2}^2 + \int_0^t \left(\frac{\nu}{4} \|\nabla w_k(t)\|_{L^2}^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\nu} \|(f_k - g_k)(t)\|_{\mathcal{V}'_\sigma}^2 + \langle Q(u_k, u_k) - Q(v_k, v_k), w_k \rangle \right) dt'. \end{aligned}$$

D'après le lemme 2.1.2 et l'inégalité de convexité

$$(3.1.1) \quad \forall \theta \in]0, 1[, \quad ab \leq (1 - \theta)a^{\frac{1}{1-\theta}} + \theta b^{\frac{1}{\theta}},$$

on obtient

$$\begin{aligned} \left| \langle Q(u_k, u_k) - Q(v_k, v_k), w_k \rangle \right| &\leq C \|\nabla w_k(t)\|_{L^2}^{\frac{3}{2}} \|w_k\|_{L^2}^{\frac{1}{2}} B_k(t) \\ &\leq \frac{\nu}{4} \|\nabla w_k(t)\|_{L^2}^2 + \frac{C}{\nu^3} B_k^4(t) \|w_k(t)\|_{L^2}^2 \\ \text{avec } B_k(t) &\stackrel{\text{déf}}{=} \min \left\{ \|u_k(t)\|_{L^2}^{\frac{1}{2}} \|\nabla u_k(t)\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}, \|v_k(t)\|_{L^2}^{\frac{1}{2}} \|\nabla v_k(t)\|_{L^2}^{\frac{1}{2}} \right\}. \end{aligned}$$

Le lemme de Gronwall implique alors que

$$\begin{aligned} \|w_k(t)\|_{L^2}^2 + \nu \int_0^t \|\nabla w_k(t')\|_{L^2}^2 dt' &\leq \left(\|w_k(0)\|_{L^2}^2 + \frac{2}{\nu} \int_0^t \|(f_k - g_k)(t')\|_{\mathcal{V}'_\sigma}^2 dt' \right) \\ &\quad \times \exp \left(\frac{C}{\nu^3} \int_0^t B_k^4(t') dt' \right). \end{aligned}$$

En utilisant le fait que u_k (resp. v_k) tend vers u (resp. v) dans $L_{loc}^\infty(\mathbb{R}^+; L^2) \cap L_{loc}^2(\mathbb{R}^+; H_0^1)$, on trouve que

$$\begin{aligned} \|(u - v)(t)\|_{L^2}^2 + \nu \int_0^t \|\nabla(u - v)(t')\|_{L^2}^2 dt' \\ \leq \left(\|u_0 - v_0\|_{L^2}^2 + \frac{2}{\nu} \int_0^t \|(f - g)(t')\|_{\mathcal{V}'_\sigma}^2 dt' \right) \exp \left(\frac{C}{\nu^3} \int_0^t B^4(t') dt' \right) \end{aligned}$$

avec

$$B(t) = \min \left\{ \|u(t)\|_{L^2}^{\frac{1}{2}} \|\nabla u(t)\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}, \|v(t)\|_{L^2}^{\frac{1}{2}} \|\nabla v(t)\|_{L^2}^{\frac{1}{2}} \right\}.$$

L'inégalité d'énergie implique que

$$\int_0^t B^4(t') dt' \leq \frac{1}{\nu} E^2(t),$$

ce qui achève la preuve du théorème 3.1 modulo la justification du lemme 3.1.1. \square

Démonstration du lemme 3.1.1. — Posons $\delta_k \stackrel{\text{déf}}{=} u_k - u$. Grâce à la première estimation du lemme 2.1.2 et à la continuité de l'opérateur de Leray de \mathcal{V}' dans \mathcal{V}'_σ (cf proposition 1.2.3), la fonction

$$h_k \stackrel{\text{déf}}{=} P_k Q(u_k, u_k) - \mathbf{P}Q(u, u)$$

appartient à $L_{loc}^2(\mathbb{R}^+; \mathcal{V}'_\sigma)$.

Donc δ_k est la solution de (S) avec donnée initiale $P_k u_0 - u_0$ et force extérieure $f_k - f + h_k$ et le théorème 1.4 assure que

$$\|\delta_k(t)\|_{L^2}^2 + \nu \int_0^t \|\nabla \delta_k(t')\|_{L^2}^2 dt' \leq \|P_k u_0 - u_0\|_{L^2}^2 + \frac{1}{\nu} \int_0^t (\|f_k - f\|_{\mathcal{V}'}^2 + \|h_k(t')\|_{\mathcal{V}'}^2) dt'.$$

Estimons $\|h_k(t)\|_{\mathcal{V}'}$. Pour cela, écrivons que

$$h_k(t) = P_k Q(u_k, u_k) - P_k Q(u, u) + (P_k - \mathbf{P})Q(u, u).$$

Comme $Q(u, u)$ appartient à $L_{loc}^2(\mathbb{R}^+; \mathcal{V}'_\sigma)$, on en déduit, en utilisant la proposition 1.2.3, que, pour presque tout t ,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|(P_k - \mathbf{P})Q(u(t), u(t))\|_{\mathcal{V}'} = 0.$$

Ensuite, le théorème de Lebesgue joint au fait que l'opérateur P_k est un projecteur orthogonal dans \mathcal{V}'_σ , implique que, pour tout réel strictement positif t ,

$$\|h_k\|_{L^2([0,t]; \mathcal{V}')}^2 \leq \|Q(u_k, u_k) - Q(u, u)\|_{L^2([0,t]; \mathcal{V}')}^2 + o_k(1) \quad \text{avec} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} o_k(1) = 0.$$

En utilisant encore la première inégalité du lemme 2.1.2, on trouve que

$$\begin{aligned} \int_0^t \|h_k(t')\|_{\mathcal{V}'}^2 dt' &\leq C \int_0^t \|\delta_k(t')\|_{L^2} \|\nabla \delta_k(t')\|_{L^2} (\|\nabla u_k(t')\|_{L^2} + \|\nabla u(t')\|_{L^2}) \\ &\quad \times (\|u_k(t')\|_{L^2} + \|u(t')\|_{L^2}) dt' + o_k(1), \end{aligned}$$

puis que

$$\begin{aligned} \int_0^t \|h_k(t')\|_{\mathcal{V}'}^2 dt' &\leq \frac{\nu}{2} \int_0^t \|\nabla \delta_k(t')\|_{L^2}^2 dt' + \frac{C}{\nu} \int_0^t A_k(t') \|\delta_k(t')\|_{L^2}^2 dt' + o_k(1) \\ \text{avec} \quad A_k(t) &\stackrel{\text{déf}}{=} (\|\nabla u_k(t)\|_{L^2}^2 + \|\nabla u(t)\|_{L^2}^2) (\|u_k(t)\|_{L^2}^2 + \|u(t)\|_{L^2}^2). \end{aligned}$$

Nous avons donc

$$\|\delta_k(t)\|_{L^2}^2 + \frac{\nu}{2} \int_0^t \|\nabla \delta_k(t')\|_{L^2}^2 dt' \leq \|P_k u_0 - u_0\|_{L^2}^2 + \frac{C}{\nu} \int_0^t (\|f_k - f\|_{\mathcal{V}'_\sigma}^2 + A_k(t') \|\delta_k(t')\|_{L^2}^2 + o_k(1)) dt'.$$

Le lemme de Gronwall implique que

$$\begin{aligned} \sup_{t \in [0, T]} \|\delta_k(t)\|_{L^2}^2 + \nu \int_0^T \|\nabla \delta_k(t)\|_{L^2}^2 dt \\ \leq C \left(\|P_k u_0 - u_0\|_{L^2}^2 + \frac{1}{\nu} \int_0^T \|f_k - f\|_{\mathcal{V}'_\sigma}^2 dt + o_k(1) \right) \exp\left(\frac{C}{\nu} \int_0^T A_k(t) dt\right). \end{aligned}$$

Grâce à l'estimation d'énergie du théorème 2.1, il existe une constante C telle que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \int_0^T A_k(t) dt \leq C.$$

Le lemme 3.1.1 est donc démontré. \square

La spécificité de la dimension deux est liée au fait que les exposants qui apparaissent dans l'inégalité de Gagliardo-Nirenberg

$$\|Q(u, u)\|_{\mathcal{V}'}^2 \leq C \|u\|_{H_0^1}^2 \|u\|_{L^2}^2$$

sont critiques. Ainsi le taux de croissance dépend du carré de la norme H_0^1 , qui est lui-même contrôlé uniformément par l'inégalité d'énergie.

3.2. Unicité fort-faible

L'énoncé ci-dessous est une généralisation du théorème 3.1 au cas de la dimension 3.

Théorème 3.2. — Soit u une solution de Leray associée à u_0 dans \mathcal{H} et f dans $L^2_{loc}(\mathbb{R}^+; \mathcal{V}'_\sigma)$. On suppose que u est dans $L^4([0, T]; \mathcal{V}_\sigma)$ pour un certain $T > 0$. Alors u est l'unique solution de Leray sur $[0, T]$, appartient à $\mathcal{C}([0, T]; \mathcal{H})$ et vérifie, pour tout (s, t) tel que $0 \leq s \leq t \leq T$,

$$(3.2.1) \quad \frac{1}{2} \|u(t)\|_{L^2}^2 + \nu \int_s^t \|\nabla u(t')\|_{L^2}^2 dt' = \frac{1}{2} \|u(s)\|_{L^2}^2 + \int_s^t \langle f(t'), u(t') \rangle dt'.$$

De plus, pour toute solution de Leray v associée aux données v_0 dans \mathcal{H} et g dans $L^2_{loc}(\mathbb{R}^+; \mathcal{V}'_\sigma)$ on a l'inégalité suivante pour tout t dans $[0, T]$:

$$\begin{aligned} \|(u - v)(t)\|_{L^2}^2 + \nu \int_0^t \|\nabla(u - v)(t')\|_{L^2}^2 dt' \\ \leq \left(\|u_0 - v_0\|_{L^2}^2 + \frac{2}{\nu} \int_0^t \|(f - g)(t')\|_{\mathcal{V}'_\sigma}^2 dt' \right) \exp\left(\frac{C}{\nu^3} \int_0^t \|\nabla u(t')\|_{L^2}^4 dt'\right). \end{aligned}$$

Tout d'abord, il est clair que le dernier point du théorème entraîne le résultat d'unicité. On constate ensuite que u est solution du problème de Stokes dépendant du temps avec donnée initiale $u_0 \in \mathcal{H}$ et terme de force $f - Q(u, u)$. On sait que f est dans $L^2([0, T]; \mathcal{V}'_\sigma)$. Comme par hypothèse u est dans $L^4([0, T]; \mathcal{V}_\sigma)$, on établit facilement que $Q(u, u) \in L^2([0, T]; \mathcal{V}'_\sigma)$. Le théorème 1.4 assure alors que u est continue sur $[0, T]$ à valeurs dans \mathcal{H} .

Les autres points du théorème vont résulter du lemme d'approximation suivant, que nous admettons pour le moment.

Lemme 3.2.1. — Soit u une solution de Leray appartenant à $L^4([0, T]; \mathcal{V}_\sigma)$. Il existe une suite $(\tilde{u}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ dans $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+; \mathcal{V}_\sigma)$ telle que

- la suite $(\tilde{u}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ tend vers u dans $L^4([0, T]; \mathcal{V}_\sigma) \cap L^\infty([0, T]; \mathcal{H})$,
- pour tout k , on a

$$(3.2.2) \quad \partial_t \tilde{u}_k - \nu \Delta \tilde{u}_k = f - Q(\tilde{u}_k, \tilde{u}_k) + R_k \quad \text{avec} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \|R_k\|_{L^2([0, T]; \mathcal{V}'_\sigma)} = 0.$$

Démonstration du théorème 3.2. — Pour établir l'égalité d'énergie, on prend le crochet de dualité de (3.2.2) avec u , on intègre en temps sur l'intervalle $[s, t]$ puis on passe à la limite $k \rightarrow +\infty$.

Reste à établir le dernier point du théorème. Pour cela, on utilise le fait que, comme u et v sont deux solutions de Leray, on peut écrire

$$\begin{aligned} \delta_\nu(t) &= \|(u - v)(t)\|_{L^2}^2 + 2\nu \int_0^t \|\nabla(u - v)(t')\|_{L^2}^2 dt' \\ &= \|u(t)\|_{L^2}^2 + 2\nu \int_0^t \|\nabla u(t')\|_{L^2}^2 dt' + \|v(t)\|_{L^2}^2 + 2\nu \int_0^t \|\nabla v(t')\|_{L^2}^2 dt' \\ &\quad - 2(u(t)|v(t))_{L^2} - 4\nu \int_0^t (\nabla u(t')|\nabla v(t'))_{L^2}^2 dt' \\ (3.2.3) \quad &\leq \|u_0\|_{L^2}^2 + 2 \int_0^t \langle f(t'), u(t') \rangle dt' + \|v_0\|_{L^2}^2 + 2 \int_0^t \langle g(t'), v(t') \rangle dt' \\ &\quad - 2(u(t)|v(t))_{L^2} - 4\nu \int_0^t (\nabla u(t')|\nabla v(t'))_{L^2}^2 dt'. \end{aligned}$$

La fonction \tilde{u}_k appartient à $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+; \mathcal{V}_\sigma)$, donc elle peut être utilisée comme fonction test dans la définition 2.0.5. Comme v est une solution de Leray, on a

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_k(t) &\stackrel{\text{déf}}{=} (\tilde{u}_k(t)|v(t))_{L^2} \\ &= (\tilde{u}_k(0)|v(0))_{L^2} - \nu \int_0^t (\nabla \tilde{u}_k(t')|\nabla v(t'))_{L^2} dt' + \int_0^t \langle g(t'), \tilde{u}_k(t') \rangle dt' \\ &\quad + \int_0^t (v(t') \otimes v(t')|\nabla \tilde{u}_k(t'))_{L^2} dt' + \int_0^t \langle \partial_t \tilde{u}_k(t'), v(t') \rangle dt'. \end{aligned}$$

Grâce à (3.2.2), on obtient

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_k(t) &= (\tilde{u}_k(0)|v(0))_{L^2} - 2\nu \int_0^t (\nabla \tilde{u}_k(t')|\nabla v(t'))_{L^2} dt' + \int_0^t \langle g(t'), \tilde{u}_k(t') \rangle dt' + \int_0^t \langle f(t'), v(t') \rangle dt' \\ &\quad + \int_0^t (v(t') \otimes v(t')|\nabla \tilde{u}_k(t'))_{L^2} dt' - \int_0^t \langle Q(\tilde{u}_k(t'), \tilde{u}_k(t')), v(t') \rangle dt' + \int_0^t \langle R_k(t'), v(t') \rangle dt'. \end{aligned}$$

Le lemme 3.2.1 implique que $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{B}_k(t) = (u(t)|v(t))_{L^2}$ et que

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \left\{ (\tilde{u}_k(0)|v(0))_{L^2} - 2\nu \int_0^t (\nabla \tilde{u}_k(t')|\nabla v(t'))_{L^2} dt' \right. \\ \left. + \int_0^t \langle R_k(t'), v(t') \rangle dt' + \int_0^t \langle g(t'), \tilde{u}_k(t') \rangle dt' \right\} \\ = (u(0)|v(0))_{L^2} - 2\nu \int_0^t (\nabla u(t')|\nabla v(t'))_{L^2} dt' + \int_0^t \langle g(t'), u(t') \rangle dt'. \end{aligned}$$

Donc en définissant

$$\mathcal{R}_k(t) \stackrel{\text{déf}}{=} \int_0^t (v(t') \otimes v(t')|\nabla \tilde{u}_k(t'))_{L^2} dt' - \int_0^t \langle Q(\tilde{u}_k(t'), \tilde{u}_k(t')), v(t') \rangle dt',$$

on en déduit que $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{R}_k(t)$ existe et que

$$\begin{aligned} (u(t)|v(t))_{L^2} &= (u(0)|v(0))_{L^2} - 2\nu \int_0^t (\nabla u(t')|\nabla v(t'))_{L^2} dt' \\ &\quad + \int_0^t \langle g(t'), u(t') \rangle dt' + \int_0^t \langle f(t'), v(t') \rangle dt' + \lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{R}_k(t). \end{aligned}$$

En injectant dans (3.2.3), on trouve

$$(3.2.4) \quad \delta_\nu(t) \leq \|u_0 - v_0\|_{L^2}^2 + 2 \int_0^t \langle (f - g)(t'), (u - v)(t') \rangle dt' - 2 \lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{R}_k(t).$$

Étudions maintenant $\mathcal{R}_k(t)$. Pour cela l'on observe que pour tous champs de vecteurs a et b dans \mathcal{V}_σ , on a $(b \otimes b|\nabla a)_{L^2} = -\langle Q(b, b), a \rangle$ et donc

$$(b \otimes b|\nabla a)_{L^2} - \langle Q(a, a), b \rangle = -\langle Q(b, b), a \rangle - \langle Q(a, a), b \rangle.$$

En utilisant (2.1.1), on peut écrire

$$\begin{aligned} \langle Q(b, b), a \rangle + \langle Q(a, a), b \rangle &= \langle Q(b, b), a - b \rangle + \langle Q(a, a), b - a \rangle \\ &= \langle Q(b, b), a - b \rangle + \langle Q(a, b), b - a \rangle. \end{aligned}$$

On trouve donc

$$\begin{aligned} \langle Q(b, b), a \rangle + \langle Q(a, a), b \rangle &= \langle Q(a - b, b), b - a \rangle \\ &= -((a - b) \otimes b|\nabla(b - a))_{L^2}. \end{aligned}$$

En combinant l'inégalité de Hölder et les inclusions de Sobolev, on trouve que pour tout (a, b, c) dans \mathcal{V}_σ^3 , on a

$$(3.2.5) \quad \begin{aligned} |(a \otimes b | \nabla c)_{L^2}| &\leq C \|a\|_{L^6} \|b\|_{L^3} \|\nabla c\|_{L^2} \\ &\leq C \|\nabla a\|_{L^2} \|b\|_{L^2}^{\frac{1}{2}} \|\nabla b\|_{L^2}^{\frac{1}{2}} \|c\|_{\mathcal{V}}, \end{aligned}$$

et il est clair que l'on peut inverser les rôles de a et b dans le membre de droite de (3.2.5).

On peut donc conclure que pour tout $b \in L^\infty([0, T]; \mathcal{H}) \cap L^2([0, T]; \mathcal{V}_\sigma)$, la fonction

$$\mathcal{Q}_b : a \mapsto \mathcal{Q}(a, b)(t) \stackrel{\text{déf}}{=} \int_0^t (b(t') \otimes b(t') | \nabla a(t'))_{L^2} dt' - \int_0^t \langle Q(a(t'), a(t')), b(t') \rangle dt'.$$

est continue de $L^4([0, T]; \mathcal{V}_\sigma)$ dans $\mathcal{C}([0, T]; \mathbb{R})$. Il s'ensuit que pour tout t dans $[0, T]$, on a

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{R}_k(t) = \int_0^t ((u - v)(t') \otimes u(t') | \nabla(u - v)(t'))_{L^2} dt'.$$

De (3.2.5) et (3.2.4) on déduit que

$$\begin{aligned} \delta_\nu(t) &\leq \|u_0 - v_0\|_{L^2}^2 + 2 \int_0^t \|(f - g)(t')\|_{\mathcal{V}'_\sigma} \|\nabla(u - v)(t')\|_{\mathcal{V}} dt' \\ &\quad + C \int_0^t \|\nabla u(t')\|_{L^2} \|\nabla(u - v)(t')\|_{L^2}^{\frac{3}{2}} \|(u - v)(t')\|_{L^2}^{\frac{1}{2}} dt'. \end{aligned}$$

Par une inégalité de convexité on trouve

$$\begin{aligned} \|(u - v)(t)\|_{L^2}^2 + \nu \int_0^t \|\nabla(u - v)(t')\|_{L^2}^2 dt' &\leq \|u_0 - v_0\|_{L^2}^2 \\ &\quad + \frac{2}{\nu} \int_0^t \|(f - g)(t')\|_{\mathcal{V}'_\sigma}^2 dt' + \frac{C}{\nu^3} \int_0^t \|\nabla u(t')\|_{L^2}^4 \|(u - v)(t')\|_{L^2}^2 dt'. \end{aligned}$$

Le lemme de Gronwall permet de conclure la démonstration de la dernière partie du théorème, modulo la justification du lemme d'approximation. \square

Démonstration du lemme 3.2.1. — Observons que, comme le domaine Ω est borné, par l'inclusion de Sobolev, on trouve

$$(3.2.6) \quad \begin{aligned} \|u \otimes v\|_{L^2([0, T] \times \Omega)} &\leq \|u\|_{L^4([0, T] \times \Omega)} \|v\|_{L^4([0, T] \times \Omega)} \\ &\leq C \|u\|_{L^4([0, T]; \mathcal{V}_\sigma)} \|v\|_{L^4([0, T]; \mathcal{V}_\sigma)}. \end{aligned}$$

Donc si u est dans $L^4([0, T]; \mathcal{V}_\sigma)$, alors $Q(u, u)$ appartient à $L^2([0, T]; \mathcal{V}'_\sigma)$. Comme $\Delta u \in L^2([0, T]; \mathcal{V}'_\sigma)$, cela implique que $\partial_t u$ aussi. Donc le théorème de Lebesgue donne

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|P_k u - u\|_{L^4([0, T]; \mathcal{V}_\sigma)} = \lim_{k \rightarrow \infty} \|P_k \partial_t u - \partial_t u\|_{L^2([0, T]; \mathcal{V}'_\sigma)} = 0.$$

Par définition de P_k , on a

$$P_k u = \sum_{j=0}^k \alpha_j(t) e_j \quad \text{avec} \quad \partial_t \alpha_j \in L^2([0, T]).$$

Soit θ_j une fonction de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que $\theta_j(0) = \alpha_j(0)$ et $\theta_j(T) = \alpha_j(T)$. La fonction $\tilde{\alpha}_j$ définie par θ_j en dehors de $[0, T]$ et α_j dans $[0, T]$ appartient à $H^1(\mathbb{R})$ et est à support compact. Soit χ une fonction de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ d'intégrale égale à 1. Alors $\epsilon^{-1} \chi(\epsilon^{-1} \cdot) \star \tilde{\alpha}_j$ tend vers $\tilde{\alpha}_j$ dans $H^1(\mathbb{R})$. En choisissant

convenablement ϵ , on définit une suite $(\tilde{u}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ telle que pour tout k , la fonction \tilde{u}_k soit à valeurs dans $P_k(\mathcal{V}'_\sigma)$, vérifie $\partial_t \tilde{u}_k \in \mathcal{C}([0, T]; \mathcal{V}'_\sigma)$ et

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\tilde{u}_k - u\|_{L^4([0, T]; \mathcal{V}_\sigma)} = \lim_{k \rightarrow \infty} \|\partial_t \tilde{u}_k - \partial_t u\|_{L^2([0, T]; \mathcal{V}'_\sigma)} = 0.$$

On a donc aussi $\lim_{k \rightarrow \infty} \|\Delta \tilde{u}_k - \Delta u\|_{L^2([0, T]; \mathcal{V}'_\sigma)} = 0$. De plus, l'inégalité (3.2.6) implique que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|Q(\tilde{u}_k, \tilde{u}_k) - Q(u, u)\|_{L^2([0, T]; \mathcal{V}'_\sigma)} = 0.$$

Ceci achève la démonstration du lemme 3.2.1. \square

3.3. Singularités pour les équations de Navier-Stokes

Le théorème 3.2 montre que l'unicité et la stabilité des solutions (qui sont des propriétés importantes pour la pertinence physique du modèle) sont étroitement liées à la régularité. Une question fondamentale, proposée comme problème du millénaire par la fondation Clay, est donc de savoir s'il existe des solutions globales régulières ou si on peut au contraire trouver des solutions qui présentent des singularités en temps fini. Il n'est pas question ici de décrire de façon exhaustive la littérature consacrée à ce domaine de recherches très actif, mais juste de mentionner les différentes approches du problème, et quelques résultats marquants.

La première approche consiste à chercher des classes de données initiales, les plus larges possibles, pour lesquelles les équations de Navier-Stokes admettent une (unique) solution régulière.

