

**Laure Saint-Raymond**

---

**ANALYSE FONCTIONNELLE**

---

*L. Saint-Raymond*

Université Paris VI and DMA École Normale Supérieure, 45 rue d'Ulm, 75230 Paris Cedex 05,  
FRANCE.

*E-mail* : `Laure.Saint-Raymond@ens.fr`

# **ANALYSE FONCTIONNELLE**

**Laure Saint-Raymond**



## TABLE DES MATIÈRES

<b>Partie I. Dualité</b> .....	1
<b>1. Rappels de topologie</b> .....	3
1.1. Espaces de Baire.....	3
1.2. Opérateurs linéaires et théorème de Banach-Steinhaus.....	4
1.3. Théorèmes de l'application ouverte et du graphe fermé.....	6
<b>2. Théorème de Hahn-Banach</b> .....	9
2.1. Forme analytique.....	9
2.2. Forme géométrique.....	10
2.3. Un exemple d'application : le théorème de Krein Milman.....	13
<b>3. Dualité et topologies faibles</b> .....	15
3.1. Dual topologique.....	15
3.2. Topologie faible.....	17
3.3. Topologie faible*.....	18
3.4. Notion d'espace réflexif.....	19
<b>Partie II. Distributions</b> .....	23
<b>4. La théorie de Schwartz</b> .....	25
4.1. Définition et propriétés élémentaires.....	25
4.2. Quelques exemples.....	28
4.3. Localisation, convolution, régularisation.....	31

<b>5. Solutions singulières d'équations aux dérivées partielles</b> .....	37
5.1. Méthode des caractéristiques et explosion.....	37
5.2. Solutions faibles et critère d'unicité.....	40
5.3. Approximation visqueuse.....	42
<b>Partie III. Analyse de Fourier</b> .....	51
<b>6. Transformation de Fourier</b> .....	53
6.1. Transformation de Fourier des fonctions sommables.....	53
6.2. Transformation de Fourier sur la classe de Schwartz.....	55
6.3. Transformation de Fourier des distributions tempérées.....	57
6.4. Equations de convolution.....	61
<b>7. Espaces de Sobolev</b> .....	63
7.1. Définition et propriétés topologiques.....	63
7.2. Injections de Sobolev.....	65
7.3. Restriction, prolongement et traces.....	67
7.4. Compacité.....	71
<b>8. A propos de la transformée de Hilbert</b> .....	75
8.1. Définition et continuité sur $L^p$ .....	75
8.2. Espaces de Lebesgue faibles.....	79
8.3. Transformée de Hilbert sur $L^1(\mathbf{R})$ .....	80
<b>Partie IV. Analyse spectrale</b> .....	87
<b>9. Espaces de Hilbert</b> .....	89
9.1. Définition et propriétés fondamentales.....	89
9.2. Théorèmes de Stampacchia et de Lax-Milgram.....	91
9.3. Bases hilbertiennes.....	93
<b>10. Opérateurs compacts</b> .....	97
10.1. Définitions et propriétés fondamentales.....	97
10.2. Théorie de Riesz-Fredholm.....	99
10.3. Spectre d'un opérateur compact.....	102
10.4. Décomposition spectrale des opérateurs autoadjoints compacts.....	104

10.5. L'équation de la chaleur sur un domaine borné.....	106
<b>11. Opérateurs maximaux monotones.....</b>	<b>109</b>
11.1. Définition et régularisation de Yosida.....	109
11.2. Théorème de Hille-Yosida.....	111
11.3. Cas symétrique.....	114
11.4. L'équation de la chaleur.....	116
<b>Bibliographie.....</b>	<b>119</b>



# **PARTIE I**

## **DUALITÉ**



# CHAPITRE 1

## RAPPELS DE TOPOLOGIE

Comme l'indique le titre, l'objectif de ce chapitre n'est pas de présenter de façon complète les bases de topologie, on se réfère pour cela au cours de Patrick Bernard et aux notes de cours de Frédéric Paulin où les résultats sont énoncés dans un cadre très général. Voir aussi [3], [11], [12].

Nous rappelons uniquement quelques conséquences du **théorème de Baire** sur la continuité des applications linéaires.