Ainsi, dans [9], Fujita et Kato ont montré l'existence et l'unicité des solutions dans $L^\infty(\mathbb{R}^+, H^{1/2}(\mathbb{R}^3)) \cap L^2(\mathbb{R}^+, H^{3/2}(\mathbb{R}^3))$ pour des données initiales petites, et l'existence et l'unicité locales sans restriction de taille sur la donnée. Leur méthode (qui sera étudiée en TD) est extrêmement robuste et s'applique en fait à des espaces fonctionnels beaucoup plus généraux pourvu qu'ils soient invariants par changement d'échelle parabolique.

Une remarque importante due à Cannone, Meyer et Planchon [4] est que dans les espaces de régularité négative, la condition de petitesse est satisfaite par des fonctions très scillantes sans que leur amplitude soit nécessairement petite. Une littérature importante est dédiée à des raffinements de ce résultat, dont la version optimale a été obtenue par Koch et Tataru.

Une autre approche consiste à caractériser, de façon la plus fine possible, les singularités qui pourraient faire obstacle à l'unicité des solutions de Leray. On peut d'abord mentionner que le type de singularités proposées par Leray lui-même (profils auto-similaires), ne peut en fait pas apparaître, comme cela a été montré par Necas, Ruzicka et Sverak [18].

Des résultats marquants dans cette direction ont été obtenus par Scheffer, et améliorés par Caffarelli, Kohn et Nirenberg [3]. En utilisant une dilatation auto-similaire au voisinage des singularités et des estimations locales de type fonction maximale, ils ont montré que l'ensemble des points singuliers (au voisinage desquels le champ de vitesses est non borné) forment un ensemble de mesure nulle de $\mathbb{R}^+ \times \Omega$.

Plus récemment, en utilisant le même type d'argument de localisation combiné avec un résultat d'unicité pour les équations paraboliques rétrogrades, Escauriazi, Seregin et Sverak ont montré dans [8] que les solutions faibles ne peuvent pas développer de singularité dès qu'elles appartiennent à $L_{loc}^\infty(\mathbb{R}^+, L^3(\Omega))$.

PARTIE II

EQUATIONS D'EULER POUR LES FLUIDES INCOMPRESSIBLES NON VISQUEUX

CHAPITRE 4

SOLUTIONS FORTES

Dans cette partie, on considère le cas d'un fluide parfait (non visqueux), ce qui revient formellement à prendre $\nu = 0$ dans les équations précédentes. L'effet régularisant de l'opérateur de Stokes est donc complètement perdu, et la stabilité faible qui conduit au théorème d'existence de Leray n'a pas d'analogue.

De façon générale, pour un système hyperbolique non linéaire de ce type, on ne sait montrer que l'existence et l'unicité locales de solutions régulières. Le point important est la structure du transport qui permet de propager la régularité sur des temps courts.

Pour les équations d'Euler incompressibles en dimension trois, la question du comportement en temps plus grand est complètement ouverte : on ne sait montrer ni l'explosion des solutions fortes, ni l'existence globale de solutions même définies en un sens plus faible.

4.1. Estimations d'énergie

4.1.1. Conditions de bord. —

Les équations d'Euler sont de type hyperbolique car la dérivée spatiale d'ordre le plus élevé (celle qui détermine le symbole principal de l'opérateur) est une dérivée d'ordre 1. Plus précisément, c'est un terme de transport ($u \cdot \nabla_x$). Formellement le système est alors bien posé si on prescrit une condition au bord uniquement là où le flux est entrant, i.e. aux points $x \in \partial\Omega$ tels que

$$u \cdot n(x) < 0,$$

avec la convention que n est la normale extérieure au domaine.

En particulier, sous la condition de non pénétration

$$u \cdot n(x) = 0 \text{ sur } \partial\Omega,$$

la vitesse est partout tangentielle au bord. Les quantités transportées sont conservées et il n'y a pas de condition supplémentaire à prescrire.

Du point de vue mathématique, cette condition est bien définie, même pour des champs u sans régularité. En effet, la formule de Stokes, combinée avec la contrainte de divergence nulle, montre que la composante normale du champ de vitesses a toujours une trace sur le bord.

Dans la suite, on supposera toujours que l'ouvert Ω est régulier et on se limitera à la condition de non pénétration sur le bord $\partial\Omega$. On considérera aussi le cas plus simple de domaines sans bord, typiquement

- le cas du tore;
- le cas de l'espace entier.

Dans ce dernier cas, comme l'inégalité de Poincaré n'est plus satisfaite, on travaillera toujours avec des espaces de Sobolev inhomogènes.

4.1.2. Conservation de l'énergie. —

Formellement, on a alors la conservation de l'énergie cinétique.

Proposition 4.1.1. — *Soit $u \in C^\infty([0, T] \times \mathbf{T}^d)$ une solution régulière des équations d'Euler incompressibles (E). Alors*

$$\|u(t)\|_{L^2}^2 = \|u_0\|_{L^2}^2.$$

Démonstration. — Le calcul est très similaire à celui qui a été fait pour les équations de Navier-Stokes. Le seul point à étudier est le rôle des termes de bord. En multipliant l'équation du mouvement par u et en intégrant par rapport à la variable spatiale, on obtient

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u(t)\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2} \int (u \cdot \nabla) u^2 dx + \int u \cdot \nabla p dx = 0.$$

En utilisant la contrainte d'incompressibilité et la formule de Green, on obtient alors

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u(t)\|_{L^2}^2 + \int_{\partial\Omega} (u \cdot n) \left(\frac{1}{2} u^2 + p \right) d\sigma = 0.$$

La conservation de l'énergie est alors une simple conséquence de la condition de non pénétration. \square

Cette estimation permet de donner un sens aux différents termes de l'équation

$$\partial_t u + \nabla \cdot (u \otimes u + p) = 0.$$

En effet, comme dans les équations de Navier-Stokes, la pression est le multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte d'incompressibilité. En prenant la divergence de l'équation d'Euler (E), on obtient ainsi que

$$\Delta p = \nabla \cdot ((u \cdot \nabla) u) = \sum_{i,j} \partial_{ij} (u_i u_j).$$

La pression est donc solution d'un problème elliptique, sa régularité dépend de la régularité de u , de la régularité du domaine Ω et des conditions de bord.

Sur le tore \mathbf{T}^d , l'équation de la pression a une unique solution (calculable par exemple à partir de la transformée de Fourier) puisque

$$\int \sum_{i,j} \partial_{ij} (u_i u_j) dx = 0.$$

Dans le cas d'un domaine à bords, en projetant l'équation d'Euler sur la normale au bord n , on obtient la relation

$$(u \cdot \nabla u) \cdot n = \frac{\partial p}{\partial n}$$

qui donne une condition de bord de type Neumann pour l'équation de la pression.

4.1.3. Estimations d'énergie précisées. —

L'estimation L^2 fournie par la conservation de l'énergie est par contre insuffisante pour contrôler la stabilité de l'équation. Comme les équations sont hyperboliques, on ne s'attend pas à pouvoir montrer un effet régularisant, ou à obtenir de la compacité forte sur les suites de solutions.

On va cependant montrer que la régularité peut être propagée. Dans un premier temps, on va établir des estimations a priori, i.e. des estimations qui sont satisfaites par les solutions régulières des équations d'Euler incompressibles.

Proposition 4.1.2. — *Soit $u \in C^\infty([0, T] \times \Omega)$ une solution régulière des équations d'Euler incompressibles (E) (s'annulant au bord, ainsi que ses dérivées). Pour tout $m > \frac{d}{2} + 1$, il existe une constante $C_m > 0$ telle que*

$$\|u(t)\|_{H^m} \leq \frac{1}{\|u_0\|_{H^m}^{-1} - C_m t} \quad \text{pour tout } t < C_m^{-1} \|u_0\|_{H^m}^{-1}.$$

Démonstration. — Soit $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ un multi-indice de longueur $|\alpha| = \sum_{i=1}^d \alpha_i \leq m$. En différentiant l'équation d'Euler (E) et en prenant le produit scalaire L^2 avec $D^\alpha u$, on obtient

$$(4.1.1) \quad \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (D^\alpha u, D^\alpha u) = - (D^\alpha u, D^\alpha ((u \cdot \nabla) u)).$$

La pression a disparu dans cette formule car $D^\alpha u$ est un champ à divergence nulle et que le domaine n'a pas de bord, de sorte que

$$(D^\alpha u, \nabla D^\alpha p) = 0.$$

Il faut alors estimer le membre de droite de (4.1.1). La formule de Leibniz donne

$$(D^\alpha u, D^\alpha ((u \cdot \nabla) u)) = \sum_{\beta} \binom{\beta}{\alpha} (D^\alpha u, (D^\beta u \cdot \nabla) D^{\alpha-\beta} u)$$

où la somme porte sur les multi-indices β tels que $0 \leq \beta_i \leq \alpha_i$, et $\binom{\beta}{\alpha}$ désigne le produit des coefficients binomiaux.

Le point clé de l'analyse est le fait que le terme correspondant à $\beta = 0$ dans la somme est nul :

$$(D^\alpha u, (u \cdot \nabla) D^\alpha u) = \frac{1}{2} \int u \cdot \nabla (D^\alpha u)^2 dx = 0$$

car u est à divergence nulle. Cela signifie que l'ordre des dérivées qui interviennent dans le membre de droite de (4.1.1) est égal à l'ordre du membre de gauche, et qu'on peut espérer obtenir une équation fermée sur une norme Sobolev bien choisie.

Ce choix est déterminé par l'injection de Sobolev, qui montre que H^s est une algèbre dès que $s > \frac{d}{2}$. Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$|(D^\alpha u, (D^\beta u \cdot \nabla) D^{\alpha-\beta} u)| \leq \|D^\alpha u\|_{L^2} \|(D^\beta u \cdot \nabla) D^{\alpha-\beta} u\|_{L^2}.$$

– Si $|\beta| = 1$, l'injection de H^{m-1} dans L^∞ implique

$$\|(D^\beta u \cdot \nabla) D^{\alpha-\beta} u\|_{L^2} \leq \|D^\beta u\|_{L^\infty} \|\nabla D^{\alpha-\beta} u\|_{L^2} \leq C \|u\|_{H^m}^2.$$

– De façon symétrique, si $\beta = \alpha$

$$\|(D^\beta u \cdot \nabla) D^{\alpha-\beta} u\|_{L^2} \leq \|D^\beta u\|_{L^2} \|\nabla D^{\alpha-\beta} u\|_{L^\infty} \leq C \|u\|_{H^m}^2.$$

– Si $1 < |\beta| < |\alpha|$, en combinant l'inégalité de Hölder et les injections de Sobolev, on obtient

$$\begin{aligned} \|(D^\beta u \cdot \nabla) D^{\alpha-\beta} u\|_{L^2} &\leq \|D^\beta u\|_{L^{p_1}} \|\nabla D^{\alpha-\beta} u\|_{L^{p_2}} \\ &\leq C \|u\|_{H^{s_1}} \|u\|_{H^{s_2}} . \end{aligned}$$

où

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} = \frac{1}{2}, \quad s_1 = |\beta| + d \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p_1} \right), \quad s_2 = |\alpha - \beta| + 1 + d \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p_2} \right) .$$

Pour trouver des exposants $p_1, p_2 \in]2, +\infty[$ tels que $s_1 \leq m$ et $s_2 \leq m$, il suffit alors que $m > \frac{d}{2} + 1$.

En regroupant ces différentes estimations puis en sommant sur tous les multi-indices α de longueur $|\alpha| \leq m$, on obtient finalement que

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u\|_{H^m}^2 \leq C_m \|u\|_{H^m}^3 .$$

La proposition s'obtient alors par intégration de l'inégalité différentielle. \square

4.2. Existence et unicité locales

Théorème 4.1. — Soient $m > \frac{d}{2} + 1$, et $u_0 \in H^m(\Omega)$. Alors il existe un temps T (ne dépendant que de $\|u_0\|_{H^m}$) tel que (E) a une unique solution u de donnée initiale u_0 sur $[0, T]$. De plus, cette solution vérifie la borne

$$\sup_{t \in [0, T]} \|u(t)\|_{H^m} < +\infty .$$

Comme au chapitre 2, la stratégie pour construire des solutions de (E) consiste à considérer une suite de problèmes approchés, dont les solutions sont régulières et faciles à construire. Les estimations a priori obtenues au paragraphe précédent pour les équations d'Euler sont encore valables de façon uniforme pour ces approximations, ce qui permet de passer à la limite et d'obtenir une solution locale pour les équations d'Euler.

4.2.1. Construction de solutions approchées. —

Dans le cas où Ω est borné (avec ou sans bord), nous allons utiliser comme dans la partie précédente les projecteurs spectraux P_k associés à l'opérateur de Stokes. Dans le cas de l'espace entier, on définit les projecteurs P_k comme des localisations en fréquences (en utilisant la transformée de Fourier et une partition régulière de l'unité sur des couronnes dyadiques).

Nous introduisons alors la famille d'équations différentielles ordinaires suivantes

$$(E_k) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt} u_k &= P_k Q(u_k, u_k) \\ u_k(0) &= P_k u_0, \end{cases}$$

Il résulte des propriétés de continuité de Q et P_k que l'application

$$\begin{cases} \mathcal{H}_k &\longrightarrow \mathcal{H}_k \\ (z) &\longmapsto P_k Q(z, z) \end{cases}$$

vérifie les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz, ce qui entraîne l'existence d'une suite $(T_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de réels strictement positifs et d'une suite $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de solutions maximales de (E_k) appartenant à $\mathcal{C}^1([0, T_k]; \mathcal{H}_k)$.

Afin d'estimer $\|u_k(t)\|_{L^2}^2$, on prend le produit scalaire L^2 de (E_k) avec $u_k(t)$. On obtient

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_k(t)\|_{L^2}^2 = 0.$$

Ceci implique que u_k reste borné pour tout temps dans \mathcal{H}_k , et donc que $T_k = +\infty$.

Comme les opérateurs de dérivation commutent avec les projecteurs P_k , on peut aussi reprendre les arguments du paragraphe précédent, et établir des inégalités d'énergie précisées : si $m > \frac{d}{2} + 1$, pour tout multi-indice α tel que $|\alpha| \leq m$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (D^\alpha u_k, D^\alpha u_k) &= -(D^\alpha u_k, D^\alpha P_k((u_k \cdot \nabla)u_k)) \\ &= -(D^\alpha u_k, D^\alpha((u_k \cdot \nabla)u_k)) \leq C_{m,\alpha} \|u_k\|_{H^m}^3 \end{aligned}$$

On a ainsi l'estimation

$$\|u_k(t)\|_{H^m} \leq \frac{1}{\|P_k u_0\|_{H^m}^{-1} - C_m t} \quad \text{pour tout } t < C_m^{-1} \|P_k u_0\|_{H^m}^{-1},$$

où la constante C_m ne dépend pas de k . Autrement dit, il existe un temps T dépendant uniquement de m et de $\|u_0\|_{H^m} = \sup \|P_k u_0\|_{H^m}$ tel que

$$(4.2.1) \quad \forall t \leq T, \forall k, \quad \|u_k(t)\|_{H^m} \leq C(T).$$

4.2.2. Convergence de la suite d'approximations. —

En utilisant l'estimation (4.2.1), on peut montrer la convergence de la suite (u_k) dans $\mathcal{C}([0, T], L^2)$. En effet, on a pour $l > k$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_k - u_l\|_{L^2}^2 &= -\frac{d}{dt} (u_l | u_k)_{L^2} \\ &= (P_k(u_k \cdot \nabla u_k) | u_l)_{L^2} + (P_l(u_l \cdot \nabla u_l) | u_k)_{L^2} \\ &= ((P_k - I)(u_k \cdot \nabla u_k) | u_l)_{L^2} + ((u_l - u_k) \cdot \nabla u_l) | u_k)_{L^2} \\ &= ((P_k - I)(u_k \cdot \nabla u_k) | u_l)_{L^2} + ((u_l - u_k) \cdot \nabla(u_l - u_k) | u_k)_{L^2} \end{aligned}$$

par intégrations par parties, en utilisant le fait que $\operatorname{div} u_k = \operatorname{div} u_l = 0$.

En intégrant à nouveau par parties, et en utilisant l'injection de H^{m-1} dans L^∞ , on peut estimer le deuxième terme du membre de droite

$$\begin{aligned} |((u_l - u_k) \cdot \nabla(u_l - u_k) | u_k)_{L^2}| &\leq \|\nabla u_k\|_{L^\infty} \|u_k - u_l\|_{L^2}^2 \\ &\leq C(T) \|u_k - u_l\|_{L^2}^2 \end{aligned}$$

grâce à l'estimation uniforme (4.2.1).

De la même façon, on a

$$\begin{aligned} |((P_k - I)(u_k \cdot \nabla u_k) | u_l)_{L^2}| &\leq \|u_k \cdot \nabla u_k\|_{L^2} \|(I - P_k)u_l\|_{L^2} \\ &\leq \|\nabla u_k\|_{L^2} \|u_k\|_{L^\infty} \|(I - P_k)u_l\|_{L^2} \\ &\leq C(T) \|(I - P_k)u_l\|_{L^2} \end{aligned}$$

Comme (u_l) est uniformément bornée dans H^m , ce dernier terme tend vers 0 quand $k \rightarrow \infty$. On a plus précisément

$$\|(I - P_k)u_l\|_{L^2}^2 \leq \frac{1}{\lambda_k^{2m}} \|u_l\|_{H^m}^2 \leq \frac{C(T)}{\lambda_k^{2m}}$$

où (λ_k) est la suite des valeurs propres de l'opérateur de Stokes (comptées avec multiplicité) dans le cas d'un domaine borné, et (λ_k) est la suite des paramètres de troncature en fréquences dans le cas de l'espace entier .

En regroupant ces différentes estimations, on obtient finalement que

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_k - u_l\|_{L^2}^2 \leq C(T) (\|u_k - u_l\|_{L^2}^2 + \frac{C(T)}{\lambda_k^{2m}})$$

d'où l'on déduit que

$$(4.2.2) \quad \sup_{t \in [0, T]} \|u_k(t) - u_l(t)\|_{L^2}^2 \rightarrow 0 \text{ quand } k, l \rightarrow \infty .$$

La suite (u_k) est une suite de Cauchy de $\mathcal{C}([0, T], L^2)$, elle est donc convergente (et la convergence est d'autant plus rapide que m est grand).

Soit $u \in \mathcal{C}([0, T], L^2)$ la limite de la suite d'approximations (u_k) . De (4.2.1), on déduit que $u \in L^\infty([0, T], H^m)$. Il reste alors à montrer que u est une solution de (E).

Remarquons d'abord que u est solution des équations d'Euler en forme faible

$$(u(t)|\varphi)_{L^2} = (u_0|\varphi)_{L^2} + \int_0^t (u \otimes u(\tau)|\nabla\varphi)_{L^2} d\tau$$

pour toute fonction test $\varphi \in C^\infty(\mathbf{T}^d)$ à divergence nulle. En effet, on a pour tout k

$$(u_k(t)|\varphi)_{L^2} = (u_{0,k}|\varphi)_{L^2} + \int_0^t \sum_{i,j} (u_k \otimes u_k(\tau)|P_k \nabla\varphi)_{L^2} d\tau$$

et il n'y a aucune difficulté pour passer à la limite $k \rightarrow \infty$ en utilisant la convergence forte (4.2.2).

De plus, on peut observer que $(u \otimes u(\tau)|\nabla\varphi)_{L^2}$ est une fonction continue du temps de sorte que $(u(t)|\varphi)_{L^2}$ est différentiable. On a donc

$$\frac{d}{dt} (u(t)|\varphi)_{L^2} = -(u \cdot \nabla u(t)|\varphi)_{L^2} .$$

De la borne $L^\infty([0, T], H^m)$, on déduit que $u \cdot \nabla u(t) \in L^\infty([0, T], H^{m-1})$ puisque H^{m-1} est une algèbre. Il existe alors un $p \in L^\infty([0, T], H^m)$ tel que

$$\partial_t u + u \cdot \nabla u = -\nabla p \text{ dans } L^\infty([0, T], H^m) .$$

Comme u est différentiable dans $L^\infty([0, T], H^m) \subset L^\infty([0, T] \times \Omega)$, elle est aussi différentiable ponctuellement, de sorte que u est une solution classique de l'équation d'Euler (E).

4.2.3. Unicité des solutions régulières. —

On note $u \in C([0, T], H^m)$ la solution des équations d'Euler (E) de donnée initiale u_0 construite par l'algorithme d'approximation précédent.

Le résultat d'unicité énoncé dans le théorème 4.1 repose sur l'inégalité de stabilité suivante :

Proposition 4.2.1. — *Soit v une solution quelconque des équations d'Euler, satisfaisant (E) au sens des distributions, ainsi que l'inégalité d'énergie*

$$\|v(t)\|_{L^2}^2 \leq \|v_0\|_{L^2}^2 .$$

Pour tout t dans $[0, T]$:

$$\|(u - v)(t)\|_{L^2}^2 \leq \|u_0 - v_0\|_{L^2}^2 \exp\left(C \int_0^t \|\nabla u(t')\|_{L^\infty} dt'\right).$$

On notera que ce résultat donne en fait une information plus précise que l'unicité dans la classe des solutions régulières. Il implique que, tant qu'il existe une solution Lipschitzienne, toutes les solutions faibles - quelle que soit leur régularité - coïncident nécessairement avec cette dernière : c'est ce qu'on appelle un résultat de stabilité fort-faible.

Démonstration. — Comme dans le cas des équations de Navier-Stokes, l'inégalité de stabilité s'obtient en modulant l'énergie

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|u_k - v\|_{L^2}^2 &\leq \frac{1}{2} \|u_k\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2} \|v\|_{L^2}^2 - (u_k|v)_{L^2} \\ &\leq \frac{1}{2} \|u_{0,k}\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2} \|v_0\|_{L^2}^2 - (u_k|v)_{L^2} \end{aligned}$$

En utilisant u_k comme fonction test dans la formulation faible des équations d'Euler, on obtient alors

$$\begin{aligned} (v(t)|u_k(t))_{L^2} &= (v_0|u_{k,0})_{L^2} + \int_0^t (v \otimes v(\tau)|\nabla u_k(\tau))_{L^2} d\tau - \int_0^t (P_k Q(u_k, u_k)(\tau)|v(\tau))_{L^2} d\tau \\ &= (v_0|u_{k,0})_{L^2} + \int_0^t (v \otimes v(\tau)|\nabla u_k(\tau))_{L^2} d\tau - \int_0^t (Q(u_k, u_k)(\tau)|v(\tau))_{L^2} d\tau \\ &\quad - \int_0^t ((P_k - I)Q(u_k, u_k)(\tau)|v(\tau))_{L^2} d\tau \end{aligned}$$

Or, on a l'identité

$$\begin{aligned} (v \otimes v|\nabla u_k)_{L^2} - (u_k \cdot \nabla u_k|v)_{L^2} &= (v \cdot \nabla u_k|v)_{L^2} - (u_k \cdot \nabla u_k|v)_{L^2} \\ &= ((v - u_k) \cdot \nabla u_k|v)_{L^2} \\ &= ((v - u_k) \cdot \nabla u_k|(v - u_k))_{L^2} \end{aligned}$$

En combinant ces différentes relations, on obtient

$$\frac{1}{2} \|u_k - v\|_{L^2}^2 \leq \frac{1}{2} \|u_{0,k} - v_0\|_{L^2}^2 - \int_0^t ((v - u_k) \otimes (v - u_k)|\nabla u_k)(\tau) d\tau - \int_0^t ((P_k - I)Q(u_k, u_k)|v)_{L^2}(\tau) d\tau$$

d'où l'on déduit en utilisant le lemme de Gronwall

$$\begin{aligned} \|u_k - v\|_{L^2}^2 &\leq \|u_{0,k} - v_0\|_{L^2}^2 \exp\left(C \int_0^t \|\nabla u_k(t')\|_{L^\infty} dt'\right) \\ &\quad - \int_0^t ((P_k - I)Q(u_k, u_k)|v)_{L^2}(\tau) \exp\left(C \int_\tau^t \|\nabla u_k(t')\|_{L^\infty} dt'\right) d\tau. \end{aligned}$$

Comme u est limite forte de la suite (u_k) , et que $\|\nabla u_k\|_{L^\infty}$ est uniformément bornée, on peut passer à la limite dans l'inégalité

$$\|(u - v)(t)\|_{L^2}^2 \leq \|u_0 - v_0\|_{L^2}^2 \exp\left(C \int_0^t \|\nabla u(t')\|_{L^\infty} dt'\right)$$

ce qui achève la preuve de la proposition. \square

4.3. Solutions dissipatives

En dimension 3, la question d'un prolongement global des solutions (même dans un sens faible) reste totalement ouverte. De façon alternative, en partant de l'inégalité de stabilité énoncé dans la proposition 4.2.1, Lions [16] a proposé une notion encore plus faible de solution :

Définition 4.3.1. — Une solution dissipative des équations d'Euler (E) sur $[0, T]$ est un champ de vecteurs

$$u \in L^\infty([0, T], L^2(\Omega)) \cap C([0, T], w - L^2(\Omega))$$

satisfaisant $\nabla \cdot u = 0$ et $u|_{t=0} = u_{in}$ au sens des distributions, et tel que

$$\begin{aligned} \|u(t) - \tilde{u}(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq \|u_{in} - \tilde{u}_{in}\|_{L^2(\Omega)}^2 \exp\left(\int_0^t \|(\nabla \tilde{u} + (\nabla \tilde{u})^T)(s)\|_{L^\infty(\Omega)} ds\right) \\ &\quad + \int_0^t \int A(\tilde{u}) \cdot (\tilde{u} - u)(s, x) dx \exp\left(\int_s^t \|(\nabla \tilde{u} + (\nabla \tilde{u})^T)(\tau)\|_{L^\infty(\Omega)} d\tau\right) \end{aligned}$$

pour tout $t \in [0, T]$ et toute fonction test $\tilde{u} \in C([0, T] \times \Omega)$ telle que

$$\nabla \cdot \tilde{u} = 0, \quad n \cdot \tilde{u}|_{\partial\Omega} = 0,$$

$$(\nabla \tilde{u} + (\nabla \tilde{u})^T) \in L^1([0, T], L^\infty(\Omega)),$$

$$A(v) = \partial_t \tilde{u} + (\tilde{u} \cdot \nabla) \tilde{u} \in L^1([0, T], L^2(\Omega)).$$

Ces solutions existent toujours (globalement en temps) : en général, on ne sait pas si elles vérifient (E) sous la forme conservative, mais elles coïncident avec l'unique solution régulière tant que cette dernière existe.

Cette notion de solution est particulièrement utile pour l'étude de problèmes d'analyse asymptotique, notamment la limite non visqueuse qui sera l'objet de la dernière partie de ce cours.

CHAPITRE 5

SOLUTIONS 2D À VORTICITÉ BORNÉE

En dimension deux, les résultats précédents peuvent être améliorés de façon sensible en utilisant la structure géométrique du terme non linéaire. Le problème de Cauchy associé à (E) peut se ré-écrire comme une équation de transport sur la vorticité $\omega = \partial_2 u_1 - \partial_1 u_2$

$$(5.0.1) \quad \begin{cases} \partial_t \omega + (u \cdot \nabla) \omega = 0, \\ \partial_1 u_1 + \partial_2 u_2 = 0, \quad \partial_2 u_1 - \partial_1 u_2 = \omega, \\ u \cdot n = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Cela signifie que

$$u(t, x) = K * \omega(t, x) \equiv \int_{\Omega} K(x, y) \omega(t, y) dy$$

où $K = \nabla^\perp P$ et P est le noyau de Poisson avec condition de Dirichlet sur $\partial\Omega$.

En intégrant le long des caractéristiques du flot, on obtient la formulation suivante

$$(5.0.2) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt} \Phi(t, x) = u(t, \Phi(t, x)), \quad \Phi(0, x) = x, \\ \omega(t, x) = \omega_0(\Phi^{-1}(t, x)), \\ u(t, x) = K * \omega(t, x). \end{cases}$$

Bien que formellement équivalente, la formulation (5.0.2) est plus faible que (5.0.1) au sens classique : en effet, (5.0.2) ne requiert aucune propriété de différentiabilité sur ω . Par contre, les solutions de (5.0.1) au sens des distributions ne sont pas toujours des solutions de (5.0.2) car la définition du flot Φ nécessite une borne de type Lipschitz sur le champ de vitesses u .

Le but de ce chapitre est de montrer que le système (5.0.2) est bien posé dès que la vorticité $\omega_0 \in L^\infty$.

Remarque 5.0.1. — Ces résultats n'ont pas de contrepartie en dimension trois car l'équation sur le rotationnel $\omega = \text{rot } u$

$$\partial_t \omega + (u \cdot \nabla) \omega = (\omega \cdot \nabla) u.$$

fait intervenir un terme supplémentaire de stretching, qui est homogène au carré du rotationnel et qui pourrait le cas échéant créer des singularités (comme c'est le cas pour l'équation de Hopf par exemple).

5.1. Définition du flot

5.1.1. Estimation du noyau de Poisson. —

Le lemme suivant permet de montrer que, si la vorticité $\omega \in L^\infty$, le champ de vitesses $u = K * \omega$ est born e, continu en x mais pas forcément lipschitzien. La condition de continuité Lipschitz est en fait corrigée par un facteur logarithmique.

Proposition 5.1.1. — *Soit Ω un ouvert born e régulier. Alors il existe $C > 0$ telle que*

$$\int_{\Omega} |K(x, y)| dy \leq C,$$

$$\int_{\Omega} |K(x, y) - K(x', y)| dy \leq C(1 + |\Omega|)\varphi(|x - x'|)$$

où φ est définie sur \mathbb{R}^+ par

$$\varphi(r) = \begin{cases} r(1 - \ln r) & \text{si } r < 1, \\ 1 & \text{si } r \geq 1. \end{cases}$$

Démonstration. — Des résultats classiques d'analyse harmonique montrent que le noyau de Poisson n'est singulier qu'au voisinage de la diagonale, et plus précisément qu'il vérifie la majoration ponctuelle

$$|K(x, y)| \leq \frac{C}{|x - y|}, \quad |\nabla K(x, y)| \leq \frac{C}{|x - y|^2},$$

Par intégration, on obtient alors directement la première estimation de la Proposition 5.1.1.

La deuxième estimation s'ensuit si $r = |x - x'| \geq 1$. Si $r < 1$, on définit

$$A = \{y \in \Omega / |y - x| \leq 2r\},$$

et on décompose l'intégrale en conséquence :

$$\int_{\Omega} |K(x, y) - K(x', y)| dy = \int_A |K(x, y) - K(x', y)| dy + \int_{\Omega \setminus A} |K(x, y) - K(x', y)| dy.$$

Le premier terme est born e par

$$\begin{aligned} \int_A |K(x, y) - K(x', y)| dy &\leq C \int_A \left(\frac{1}{|x - y|} + \frac{1}{|x' - y|} \right) dy \\ &\leq 2C \int_{|x - y| \leq 3r} \frac{dy}{|x - y|} \leq \tilde{C}r \end{aligned}$$

Pour estimer la deuxième contribution, on utilise la formule de Taylor

$$\int_{\Omega \setminus A} |K(x, y) - K(x', y)| dy \leq Cr \int_{\Omega \setminus A} |\nabla K(x'', y)| dy,$$

et le fait que pour tout $x'' \in [x, x']$ et tout $y \in \Omega \setminus A$,

$$|x'' - y| \geq \frac{1}{2}|x - y|.$$

On a alors

$$\begin{aligned} \int_{\Omega \setminus A} |K(x, y) - K(x', y)| dy &\leq Cr \int_{\Omega \setminus A} \frac{dy}{|x'' - y|^2} \\ &\leq 4Cr \left(\int_{2r < |x - y| < 1} \frac{dy}{|x - y|^2} + \int_{|x - y| \geq 1} dy \right) \leq \tilde{C}r(|\ln r| + |\Omega|). \end{aligned}$$

On conclut en regroupant les deux estimations. \square

5.1.2. Problème de Cauchy pour un champ quasi-Lipschitz. —

Comme le champ de vitesses u n'est a priori pas Lipschitzien, la définition du flot dans (5.0.2) nécessite d'obtenir une amélioration du théorème de Cauchy-Lipschitz.

Proposition 5.1.2. — Soit $b \in C(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d)$ une fonction uniformément bornée et quasi-Lipschitz, i.e. satisfaisant la condition

$$|b(t, x) - b(t, y)| \leq C\varphi(|x - y|)$$

où C ne dépend pas de t .

Alors le problème de Cauchy sur \mathbb{R}^d

$$\frac{d}{dt}x = b(t, x), \quad x(0) = x_0,$$

a (localement) une unique solution.

Démonstration. — Nous allons utiliser une méthode itérative classique. Définissons

$$(5.1.1) \quad x_n(t) = x_0 + \int_0^t b(s, x_{n-1}(s)) ds, \quad x_0(t) = x_0.$$

Comme b est quasi-Lipschitz, nous avons l'estimation

$$\begin{aligned} |x_n(t) - x_{n-1}(t)| &\leq \int_0^t ds |b(s, x_{n-1}(s)) - b(s, x_{n-2}(s))| ds \\ &\leq C \int_0^t \varphi(|x_{n-1}(s) - x_{n-2}(s)|) ds \\ &\leq C |\ln \varepsilon| \int_0^t |x_{n-1}(s) - x_{n-2}(s)| ds + Ct\varepsilon. \end{aligned}$$

En effet, on peut vérifier que φ est une fonction C^1 , concave

$$\varphi'(r) = -\ln r \text{ pour } r \leq 1, \quad \varphi''(r) = -\frac{1}{r} \text{ pour } r < 1.$$

En particulier, son graphe est toujours au-dessous des tangentes et on a pour tout $\varepsilon \in]0, 1[$

$$\varphi(r) \leq |\ln \varepsilon| r + \varepsilon.$$

Par itération de l'argument précédent, on obtient que pour tout $t \in [0, T]$ et tout $n \geq 2$

$$|x_n(t) - x_{n-1}(t)| \leq CT\varepsilon \sum_{k=0}^{n-2} \frac{C^k |\ln \varepsilon|^k t^k}{k!} + \frac{C^{n-1} |\ln \varepsilon|^{n-1} t^{n-1}}{(n-1)!} \sup_{t \leq T} |x_1(t) - x_0|.$$

Comme b est bornée, on a aussi

$$|x_1(t) - x_0| \leq C_b T,$$

de sorte que

$$|x_n(t) - x_{n-1}(t)| \leq CT\varepsilon \exp(C |\ln \varepsilon| T) + C_b \frac{C^{n-1} |\ln \varepsilon|^{n-1} T^n}{(n-1)!}$$

En choisissant $\varepsilon = \exp(-n)$ et $T < 1/(2C)$, on conclut que

$$|x_n(t) - x_{n-1}(t)| \leq CT\varepsilon^{1-CT} + \frac{C^n n^{n-1} T^n}{(n-1)!} \leq CT\varepsilon^{1/2} + (CeT)^n$$

grâce à la formule de Stirling

$$n! \sim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

Cette estimation montre que, si T est suffisamment petit (indépendamment de x_0), les $|x_n(t) - x_{n-1}(t)|$ sont bornés par les termes d'une série géométrique convergente, et sont donc exponentiellement petits. Donc $(x_n(t))$ est une suite de Cauchy pour la norme uniforme. En passant à la limite dans l'équation intégrale (5.1.1), on obtient que sa limite $x(t)$ satisfait

$$x(t) = x_0 + \int_0^t b(s, x(s)) ds.$$

Par continuité de l'application $t \mapsto b(t, x(t))$, il s'ensuit que $x(t)$ est solution de l'équation différentielle

$$\frac{d}{dt}x = b(t, x), \quad x(0) = x_0.$$

Comme le temps d'existence T ne dépend pas de la donnée initiale x_0 , la procédure peut être itérée de sorte à obtenir une solution globale. L'unicité se prouve exactement de la même façon. \square

5.2. Le théorème de Yudovich

En combinant les deux arguments précédents, Yudovich a montré qu'il était possible de définir le flot associé à un champ de vitesses solénoïdal de vorticité bornée, et de construire par approximation une solution du système (5.0.2), unique.

Théorème 5.1. — *Soit $\omega_0 \in L^\infty(\Omega)$. Il existe un unique triplet (Φ, u, ω) solution de la formulation intégrale (5.0.2) des équations d'Euler pour la vorticité, avec $\omega \in L^\infty(\mathbb{R}^+ \times \Omega)$ et u quasi-Lipschitz.*

Démonstration. — La première étape consiste à introduire une suite d'approximations pour le problème (5.0.2), définie de la façon suivante

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\Phi_n(t, x) = u_n(t, \Phi_n(t, x)), & \Phi_n(0, x) = x, \\ \omega_n(t, x) = \omega_0(\Phi_n^{-1}(t, x)), \\ u_n(t, x) = K * \omega_{n-1}(t, x). \end{cases}$$

avec la convention que $\omega_0(t, x) = \omega_0(x) \in L^\infty$.

Grâce aux propositions 5.1.1 et 5.1.2, le problème approché est bien défini : on vérifie en effet que le champ de vitesses u_n vérifie les mêmes hypothèses que le champ b de la proposition 5.1.2 et qu'il n'y a pas de problème avec le bord dans la mesure où u_n est tangent au bord et que les trajectoires ne sortent donc pas du domaine.

La difficulté est alors de montrer la convergence de (Φ_n, u_n, ω_n) vers une solution de (5.0.2). Pour tout $x \in \Omega$,

$$(5.2.1) \quad \begin{aligned} \Phi_n(t, x) - \Phi_{n-1}(t, x) &= \int_0^t \left(u_n(s, \Phi_n(s, x)) - u_n(s, \Phi_{n-1}(s, x)) \right) \\ &\quad + \int_0^t \left(u_n(s, \Phi_{n-1}(s, x)) - u_{n-1}(s, \Phi_{n-1}(s, x)) \right) \end{aligned}$$

D'autre part, en vertu du théorème de Liouville (qui montre que le jacobien du flot associé à un champ de divergence nulle est toujours 1) et en utilisant le transport de la vorticité,

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} |u_n(t, x) - u_{n-1}(t, x)| dx &= \int_{\Omega} dx \left| \int_{\Omega} dy K(x, y) (\omega_{n-1}(t, y) - \omega_{n-2}(t, y)) \right| \\
&= \int_{\Omega} dx \left| \int_{\Omega} dy (K(x, \Phi_{n-1}(t, y)) - K(x, \Phi_{n-2}(t, y))) \omega_0(y) \right| \\
(5.2.2) \qquad &\leq \|\omega_0\|_{\infty} \int_{\Omega} dx \int_{\Omega} dy |K(x, \Phi_{n-1}(t, y)) - K(x, \Phi_{n-2}(t, y))| \\
&\leq \|\omega_0\|_{\infty} C(1 + |\Omega|) \int_{\Omega} dy \varphi(|\Phi_{n-1}(t, y) - \Phi_{n-2}(t, y)|)
\end{aligned}$$

grâce à l'estimation de continuité quasi-Lipschitz obtenue dans la proposition 5.1.1.

On définit alors

$$\delta_n(t) = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} dx |\Phi_n(t, x) - \Phi_{n-1}(t, x)|.$$

D'après (5.2.1) et (5.2.2),

$$\begin{aligned}
\delta_n(t) &\leq \frac{1}{|\Omega|} \int_0^t \int_{\Omega} dx \int_{\Omega} dy |K(\Phi_n(s, x), y) - K(\Phi_{n-1}(s, x), y)| |\omega_n(y)| \\
&\quad + \frac{1}{|\Omega|} \|\omega_0\|_{\infty} C(1 + |\Omega|) \int_{\Omega} dy \varphi(|\Phi_{n-1}(t, y) - \Phi_{n-2}(t, y)|) \\
&\leq C(1 + |\Omega|) \|\omega_0\|_{\infty} \frac{1}{|\Omega|} \int_0^t \int_{\Omega} dx \left(\varphi(|\Phi_{n-1}(t, x) - \Phi_{n-2}(t, x)|) + \varphi(|\Phi_n(t, x) - \Phi_{n-1}(t, x)|) \right)
\end{aligned}$$

En utilisant la concavité de φ et l'inégalité de Jensen, on obtient finalement que

$$(5.2.3) \qquad \delta_n(t) \leq C \int_0^t \varphi(\delta_n(s)) ds + C \int_0^t \varphi(\delta_{n-1}(s)) ds,$$

où la constante C ne dépend que de $\|\omega_0\|_{\infty}$ et de $|\Omega|$.

On pose

$$\rho_N(t) = \sup_{n \geq N} \delta_n(t).$$

cette fonction est bien définie à $t = 0$, et satisfait l'inégalité différentielle

$$\rho_N(t) \leq C \int_0^t ds \varphi(\rho_{N-1}(s)).$$

En reprenant la preuve de la Proposition 5.1.2, on a alors

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \rho_N(t) = 0 \text{ uniformément sur } [0, T],$$

où T ne dépend que de $\|\omega_0\|_{\infty}$ et $|\Omega|$. Puisque $\|\omega(t)\|_{\infty} = \|\omega_0\|_{\infty}$, on peut étendre la procédure pour tout temps.

Il existe donc $\Phi \in \mathcal{C}([0, T], M(\Omega))$ où $M(\Omega)$ désigne l'ensemble des transformations de Ω sur lui-même préservant la mesure, tel que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} dx |\Phi(t, x) - \Phi_n(t, x)| = 0.$$

De plus,

$$\omega(t, x) = \omega_0(\Phi^{-1}(t, x))$$

est la limite faible de $\omega_n(t)$: en effet, pour toute fonction $f \in C_c^1(\Omega)$

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} f(x)(\omega_n(t, x) - \omega(t, x)) dx \right| &= \left| \int_{\Omega} (f(\Phi_n(t, x)) - f(\Phi(t, x))) \omega_0(x) dx \right| \\ &\leq \|\nabla f\|_{\infty} \|\omega_0\|_{\infty} \int_{\Omega} |\Phi_n(t, x) - \Phi(t, x)| dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Un argument de densité montre que la convergence a lieu en fait pour toute fonction $f \in \mathcal{C}(\Omega)$.

Définissons finalement

$$u(t, x) = K * \omega(t, x).$$

En utilisant l'estimation de continuité quasi-Lipschitz de la Proposition 5.1.1, on obtient

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |u(t, x) - u_n(t, x)| dx &= \int_{\Omega} dx \left| \int_{\Omega} dy (K(x, \Phi(t, y)) - K(x, \Phi_{n-1}(t, y))) \omega_0(y) \right| \\ &\leq C \|\omega_0\|_{\infty} (1 + |\Omega|) \int_{\Omega} dy \varphi(|\Phi(t, y) - \Phi_{n-1}(t, y)|) \\ &\leq C \|\omega_0\|_{\infty} (1 + |\Omega|) \left(\varepsilon + |\ln \varepsilon| \int_{\Omega} dy |\Phi(t, y) - \Phi_{n-1}(t, y)| \right), \end{aligned}$$

d'où l'on déduit que

$$u(t, x) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(t, x) \text{ dans } L^1(\Omega).$$

A ce stade, il n'est pas difficile de montrer l'identité suivante

$$\Phi(t, x) = \int_0^t u(s, \Phi(s, x)) ds \text{ pour presque tout } x \in \Omega.$$

De plus, u est continue en t , et quasi-Lipschitz en x (à cause de la borne L^{∞} sur la vorticité). Il s'ensuit que, pour tout $x \in \Omega$,

$$\frac{d}{dt} \Phi(t, x) = u(t, \Phi(t, x)), \quad \Phi(0, x) = x.$$

Nous avons donc construit un triplet (Φ, u, ω) solution du problème (5.0.2).

L'unicité découle des mêmes estimations. Plus précisément, si (Φ, u, ω) et $(\bar{\Phi}, \bar{u}, \bar{\omega})$ sont deux solutions du problème (5.0.2), on pose

$$\delta(t) = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} dx |\Phi(t, x) - \bar{\Phi}(t, x)|.$$

En reprenant les estimations (5.2.1) et (5.2.2), on obtient

$$\delta(t) \leq C \int_0^t \varphi(\delta(s)) ds$$

qui est l'analogie de l'inégalité (5.2.3).

La Proposition 5.1.2 implique alors que $\delta \equiv 0$ sur un temps qui ne dépend que de $|\Omega|$ et $\|\omega_0\|_{\infty}$. Par itération, on obtient l'unicité globale. \square

CHAPITRE 6

NAPPES DE TOURBILLON

Par approximation, on peut en fait construire des solutions beaucoup plus singulières des équations d'Euler bidimensionnelles, par exemple avec une vorticité mesure de partie singulière signée. L'hypothèse de signe est ici nécessaire pour éviter les phénomènes d'annulation et d'écrantage des petites échelles qui pourraient déstabiliser le système.

Etant donnée une nappe de tourbillon initiale, i.e. un champ de vitesses $u_0 \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^2)$ dont la vorticité $\omega_0 \in \mathcal{M}^+(\mathbb{R}^2)$ (qu'on supposera à support compact pour simplifier), on peut construire par convolution une suite d'approximations régulières $u_0^\varepsilon = u_0 * \rho_\varepsilon$ (où $\rho \in C_c^\infty$ est un noyau positif), de sorte que

- la vorticité régularisée ω_0^ε est une fonction positive à support compact;
- pour tout $R > 0$,

$$\int_{|x| \leq R} |u_0^\varepsilon|^2 dx + \int \omega_0^\varepsilon dx \leq C(R);$$

- la suite (ω_0^ε) converge fortement vers ω_0 dans $H_{comp}^{-1}(\mathbb{R}^2)$, et (u_0^ε) converge fortement vers u_0 dans $L^2_{loc}(\mathbb{R}^2)$.

Une adaptation des résultats du chapitre précédent permet alors de construire une suite (u^ε) de solutions régulières globales des équations d'Euler (E) de données initiales respectives (u_0^ε) . Les bornes a priori impliquent alors qu'à extraction près

$$u^\varepsilon \rightharpoonup u \text{ faiblement dans } L^2_{loc}([0, T] \times \mathbb{R}^2),$$

$$\omega^\varepsilon \rightharpoonup \omega \text{ au sens des mesures.}$$

La question est alors de savoir si u est une solution faible (singulière) de (E).

Le point de départ est la formulation faible des équations d'Euler bidimensionnelles : pour tout $\phi \in C_c^\infty([0, T] \times \mathbb{R}^2)$ à divergence nulle,

$$\int_0^T \int (\partial_t \phi \cdot u + \nabla \phi : u \otimes u)(t, x) dt dx = 0.$$

En introduisant le potentiel η tel que $\phi = \nabla^\perp \eta$, on obtient la formulation équivalente

$$\int_0^T \int (u_1^\varepsilon \partial_2 \eta - u_2^\varepsilon \partial_1 \eta) dx dt = \int_0^T \int \left(\partial_{12}^2 \eta ((u_2^\varepsilon)^2 - (u_1^\varepsilon)^2) + (\partial_{22}^2 \eta - \partial_{11}^2 \eta) u_1^\varepsilon u_2^\varepsilon \right) dx dt.$$

La structure particulière de la formulation faible montre qu'il n'est pas nécessaire que u^ε converge fortement dans L^2_{loc} pour que u soit solution faible de (E). Il suffit en effet que

$$\begin{aligned} \int_0^T \int \partial_{12}^2 \eta (u_2^2 - u_1^2) dx dt &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^T \int \partial_{12}^2 \eta ((u_2^\varepsilon)^2 - (u_1^\varepsilon)^2) dx dt \\ \int_0^T \int (\partial_{22}^2 \eta - \partial_{11}^2 \eta) u_1 u_2 dx dt &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^T \int (\partial_{22}^2 \eta - \partial_{11}^2 \eta) u_1^\varepsilon u_2^\varepsilon dx dt \end{aligned}$$

A cause de l'invariance par rotation des équations d'Euler (E), il suffit en fait de montrer la convergence faible

$$(6.0.4) \quad u_1^\varepsilon u_2^\varepsilon \rightharpoonup u_1 u_2$$

6.1. Une estimation d'intégrale singulière

Pour montrer la convergence (6.0.4), on va utiliser un argument d'intégrale singulière basé sur la positivité de la vorticité. La loi de Biot-Savart implique en effet que

$$\int \varphi u_1^\varepsilon u_2^\varepsilon dx = \iint H_\varphi \omega^\varepsilon(t, x) \omega^\varepsilon(t, y) dx dy dt,$$

où H_φ est la distribution sur $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ définie par

$$H_\varphi(x, y) = -\frac{1}{4\pi^2} \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \int_{\mathbb{R}^2} \log|x-z| \log|y-z| \varphi(z) dz.$$

En général, quand on itère des noyaux homogènes de degré -1 sur \mathbb{R}^2 pour construire une fonction telle que H_φ , on obtient des singularités logarithmiques le long de la diagonale $x = y$. L'observation fondamentale de Delort est que, dans le cas particulier de la nonlinéarité $u_1^\varepsilon u_2^\varepsilon$, l'intégrale singulière obtenue par itération est en fait une fonction, bornée au voisinage de la diagonale.