### 1.1. Espaces de Baire

**Définition 1.1.1.** — Soit  $X$  un espace topologique.

- $X$  est dit de Baire si et seulement si toute intersection dénombrable d'ouverts denses dans  $X$  est dense dans  $X$  (ou de façon équivalente, toute réunion dénombrable de fermés d'intérieurs vides est d'intérieur vide).
- Une partie  $A \subset X$  est maigre si et seulement si  $A$  est incluse dans une réunion dénombrable de fermés d'intérieurs vides.
- Une propriété est vraie Baire presque partout si et seulement si elle est vraie sur le complémentaire d'une partie maigre, i.e. sur un ensemble gras (ou résiduel).

**Théorème 1.1 (de Baire).** — Les espaces topologiques localement compacts (i.e. les espaces séparés et tels que tout point admet un système fondamental de voisinages compacts), et les espaces métriques complets sont des espaces de Baire.

*Démonstration.* — Soit  $(O_n)$  une suite d'ouverts denses et  $O = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} O_n$ . Il s'agit de montrer que pour tout ouvert  $W \subset X$ , l'intersection  $W \cap O$  est non vide.

Comme  $O_0 \cap W \neq \emptyset$ , il existe un ouvert non vide  $W_0$  tel que  $\bar{W}_0 \subset O_0 \cap W$  avec

- $\bar{W}_0$  compact si  $X$  est un espace topologique localement compact;
- $\bar{W}_0$  de rayon inférieur à 1 si  $X$  est un espace métrique complet.

Par récurrence, on peut ainsi construire une suite d'ouverts non vides  $(W_n)$  tels que  $\bar{W}_{n+1} \subset O_{n+1} \cap W_n$  et vérifiant l'une des conditions suivantes :

- $\bar{W}_{n+1}$  compact si  $X$  est un espace topologique localement compact;
- $\bar{W}_{n+1}$  de rayon inférieur à  $1/(n+1)$  si  $X$  est un espace métrique complet.

On a alors que  $\bigcap_{n \in \mathbf{N}} \bar{W}_n \neq \emptyset$ , en utilisant la compacité dans le premier cas, et la complétude dans le second cas.  $\square$

Ce résultat permet de montrer par exemple que l'ensemble des points de continuité de la limite simple  $f$  d'une suite de fonctions continues  $(f_n)$  de  $C^0([0, 1])$  est un ensemble gras de  $[0, 1]$ .

On utilise pour cela la propriété suivante : s'il existe une suite  $(F_n)$  de parties de l'espace de Baire  $X$  telle que  $X \subset \bigcup_{n \in \mathbf{N}} F_n$ , alors

$$\bigcup_{n \in \mathbf{N}} \overset{\circ}{F}_n \supset X \setminus \left( \bigcup_{n \in \mathbf{N}} \partial F_n \right) \text{ est dense dans } X.$$

Pour tout  $\varepsilon > 0$ , on pose

$$F_n^\varepsilon = \{x \in [0, 1] / \forall m \geq n, |f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon\}.$$

Par définition,  $F_n^\varepsilon$  est fermé et  $\bigcup_{n \in \mathbf{N}} F_n^\varepsilon = [0, 1]$ .

La suite

$$O_p = \bigcup_n \overset{\circ}{F}_n^{1/p}$$

est alors une suite d'ouverts denses de  $[0, 1]$ , et le théorème de Baire montre que  $G = \bigcap_p O_p$ , est un ensemble gras.

Il suffit alors de vérifier que les éléments de  $G$  sont des points de continuité de  $f$ .

**Remarque 1.1.2.** — Attention à ne pas confondre les notions de “presque partout” au sens de Baire et au sens des mesures.

Ainsi, si  $\mu$  est une mesure borélienne qui ne charge pas les points sur un espace métrique séparable  $X$ , il existe toujours une partie grasse de  $X$  qui est  $\mu$ -négligeable.

Il suffit pour construire une telle partie de prendre une suite dense  $(x_i)$ , de poser pour tout  $k \in \mathbf{N}^*$

$$V^k = \bigcup O_i^k \text{ où } O_i^k \text{ est un ouvert contenant } x_i \text{ tel que } \mu(O_i^k) \leq \frac{2^{-i}}{k},$$

puis de considérer  $G = \bigcap_{k=1}^{\infty} V^k$ .