Lemme 6.1.1. — *La fonction*

$$H_\varphi(x, y) = -\frac{1}{4\pi^2} \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \int_{\mathbb{R}^2} \log|x-z| \log|y-z| \varphi(z) dz$$

est bornée sur $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$, continue en dehors de la diagonale, et tend vers 0 à l'infini.

Plus précisément,

$$H_\varphi(x, y) = \frac{1}{2} (\varphi(x) + \varphi(y)) h(x-y) + r(x, y)$$

où $h(\omega) = (\omega_1 \cdot \omega_2) / (4\pi|\omega|^2)$ et r est une fonction continue bornée.

Démonstration. — Remarquons d'abord que, en dehors de la diagonale,

$$H_\varphi(x, y) = -\frac{1}{4\pi^2} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{x_1 - z_1}{|x - z|^2} \frac{y_2 - z_2}{|y - z|^2} \varphi(z) dz.$$

En particulier, comme φ est à support compact, H_φ tend vers 0 à l'infini.

Réécrivons cette expression

$$\begin{aligned} H_\varphi(x, y) &= -\frac{1}{4\pi^2} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{x_1 - z_1}{|x - z|^2} \frac{y_2 - z_2}{|y - z|^2} \left(\varphi(z) - \frac{1}{2}(\varphi(x) + \varphi(y)) \right) dz \\ &\quad - \frac{1}{8\pi^2} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{x_1 - z_1}{|x - z|^2} \frac{y_2 - z_2}{|y - z|^2} (\varphi(x) + \varphi(y)) dz \\ &\equiv H_1(x, y) + H_2(x, y). \end{aligned}$$

Les intégrales H_1 et H_2 sont définies comme des valeurs principales, i.e. en tenant compte des annulations par parité pour obtenir l'intégrabilité quand $|z| \rightarrow \infty$.

- La première étape consiste à montrer que H_1 est une fonction continue et bornée sur $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$.

Remarquons que, sur la diagonale,

$$H_1(x, x) = -\frac{1}{4\pi^2} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{(x_1 - z_1)(x_2 - z_2)}{|x - z|^4} (\varphi(z) - \varphi(x)) dz$$

qui est bien définie puisque φ est différentiable en x .

Pour montrer la continuité en x et y , on suppose d'abord que $x \neq y$ (le cas $x = y$ se traitant de façon similaire). On décompose ensuite

$$\begin{aligned} -8\pi^2 H_1(x, y) &= \int_{\mathbb{R}^2} \frac{x_1 - z_1}{|x - z|^2} \frac{y_2 - z_2}{|y - z|^2} (\varphi(z) - \varphi(x)) dz \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^2} \frac{x_1 - z_1}{|x - z|^2} \frac{y_2 - z_2}{|y - z|^2} (\varphi(z) - \varphi(y)) dz. \end{aligned}$$

Par symétrie, il suffit alors d'étudier le premier terme.

L'estimation

$$(\varphi(x) - \varphi(z)) \frac{x_1 - z_1}{|x - z|^2} \equiv \phi(x, z) \leq \frac{M}{1 + |x - z|}$$

montre que ce terme est borné.

Pour montrer la continuité en x , on écrit

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^2} \frac{x_1 - z_1}{|x - z|^2} \frac{y_2 - z_2}{|y - z|^2} (\varphi(z) - \varphi(x)) dz - \int_{\mathbb{R}^2} \frac{x_1 + h_1 - z_1}{|x + h - z|^2} \frac{y_2 - z_2}{|y - z|^2} (\varphi(z) - \varphi(x + h)) dz \\ &= \int_{|x-z| < 2h} \frac{x_1 - z_1}{|x - z|^2} \frac{y_2 - z_2}{|y - z|^2} (\varphi(z) - \varphi(x)) dz - \int_{|x-z| < 2h} \frac{x_1 + h_1 - z_1}{|x + h - z|^2} \frac{y_2 - z_2}{|y - z|^2} (\varphi(z) - \varphi(x + h)) dz \\ &\quad + \int_{|x-z| > 2h, |y-z| < 2h} \left(\frac{(x_1 - z_1)(\varphi(z) - \varphi(x))}{|x - z|^2} - \frac{(x_1 + h_1 - z_1)(\varphi(z) - \varphi(x + h))}{|x + h - z|^2} \right) \frac{y_2 - z_2}{|y - z|^2} dz \\ &\quad + \int_{|x-z| > 2h, |y-z| > 2h} \left(\frac{(x_1 - z_1)(\varphi(z) - \varphi(x))}{|x - z|^2} - \frac{(x_1 + h_1 - z_1)(\varphi(z) - \varphi(x + h))}{|x + h - z|^2} \right) \frac{y_2 - z_2}{|y - z|^2} dz \\ &\equiv T_1 + T_2 + T_3 + T_4. \end{aligned}$$

Comme la fonction $\phi(x, z)$ est bornée, on a

$$|T_1| + |T_2| \leq 2M \int_{|x-z| < 2h} \frac{dz}{|y - z|} \leq 2M \int_{|y-z| < 2h} \frac{dz}{|y - z|} \leq 8\pi Mh.$$

Là où $|x - z| > 2h$,

$$\left| \frac{(x_1 - z_1)(\varphi(z) - \varphi(x))}{|x - z|^2} - \frac{(x_1 + h_1 - z_1)(\varphi(z) - \varphi(x + h))}{|x + h - z|^2} \right| \leq \frac{Ch}{|x - z|^3},$$

ce qui implique en particulier que

$$|T_3| \leq C \int_{|y-z| < 2h} \frac{dz}{|y-z|} \leq 4C\pi h.$$

Finalement,

$$\begin{aligned} |T_4| &\leq Ch \int_{|x-z| > 2h, |y-z| > 2h} \frac{dz}{|x-z||y-z|} \\ &\leq \frac{C}{2} h \int_{|x-z| > 2h, |y-z| > 2h} \left(\frac{1}{|x-z|^2} + \frac{1}{|y-z|^2} \right) dz \leq 2\pi Ch |\log h|. \end{aligned}$$

Pour montrer la continuité en y , on utilise une décomposition analogue

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^2} \frac{x_1 - z_1}{|x-z|^2} (\varphi(z) - \varphi(x)) \frac{y_2 - z_2}{|y-z|^2} dz - \int_{\mathbb{R}^2} \frac{x_1 - z_1}{|x-z|^2} (\varphi(z) - \varphi(x)) \frac{y_2 + h_2 - z_2}{|y+h-z|^2} dz \\ &= \int_{|y-z| < 2h} \frac{x_1 - z_1}{|x-z|^2} (\varphi(z) - \varphi(x)) \frac{y_2 - z_2}{|y-z|^2} dz - \int_{|y-z| < 2h} \frac{x_1 - z_1}{|x-z|^2} (\varphi(z) - \varphi(x)) \frac{y_2 + h_2 - z_2}{|y+h-z|^2} dz \\ &+ \int_{|y-z| > 2h} \frac{x_1 - z_1}{|x-z|^2} (\varphi(z) - \varphi(x)) \left(\frac{y_2 - z_2}{|y-z|^2} - \frac{y_2 + h_2 - z_2}{|y+h-z|^2} \right) dz \\ &\equiv T'_1 + T'_2 + T'_3. \end{aligned}$$

La borne sur $\phi(x, z)$ implique que

$$|T'_1| + |T'_2| \leq 4\pi Mh.$$

Les mêmes arguments que précédemment permettent par ailleurs de montrer que

$$|T'_3| \leq Ch \int_{|y-z| > 2h} \frac{dz}{|y-z|^2} \leq 2\pi Ch |\log h|.$$

Le terme H_1 est donc continu sur $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$, avec un module de continuité du type $\mu(h) = Ch |\log h|$.

• Il reste à calculer la forme explicite de H_2 , ce qui se fait assez simplement en utilisant la transformée de Fourier. Si on pose $w = x - y$, on a par changement de variable

$$\int \frac{x_1 - z_1}{|x-z|^2} \frac{y_2 - z_2}{|y-z|^2} dz = - \int \frac{w_1 - z_1}{|w-z|^2} \frac{z_2}{|z|^2} dz = -(\partial_{w_1} \log |w|) * (\partial_{w_2} \log |w|).$$

En utilisant le fait que la transformée de Fourier de $(2\pi)^{-1} \log |w|$ (solution fondamentale du laplacien sur \mathbb{R}^2) est $-|\xi|^{-2}$, on obtient que la transformée de Fourier de l'expression précédente est

$$-4\pi^2 \frac{i\xi_1}{|\xi|^2} \frac{i\xi_2}{|\xi|^2} = 2\pi^2 \partial_{\xi_1 \xi_2}^2 (\log |\xi|)$$

qui est la transformée de Fourier de

$$-\pi \frac{w_1 w_2}{|w|^2}.$$

Cela conclut la preuve du lemme 6.1.1. □

6.2. Fonction maximale associée à la vorticité

Pour contrôler la partie singulière de l'intégrale, on a alors besoin d'une estimation de la fonction maximale associ e à la vorticité. Le point clé est le résultat suivant :

Lemme 6.2.1. — Soit une famille (u_0^ε) de champs de vitesses réguliers à divergence nulle de vorticités positives et uniformément intégrables et de pseudo-énergies uniformément bornées

$$\begin{aligned}\omega_0^\varepsilon &= \operatorname{rot} u_0^\varepsilon \geq 0, & \int \omega_0^\varepsilon(x)(1 + |x|^2)dx &\leq C_0, \\ H_0^\varepsilon &= -\frac{1}{2\pi} \int \log|x-y|\omega_0^\varepsilon(x)\omega_0^\varepsilon(y)dxdy &\leq H_0.\end{aligned}$$

Pour tout ε , on note u_ε la solution des équations d'Euler et ω_ε sa vorticité. Alors il existe une constante C_1 telle que

$$\forall x_0 \in \mathbb{R}^2, t \in [0, T], R \leq R_0, \quad \int_{B_R(x_0)} \omega_\varepsilon(t, x)dx \leq C_1 |\log R|^{-1/2}.$$

Démonstration. — Comme la vorticité ω^ε est transportée par u^ε , elle reste positive pour tout temps, et on a les conservations

$$\begin{aligned}\int \omega^\varepsilon(t, x)dx &= \int \omega_0^\varepsilon(x)dx, \\ \int x\omega^\varepsilon(t, x)dx &= \int x\omega_0^\varepsilon(x)dx, \\ \int |x|^2\omega^\varepsilon(t, x)dx &= \int |x|^2\omega_0^\varepsilon(x)dx.\end{aligned}$$

Formellement on a aussi la conservation de l'énergie, mais cela ne fait sens que si l'énergie initiale est bornée. Or, pour les flots bidimensionnels dont la vorticité a un signe fixé, l'énergie n'est jamais bornée. C'est pour cela qu'on introduit la pseudo-énergie qui est finie pour tout champ de vitesses bidimensionnel régulier dont la vorticité est à support compact, et qui coïncide avec l'énergie quand elle est bornée :

$$\begin{aligned}H(t) &= -\frac{1}{2\pi} \int \log|x-y|\omega(t, x)\omega(t, y)dxdy = -\int \omega(t, x)\psi(t, x)dx \\ &= -\int \psi\Delta\psi(t, x)dx = \int |\nabla\psi|^2(t, x)dx = \int u^2(t, x)dx\end{aligned}$$

On vérifie facilement en utilisant la formulation en vorticité des équations d'Euler que la pseudo-énergie est conservée

$$H^\varepsilon(t) = H_0^\varepsilon.$$

Le lemme résulte de ces différentes conservations, et d'estimations simples sur le logarithme. Puisque

$$\log_-(s) = -\log s + \log_+ s \text{ et } \log_+|x-y| \leq |x-y|^2 \leq |x|^2 + |y|^2$$

on a

$$\begin{aligned}\int \int \log_-|x-y|\omega^\varepsilon(t, x)\omega^\varepsilon(t, y)dxdy &\leq |H^\varepsilon(t)| + \int \int \log_+|x-y|\omega^\varepsilon(t, x)\omega^\varepsilon(t, y)dxdy \\ &\leq |H_0^\varepsilon| + \int (|x|^2 + |y|^2)\omega^\varepsilon(t, x)\omega^\varepsilon(t, y)dxdy \leq H_0 + C_0^2.\end{aligned}$$

D'autre part, comme la vorticité ω^ε est positive et que $\log_-|x-y| \geq -\log(2R)$ pour $x, y \in B_R(x_0)$, on a

$$\begin{aligned}\int \int \log_-|x-y|\omega^\varepsilon(t, x)\omega^\varepsilon(t, y)dxdy &\geq \int_{B_R(x_0)} \int_{B_R(x_0)} \log_-|x-y|\omega^\varepsilon(t, x)\omega^\varepsilon(t, y)dxdy \\ &\geq |\log(2R)| \left(\int_{B_R(x_0)} \omega_\varepsilon(t, x)dx \right)^2\end{aligned}$$

En combinant les deux inégalités, on obtient le résultat attendu. \square

Cette estimation est en particulier satisfaite par la suite d'approximations obtenue par convolution :

Corollaire 6.2.2. — Soit $u_0 \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^2)$ un champ de vitesses à divergence nulle dont la vorticité $\omega_0 \in \mathcal{M}^+(\mathbb{R}^2)$ (qu'on supposera à support compact pour simplifier).

Pour tout ε , on note $u_0^\varepsilon = u_0 * \rho_\varepsilon$, et u_ε la solution des équations d'Euler de donnée initiale u_0^ε . Alors il existe une constante C_1 telle que la vorticité ω_ε satisfait

$$\forall x_0 \in \mathbb{R}^2, t \in [0, T], R \leq R_0, \quad \int_{B_R(x_0)} \omega_\varepsilon(t, x) dx \leq C_1 |\log R|^{-1/2},$$

où C_1 ne dépend que de T , du support et de la masse de ω_0 .

Démonstration. — Le seul point à vérifier ici est que la suite de données initiales $u_0^\varepsilon, \omega_0^\varepsilon$ (obtenues à partir de u_0, ω_0 par convolution) satisfait les hypothèses du lemme 6.2.1. Comme ρ est un noyau positif à support compact, on a clairement les bornes uniformes

$$\omega_0^\varepsilon = \text{rot } u_0^\varepsilon \geq 0, \quad \int \omega_0^\varepsilon(x)(1 + |x|^2) dx \leq C_0,$$

et pour tout $R > 0$,

$$\int_{|x| \leq R} |u_0^\varepsilon|^2 dx \leq C(R).$$

En particulier

$$\int \omega_0^\varepsilon(x) dx = \int d\omega_0 \equiv \Gamma_0.$$

La borne sur H_0^ε est plus compliquée à obtenir car elle fait intervenir une quantité non linéaire et non locale. On donne ici une esquisse de la preuve sans rentrer dans le détail des calculs.

- On commence par introduire une fonction radiale $\bar{\omega} \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$ telle que

$$\text{supp}(\bar{\omega}) \subset B_{R_0} \text{ et } \Gamma_0 = 2\pi \int r\bar{\omega}(r) dr.$$

La fonction de courant correspondante $\bar{\psi}$ est solution de l'équation différentielle ordinaire

$$\bar{\psi}''(r) + \frac{1}{r}\bar{\psi}'(r) = \bar{\omega}(r)$$

ou encore

$$\bar{\psi}'(r) = \frac{1}{r} \int_0^r s\bar{\omega}(s) ds,$$

et vérifie donc la borne

$$|\bar{\psi}(x)| \leq C(1 + \log_+(|x|)).$$

Le champ de vitesses associé

$$\bar{u}_0(x) = |x|^{-2} \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} \int_0^{|x|} s\bar{\omega}(s) ds$$

est un tourbillon radial, solution stationnaire des équations d'Euler 2D.

- On considère alors le champ de vitesses $\delta u_0^\varepsilon = u_0^\varepsilon - \bar{u}$. Sa vorticité $\delta\omega_0^\varepsilon$ est à support compact et de moyenne nulle

$$\int \delta\omega_0^\varepsilon(x) dx = \int \omega_0^\varepsilon(x) dx - \int \bar{\omega}(x) dx = 0.$$

En utilisant la formule de Biot-Savart pour δu^ε , on peut alors montrer que l'énergie cinétique est finie et contrôlée de façon uniforme :

$$\delta u_0^\varepsilon(x) = \frac{1}{2\pi} \int \frac{1}{|x-y|^2} \begin{pmatrix} -x_2 + y_2 \\ x_1 - y_1 \end{pmatrix} \delta \omega_0^\varepsilon(y) dy.$$

Soit $y \in \text{supp}(\delta \omega_0^\varepsilon)$, pour $|x|$ suffisamment grand (indépendamment de ε),

$$|x-y|^{-2} = |x|^{-2} + O(|x|^{-3}).$$

On a alors

$$\delta u_0^\varepsilon(x) = |x|^{-2} \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} \int \delta \omega_0^\varepsilon(x) dx + O(|x|^{-2}),$$

d'où l'on déduit que

$$\int |\delta u_0^\varepsilon|^2 dx \leq C_0.$$

- Pour établir la borne uniforme requise sur H_0^ε , on utilise alors la décomposition suivante

$$\begin{aligned} H_0^\varepsilon &= H(\delta \omega_0^\varepsilon) + H(\bar{\omega}) + 2 \int \bar{\psi} \delta \omega_0^\varepsilon dx \\ &= \int |\delta u_0^\varepsilon|^2 dx + H(\bar{\omega}) + 2 \int \bar{\psi} \delta \omega_0^\varepsilon dx, \end{aligned}$$

où la seconde identité utilise le fait que l'énergie et la pseudo-énergie coïncident pour des champs de vorticités suffisamment décroissantes. D'après ce qui précède, les deux premiers termes sont uniformément bornés. L'estimation sur $\bar{\psi}$ permet de conclure. \square

6.3. Le théorème de Delort

Théorème 6.1. — Soit $u_0 \in L_{loc}^2(\mathbb{R}^2)$ un champ de vecteurs à divergence nulle de vorticités $\omega_0 \in \mathcal{M}^+(\mathbb{R}^2)$. Alors il existe une solution faible des équations d'Euler (E) de donnée initiale u_0 .

Démonstration. — Pour passer à la limite dans la formulation faible des équations d'Euler bidimensionnelles, on a vu qu'il suffit en fait de montrer la convergence faible (6.0.4)

$$u_1^\varepsilon u_2^\varepsilon \rightharpoonup u_1 u_2$$

Par un argument de densité standard, on peut se restreindre sans perte de généralité aux fonctions tests de la forme $\psi(t)\varphi(x)$, avec $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^+)$ et $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$.

Soit $\chi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^+)$ une fonction de troncature positive telle que

$$\chi|_{[0,1]} \equiv 1, \quad \chi|_{[2,+\infty[} \equiv 0.$$

Par définition de H_φ , on a

$$\begin{aligned} \iint \psi(t)\varphi(x) u_1^\varepsilon u_2^\varepsilon dx dt &= \int_0^{+\infty} \psi(t) \iint \left(1 - \chi \left(\frac{|x-y|}{\delta} \right) \right) H_\varphi(x, y) \omega^\varepsilon(t, x) \omega^\varepsilon(t, y) dx dy dt \\ &\quad + \int_0^{+\infty} \psi(t) \iint \chi \left(\frac{|x-y|}{\delta} \right) H_\varphi(x, y) \omega^\varepsilon(t, x) \omega^\varepsilon(t, y) dx dy dt. \end{aligned}$$

Pour tout $\delta \in]0, 1[$ fixé, le lemme 6.1.1 implique que

$$\psi(t) \left(1 - \chi \left(\frac{|x-y|}{\delta}\right)\right) H_\varphi(x, y) \in C^0(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^4).$$

Admettons que l'on ait suffisamment de régularité en temps pour montrer

$$\omega^\varepsilon(t, x)\omega^\varepsilon(t, y)dxdy \rightharpoonup d\omega(t, x)d\omega(t, y) \text{ faiblement-}^* \text{ dans } L^\infty([0, T], \mathcal{M}(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2)).$$

On a alors

$$\begin{aligned} & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{+\infty} \psi(t) \iint \left(1 - \chi \left(\frac{|x-y|}{\delta}\right)\right) H_\varphi(x, y) \omega^\varepsilon(t, x) \omega^\varepsilon(t, y) dxdydt \\ &= \int_0^{+\infty} \psi(t) \iint \left(1 - \chi \left(\frac{|x-y|}{\delta}\right)\right) H_\varphi(x, y) d\omega(t, x) d\omega(t, y) dt. \end{aligned}$$

Pour obtenir un contrôle uniforme sur le deuxième terme, on utilise l'estimation de décroissance de la fonction maximale associée à la vorticité, combin e avec la borne sur la partie singulière de H_φ obtenue dans le lemme 6.1.1

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^{+\infty} \psi(t) \iint \chi \left(\frac{|x-y|}{\delta}\right) H_\varphi(x, y) \omega^\varepsilon(t, x) \omega^\varepsilon(t, y) dxdydt \right| \\ & \leq C_{\varphi, \psi} \int_0^T \iint \chi \left(\frac{|x-y|}{\delta}\right) \omega^\varepsilon(t, x) \omega^\varepsilon(t, y) dxdydt \\ & \leq C_{\varphi, \psi} C_1 \left(\log \left(\frac{1}{2\delta}\right)\right)^{-1/2} \int_0^T \int \omega^\varepsilon(t, y) dy dt \leq C \left(\log \left(\frac{1}{2\delta}\right)\right)^{-1/2}. \end{aligned}$$

Les bornes uniformes sur ω_ε et u_ε , combin es avec la convergence $\omega^\varepsilon \rightharpoonup \omega$ au sens des mesures, montrent que la même estimation est v rifi e par la vorticité limite

$$\left| \int_0^{+\infty} \psi(t) \iint \chi \left(\frac{|x-y|}{\delta}\right) H_\varphi(x, y) d\omega(t, x) d\omega(t, y) dt \right| \leq C \left(\log \left(\frac{1}{2\delta}\right)\right)^{-1/2}.$$

En regroupant ces différentes estimations, on a alors

$$\left| \iint \psi(t) \varphi(x) u_1^\varepsilon u_2^\varepsilon dxdt - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iint \psi(t) \varphi(x) u_1^\varepsilon u_2^\varepsilon dxdt \right| \leq C \left(\log \left(\frac{1}{2\delta}\right)\right)^{-1/2}.$$

Comme δ peut être choisi arbitrairement petit, on en déduit que

$$u_1^\varepsilon u_2^\varepsilon \rightharpoonup u_1 u_2,$$

ce qui implique que u est une solution faible des équations d'Euler, de donnée initiale u_0 . \square

Il reste finalement à établir la convergence

$$\omega^\varepsilon(t, x)\omega^\varepsilon(t, y)dxdy \rightharpoonup d\omega(t, x)d\omega(t, y) \text{ faiblement-}^* \text{ dans } L^\infty([0, T], \mathcal{M}(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2)).$$

Puisque ω^ε est une solution des équations d'Euler en vorticité, on a

$$\partial_t \omega^\varepsilon = -\nabla^\perp \otimes \nabla : u^\varepsilon \otimes u^\varepsilon$$

d'où l'on déduit que (ω^ε) est équicontinue en temps à valeurs dans l'espace de Sobolev $W^{-2,1}$. On peut alors appliquer le lemme suivant :

Lemme 6.3.1. — Soit ω^ε une suite de fonctions convergeant faiblement-* dans $L^\infty([0, T], \mathcal{M})$

$$\omega_\varepsilon \rightharpoonup \omega,$$

et équicontinue en temps à valeurs dans un espace de Sobolev négatif $W^{-s, q}$.

Alors

$$\omega^\varepsilon(t, x)\omega^\varepsilon(t, y)dxdy \rightharpoonup d\omega(t, x)d\omega(t, y) \text{ dans } L^\infty([0, T], \mathcal{M})$$

et dans \mathcal{M} pour tout $t \in [0, T]$.

Démonstration. — La convergence faible-* de (ω^ε) implique que la suite est uniformément bornée dans $L^\infty([0, T], \mathcal{M})$. Le théorème de Rellich-Kondrakov montre que \mathcal{M} s'injecte de façon compacte dans un espace du type $W^{-r, p}$ (et on peut supposer sans perte de généralité que $r \geq s$ et $p \leq q$). Grâce à l'hypothèse d'équicontinuité, le théorème d'Ascoli montre alors qu'une sous-suite, encore notée (ω^ε) , converge dans $C([0, T], W^{-r, p})$ vers une limite $\tilde{\omega}$.

En utilisant la densité des fonctions tests de la forme $\varphi(x)\psi(t)$, et en utilisant les deux types de convergence aux intégrales du type $\int \varphi(x)\psi(t)\omega^\varepsilon(t, x)dxdt$, on identifie les limites

$$\omega = \tilde{\omega}.$$

Comme la limite est unique, on a alors convergence de toute la suite dans $C([0, T], W^{-r, p})$.

En approchant les fonctions continues s'annulant à l'infini par des fonctions test, on peut alors montrer que

$$\int \varphi(x)(\omega^\varepsilon(t+h, x) - \omega^\varepsilon(t, x))dx \rightarrow 0 \text{ quand } h \rightarrow 0 \text{ uniformément en } t, \varepsilon.$$

Donc (ω^ε) converge vers ω dans $C([0, T], w - \mathcal{M})$.

En particulier,

$$\int \int \psi(t)\varphi(x)\varphi(y)\omega^\varepsilon(t, x)\omega^\varepsilon(t, y)dxdy \rightarrow \int \int \psi(t)\varphi(x)\varphi(y)d\omega(t, x)d\omega(t, y) \text{ uniformément en temps.}$$

Comme l'ensemble des fonctions tensorisées est dense dans les fonctions tests, cela implique les deux convergences énoncées dans le lemme. \square

PARTIE III

A PROPOS DE LA LIMITE NON VISQUEUSE

CHAPITRE 7

MÉTHODE D'ÉNERGIE

Nous souhaitons dans cette dernière partie évoquer une facette très actuelle des recherches en mécanique des fluides: l'analyse des phénomènes de petite échelle. Mathématiquement, ces phénomènes sont induits par des petits paramètres dans les équations aux dérivées partielles qui décrivent les écoulements. Pour identifier ces paramètres, on doit au préalable "adimensionner" le système, c'est-à-dire le renormaliser en définissant des échelles (de longueur, de temps, *etc*) typiques du phénomène considéré.

Illustrons ce processus sur le modèle classique des équations de Navier-Stokes.

$$\begin{cases} \partial_t u + u \cdot \nabla u + \nabla p - \nu \Delta u = 0 \\ \operatorname{div} u = 0 \end{cases}$$

où $\nu = \mu/\rho$ est appelée viscosité cinématique. Nous notons U et L des vitesse et longueur typiques du problème. Par exemple, si l'on considère un écoulement dans un canal, U sera la vitesse moyenne au milieu du canal, et L sa largeur. Nous posons

$$u = Uu', \quad x = Lx', \quad t = \frac{L}{U} t', \quad p = U^2 p'.$$

A l'aide de ces nouvelles quantités, on aboutit au système sans dimension

$$\begin{cases} \partial_{t'} u' + u' \cdot \nabla' u' + \nabla' p' - \frac{1}{\Re} \Delta' u' = 0 \\ \operatorname{div}' u' = 0 \end{cases}$$

avec pour unique paramètre le *nombre de Reynolds*

$$\Re := \frac{UL}{\nu}.$$

Or dans la plupart des écoulements intéressants, dont les écoulements turbulents, ce nombre de Reynolds est très élevé. Ainsi, \Re est de l'ordre de plusieurs millions pour un écoulement d'air autour d'une aile d'avion. Un problème central en hydro- et aérodynamique est donc d'analyser le comportement du système

$$(NS^\varepsilon) \quad \begin{cases} \partial_t u + u \cdot \nabla u + \nabla p - \varepsilon \Delta u = 0 \\ \operatorname{div} u = 0 \end{cases}$$

quand $\varepsilon \rightarrow 0$. On souhaite connaître le comportement asymptotique de la suite de solutions (u^ε) . Ce problème a fait l'objet de nombreuses études mathématiques. Il a principalement deux sources de difficultés:

- l'irrégularité des solutions,
- les bords du domaine d'évolution.

Nous allons aborder ces deux aspects dans les paragraphes suivants.

7.1. Convergence dans des domaines sans bord

Nous négligeons ici les effets de bord et considérons (NS^ε) dans tout l'espace \mathbb{R}^d . Dans ce contexte, le problème de la convergence des solutions lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$ dépend de la régularité des solutions considérées.

Soit $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^d)^d$ une donnée initiale à divergence nulle, que nous supposons pour simplifier indépendante de ε . Pour tout $\varepsilon > 0$, on considère u^ε une solution de Leray de (NS^ε) associées à u_0 . Ces solutions vérifient l'inégalité d'énergie

$$(7.1.1) \quad \frac{1}{2} \|u^\varepsilon(t)\|_{L^2}^2 + \varepsilon \int_0^t \|\nabla u^\varepsilon(s)\|_{L^2}^2 ds \leq \frac{1}{2} \|u_0\|_{L^2}^2, \quad \text{pour tout } t.$$

En particulier, la suite (u^ε) est bornée dans l'espace $L^\infty(\mathbb{R}^+, L^2(\mathbb{R}^d))$, et admet donc des valeurs d'adhérence pour la topologie faible*.

On souhaite déterminer les équations vérifiées par les valeurs d'adhérence u . En particulier, un tel champ u satisfait-il les équations d'Euler, c'est-à-dire le système (NS^ε) avec $\varepsilon = 0$?

Cette question est maintenant bien comprise. Schématiquement:

- si la donnée initiale u_0 génère une solution u des équations d'Euler sur $[0, T]$, $T > 0$,
- si cette solution est suffisamment régulière pour garantir la stabilité des équations d'Euler,

alors toute valeur d'adhérence de (u^ε) coïncide avec u sur $(0, T)$.

Théorème 7.1. — *Soit $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^d)$ un champ à divergence nulle. On suppose que les équations d'Euler (E) admettent sur $[0, T]$ une (unique) solution u de donnée initiale u_0 , et telle que*

$$u \in C([0, T], L^2(\mathbb{R}^d)), \quad \nabla u \in L^2((0, T) \times \mathbb{R}^d) \cap L^\infty((0, T) \times \mathbb{R}^d), \quad T > 0.$$

Pour tout ε , on considère une solution de Leray u^ε des équations de Navier-Stokes faiblement visqueuses (NS^ε) de donnée initiale u_0 .

Alors, quand $\varepsilon \rightarrow 0$, (u^ε) converge (fortement) vers u dans $L^\infty([0, T], L^2(\mathbb{R}^d))$.

Démonstration. — Considérons la différence $v^\varepsilon = u^\varepsilon - u$. Le champ v^ε est une solution du système

$$(7.1.2) \quad \begin{cases} \partial_t v^\varepsilon + v^\varepsilon \cdot \nabla v^\varepsilon + u^\varepsilon \cdot \nabla v^\varepsilon + v^\varepsilon \cdot \nabla u + \nabla p^\varepsilon - \varepsilon \Delta v^\varepsilon = \varepsilon \Delta u, \\ \operatorname{div} v^\varepsilon = 0. \end{cases}$$

Faisons le produit scalaire dans $L^2(\mathbb{R}^d)$ de v^ε avec les deux membres de la première équation de (7.1.2). Notons que, comme au chapitre 3, cette manipulation formelle peut être justifiée rigoureusement, par

exemple *via* troncature en fréquences. Après intégration par parties, on aboutit à l'inégalité

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|v^\varepsilon(t)\|_{L^2}^2 + \varepsilon \int_0^t \|\nabla v^\varepsilon(s)\|_{L^2}^2 ds &\leq \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} |v^\varepsilon(s, x)|^2 |\nabla u(s, x)| dx ds \\ &+ \varepsilon \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u(s, x)| |\nabla v^\varepsilon(s, x)| dx ds \end{aligned}$$

pour presque tout $t \in (0, T)$. Ainsi,

$$\frac{1}{2} \|v^\varepsilon(t)\|_{L^2}^2 \leq \varepsilon \int_0^t \|\nabla u\|_{L^2}^2 ds + \int_0^t \|\nabla u\|_{L^\infty} \|v^\varepsilon(s)\|_{L^2}^2 ds.$$

On conclut par un lemme de Gronwall que

$$\|v^\varepsilon\|_{L^\infty(L^2)}^2 \leq C\sqrt{\varepsilon} \int_0^t \|\nabla u(s)\|_{L^2}^2 \exp\left(2 \int_s^t \|\nabla u(\sigma)\|_{L^\infty} d\sigma\right) ds,$$

ce qui montre la convergence de u^ε vers u dans $L^\infty(0, T; L^2(\mathbb{R}^d))$ avec un taux $\sqrt{\varepsilon}$. \square

Naturellement, la convergence de u^ε vers u peut être établie sous des hypothèses de régularité beaucoup moins fortes sur u . C'est en particulier vrai en deux dimensions d'espace, grâce au simple transport du tourbillon ω le long des lignes de courant. Par exemple, la convergence est vérifiée pour les solutions u à tourbillon borné considérées au chapitre 5. Pour une description beaucoup plus complète des résultats de convergence existants, nous renvoyons à [1].

En revanche, sous la seule hypothèse que les solutions de Leray u^ε satisfont la borne d'énergie

$$\frac{1}{2} \|u^\varepsilon(t)\|_{L^2}^2 + \varepsilon \int_0^t \|\nabla u^\varepsilon(s)\|_{L^2}^2 ds \leq C,$$

l'identification du ou des possibles systèmes limites est une question ouverte. En effet, la convergence faible* de u^ε vers u dans $L^\infty([0, \infty); L^2(\mathbb{R}^d))$ (à sous-suite près) ne suffit pas pour passer à la limite dans le terme non-linéaire

$$u^\varepsilon \cdot \nabla u^\varepsilon = \operatorname{div}(u^\varepsilon \otimes u^\varepsilon).$$

Identifier les limites faibles possibles du tenseur $u^\varepsilon \otimes u^\varepsilon$ est compliqué par les phénomènes de petite échelle qui se développent au sein du fluide, et se répercutent sur la structure de u^ε en fonction de ε . Comprendre à quoi ressemblent ces limites faibles est un enjeu majeur en théorie de la turbulence: c'est le problème dit des *lois de fermeture*. Notons qu'en plus des phénomènes d'oscillations haute fréquence (comme dans la fonction $\sin(x/\varepsilon)$), des phénomènes de concentration en espace peuvent se produire. C'est en particulier le cas près des bords du domaine, comme nous allons le discuter dans la section suivante.

7.2. Critère de Kato

Lorsque les solutions de Navier-Stokes (u^ε) et la solution d'Euler u sont définies sur un ouvert à bord Ω , la question de la convergence se complique considérablement.

La difficulté vient des conditions sur le bord $\partial\Omega$ que l'on ajoute aux équations de Navier-Stokes. Si on suppose que le fluide adhère à la paroi (ce qui semble pertinent dans de nombreuses situations physiques), on a la condition de Dirichlet

$$(7.2.1) \quad u^\varepsilon|_{\partial\Omega} = 0.$$

Mais pour les équations d'Euler (E), seule la condition de non-pénétration

$$u \cdot n|_{\partial\Omega} = 0$$

subsiste. Ce changement de conditions au bord se traduit par une possible concentration de u^ε près de $\partial\Omega$ lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$. La fine couche près du bord dans laquelle ce phénomène a lieu est appelée *la couche limite*. Ainsi, tout l'enjeu est de comprendre l'impact de cette couche limite sur l'asymptotique $\varepsilon \rightarrow 0$. De façon plus précise, le problème est de savoir si le champ de vitesses se concentre effectivement sur une distance ε près du bord: c'est le sens du théorème suivant, dû à Kato [13].

Théorème 7.2. — Soit Ω un ouvert borné régulier de \mathbb{R}^d avec $d = 2$ ou $d = 3$. Soit $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^d)$ un champ à divergence nul. On suppose que les équations d'Euler (E) admettent sur $[0, T]$ une (unique) solution u de donnée initiale u_0 , et telle que

$$u \in C([0, T], L^2(\mathbb{R}^d)), \quad \nabla u \in L^2((0, T) \times \mathbb{R}^d) \cap L^\infty((0, T) \times \mathbb{R}^d), \quad T > 0.$$

Pour tout ε , on considère une solution de Leray u^ε des équations de Navier-Stokes faiblement visqueuses (NS^ε) de donnée initiale u_0 .

Alors, $u^\varepsilon \rightarrow u$ dans $L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$ si et seulement si

$$\varepsilon \int_0^T \int_{d(x, \partial\Omega) \leq \varepsilon} |\nabla u^\varepsilon|^2 \rightarrow 0, \quad \text{quand } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Notons que ce théorème a deux aspects remarquables. D'une part, il fournit un critère à la fois quantitatif, nécessaire et suffisant de convergence. D'autre part, il souligne l'importance de l'échelle ε dans le phénomène de concentration. Or cette échelle n'est pas intuitive, car la partie parabolique de l'équation $\partial_t u - \varepsilon \Delta u$ incite plutôt à considérer l'échelle $\sqrt{\varepsilon}$. Ceci étant dit, on ne sait pas à l'heure actuelle exploiter en pratique le théorème de Kato. La question de la convergence demeure essentiellement ouverte, même en supposant les solutions très régulières. Elle constitue sans conteste un des plus grands défis mathématiques issus de la mécanique des fluides.

Démonstration. — Puisque u^ε satisfait l'inégalité d'énergie

$$\frac{1}{2} \|u^\varepsilon(t)\|_{L^2}^2 + \varepsilon \int_0^t \|\nabla u^\varepsilon(s)\|_{L^2}^2 ds \leq \frac{1}{2} \|u_0\|_{L^2}^2,$$

et que l'énergie cinétique est conservée par les solutions régulières des équations d'Euler

$$\frac{1}{2} \|u(t)\|_{L^2}^2 = \frac{1}{2} \|u_0\|_{L^2}^2,$$

la convergence $u^\varepsilon \rightarrow u$ dans $L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$ implique clairement que

$$\varepsilon \int_0^t \|\nabla u^\varepsilon(s)\|_{L^2}^2 ds \rightarrow 0.$$

La dissipation dans la couche de taille ε tend alors a fortiori vers 0.

Pour établir la réciproque, nous allons introduire un terme correcteur w^ε localisé près du bord de Ω dans une couche de taille ε et tel que $u + w^\varepsilon$ satisfasse la condition de Dirichlet. Ici, et contrairement à ce que nous ferons dans la suite pour l'étude des couches limites, nous n'imposons aucune condition supplémentaire sur le correcteur en lien avec les équations de Navier-Stokes : w^ε ne décrit aucun phénomène physique, c'est un artefact de la construction mathématique.

• Admettons qu'il existe un tenseur antisymétrique régulier $a = (a_{ij})_{i,j \in \{1, \dots, d\}}$, défini sur $[0, T] \times \Omega$, tel que

$$u = \operatorname{div} a \text{ sur } \partial\Omega, \quad a = 0 \text{ sur } \partial\Omega.$$

Soit $\chi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction de troncature régulière telle que

$$\chi(0) = 1, \quad \chi(r) = 0 \text{ pour } r \geq 1.$$

Posons

$$z_\delta(x) = \chi(\rho/\delta) \text{ où } \rho = d(x, \partial\Omega),$$

et δ est un petit paramètre qui tend vers 0 quand $\varepsilon \rightarrow 0$ et qui sera fixé ultérieurement. Le correcteur w^ε est alors défini par

$$w^\varepsilon = -\operatorname{div}(az_\delta) = -z_\delta \operatorname{div} a - a \cdot \nabla z_\delta,$$

de sorte qu'il est localisé dans une fine couche près du bord $\partial\Omega$, et qu'il satisfait

$$w^\varepsilon = -u \text{ sur } \partial\Omega, \quad \operatorname{div} w^\varepsilon = -\sum_{j,k} \partial_j \partial_k (a_{j,k} z_\delta) = 0 \text{ dans } \Omega.$$

Il n'est pas difficile d'établir les estimations suivantes pour v^ε

$$(7.2.2) \quad \begin{aligned} \|w^\varepsilon\|_{L^\infty} &\leq C, \quad \|w^\varepsilon\|_{L^2} \leq C\delta^{1/2}, \quad \|\partial_t w^\varepsilon\|_{L^2} \leq C\delta^{1/2}, \\ \|\nabla w^\varepsilon\|_{L^\infty} &\leq C\delta^{-1}, \quad \|\nabla w^\varepsilon\|_{L^2} \leq C\delta^{-1/2}, \\ \|\rho \nabla w^\varepsilon\|_{L^\infty} &\leq C, \quad \|\rho^2 \nabla w^\varepsilon\|_{L^\infty} \leq C\delta, \quad \|\rho \nabla w^\varepsilon\|_{L^2} \leq C\delta^{1/2} \end{aligned}$$

où C désigne une constante qui ne dépend que de la norme $W^{1,\infty}$ de $u|_{\partial\Omega}$, et de Ω . En effet, ces estimations (ainsi que les estimations analogues sur les dérivées d'ordre 2) sont clairement satisfaites si on remplace w^ε par z_δ . Comme a est régulière et s'annule sur $\partial\Omega$, a est de taille δ sur le support Γ_δ de z_δ . Les estimations (7.2.2) découlent alors de la définition de $w^\varepsilon = -z_\delta \operatorname{div} a - a \cdot \nabla z_\delta$.

• La preuve de convergence suit alors la même stratégie que dans le cas sans bord. Considérons la différence $v^\varepsilon = u^\varepsilon - (u + w^\varepsilon)$. Le champ v^ε est une solution du système

$$(7.2.3) \quad \begin{cases} \partial_t v^\varepsilon + u^\varepsilon \cdot \nabla v^\varepsilon + \nabla \tilde{p}^\varepsilon - \varepsilon \Delta (u^\varepsilon - u) = v^\varepsilon \cdot \nabla u + \varepsilon \Delta u - \partial_t w^\varepsilon - (u_\varepsilon \cdot \nabla) w^\varepsilon + w^\varepsilon \cdot \nabla u, \\ \operatorname{div} v^\varepsilon = 0. \end{cases}$$

Faisons le produit scalaire dans L^2 de v^ε avec les deux membres de la première équation de (7.2.3). Notons que les termes de bord dans l'intégration par parties sont nuls puisque $u^\varepsilon|_{\partial\Omega} = (u + w^\varepsilon)|_{\partial\Omega} = 0$ par construction. On obtient donc

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|v^\varepsilon(t)\|_{L^2}^2 + \varepsilon \int_0^t \|\nabla (u^\varepsilon - u)(s)\|_{L^2}^2 &\leq \frac{1}{2} \|v^\varepsilon(0)\|_{L^2}^2 + \int_0^t \int |v^\varepsilon|^2 |\nabla u| \, dx \, ds + \varepsilon \int_0^t \int |\nabla u| |\nabla v^\varepsilon| \, dx \, ds \\ &\quad + \int_0^t \int |v^\varepsilon| |\partial_t w^\varepsilon| \, dx \, ds + \int_0^t \int |v^\varepsilon| |w^\varepsilon| |\nabla u| \, dx \, ds \\ &\quad + \int_0^t \int |u^\varepsilon| |\nabla w^\varepsilon| |v^\varepsilon| \, dx \, ds + \varepsilon \int_0^t \int |\nabla w^\varepsilon| |\nabla (u^\varepsilon - u)| \, dx \, ds \end{aligned}$$

pour presque tout $t \in (0, T)$.

Les premiers termes du membre de droite sont estimés comme précédemment

$$\begin{aligned} & \int_0^t \int |v^\varepsilon|^2 |\nabla u| dx ds \leq \int_0^t \|\nabla u\|_{L^\infty} \|v^\varepsilon\|_{L^2}^2 ds, \\ \varepsilon \int_0^t \int |\nabla u| |\nabla v^\varepsilon| dx ds & \leq \frac{\varepsilon}{4} \int_0^t \|\nabla u^\varepsilon\|_{L^2}^2 ds + \varepsilon \int_0^t \|\nabla u\|_{L^2}^2 ds, \\ & \int_0^t \int |v^\varepsilon| |\partial_t w^\varepsilon| dx ds \leq \int_0^t \|\partial_t w^\varepsilon\|_{L^2} \|v^\varepsilon\|_{L^2} ds, \\ \int_0^t \int |v^\varepsilon| |w^\varepsilon| |\nabla u| dx ds & \leq \int_0^t \|\nabla u\|_{L^\infty} \|v^\varepsilon\|_{L^2}^2 ds + \int_0^t \|\nabla u\|_{L^\infty} \|w^\varepsilon\|_{L^2}^2 ds \end{aligned}$$

et seront contrôlés par un argument de type Gronwall.

Pour estimer les deux derniers termes, on note d'abord que

$$\begin{aligned} \int |u^\varepsilon| |\nabla w^\varepsilon| |v^\varepsilon| dx & \leq \delta (\delta \|\nabla w^\varepsilon\|_{L^\infty}) (\delta^{-1} \|u^\varepsilon\|_{L^2(\Gamma_\delta)}) (\delta^{-1} \|v^\varepsilon\|_{L^2(\Gamma_\delta)}) \\ & \leq C\delta \|\nabla u^\varepsilon\|_{L^2(\Gamma_\delta)} \|\nabla v^\varepsilon\|_{L^2(\Gamma_\delta)} \\ & \leq C\delta \|\nabla u^\varepsilon\|_{L^2(\Gamma_\delta)}^2 + C\delta^{1/2} \|\nabla u^\varepsilon\|_{L^2(\Gamma_\delta)} \end{aligned}$$

En effet, comme $u^\varepsilon|_{\partial\Omega} = v^\varepsilon|_{\partial\Omega} = 0$, l'inégalité de Poincaré implique que

$$\|u^\varepsilon\|_{L^2(\Gamma_\delta)} \leq C\delta \|\nabla u^\varepsilon\|_{L^2(\Gamma_\delta)}, \quad \text{et} \quad \|v^\varepsilon\|_{L^2(\Gamma_\delta)} \leq C\delta \|\nabla v^\varepsilon\|_{L^2(\Gamma_\delta)}.$$

D'autre part,

$$\varepsilon \int |\nabla w^\varepsilon| |\nabla(u^\varepsilon - u)| dx \leq \varepsilon \|\nabla w^\varepsilon\|_{L^2(\Gamma_\delta)} \|\nabla(u^\varepsilon - u)\|_{L^2(\Gamma_\delta)} \leq C\varepsilon\delta^{-1/2} (\|\nabla u^\varepsilon\|_{L^2(\Gamma_\delta)} + \|\nabla u\|_{L^2(\Gamma_\delta)}).$$

En choisissant simplement $\delta = c\varepsilon$, on obtient finalement

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|v^\varepsilon(t)\|_{L^2}^2 + \frac{\varepsilon}{2} \int_0^t \|\nabla v^\varepsilon(s)\|_{L^2}^2 ds & \leq \frac{1}{2} \|v^\varepsilon(0)\|_{L^2}^2 + C \int_0^t \|\nabla u\|_{L^\infty} \|v^\varepsilon\|_{L^2}^2 ds + \varepsilon \int_0^t \int |\nabla u| |\nabla v^\varepsilon| dx ds \\ & \quad + O(\varepsilon^{1/2}) + C\varepsilon^{1/2} \int_0^t \|\nabla u^\varepsilon\|_{L^2(\Gamma_\delta)} ds + C\varepsilon \int_0^t \|\nabla u^\varepsilon\|_{L^2(\Gamma_\delta)}^2 ds \end{aligned}$$

En utilisant la condition

$$\varepsilon \int_0^T \int_{d(x, \partial\Omega) \leq \varepsilon} |\nabla u^\varepsilon|^2 \rightarrow 0, \quad \text{quand } \varepsilon \rightarrow 0,$$

et le lemme de Gronwall, on en déduit que w_ε tend vers 0 dans L^2 , ce qui donne la convergence de (u^ε) vers u . \square

Il reste alors à prouver que l'on peut effectivement relever la condition de bord, i.e. à montrer l'existence du tenseur a .