## 1.2. Opérateurs linéaires et théorème de Banach-Steinhaus

**Théorème 1.2 (de Banach-Steinhaus).** — Soient  $E$  un espace de Banach et  $F$  un espace vectoriel normé. On considère une famille  $(T_\alpha)$  d'applications linéaires continues de  $E$  dans  $F$  telles que

$$\forall x \in E, \quad \sup_{\alpha} \|T_\alpha x\|_F < +\infty.$$

Alors il existe  $C > 0$  telle que

$$\forall x \in E, \forall \alpha, \quad \|T_\alpha x\|_F \leq C \|x\|_E.$$

*Démonstration.* — On pose, pour tout  $n \in \mathbf{N}$ ,

$$O_n = \{x \in E / \exists \alpha, \quad \|T_\alpha x\|_F > n\},$$

de sorte que  $O_n$  est ouvert et  $\bigcap_{n=1}^{\infty} O_n = \emptyset$ .

D'après le théorème de Baire, il existe alors  $n_0$  tel que  $O_{n_0}$  n'est pas dense dans  $E$ , i.e. dont le complémentaire contient une boule  $B(x_0, r)$ . Pour tout  $x \in B(x_0, r)$ ,

$$\|T_\alpha(x - x_0)\|_F \leq 2n_0.$$

En utilisant la linéarité de  $T_\alpha$ , on en déduit que pour tout  $y \in E$

$$\|T_\alpha y\|_F \leq \frac{2n_0}{r} \|y\|_E,$$

ce qui conclut la preuve. □

**Corollaire 1.2.1.** — Soient  $E$  un espace de Banach et  $F$  un espace vectoriel normé. On considère une famille  $(T_\alpha)$  d'applications linéaires continues de  $E$  dans  $F$  convergeant simplement vers  $T$ .

Alors  $T$  est linéaire continu de  $E$  dans  $F$ . De plus, si  $x_n \rightarrow x$  dans  $E$ , alors  $T_n(x_n) \rightarrow T(x)$  dans  $F$ .

Le théorème de Banach-Steinhaus peut en fait s'étendre à des espaces plus généraux, que nous utiliserons dans la suite pour munir l'espace des distributions d'une topologie.

**Définition 1.2.2.** — Soit  $E$  un espace vectoriel. On appelle *semi-norme* sur  $E$  toute application  $p : E \rightarrow \mathbf{R}^+$  sous-additive et positivement homogène, i.e. telle que

$$\begin{aligned} \forall x, y \in E, \quad p(x + y) &\leq p(x) + p(y), \\ \forall \lambda \in \mathbf{R}, \forall x \in E, \quad p(\lambda x) &= |\lambda|p(x). \end{aligned}$$

On dit qu'une famille  $\mathcal{P}$  de semi-normes sépare les points si

$$p(x) = 0 \text{ pour tout } p \in \mathcal{P} \Rightarrow x = 0.$$

Les ouverts de la topologie associée à  $\mathcal{P}$  sont les parties  $U$  de  $E$  telles que, pour tout  $x \in U$ , il existe un ensemble fini  $J$  et  $r > 0$

$$B_J(x, r) \equiv \{y \in E / \forall j \in J, p_j(x - y) < r\} \subset U.$$

**Définition 1.2.3.** — Un espace vectoriel  $E$  est un *pré-Fréchet* si et seulement si il existe une famille dénombrable de semi-normes  $(p_j)_{j \in \mathbf{N}^*}$  telles que, pour tout  $x \in E$

$$\begin{cases} \text{si } p_j(x) = 0 \text{ pour tout } j, \text{ alors } x = 0, \\ \text{pour tout } j, \quad p_j(x) \leq p_{j+1}(x). \end{cases}$$

La topologie d'un pré-Fréchet est métrisable avec la distance (invariante par translation)

$$d(x, y) = \sum_{j=1}^{+\infty} 2^{-j} \min(1, p_j(x - y)).$$

**Définition 1.2.4.** — Un espace de Fréchet est un *pré-Fréchet complet*.

L'ensemble des fonctions  $C^\infty(K)$  sur un compact  $K$  est un espace de Fréchet, muni des semi-normes

$$p_j(f) = \sup_{|\alpha| \leq j} \sup_{x \in K} |D^\alpha f(x)|.$$

Une “bonne” topologie sur  $C_c^\infty(\Omega)$  (où  $\Omega$  est un ouvert) est beaucoup plus subtile à définir. On y reviendra brièvement dans le chapitre sur les distributions.