Lemme 7.2.1. — *Soit u un champ de vecteurs régulier tangentiel sur une courbe régulière fermée $\Gamma \subset \mathbb{R}^d$. Alors il existe un tenseur antisymétrique régulier $a = (a_{ij})_{i,j \in \{1, \dots, d\}}$ défini sur \mathbb{R}^d tel que*

$$a = 0 \text{ et } \operatorname{div} a = u \text{ sur } \Gamma.$$

De plus, si u dépend régulièrement d'un paramètre, a peut être choisi de même.

Démonstration. — Si Γ est l'hyperplan $x_1 = 0$, $u = u(x_2, \dots, x_d)$ est tel que $u_1 = 0$. Définissons alors a par ses coefficients

$$a_{j1} = -a_{1j} = x_1 u_j(x') \text{ et } a_{jk} = 0 \text{ si } j, k \geq 2.$$

Le tenseur a est alors aussi régulier que u , et satisfait les conditions de trace sur Γ .

Dans le cas général, le problème se réduit localement au cas particulier considéré précédemment par un changement de coordonnées local de jacobien 1, de sorte que l'on peut construire un tenseur satisfaisant les propriétés requises au voisinage de chaque point de Γ .

Pour définir a sur un voisinage de Γ , on utilise ensuite une partition de l'unité (ϕ_s) telle que sur le support de chacune des fonctions ϕ_s il existe un tenseur a_s régulier satisfaisant les conditions de trace. Le tenseur $a = \sum \phi_s a_s$ vérifie alors les conditions

$$a|_{\Gamma} = \sum \phi_s a_s|_{\Gamma} = 0 \text{ et } (\operatorname{div} a)|_{\Gamma} = \sum_s \phi_s (\operatorname{div} a_s)|_{\Gamma} + \sum_s (a_s \cdot \nabla \phi_s)|_{\Gamma} = \sum_s \phi_s u = u.$$

On introduit pour finir une fonction de troncature régulière χ telle que

$$\chi \equiv 1 \text{ sur } \Gamma \text{ et } \chi \equiv 0 \text{ en dehors du support de } a.$$

Le tenseur $a\chi$ s'étend alors à \mathbb{R}^d , et satisfait toutes les conditions du lemme. \square

Remarque 7.2.2. — Dans le cas où les solutions des équations de Navier-Stokes (u^ε) sont soumises à une condition de glissement pur sur le bord, i.e. satisfait les conditions de Navier

$$(u^\varepsilon \cdot n)|_{\partial\Omega} = 0, \quad ((n \cdot \nabla)u^\varepsilon \wedge n)|_{\partial\Omega} = 0,$$

il n'y a pas d'obstacle à la convergence vers les solutions régulières d'Euler, donc pas de phénomène de couche limite.

Ces conditions sont en effet transparentes dans les inégalités d'énergie, et on peut étendre le calcul du cas sans bord (cf preuve du Théorème 7.1) sans aucune difficulté.

CHAPITRE 8

COUCHES DE PRANDTL

Les conclusions du chapitre précédent amènent naturellement à évoquer la théorie de Prandtl, qui constitue une des rares tentatives de compréhension de la couche limite. Cette théorie porte le nom du mécanicien des fluides Ludwig Prandtl (1875-1953), qui l'a présentée en 1904 à Heidelberg lors du Congrès International des Mathématiciens [19].

8.1. Techniques de couche limite

Nous nous contenterons ici de décrire la théorie de Prandtl pour des écoulements plans: $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Nous introduisons un système de coordonnées locales près de $\partial\Omega$, avec x_1 l'abscisse curviligne et $x_2 \geq 0$ une coordonnée normale au bord. Nous décomposons également le champ u^ε dans la base de Frénet, avec une composante tangentielle u_1^ε et une composante normale u_2^ε .

L'idée est d'introduire un développement asymptotique double échelle du champ de vitesses, sous la forme

$$(8.1.1) \quad \begin{aligned} u_1^\varepsilon(t, x_1, x_2) &\approx \bar{u}_1(t, x_1, x_2) + u_1^{cl}(t, x_1, x_2/\sqrt{\varepsilon}), \\ u_2^\varepsilon(t, x_1, x_2) &\approx \bar{u}_2(t, x_1, x_2) + \sqrt{\varepsilon} u_2^{cl}(t, x_1, x_2/\sqrt{\varepsilon}). \end{aligned}$$

Selon ce développement, le champ de vitesses se décompose en

- une partie régulière \bar{u} , solution de l'équation d'Euler,
- une partie singulière, décrite par

$$u^{cl} = u^{cl}(t, x_1, X_2),$$

dont les variations sont localisées près du bord, sur une épaisseur que Prandtl suppose d'ordre $\sqrt{\varepsilon}$. En particulier, dans le modèle suggéré par Prandtl, le critère du Théorème 7.2 est vérifié. Si ce modèle est valide, on a bien convergence des solutions de Navier-Stokes vers celles d'Euler.

Formellement, en injectant l'Ansatz (8.1.1) dans les équations (NS^ε) , on obtient l'équation que doit vérifier le correcteur u^{cl} . Précisément, le champ

$$\begin{aligned} u_1(t, x_1, X_2) &:= \bar{u}_1(t, x_1, 0) + u_1^{cl}(t, x_1, X_2), \\ u_2(t, x_1, X_2) &:= X_2 \partial_2 \bar{u}_2(t, x_1, 0) + u_2^{cl}(t, x_1, X_2), \end{aligned}$$

satisfait la fameuse *équation de Prandtl*

$$(P) \quad \begin{cases} \partial_t u_1 + u_1 \partial_1 u_1 + u_2 \partial_2 u_1 - \partial_2^2 u_1 = (\partial_t \bar{u}_1 + \bar{u}_1 \partial_x \bar{u}_1)|_{X_2=0}, & X_2 > 0, \\ \partial_1 u_1 + \partial_2 u_2 = 0, & X_2 > 0, \\ (u_1, u_2)|_{X_2=0} = (0, 0), & \lim_{X_2 \rightarrow +\infty} u_1 = \bar{u}_1|_{X_2=0}, \quad u_1|_{t=0} = u_{0,1}. \end{cases}$$

Il s'agit d'un système de Navier-Stokes dégénéré, dans lequel ne figure plus ni terme de pression, ni terme de diffusion tangentielle. Plus important encore, il ne subsiste qu'une équation d'évolution sur u_1 , qui devient la seule véritable inconnue du système. La composante normale u_2 s'obtient à partir de u_1 par intégration de la contrainte de divergence nulle.

Remarque 8.1.1. — *Notons que la courbure de $\partial\Omega$ n'intervient pas explicitement dans l'équation. Elle y intervient cependant de manière indirecte, à travers les propriétés de \bar{u} , et à travers le domaine de définition de l'abscisse curviligne x_1 . Trois types de domaines ont été jusqu'ici étudiés: $x_1 \in \mathbb{R}$, $x_1 \in \mathbf{T}$, et $x_1 \in (0, L)$. Les deux premiers sont adaptés à la description de phénomènes locaux en x_1 . Le domaine $(0, L)$ convient à l'étude d'écoulements autour d'obstacles fins: $x_1 = 0$ correspond alors à une extrémité de l'obstacle, et on complète l'équation par la donnée de $u_1|_{x_1=0}$ (outre une condition initiale à $t = 0$).*

Il n'existe pas à ce jour de théorème général d'existence de solutions régulières pour le système (P). Ceci est dû au très faible contrôle que l'on a sur u_2 qui n'est connu que par la contrainte de divergence nulle : $u_2 = \partial_2^{-1} \partial_1 u_1$, ce qui conduit à la perte d'une dérivée dans les estimations d'énergie.

Cette perte peut être compensée si l'on travaille avec des données initiales analytiques, ce qui conduit à un théorème d'existence en temps petit [?]. A noter que dans ce cas on peut aussi justifier le développement à deux échelles et la convergence de u^ε vers \bar{u} . Toutefois comme on va le voir dans ce chapitre, l'analyticité cache complètement des phénomènes physiques importants d'instabilité.

Ceci conduit à penser que l'équation de Prandtl n'est pas pertinente dans le cas général et que des instabilités violentes peuvent se produire dans la couche limite. Expérimentalement on observe d'ailleurs détachement de la couche limite dans de nombreuses situations, notamment dans le cas d'un écoulement autour d'un obstacle, en aval de l'obstacle.

8.2. Non validité de l'approximation de couches limites

Du point de vue mathématique, on ne sait pas décrire le phénomène de détachement de la couche limite, mais on peut prouver qu'il existe des situations où les couches de Prandtl ne fournissent pas une bonne approximation après un temps arbitrairement court.

8.2.1. Un résultat d'instabilité non linéaire. —

Le théorème suivant, dû à Grenier [11, 12], montre l'existence d'un profil de cisaillement $w_1(X_2)$ tel que $(w_1(x_2/\sqrt{\varepsilon}), 0)$ conduit à une couche de Prandtl qui est hautement instable.

Théorème 8.1. — *Soit $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$, ou $\Omega = \mathbf{T} \times \mathbb{R}^+$. Soit n un entier arbitrairement grand. Alors il existe une fonction $w \in C^\infty(\mathbb{R}^+)$, constante sur $[2, +\infty)$, telle que la solution w^ε des équations de Navier-Stokes faiblement visqueuses (NS_ε) avec donnée initiale $(w_1(x_2/\sqrt{\varepsilon}), 0)$ satisfait la propriété*

suivante : pour tout s arbitrairement grand, il existe pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit des solutions u^ε des équations de Navier-Stokes (NS_ε) telles que

$$\|(u^\varepsilon - w^\varepsilon)|_{t=0}\|_{H^s} \leq \varepsilon^n,$$

et

$$\|(u^\varepsilon - w^\varepsilon)|_{t=T_\varepsilon}\|_{H^1} \rightarrow +\infty \text{ avec } T_\varepsilon \rightarrow 0 \text{ quand } \varepsilon \rightarrow 0.$$

De plus,

$$\|\text{rot } u^\varepsilon(T_\varepsilon)\|_{L^\infty} \rightarrow +\infty$$

et on peut choisir T_ε tels que $T_\varepsilon \sim C\sqrt{\varepsilon}|\log \varepsilon|$.

Il est alors clair que les fonctions définies par

$$U_1^\varepsilon(t, x_1, X_2) = u_1^\varepsilon(t, x_1, x_2), \quad U_2^\varepsilon(t, x_1, X_2) = \varepsilon^{-1/2}u_2^\varepsilon(t, x_1, x_2)$$

ne peuvent converger en un quelconque sens fort vers des solutions des équations de Prandtl (P), ce qui limite l'intérêt de ces dernières et infirme tout développement de type couche limite.

Le profil w_1 est de plus explicite. On définit tout d'abord \bar{w}_1 par

$$\bar{w}_1(y) = \frac{1}{2}y \text{ sur } [0, 1], \quad \bar{w}_1(y) = y - \frac{1}{2} \text{ sur } [1, 2] \text{ et } \bar{w}_1(y) = \frac{3}{2} \text{ pour } y \geq 2.$$

On se donne ρ un noyau régularisant positif sur \mathbb{R} à support dans $[-1, 1]$, et $\rho_\mu : x \mapsto \frac{1}{\mu}\rho(\frac{x}{\mu})$. Alors on peut prendre

$$w = \bar{w} * \rho_\mu$$

pour peu que μ soit assez petit.

8.2.2. Description du mécanisme d'instabilité. —

Commençons par décrire physiquement l'instabilité. Pour simplifier, on suppose que $\Omega = \mathbf{T} \times \mathbb{R}^+$.

La remarque essentielle est que des instabilités de période spatiale de l'ordre de $\sqrt{\varepsilon}$ apparaissent en des temps d'ordre $\sqrt{\varepsilon}$. Pour les analyser, on fait le changement de variables

$$(t, x_1, x_2) \mapsto \left(\frac{t}{\sqrt{\varepsilon}}, \frac{x_1}{\sqrt{\varepsilon}}, \frac{x_2}{\sqrt{\varepsilon}} \right),$$

qui diffère notablement du changement de variables de Prandtl

$$(t, x_1, x_2) \mapsto \left(t, x_1, \frac{x_2}{\sqrt{\varepsilon}} \right).$$

Après changement de variables, les équations de Navier-Stokes (NS_ε) deviennent

$$(8.2.1) \quad \begin{aligned} \partial_t u + u \cdot \nabla u + \nabla p - \sqrt{\varepsilon} \Delta u &= 0 \\ \text{div } u &= 0. \end{aligned}$$

Prouver le théorème 8.1 revient à montrer l'instabilité des équations de Navier-Stokes (8.2.1) autour de la solution $w(\sqrt{\varepsilon}t, x_2)$, dont l'évolution est régie par l'équation de la chaleur

$$\partial_t w - \sqrt{\varepsilon} \Delta w = 0.$$

Comme $w(\sqrt{\varepsilon}t, x_2)$ varie très lentement en temps, on se ramène en fait à étudier l'instabilité non linéaire de $w = (w_1, 0)$.

Le point de départ est de montrer que w est non linéairement instable pour les équations d'Euler, ce qui est l'objet de la section suivante. Plus précisément, il existe une solution v des équations d'Euler linéarisées autour de w qui est exponentiellement croissante

$$\|v\|_{L^2} \sim C \exp(\lambda t) \text{ avec } \lambda > 0$$

et à partir de v on peut construire une solution \bar{u}^δ des équations d'Euler de la forme

$$\bar{u}^\delta = w + \delta v + O(\delta^2 \exp(2\lambda t)),$$

ce développement étant valable pour $t < T_\delta$ avec $\delta \exp(\lambda T_\delta) = 1$.

Comme la limite formelle de (8.2.1) est l'équation d'Euler, on s'attend à ce que ce mode instable v apparaisse pour ε petit. C'est effectivement ce qui se passe, sauf que v ne satisfaisant pas a priori la condition de Dirichlet, la viscosité de Navier-Stokes réagit en créant de la vorticité sur le bord pour assurer la condition d'arrêt. Cette vorticité diffuse lentement grâce au terme $\sqrt{\varepsilon} \Delta u$ et forme une sous-couche de taille caractéristique $\varepsilon^{1/4}$ (en la variable X_2).

L'écoulement u^ε comporte ainsi deux couches : une couche de type Prandtl, de taille $\sqrt{\varepsilon}$ où apparaissent des structures périodiques de période $\sqrt{\varepsilon}$ en x_1 , ces structures ayant une amplitude d'ordre $\varepsilon^{1/4}$ quand $t = T_\varepsilon$, et une sous-couche de taille $\varepsilon^{3/4}$ (en la variable x_2) dans laquelle se forment des zones de forte vorticité qui font exploser les normes H^s de u^ε quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

La preuve du théorème 8.1 consiste en la construction d'une solution approch e de (8.2.1) précise jusqu'à T_ε en partant d'une instabilité non linéaire d'Euler et en ajoutant une sous-couche visqueuse de taille $\varepsilon^{3/4}$ avant de conclure par une estimation d'énergie. Elle justifie complètement ce scénario, jusqu'à la divergence de la norme L^∞ de la vorticité, l'évolution ultérieure du fluide étant un problème ouvert.

Remarque 8.2.1. — *Physiquement ce résultat est attendu, bien que le scénario décrit ci-dessus ne soit pas habituel. L'instabilité des couches de Prandtl est très li e à la présence de courants rampants le long du bord, qui vont dans la direction oppos e au courant à l'infini en X_2 . Lorsque de tels courants existent, le profil des vitesses possède un point d'inflexion et est tout-à-fait comparable à w . A noter qu'un décollement total de la couche limite est alors attendu.*

D'autre part, les instabilités observ es sont complètement tu es (en temps petit) si on travaille dans des espaces analytiques puisqu'elles ont une petite période spatiale, de l'ordre de $\sqrt{\varepsilon}$, ce qui est cohérent avec les résultats de convergence dans l'analytique mentionnés plus haut.

8.3. Instabilité des équations d'Euler

On s'intéresse donc pour commencer à la stabilité ou l'instabilité de profils de cisaillement w pour l'équation d'Euler. Le cas linéaire a été essentiellement traité par Rayleigh qui a montré qu'une condition nécessaire (mais non suffisante) d'instabilité est que w_1 ait un point d'inflexion. Arnold a donné un critère de stabilité non linéaire, voisin de la condition de Rayleigh, en utilisant des fonctionnelles de Lyapunov et la méthode d'énergie "Casimir". Ici au contraire on a besoin de montrer l'existence d'un écoulement instable :

Théorème 8.2. — *Soit $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$, ou $\Omega = \mathbf{T} \times \mathbb{R}^+$. Alors il existe un profil $w \in C^\infty(\mathbb{R}^+)$, tel que pour tout s arbitrairement grand et tout δ arbitrairement petit, il existe une solution u^δ des équations*

d'Euler (E) avec

$$\|(u^\delta - w)|_{t=0}\|_{H^s} \leq \delta,$$

et pour des temps $T_\delta \geq C_s |\log \delta|$,

$$\|(u^\delta - w)|_{t=T_\delta}\|_{L^2} \geq \sigma > 0, \quad \|(u^\delta - w)|_{t=T_\delta}\|_{L^\infty} \geq \sigma > 0.$$

L'image de l'instabilité justifiée par ce théorème est la suivante : si à $t = 0$ on ajoute au profil w une petite perturbation (de taille δ dans H^s), cette perturbation se déplace à vitesse constante et croît exponentiellement jusqu'à former une structure quasiment périodique en x_1 , d'amplitude σ , de période spatiale bien définie, et d'étendue spatiale en x_1 d'ordre \sqrt{t} (très grande devant la période spatiale du motif qui apparaît sur cette étendue). Cette analyse est valable jusqu'à T_δ où les effets non linéaires sont trop importants pour pouvoir être contrôlés par cette approche.

8.3.1. Instabilité linéaire. —

La première étape est d'étudier le linéarisé des équations d'Euler autour de $w = (w_1(x_2), 0)$, qui s'écrit

$$(8.3.1) \quad \begin{aligned} \partial_t v + w \cdot \nabla v + v \cdot \nabla w + \nabla p &= 0 \\ \operatorname{div} v &= 0. \end{aligned}$$

avec $v \cdot n = 0$ sur $\partial\Omega$. A noter qu'une estimation d'énergie naturelle sur (8.3.1) conduit à

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|v\|_{L^2}^2 \leq \|\nabla w\|_{L^\infty} \|v\|_{L^2}^2,$$

ce qui autorise une croissance exponentielle de la solution v , mais s'avère être une majoration assez mauvaise de la vitesse de croissance.

Une approche classique est de chercher des solutions particulières de (8.3.1) sous la forme

$$(8.3.2) \quad v(t, x_1, x_2) = \exp(ik(x_1 - ct)) \begin{pmatrix} \psi'(x_2) \\ -ik\psi(x_2) \end{pmatrix}$$

où c est un nombre complexe et ψ joue le rôle de fonction de courant. En écrivant que (8.3.2) est solution des équations linéarisées (8.3.1), on trouve l'équation de Rayleigh

$$(R) \quad \begin{cases} (w_1 - c)(\partial_{22}^2 - k^2)\psi = \psi \partial_{22}^2 w_1, \\ \psi(0) = 0, \quad \psi(x_2) \rightarrow 0 \text{ quand } x_2 \rightarrow +\infty, \end{cases}$$

qui est un problème spectral (il faut chercher c et ψ) en dimension 1.

Proposition 8.3.1 (Rayleigh). — *Une condition nécessaire pour que l'équation linéarisée (8.3.1) soit instable est que le profil de vitesses w ait un point d'inflexion.*

Démonstration. — En multipliant l'équation de Rayleigh (R) par $\bar{\psi}$, on obtient

$$\int \left(|\partial_2 \psi|^2 + k^2 |\psi|^2 + \frac{\partial_{22}^2 w_1}{w_1 - c} |\psi|^2 \right) = 0.$$

En prenant la partie imaginaire, on a

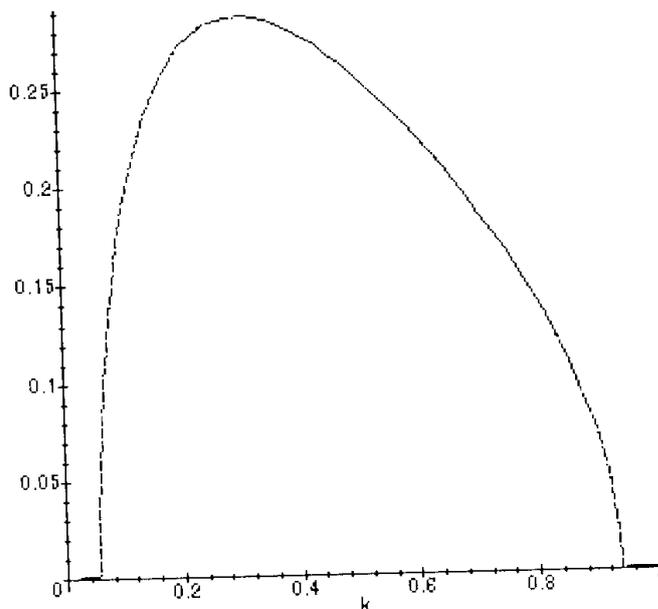
$$\Im \left(c \int \frac{\partial_{22}^2 w_1}{|w_1 - c|^2} |\psi|^2 \right) = 0;$$

donc, si $\Im(c) \neq 0$, $\partial_{22}^2 w_1$ doit changer de signe. □

En suivant une remarque de Landau, on constate en fait qu'il est possible de résoudre (R) dans le cas où w est affine par morceaux. On prend donc par exemple

$$\begin{aligned}\bar{w}_1(x_2) &= \frac{1}{2}x_2 \text{ sur } [0, 1], \\ \bar{w}_1(x_2) &= x_2 - \frac{1}{2} \text{ sur } [1, 2], \\ \bar{w}_1(x_2) &= \frac{3}{2} \text{ pour } x_2 \geq 2.\end{aligned}$$

Dans ce cas, $\partial_{22}\bar{w}_1$ se réduit à la somme de deux masses de Dirac, une en $x_2 = 1$ et une en $x_2 = 2$. En dehors de ces points, (R) se résout explicitement, ce qui ramène le problème à trouver les valeurs propres et les vecteurs propres d'une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. On trouve alors qu'il existe deux solutions de (8.3.1) de la forme (8.3.2) (à multiplication par un scalaire près), notées $c_{\pm}(k)$ et $\psi_{\pm}(k)$. De plus $c_{\pm}(k)$ sont soit réelles, soit imaginaires conjuguées. Le calcul montre en fait que $c_{\pm}(k)$ sont réelles pour $|k|$ assez petit ou assez grand, et qu'il n'existe qu'une petite fenêtre d'instabilité où la partie imaginaire est non nulle.



Un argument perturbatif permet alors de montrer l'existence d'un mode instable de la forme (8.3.2) pour un profil de cisaillement w régulier, convolution de \bar{w} par une fonction C^∞ de petit support $[-\mu, \mu]$. Le profil w obtenu est alors affine sur $[0, 1 - \mu]$, $[1 + \mu, 2 - \mu]$ et $[2 + \mu, +\infty)$.

Remarque 8.3.1. — La résolution du problème spectral fait intervenir les fonctions d'Evans

$$\partial_{22}^2 \psi = \psi \left(\frac{\partial_{22}^2 w}{w - c} + k^2 \right), \quad \psi(0, c) = 0.$$

Pour c n'appartenant pas à l'image de w , ψ_c est bien définie et dépend de façon analytique de c .

Une condition nécessaire et suffisante pour que c soit valeur propre du problème de Rayleigh est que $\psi_c(x_2) \rightarrow 0$ quand $x_2 \rightarrow \infty$, c'est-à-dire que

$$\partial_2 \psi + |k| \psi = c \text{ sur } [2 + \mu, +\infty[.$$

Le principe des zéros isolés montre alors qu'il n'y a qu'un nombre fini de valeurs propres telles que $|\Im(c)| \geq \delta$ et $|c| \leq \delta^{-1}$.

8.3.2. Construction d'une solution non linéairement instable. —

Il est tentant de considérer alors $w + \delta v$ comme solution approchée des équations d'Euler. Si on note u^δ la solution des équations d'Euler (E) avec donnée initiale $w + \delta v(0)$, une estimation d'énergie conduit à

$$u^\delta = w + \delta v(t) + O(\delta^2 \exp(2t)).$$

Cela est insuffisant pour conclure car v croît trop lentement : $\|v\|_{L^2} \sim C \exp(\lambda t)$ avec $\lambda \leq 0.3$.

On est donc amené à préciser le développement et à chercher une approximation de la forme

$$u_{app}(t) = w + \delta v(t) + \delta^2 v_2(t) + \dots + \delta^N v_N(t)$$

avec $v_j \in H^s$ pour s assez grand et

$$(8.3.3) \quad \|v_j\|_{L^2} \leq C_j \exp(j\lambda t).$$

Le point délicat est d'obtenir cette estimation, qui nécessite

- de choisir v sur le mode d'instabilité linéaire maximale

$$\Im(c_{k_0}^+) = \max_k \Im(c_k^+),$$

- d'introduire les espaces d'harmoniques

$$V_j = \left\{ \exp(ijk_0 x_1) \begin{pmatrix} \psi_1'(x_2) \\ -ik\psi_1(x_2) \end{pmatrix} + \exp(-ijk_0 x_1) \begin{pmatrix} \psi_2'(x_2) \\ -ik\psi_2(x_2) \end{pmatrix} / \psi_1, \psi_2 \in C^\infty(\mathbb{R}) \right\}$$

et d'inverser l'opérateur linéaire sur V_j pour définir les correcteurs successifs v_j ,

- de montrer des estimations de continuité (à perte) sur le terme bilinéaire dans les V_j munis de normes de type Hölder, pour estimer ces correcteurs.

Preuve du théorème 8.2. — Par récurrence, on construit ainsi une solution approchée u_{app} telle que

$$\begin{aligned} \partial_t u_{app} + \nabla(u_{app} \otimes u_{app}) + \nabla p_{app} &= R_{app}, \\ u_{app}|_{t=0} &= w + \delta v|_{t=0} \end{aligned}$$

où

$$\|R_{app}\|_{L^2} \leq C\delta^{N+1} \exp((N+1)\lambda t).$$

La croissance donnée par l'instabilité linéaire implique que

$$\|u_{app}(t) - w\|_{L^2} \geq C_1 \delta \exp(\lambda t) - \sum_{j=2}^N C_j \delta^j \exp(j\lambda t),$$

de sorte que

$$\|u_{app}(t) - w\|_{L^2} \geq \frac{1}{2} C_1 \delta \exp(\lambda t),$$

pour $t \leq \lambda^{-1} |\log \delta| - C$ (où C est une constante indépendante de δ).

Soit u la solution des équations d'Euler

$$\partial_t u + \nabla(u \otimes u) + \nabla p = 0$$

de donnée initiale $w + \delta v|_{t=0}$. Grâce à une estimation d'énergie classique, on peut contrôler la différence $u - u_{app}$ par la norme Lipschitz de u_{app}

$$\begin{aligned} \|(u - u_{app})(t)\|_{L^2}^2 &\leq \|(u - u_{app})(0)\|_{L^2}^2 \exp\left(\int_0^t (2\|\nabla u_{app}\|_{L^\infty} + \beta) ds\right) \\ &\quad + \frac{1}{\beta} \int_0^t \|R_{app}(s)\|_{L^2}^2 \exp\left(\int_s^t (2\|\nabla u_{app}\|_{L^\infty} + \beta) ds\right) ds, \end{aligned}$$

où β est un petit paramètre à choisir.

Reste alors à contrôler la norme Lipschitz de u_{app}

$$\|\nabla u_{app}\|_{L^\infty} \leq \|\nabla w\|_{L^\infty} + \sum_{j=1}^N C_j \delta^j \exp(j\lambda t) \leq \|\nabla w\|_{L^\infty} + \beta,$$

pour $t \leq \lambda^{-1} |\log \delta| - C_\beta$ (où C_β est une constante indépendante de δ).

Finalement, on obtient que

$$\|(u - u_{app})(t)\|_{L^2}^2 \leq \frac{C}{\beta} \delta^{2(N+1)} \int_0^t \exp(2(N+1)\lambda s) \exp\left(2 \int_s^t (\|\nabla w\|_{L^\infty} + \beta) ds\right) ds.$$

En choisissant β tel que $(\|\nabla w\|_{L^\infty} + \beta) \leq (N+1)\lambda$, on en déduit que, pour $t \leq \lambda^{-1} |\log \delta| - C'_\beta$

$$\|u - w\|_{L^2} \geq \|u_{app} - w\|_{L^2} - \|u - u_{app}\|_{L^2} \geq \delta_0,$$

où δ_0 est indépendant de δ , ce qui achève la démonstration. \square

8.4. Instabilité des équations de Prandtl

Pour prouver le théorème 8.1, l'argument de base est l'instabilité associée aux équations d'Euler, couplée avec le changement d'échelle décrit au paragraphe 8.2.2. La condition de bord est traitée en ajoutant un terme de couche limite, qui est essentiellement une perturbation.

Preuve du théorème 8.1. — Comme précédemment, on considère le mode de Fourier qui crée l'instabilité linéaire maximale, et on se donne N tel que $N\lambda \geq 3\|\nabla w\|_{L^\infty}$. A noter que le profil de cisaillement w n'est pas une solution stationnaire des équations de Navier-Stokes, il y a une dissipation visqueuse régie par l'équation de la chaleur

$$\partial_t \tilde{w} - \sqrt{\varepsilon} \Delta \tilde{w} = 0.$$

Néanmoins, pour des temps $t \leq \varepsilon^{-1/32}$,

$$\varepsilon^{-1/8} (\tilde{w} - w) \text{ est borné uniformément en } \varepsilon, \text{ dans tous les espaces de Sobolev.}$$

- Soit v le mode d'instabilité maximale pour les équations d'Euler linéarisées

$$\|v\|_{L^2} \geq C \exp(\lambda t).$$

On définit le premier correcteur de couche limite u_0^{cl} , solution des équations de Stokes

$$\begin{aligned} \partial_t u_0^{cl} - \sqrt{\varepsilon} \Delta u_0^{cl} + \nabla p_0^{cl} &= 0, \\ u_0^{cl} + v &= 0 \text{ sur } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Par construction, u_0^{cl} satisfait pour α, β tels que $|\alpha| + |\beta| \leq K$

$$|\partial_1^\alpha \partial_z^\beta u_0^{cl}| \leq C_{\alpha, \beta} \exp(\lambda t) \Phi_{\alpha, \beta}(z)$$

où $\Phi_{\alpha, \beta}$ est une fonction rapidement décroissante de $z = X_2/\varepsilon^{1/4}$.

• Comme pour l'instabilité non linéaire d'Euler, on doit en fait considérer une approximation plus précise, du type

$$u_{app} = \tilde{w}(t) + \varepsilon^n \sum_{j=0}^M \varepsilon^{j/8} v_j(t, x_1, X_2) + \varepsilon^n \sum_{j=0}^M \varepsilon^{j/8} u_j^{cl}(t, x_1, X_2/\varepsilon^{1/4})$$

pour $M = 8nN$, où les fonctions v_j, u_j^{cl} satisfont pour $|\alpha| + |\beta| \leq K - 2j$

$$\begin{aligned} |\partial_1^\alpha \partial_z^\beta v_j| &\leq C_{\alpha, \beta} \exp\left(\lambda\left(1 + \frac{j}{8n}\right)t\right) \exp(-k_0 X_2) \\ |\partial_1^\alpha \partial_z^\beta u_j^{cl}| &\leq C_{\alpha, \beta} \exp\left(\lambda\left(1 + \frac{j}{8n}\right)t\right) \Phi_{\alpha, \beta}(z) \end{aligned}$$

uniformément en ε .

La construction se fait par récurrence. La fonction v_j est solution de

$$\begin{aligned} \partial_t v_j + (w \cdot \nabla) v_j + (v_j \cdot \nabla) w + \nabla p_j &= R_j, \\ \nabla \cdot v_j &= 0, \end{aligned}$$

avec

$$R_j = \varepsilon^{-1/8} \left((w - \tilde{w}) \cdot v_{j-1} + v_{j-1} \cdot \nabla (w - \tilde{w}) \right) - \sum_{n+j_1+j_2=j} (v_{j_1} \cdot \nabla) v_{j_2} + \Delta v_{j-4}.$$

Dans la couche limite, u_j^{cl} satisfait

$$\partial_t u_j^{cl} - \sqrt{\varepsilon} \Delta u_j^{cl} + \nabla p_j^{cl} = R'_j$$

avec

$$R'_j = -\varepsilon^{-1/8} (w \cdot \nabla u_{j-1}^{cl} + u_{j-1}^{cl} \cdot \nabla w) - \partial_{11}^2 u_{j-4}^{cl} + \dots$$

où les termes manquants sont petits et non localisés.

Finalement, on obtient

$$\begin{aligned} \partial_t u_{app} + \nabla(u_{app} \otimes u_{app}) + \nabla p_{app} - \sqrt{\varepsilon} \Delta u_{app} &= R_{app}, \\ u_{app}|_{t=0} &= w + \varepsilon^n (v_0 + u_0^{cl}), \quad u_{app}|_{\partial\Omega} \equiv 0. \end{aligned}$$

• Par construction, on a pour $t \leq \lambda^{-1} |\log \varepsilon| (n - \frac{1}{8})$,

$$\|u_{app}(t) - w\|_{L^2} \geq C_1 \varepsilon^n \exp(\lambda t) - \sum_{j=2}^N C_j \varepsilon^{n+\frac{j}{8}} \exp\left(\lambda\left(1 + \frac{j}{8n}\right)t\right) \geq \frac{1}{2} C_1 \varepsilon^n \exp(\lambda t),$$

$$\|\nabla u_{app} - \nabla w\|_{L^2} \geq \frac{1}{2} C \varepsilon^{n-\frac{1}{8}} \exp(\lambda t),$$

$$\|\nabla u_{app}\|_{L^\infty} \leq \|\nabla w\|_{L^\infty} + C \varepsilon^{n-\frac{1}{4}} \exp(\lambda t).$$

Une estimation d'énergie classique montre alors que

$$\begin{aligned} \|(u - u_{app})(t)\|_{L^2}^2 + \sqrt{\varepsilon} \int_0^t \|\nabla(u - u_{app})\|_{L^2}^2 ds &\leq \|(u - u_{app})(0)\|_{L^2}^2 \exp\left(\int_0^t (2\|\nabla u_{app}\|_{L^\infty} + \beta) ds\right) \\ &\quad + \frac{1}{\beta} \int_0^t \|R_{app}(s)\|_{L^2} \exp\left(\int_s^t (2\|\nabla u_{app}\|_{L^\infty} + \beta) ds\right) ds \\ &\leq \frac{1}{\beta} \varepsilon^n \int_0^t \exp(N\lambda s) \exp\left(\int_s^t (2\|\nabla u_{app}\|_{L^\infty} + \beta) ds\right) ds, \end{aligned}$$

En choisissant

$$\tilde{T}_\varepsilon = \lambda^{-1} |\log \varepsilon| \left(n - \frac{1}{4}\right) + \log \log |\log \varepsilon|$$

on a une suite de temps tendant vers l'infini tels que

$$\varepsilon^{N-\frac{1}{4}} \exp(\lambda \tilde{T}_\varepsilon) \rightarrow +\infty, \quad \sup_{t \leq \tilde{T}_\varepsilon} \|(u - u_{app})(t)\|_{L^2}^2 \leq C \varepsilon^{N/4}.$$

On a alors

$$\varepsilon^{-1/8} \int_{\tilde{T}_\varepsilon-1}^{\tilde{T}_\varepsilon} \|\nabla u^\varepsilon - \nabla \tilde{w}\|_{L^2} \geq \varepsilon^{-1/8} \int_{\tilde{T}_\varepsilon-1}^{\tilde{T}_\varepsilon} \|\nabla u_{app} - \nabla \tilde{w}\|_{L^2} - \varepsilon^{-1/8} \int_{\tilde{T}_\varepsilon-1}^{\tilde{T}_\varepsilon} \|\nabla u^\varepsilon - \nabla u_{app}\|_{L^2} \rightarrow +\infty.$$

En particulier, il existe une suite de temps T_ε tels que

$$\|\operatorname{rot} u^\varepsilon - \operatorname{rot} \tilde{w}\|_{L^\infty(T_\varepsilon)} \rightarrow +\infty,$$

ce qui achève la preuve. □

CHAPITRE 9

STABILISATION PAR ROTATION

L'instabilité exhibée au chapitre précédent en régime faiblement visqueux n'est pas un phénomène général. Des développements de couches limites peuvent être justifiés dans de très nombreux cas, y compris pour des systèmes issus de la mécanique des fluides. L'océanographie fournit un grand nombre d'exemples de limites non visqueuses qui peuvent être justifiées rigoureusement à travers l'étude de couches limites dites d'Ekman, combinaison d'une viscosité faible et d'une forte rotation.

Dans ce chapitre, on va s'intéresser précisément au rôle stabilisant de la force de Coriolis. Par souci de simplicité, on se concentrera sur des modèles linéaires, en négligeant les termes de transport. Néanmoins, tous les résultats énoncés ici sont encore valables pour les équations de Navier-Stokes. Le point important est que, dans les régimes de forte rotation, le mécanisme de couche limite est toujours linéaire.

9.1. Fluides tournants

9.1.1. Un problème de perturbation singulière. — Plus précisément, on considère ici le système de Stokes-Coriolis avec viscosité (turbulente) anisotrope

$$(9.1.1) \quad \begin{aligned} \partial_t u + \frac{1}{\varepsilon} \omega \wedge u - \Delta_h u - \nu \partial_{zz} u + \nabla p &= 0, \quad \nabla \cdot u = 0, \\ u|_{t=0} &= u_0, \end{aligned}$$

sur le domaine $\Omega = \omega_h \times [0, 1]$, qui est un modèle très grossier pour décrire les mouvements océaniques à grande échelle.

Comme condition de bord à la surface, on impose

$$(9.1.2) \quad \begin{aligned} u_3|_{z=1} &= 0, \\ \nu \partial_z u_h|_{z=1} &= \tau, \end{aligned}$$

où τ est une contrainte donnée, décrivant le forçage par le vent.

Au fond, on utilise la condition de Dirichlet

$$(9.1.3) \quad u|_{z=0} = 0,$$

qui est une condition d'arrêt modélisant l'interaction fluide/structure.

Par souci de simplicité, on néglige ici l'effet des bords latéraux en supposant que ω_h est le tore bidimensionnel.

Le nombre de Rossby ε est un nombre sans dimension très utilisé en dynamique des fluides géophysiques. Il mesure le rapport entre les forces d'inertie et la force de Coriolis. Par définition,

$$\varepsilon = \frac{U}{Lf}$$

où U est la vitesse typique du fluide, L la longueur caractéristique du domaine, et f le paramètre de Coriolis, i.e. la projection du vecteur rotation sur la verticale locale.

A l'échelle planétaire, la rotation a un effet dominant, ce qui se traduit par un nombre de Rossby très petit. On espère alors obtenir une bonne approximation du mouvement en considérant la limite $\varepsilon \rightarrow 0$. La seule limite non triviale est en fait obtenue dans le scaling $\varepsilon = \nu$.

9.1.2. Contrainte géostrophique. —

Pourvu que les estimations d'énergie donnent des bornes uniformes sur la suite (u^ε) , on aura en effet de la compacité faible. Les équations satisfaites par un point limite u quelconque vont alors dépendre fortement de la structure de la perturbation singulière

$$L : u \in \mathcal{H}(\Omega) \mapsto P(\omega \wedge u)$$

où P désigne le projecteur de Leray de $L^2(\Omega)$ sur le sous-espace $\mathcal{H}(\Omega)$ des champs de divergence nulle (à flux nul sur le bord). En particulier, il est standard de montrer que u appartient au noyau $\text{Ker}(L)$ de L .

Lemme 9.1.1. — *Soient (u^ε) une famille bornée dans $L^2(\Omega)$ de solutions faibles de (9.1.1)(9.1.2)(9.1.3), et u un point limite quelconque de (u^ε) . Alors, u appartient à $\text{Ker } L$. Si ω est constant,*

$$\begin{aligned} u_3 &\equiv 0, \\ \partial_z u_h &= 0, \quad \nabla_h \cdot u_h = 0, \end{aligned}$$

ce qui signifie que u est un champ de vecteurs bidimensionnel à divergence nulle sur ω_h .

Démonstration. — En multipliant (9.1.1) par $\varepsilon\chi$ pour une fonction test à divergence nulle quelconque $\chi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^+ \times]0, 1[\times \omega_h)$, on obtient

$$\iint u^\varepsilon \cdot (\varepsilon \partial_t \chi + \varepsilon^2 \partial_{zz} \chi + \varepsilon \Delta_h \chi + \omega \wedge \chi) dx dt = 0$$

En passant à la limite $\varepsilon \rightarrow 0$, on en déduit que

$$\iint u \cdot (\omega \wedge \chi) dx dt = 0$$

ce qui implique que, pour presque tout $t \geq 0$, il existe p telle que

$$(9.1.4) \quad \omega \wedge u(t) = \nabla p.$$

Comme u^ε satisfait la contrainte d'incompressibilité pour tout $\varepsilon > 0$, il vient de plus

$$\nabla \cdot u = 0.$$

Donc $u(t) \in \text{Ker } L$ pour presque tout $t \geq 0$.

En prenant le rotationnel de (9.1.4) et en utilisant la condition de divergence nulle, on obtient

$$\partial_z u = 0$$

ce qui, combiné avec la condition de non pénétration sur u_3 , donne $u_3 \equiv 0$.

En utilisant de nouveau la contrainte d'incompressibilité, on obtient alors la caractérisation du noyau. \square

Remarque 9.1.2. — *Sur l'orthogonal du noyau, le processus dominant est régi par la force de Coriolis*

$$L : u \in \mathcal{H}(\Omega) \mapsto P(\omega \wedge u) \in \mathcal{H}(\Omega).$$

L'équation

$$\varepsilon \partial_t u + Lu = 0$$

s'avère être une équation de propagation d'ondes. Si ω est constant, ce sont des ondes de Poincaré, avec la relation de dispersion suivante (liant la pulsation λ_k et le vecteur d'onde k)

$$\lambda_k = -\frac{\omega k_3 \pi}{\sqrt{|k_h|^2 + (\pi k_3)^2}}.$$

Autrement dit, la composante tridimensionnelle de la donnée initiale génère des ondes qui se propagent très rapidement dans le domaine (avec une vitesse de l'ordre de ε^{-1}). La moyenne temporelle de ces ondes s'annule, comme leur limite faible, mais elles portent une énergie finie.

Remarque 9.1.3. — *Comme le système (9.1.1) est obtenu par projection sur un repère local, le paramètre de Coriolis ω dépend de la latitude.*

Aux latitudes moyennes, on utilise souvent l'approximation f-plan qui consiste à prendre ω constant.

A l'équateur, ω s'annule donc on utilise une approximation affine (dite approximation β -plan). On peut alors observer un effet de guide d'ondes, ainsi qu'une nouvelle famille d'ondes se propageant beaucoup plus lentement, appelées ondes de Rossby (ou ondes quasigéostrophiques).

En passant formellement à la limite dans les équations de Stokes avec viscosité évanescence et force de Coriolis singulière, on s'attend donc à ce que le mouvement moyen soit régi par les équations de Navier-Stokes bidimensionnelles

$$\begin{aligned} \partial_t \bar{u}_h + \nabla_h p &= \Delta_h \bar{u}_h, & \nabla_h \cdot \bar{u}_h &= 0 \\ \bar{u}_3 &= 0. \end{aligned}$$

9.2. Couches limites d'Ekman

9.2.1. Les équations de couche limite. —

Les équations de Navier-Stokes 2D ne sont pas compatibles avec les **conditions de bord horizontales**

$$(9.2.1) \quad u_h|_B = 0 \text{ et } \varepsilon \partial_z u_h|_\Sigma = \tau.$$

On s'attend alors à ce que ces conditions soient relevées par des couches limites, dont la taille est déterminée par l'équilibre entre le terme visqueux (qui est compatible avec les conditions de non glissement et les conditions de forçage) et le terme de rotation

$$\frac{1}{\varepsilon} (\omega \wedge w_\varepsilon)_h - \varepsilon \partial_{zz} w_{\varepsilon,h} \sim 0.$$

Cette équation se réécrit en variables adimensionnées $Z = z/\varepsilon$ ou $Z = (1 - z)/\varepsilon$

$$\partial_{ZZ} w_h - \omega w_h^\perp = 0,$$

avec la contrainte supplémentaire que la correction doit restée localisée au voisinage du bord

$$w_h(Z) \rightarrow 0 \text{ quand } Z \rightarrow \infty.$$

On obtient donc finalement

$$\begin{aligned} w_1 + iw_2 &= (w_1 + iw_2)|_{Z=0} \exp\left(-\frac{1+i}{\sqrt{2}}\sqrt{\omega}Z\right), \\ w_1 - iw_2 &= (w_1 - iw_2)|_{Z=0} \exp\left(-\frac{1-i}{\sqrt{2}}\sqrt{\omega}Z\right), \end{aligned}$$

où $w_1|_{Z=0}$ et $w_2|_{Z=0}$ sont définis en fonction de τ et \bar{u}_h .

En particulier, on a les estimations suivantes pour le terme de couche limite au fond

$$\begin{cases} \|w_h^B\|_{L^2([0,1],H^s(\mathbf{D}_h))} \leq C\|\bar{u}_h\|_{H^s(\mathbf{D}_h)}\varepsilon^{1/2}, \\ \|\partial_z w_h^B\|_{L^2([0,1],H^s(\mathbf{D}_h))} \leq C\|\bar{u}_h\|_{H^s(\mathbf{D}_h)}\varepsilon^{-1/2}, \end{cases}$$

et de façon similaire des estimations pour le terme de couche limite de surface

$$\begin{cases} \|w_h^\Sigma\|_{L^2([0,1],H^s(\mathbf{D}_h))} \leq C\|\tau\|_{H^s(\mathbf{D}_h)}\varepsilon^{1/2}, \\ \|\partial_z w_h^\Sigma\|_{L^2([0,1],H^s(\mathbf{D}_h))} \leq C\|\tau\|_{H^s(\mathbf{D}_h)}\varepsilon^{-1/2}, \end{cases}$$

La formule explicite de w_h donne aussi des estimations L^p .

9.2.2. Le mécanisme de succion. —

Par construction, si τ et \bar{u} sont réguliers, $\bar{u} + w_\varepsilon^\Sigma + w_\varepsilon^B$ satisfait l'équation d'évolution approchée

$$\partial_t u + \nabla p = \nu_h \Delta_h u + \varepsilon \partial_{zz} u - \frac{1}{\varepsilon} \omega \wedge u + o(1),$$

ainsi que les conditions de bord

$$u|_B = 0, \quad u_3|_\Sigma = 0 \text{ et } \varepsilon \partial_z u_h|_\Sigma = \tau.$$

Par contre, la **contrainte d'incompressibilité** est en général violée

$$\begin{aligned} \partial_1 w_1 + \partial_2 w_2 &= \frac{1}{2}(\partial_1 - i\partial_2)(w_1 + iw_2)|_{Z=0} \exp\left(-\frac{1+i}{\sqrt{2}}\sqrt{\omega}Z\right) \\ &\quad + \frac{1}{2}(\partial_1 + i\partial_2)(w_1 - iw_2)|_{Z=0} \exp\left(-\frac{1-i}{\sqrt{2}}\sqrt{\omega}Z\right) \end{aligned}$$

On introduit alors une correction verticale w_3 telle que $\partial_Z w_3 = \pm \varepsilon \partial_z w_3 = \mp \varepsilon(\partial_1 w_1 + \partial_2 w_2)$

$$\begin{aligned} w_3 &= \mp \frac{\varepsilon}{(1-i)\sqrt{2\omega}} (\nabla_h \cdot w_h|_{Z=0} - i\nabla_h^\perp \cdot w_h|_{Z=0}) \exp\left(\sqrt{\frac{\omega}{2}}(i-1)Z\right) \\ &\quad \mp \frac{\varepsilon}{(1+i)\sqrt{2\omega}} (\nabla_h \cdot w_h|_{Z=0} + i\nabla_h^\perp \cdot w_h|_{Z=0}) \exp\left(-\sqrt{\frac{\omega}{2}}(i+1)Z\right). \end{aligned}$$

Le champ de vecteurs w ainsi construit est à divergence nulle, mais il ne satisfait plus la **condition de non pénétration**.

$$\begin{aligned} w_{3|Z=0}^B &\sim -\frac{\varepsilon}{\sqrt{2\omega}} \left(\frac{(\partial_1 - i\partial_2)(\bar{u}_1 + i\bar{u}_2)}{1+i} + \frac{(\partial_1 + i\partial_2)(\bar{u}_1 - i\bar{u}_2)}{1-i} \right) \\ w_{3|Z=0}^\Sigma &\sim \frac{\varepsilon}{2\omega} (i(\partial_1 - i\partial_2)(\tau_1 + i\tau_2) - i(\partial_1 + i\partial_2)(\tau_1 - i\tau_2)) \end{aligned}$$

modulo des termes exponentiellement petits dûs aux traces $w_{3|Z=1/\varepsilon}^B$ et $w_{3|Z=1/\varepsilon}^\Sigma$. Pour relever la condition de non pénétration, on doit alors ajouter un correcteur supplémentaire δw défini par

$$\begin{aligned} \delta w_3 &= -w_{3|z=0}P(1-z) - w_{3|z=1}P(z), \\ \delta w_h &= \nabla_h \Delta_h^{-1} \nabla_h \cdot (-w_{3|z=0}P'(1-z) + w_{3|z=1}P'(z)) \end{aligned}$$

où P est une fonction régulière quelconque telle que $P(0) = 0$ et $P(1) = 1$.

Le flux vertical δw_3 est responsable d'une circulation sur le domaine entier, il est de taille petite mais non localisé près des bords. Ce mécanisme, appelé pompage ou suction d'Ekman, a un rôle déterminant dans les échanges d'énergie.

Remarque 9.2.1. — *En général, la solution approchée $\bar{u} + w_\varepsilon^\Sigma + w_\varepsilon^B + \delta w_\varepsilon$ ne satisfait pas exactement les conditions de bord horizontales (9.2.1), mais l'erreur est beaucoup plus petite que pour \bar{u} . Un relèvement ne prenant pas en compte la structure de l'équation (mais préservant les contraintes de divergence nulle et de flux nul comme dans le cas du correcteur de Kato) permettra de conclure sans itérer la construction.*

L'objectif est maintenant de comprendre comment la présence des couches d'Ekman modifie le mouvement moyen.

9.3. Analyse double-échelle et convergence faible

Dans la mesure où l'on ne s'intéresse qu'au mouvement moyen, il n'est pas nécessaire de décrire les oscillations dues au terme de rotation, et on peut donc utiliser des méthodes de compacité faible pour étudier l'asymptotique.

Théorème 9.1. — *Soient $u_0 \in \mathcal{H}(\Omega)$ un champ de vecteurs solénoïdal, et $\tau \in L^\infty(\mathbb{R}^+, L^2(\omega_h))$ un forçage de surface. Pour tout $\varepsilon > 0$, on considère une solution faible u^ε du système (9.1.1)(9.1.2)(9.1.3) avec $\nu = \varepsilon$.*

Alors (u^ε) converge faiblement dans $L_{loc}^2(\mathbb{R}^+ \times \omega)$ vers la solution du système de Stokes bidimensionnel avec pompage d'Ekman

$$\begin{aligned} \partial_t u_h - \Delta_h u_h + \sqrt{\frac{\omega}{2}} u_h + \nabla_h p &= \tau, \quad \nabla_h \cdot u_h = 0, \\ u_h|_{t=0} &= \int_0^1 u_{0,h} dz. \end{aligned}$$

9.3.1. Estimations a priori. —

A cause du terme de forçage en surface, l'inégalité d'énergie s'écrit

$$\frac{1}{2} \int |u_\varepsilon|^2 dx + \int_0^t \int (|\nabla_h u_\varepsilon|^2 + \varepsilon |\partial_z u_\varepsilon|^2) dx ds \leq \frac{1}{2} \int |u_0|^2 dx + \int_0^t \int u_{\varepsilon,h}|_{z=1} \tau dx_h ds.$$

L'estimation de trace

$$\varepsilon^{1/2} \|u_{\varepsilon,h}|_{z=1}\|_{L^2(\mathbf{D}_h)}^2 \leq C \varepsilon^{1/2} \|u_{\varepsilon,h}\|_{L^2([0,1] \times \mathbf{D}_h)} \|\partial_z u_{\varepsilon,h}\|_{L^2([0,1] \times \mathbf{D}_h)},$$

conduit alors à l'inégalité

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int |u_\varepsilon|^2 dx + \int_0^t \int (|\nabla_h u_\varepsilon|^2 + \frac{\varepsilon}{2} |\partial_z u_\varepsilon|^2) dx ds \\ & \leq \frac{1}{2} \int |u_0|^2 dx \exp(Ct) + \varepsilon^{-1/4} \int_0^t \|\tau\|_{L^2(\mathbf{D}_h)} \exp(C(t-s)) ds. \end{aligned}$$

En particulier, si $\|\tau\|_{L^2(\mathbf{D}_h)}$ est d'ordre 1 quand ε tend vers 0, cette inégalité ne permet pas d'obtenir un contrôle uniforme sur (u_ε) . On doit alors considérer une inégalité d'énergie modulée pour $u_\varepsilon - \tilde{w}_\varepsilon$, où $\tilde{w}_\varepsilon = w_\varepsilon^\Sigma + \delta w_\varepsilon^\Sigma$ est le terme de couche limite associé au forçage τ (défini dans la section précédente).

Par définition de $v_\varepsilon = u_\varepsilon - \tilde{w}_\varepsilon$, on a la contrainte d'incompressibilité

$$\nabla \cdot v_\varepsilon = \nabla \cdot u_\varepsilon - \nabla \cdot (w_\varepsilon^\Sigma + \delta w_\varepsilon^\Sigma) = 0,$$

l'équation du mouvement

$$\partial_t v_\varepsilon + \frac{\omega}{\varepsilon} v_\varepsilon^\perp + \nabla p_\varepsilon - \Delta_h v_\varepsilon - \varepsilon \partial_{zz} v_\varepsilon = -\partial_t \tilde{w}_\varepsilon + \Delta_h \tilde{w}_\varepsilon + \varepsilon \partial_{zz} \delta w_\varepsilon^\Sigma - \frac{\omega}{\varepsilon} \delta w_\varepsilon^{\Sigma,\perp}$$

où le dernier terme correspond à la succion d'Ekman, ainsi que les conditions de bord

$$\begin{aligned} v_{\varepsilon,3|\Sigma} &= v_{\varepsilon,3|B} = 0, \\ v_{\varepsilon,h|B} &= 0 \text{ pourvu que } P'(0) = P'(1) = 0, \\ \varepsilon \partial_z v_{\varepsilon,h|\Sigma} &= \tau \text{ en choisissant } P \text{ tel que } P''(0) = P''(1) = 0. \end{aligned}$$

L'inégalité d'énergie pour v_ε s'écrit alors

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \|v_\varepsilon(t)\|_{L^2}^2 + \int_0^t (\|\nabla_h v_\varepsilon(s)\|_{L^2}^2 + \varepsilon \|\partial_z v_\varepsilon(s)\|_{L^2}^2) ds \\ & \leq \frac{1}{2} \|v_\varepsilon(0)\|_{L^2}^2 + \int_0^t \|v_\varepsilon(s)\|_{L^2} \|\frac{\omega}{\varepsilon} \delta w_\varepsilon^\perp(s)\|_{L^2} ds + o(1). \end{aligned}$$

Si τ est régulier en t et x_h , on en déduit des bornes uniformes sur v_ε par le lemme de Gronwall :

$$(9.3.1) \quad \frac{1}{2} \|v_\varepsilon(t)\|_{L^2}^2 + \int_0^t (\|\nabla_h v_\varepsilon(s)\|_{L^2}^2 + \varepsilon \|\partial_z v_\varepsilon(s)\|_{L^2}^2) ds \leq C(t).$$

9.3.2. Formulation faible des équations de Stokes avec conditions de bord. —

A extraction près d'une sous-suite, on a alors

$$\begin{cases} u_\varepsilon \rightharpoonup \bar{u} \text{ faiblement dans } L^2([0,T] \times \mathbf{D}), \\ \bar{u} \in \text{Ker } L \Leftrightarrow \bar{u} = (\bar{u}_h(x_h), 0) \text{ avec } \nabla_h \cdot \bar{u}_h = 0. \end{cases}$$

Le point de départ pour étudier la limite de rotation rapide est alors la forme faible des équations de Stokes-Coriolis, et plus précisément leur projection sur le noyau de l'opérateur de perturbation singulière : $\forall \varphi_h \in C_c^\infty(\mathbb{R}^+ \times \omega)$ telle que $\nabla_h \cdot \varphi_h = 0$,

$$(9.3.2) \quad \begin{aligned} & \int u_0 \varphi_h dx + \int_0^t \int (u_{\varepsilon,h} \partial_t \varphi_h - \nabla_h u_{\varepsilon,h} \cdot \nabla_h \varphi_h) dx ds \\ &= \varepsilon \int_0^t \int (\partial_z u_{\varepsilon,h})|_{z=0} \varphi_h dx_h ds - \int_0^t \int \tau \varphi_h dx_h ds \end{aligned}$$

Remarquons que la trace $(\partial_z u_{\varepsilon,h})|_{z=0}$ n'a pas de sens pour un champ de vecteurs quelconque $u_\varepsilon \in L_t^\infty(L_x^2) \cap L_t^2(\dot{H}_x^1)$. Elle est en fait définie (dans un sens très faible) par l'équation.

Pour relier la trace $(\partial_z u_{\varepsilon,h})|_{z=0}$ au champ u_ε et à sa trace $u_{\varepsilon,h}|_{z=0}$, l'idée est d'utiliser la forme faible des équations de Stokes-Coriolis avec des fonctions régulières ψ telles que $\nabla \cdot \psi = 0$ et $\psi_{3|B} = \psi_{3|\Sigma} = 0$ bien choisies :

$$\begin{aligned} & \int u_0 \psi dx + \int_0^t \int (u_\varepsilon \cdot \partial_t \psi - \nabla_h u_\varepsilon \cdot \nabla_h \psi) dx ds + \int_0^t \int u_\varepsilon \cdot \left(\frac{1}{\varepsilon} \omega \wedge \psi + \varepsilon \partial_{zz} \psi \right) dx ds \\ &= \varepsilon \int_0^t \int (\partial_z u_{\varepsilon,h})|_{z=0} \psi_h|_{z=0} dx_h ds - \int_0^t \int \tau \psi_h|_{z=1} dx_h ds + \varepsilon \int_0^t \int u_{\varepsilon,h}|_{z=1} \partial_z \psi_h|_{z=1} dx_h ds \end{aligned}$$

9.3.3. L'équation de trace en $z = 0$. —

Pour capturer les effets - quand ε tend vers 0 - de la condition de Dirichlet imposée au fond, on utilise dans l'identité précédente une famille de solutions du problème de couche limite, et plus précisément du problème adjoint (obtenu en changeant ω en $-\omega$, ou de façon équivalente i en $-i$), avec φ_h comme donnée au bord. Ce procédé est très similaire aux outils d'analyse double-échelle introduits par N'Guetseng et Allaire.

Par construction de w_ε et δw_ε , on s'attend à ce que tous les termes dans la formulation faible des équations de Stokes-Coriolis soient petits à l'exception de

$$\varepsilon \int_0^t \int (\partial_z u_{\varepsilon,h})|_{z=0} w_{\varepsilon,h}|_{z=0} dx_h ds \text{ et } \int_0^t \int u_\varepsilon \cdot \left(\frac{1}{\varepsilon} \omega \wedge \delta w_{\varepsilon,h} \right) dx ds.$$

En effet, comme la norme $L^2([0, 1], H^s(\mathbf{D}_h))$ de \tilde{w}_ε et la norme $H^s([0, 1] \times \mathbf{D}_h)$ de δw_ε convergent vers 0 dans $L^\infty(\mathbb{R}^+)$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$ (pour tout $s \geq 0$ fixé), on a

$$\begin{aligned} & \int u_0 \tilde{w}_\varepsilon dx + \int_0^t \int u_\varepsilon \cdot \left(\partial_t \tilde{w}_\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} \omega \delta w_\varepsilon^\perp + \varepsilon \partial_{zz} \delta w_\varepsilon + \Delta_h \tilde{w}_\varepsilon \right) dx ds \\ & \sim \int_0^t \int u_\varepsilon \cdot \frac{1}{\varepsilon} (\omega \delta w_\varepsilon^\perp) dx ds \sim - \int_0^t \int \omega \bar{u}_h \cdot \nabla_h^\perp \Delta_h^{-1} w_{3|B} dx ds \\ & \sim \int_0^t \int \sqrt{2\omega} u_h \cdot \varphi_h dx ds \end{aligned}$$

On peut alors identifier les deux limites. Comme $w_h|_{z=0}$ peut être une fonction quelconque de x_h et t , on peut ainsi caractériser le terme de bord qui apparaît dans l'équation du mouvement moyen.

$$(9.3.3) \quad \varepsilon \int_0^t \int (\partial_z u_{\varepsilon,h})|_{z=0} w_{\varepsilon,h}|_{z=0} dx_h ds \rightarrow -\sqrt{\frac{\omega}{2}} \int_0^t \int \bar{u}_h \varphi_h dx ds - \int_0^t \int \tau \varphi_h dx_h ds.$$

En insérant cette identité dans la formulation faible obtenue au paragraphe précédent, on caractérise complètement la limite faible, ce qui achève la preuve du Théorème 9.1.

Remarque 9.3.1. — *Si on veut obtenir un résultat de convergence forte, il faut décrire toutes les oscillations, i.e. écrire une équation d'enveloppe pour chacun des modes propres de l'opérateur L . A chacun de ces modes sont associés des correcteurs de couches limites et un processus de pompage.*

Dans le cas où le forçage est lui-même oscillant (de fréquence μ), l'équation de couche limite en surface s'écrit

$$(9.3.4) \quad \begin{aligned} i\mu\varphi_1 + \lambda^2\varphi_1 - \varepsilon k_h^2\varphi_1 - \omega\varphi_2 + \varepsilon^2 \frac{k_1 k_2 \varphi_1 - k_1^2 \varphi_2}{\lambda^2 - \varepsilon^2 k_h^2} &= 0, \\ i\mu\varphi_2 + \lambda^2\varphi_2 - \varepsilon k_h^2\varphi_2 + \omega\varphi_1 + \varepsilon^2 \frac{-k_1 k_2 \varphi_2 + k_2^2 \varphi_1}{\lambda^2 - \varepsilon^2 k_h^2} &= 0, \\ \varepsilon(ik_1\varphi_1 + ik_2\varphi_2) - \lambda\varphi_3 &= 0, \end{aligned}$$

ce qui exprime un équilibre entre le forçage, la viscosité, la force de Coriolis et la pression.

Soit A_λ la matrice correspondant à (9.3.4)

$$A_\lambda(\mu, k_h) = \begin{pmatrix} i\mu + \lambda^2 - \varepsilon k_h^2 + \frac{\varepsilon^2 k_1 k_2}{\lambda^2 - \varepsilon^2 k_h^2} & -\omega - \frac{\varepsilon^2 k_1^2}{\lambda^2 - \varepsilon^2 k_h^2} \\ \omega + \frac{\varepsilon^2 k_2^2}{\lambda^2 - \varepsilon^2 k_h^2} & i\mu + \lambda^2 - \varepsilon k_h^2 - \frac{\varepsilon^2 k_1 k_2}{\lambda^2 - \varepsilon^2 k_h^2} \end{pmatrix}.$$

Si $|\mu| \neq \omega$, la matrice

$$\begin{pmatrix} \mu & i\omega \\ -i\omega & \mu \end{pmatrix}$$

est hyperbolique au sens des systèmes dynamiques, ce qui signifie que ses valeurs propres ont des parties réelles non nulles. Cette propriété est stable par petite perturbation. On peut alors, comme on l'a fait dans ce qui précède, négliger la pression et la viscosité horizontale pour le calcul des correcteurs de couche limite.

Si $|\mu| = \omega$, la matrice

$$\begin{pmatrix} \mu & i\omega \\ -i\omega & \mu \end{pmatrix}$$

admet 0 comme valeur propre, et on s'attend à ce que son comportement soit très sensible aux perturbations. De fait,

- *si $k_h \neq (0, 0)$, on peut relever les conditions de bord par des termes de couches limites, mais ces couches sont beaucoup plus grandes, de taille $O(\varepsilon^{1/2})$;*
- *si $k_h = (0, 0)$, on a une bifurcation, et le développement de couche limite n'est valable que sur des temps petits.*

APPENDICE A

QUELQUES RAPPELS D'ANALYSE FONCTIONNELLE

A.1. Topologie et calcul différentiel

Théorème A.1 (Théorème d'Ascoli). — Soient Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^d , et S une partie de $C_b(\Omega)$. Si

– S est bornée

$$M = \sup_{u \in S} \|u\|_\infty < +\infty$$

– S est uniformément équicontinue, i.e. pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$\forall u \in S, \quad \forall x, y \in \Omega, \quad |x - y| \leq \delta \Rightarrow |u(x) - u(y)| \leq \varepsilon,$$

alors S est précompacte.

Théorème A.2 (Théorème de Cauchy-Lipschitz). — Soient ω un ouvert d'un espace de Banach E et I un intervalle de \mathbb{R} . On considère une fonction F mesurable de $I \times \omega$ dans E telle que

$$\forall x \in \omega, \quad \|F(t, x)\| \in L^1_{loc}(I)$$

et telle que

$$\forall (x, y) \in \omega^2, \quad \|F(t, x) - F(t, y)\| \leq L(t)\|x - y\| \quad \text{avec} \quad L \in L^1_{loc}(I).$$

Alors, pour tout point (t_0, x_0) de $I \times \omega$, il existe un intervalle ouvert maximal J contenant t_0 et une unique fonction $x \in C_b(J; \omega)$ telle que

$$(EDO) \quad x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t F(t', x(t')) dt'.$$

De plus, s'il existe une fonction localement bornée M de \mathbb{R}^+ dans \mathbb{R}^+ et une fonction localement intégrable β de \mathbb{R}^+ dans \mathbb{R}^+ telles que

$$\|F(t, u)\| \leq \beta(t)M(\|u\|).$$

on a :

$$\inf J > -\infty \implies \limsup_{t \nearrow \inf J} \|x(t)\| = \infty \quad \text{et} \quad \sup J < +\infty \implies \limsup_{t \searrow \sup J} \|x(t)\| = \infty.$$

A.2. Espaces hilbertiens

Théorème A.3 (Théorème de Lax-Milgram). — Soient H un espace de Hilbert, et $a : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire continue coercive.

Pour tout $\varphi \in H'$, il existe un unique $u \in H$ tel que

$$(A.2.1) \quad \forall v \in H, \quad a(u, v) = \langle \varphi, v \rangle.$$

De plus, si a est symétrique, u est caractérisé par la propriété

$$(A.2.2) \quad \frac{1}{2}a(u, u) - \langle \varphi, u \rangle = \min_{v \in H} \left(\frac{1}{2}a(v, v) - \langle \varphi, v \rangle \right)$$

Théorème A.4 (Théorème de diagonalisation des opérateurs auto-adjoints compacts)

Soient H un espace de Hilbert séparable, et $T \in \mathcal{K}(H)$ un opérateur autoadjoint compact.

Alors il existe une suite (λ_n) tendant vers 0, et une base hilbertienne (e_n) de H telles que

$$Te_n = \lambda_n e_n.$$

A.3. Espaces de Sobolev

Théorème A.5 (Inégalité de Poincaré). — Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^d . Alors il existe une constante C (dépendant de Ω et $p \in [1, +\infty[$) telle que

$$\forall u \in W_0^{1,p}(\Omega), \quad \|u\|_{L^p} \leq C \|\nabla u\|_{L^p}.$$

Théorème A.6 (Théorème d'injection de Sobolev). — Si $s > d/2$, l'espace $H^s(\mathbb{R}^d)$ s'injecte continûment dans $C(\mathbb{R}^d)$

$$\forall \psi \in H^s(\mathbb{R}^d), \quad \|\psi\|_{C(\mathbb{R}^d)} \leq C \|\psi\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}.$$

Si $s < d/2$, l'espace $H^s(\mathbb{R}^d)$ s'injecte continûment dans $L^p(\mathbb{R}^d)$ avec $p = 2d/(d - 2s)$

$$\forall \psi \in H^s(\mathbb{R}^d), \quad \|\psi\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \leq C \|\psi\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}.$$

Théorème A.7 (Théorème de Rellich-Kondrakov). — Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^d de classe C^1 (ou le produit de N intervalles ouverts bornés).

- si $d \geq 2$ et $1 \leq q < 2d/(d - 2)$, l'injection de $H^1(\Omega)$ dans $L^q(\Omega)$ est compacte.

- si $d = 1$, l'injection de $H^1(\Omega)$ dans $C^0(\bar{\Omega})$ est compacte.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] A. Bertozzi, A. Majda. Vorticity and incompressible flow. *Cambridge Texts in Applied Mathematics* **27**. Cambridge University Press, Cambridge, 2002.
- [2] H. Brézis. Analyse fonctionnelle. Théorie et applications. [*Collection Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise*. Masson, Paris, 1983.
- [3] L. Caffarelli, R. Kohn, L. Nirenberg. *Partial regularity of suitable weak solutions of the Navier-Stokes equations*. *Comm. Pure Appl. Math.* **35** (1982), 771831.
- [4] M. Cannone, Y. Meyer, F. Planchon. Solutions auto-similaires des équations de Navier-Stokes. *Séminaire sur les équations aux Dérivées Partielles, 19931994*, Ed. école Polytech., Palaiseau, 1994.
- [5] J.-Y. Chemin. Fluides parfaits incompressibles. *Astérisque* **230**, Société Mathématique de France, Paris, 1995.
- [6] J.-Y. Chemin, B. Desjardins, I. Gallagher et E. Grenier, *Basics of Mathematical Geophysics*, *Oxford University Press*, 2006.
- [7] J.-M. Delort. *Existence de nappes de tourbillon en dimension deux*. *J. Amer. Math. Soc.* **4** (1991), 553–586.
- [8] Escaurazia, Seregin, Sverak. *$L_{3,\infty}$ -solutions of Navier-Stokes equations and backward uniqueness*, *Uspekhi Mat. Nauk* **58** (2006), 3–44;
- [9] H. Fujita et T. Kato, On the Navier–Stokes initial value problem I, *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **16** (1964), 269–315.
- [10] D. Gérard-Varet. De Navier-Stokes vers Euler. *Facettes mathématiques de la mécanique des fluides*, Ed. éc. Polytech., Palaiseau, 2010.
- [11] E. Grenier. Non drivation des équations de Prandtl. *Séminaire sur les équations aux Dérivées Partielles, 19971998*, Ed. école Polytech., Palaiseau, 1998.
- [12] E. Grenier. *On the nonlinear instability of Euler and Prandtl equations*. *Comm. Pure Appl. Math.* **53** (2000), 10671091.
- [13] T. Kato. Remarks on zero viscosity limit for nonstationary Navier-Stokes flows with boundary. *Seminar on nonlinear partial differential equations (Berkeley, Calif., 1983)*. Springer, New York, 1984.

- [14] J. Leray, Essai sur le mouvement d'un liquide visqueux emplissant l'espace, *Acta Mathematica*, **63** (1933), 193-248.
- [15] J. Leray, Etude de diverses équations intégrales non linéaires et de quelques problèmes que pose l'hydrodynamique. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées* **12** (1933), 1-82.
- [16] P.-L. Lions, *Mathematical Topics in Fluid Mechanics*, Vol. I, Incompressible Models, Oxford Science Publications, 1997.
- [17] C. Marchioro, M. Pulvirenti. Mathematical theory of incompressible nonviscous fluids. *Applied Mathematical Sciences* **96**. Springer-Verlag, New York, 1994.
- [18] J. Nečas, M. Ruzicka, V. Sverák *On Leray's self-similar solutions of the Navier-Stokes equations*. *Acta Math.* **176** (1996), 283-294.
- [19] L. Prandtl. *Über Flüssigkeits-Bewegung bei sehr kleiner Reibung*. Actes du troisième congrès international des mathématiciens. Heidelberg, 1904, 484-491.
- [20] M. Sammartino, R. Caffisch. *Zero viscosity limit for analytic solutions of the Navier-Stokes equation on a half-space*. *Comm. Math. Phys.* **192** (1998), 433-491.
- [21] S. Schochet. *The weak vorticity formulation of the 2-D Euler equations and concentration-cancellation*. *Comm. Partial Differential Equations* **20** (1995), 1077-1104.