La continuité d'une application entre deux pré-Fréchet peut s'exprimer à l'aide des semi-normes

**Lemme 1.2.5.** — Soient  $(E, (p_j)_{j \in \mathbf{N}^*})$  et  $(F, (q_j)_{j \in \mathbf{N}^*})$  deux pré-Fréchet, et  $T$  une application linéaire de  $E$  dans  $F$ . Alors  $T$  est continue si et seulement si

$$(1.2.1) \quad \forall j \in \mathbf{N}^*, \exists C \geq 0, k \in \mathbf{N}^*, \quad q_j(Tx) \leq Cp_k(x).$$

*Démonstration.* — Si  $T$  est continue, pour  $j$  fixé, il existe un voisinage  $U$  de 0 tel que

$$\forall x \in U, \quad q_j(Tx) \leq 1.$$

Il existe alors  $k \in \mathbf{N}^*$  et  $\varepsilon > 0$  tels que

$$B_k^E(0, \varepsilon) \subset U.$$

Par homogénéité, on en déduit la condition (1.2.1) (on peut considérer séparément les cas où  $p_k(x) = 0$  et  $p_k(x) > 0$ ).

Réciproquement, supposons que (1.2.1) soit satisfaite. Soit  $x \in E$ . Pour tout voisinage  $U$  de  $Tx$  dans  $F$ , il existe une boule  $B_j^F(Tx, \varepsilon)$  incluse dans  $U$ . Il découle alors de (1.2.1) que pour tout  $y$  dans  $B_k(x, \varepsilon/C)$

$$Ty \in B_j^F(Tx, \varepsilon) \subset U,$$

ce qui montre que  $T$  est continue. □

On a alors la généralisation suivante du théorème de Banach-Steinhaus.

**Théorème 1.3.** — Soient  $E$  un espace de Fréchet et  $F$  un pré-Fréchet. On considère une suite  $(T_n)$  d'applications linéaires continues de  $E$  dans  $F$  convergeant simplement vers  $T$ .

Alors  $T$  est linéaire continu de  $E$  dans  $F$ . De plus, si  $x_n \rightarrow x$  dans  $E$ , alors  $T_n(x_n) \rightarrow T(x)$  dans  $F$ .

### 1.3. Théorèmes de l'application ouverte et du graphe fermé

**Théorème 1.4.** — Soient  $E$  et  $F$  deux espaces de Banach, et  $T$  un opérateur linéaire continu de  $E$  dans  $F$ .

- Si  $T$  est surjectif, alors  $T$  envoie les ouverts de  $E$  sur les ouverts de  $F$ .
- Si  $T$  est bijectif,  $T^{-1}$  est un opérateur linéaire continu de  $F$  dans  $E$ .

*Démonstration.* — On cherche  $\delta > 0$  tel que  $B_F(0, \delta) \subset T(B_E(0, 1))$ .

On commence par définir

$$F_n = \overline{T(B_E(0, n))} \text{ de sorte que } \bigcup_{n=1}^{+\infty} F_n = F.$$

D'après le théorème de Baire, il existe donc  $n_0$  tel que  $F_{n_0}$  est d'intérieur non vide

$$B(x_0, r_0) \subset F_{n_0}.$$

Par linéarité, on a aussi

$$B(-x_0, r_0) \subset F_{n_0}.$$

Si  $\|y\|_F < r_0$ ,

$$y = \frac{1}{2}(y_0 + y) + \frac{1}{2}(-y_0 + y) \in \overline{T(B_E(0, n_0))}.$$

Autrement dit,

$$B_F(0, \frac{r_0}{n_0}) \subset \overline{T(B_E(0, 1))}.$$

Soit maintenant  $y \in B_F(0, \frac{r_0}{10n_0})$ . D'après ce qui précède, il existe  $x_0 \in B_E(0, \frac{1}{10})$  tel que

$$\|Tx_0 - y\|_F \leq \frac{r_0}{10n_0} \times \frac{1}{2}.$$

Par récurrence, on construit une suite  $x_n$  telle que

$$\|x_n\|_E \leq \frac{1}{10} \frac{1}{2^n}, \quad \|(Tx_0 + \dots + Tx_n) - y\|_F \leq \frac{r_0}{10n_0} \times \frac{1}{2^{n+1}}.$$

La série  $\sum_n x_n$  est donc normalement convergente et, par continuité de  $T$ , sa somme  $x$  vérifie  $Tx = y$ .

On en déduit que

$$B_F\left(0, \frac{r_0}{10n_0}\right) \subset T(B_E(0, n_0)),$$

ce qui montre que l'image de tout ouvert de  $E$  est ouverte.  $\square$

**Théorème 1.5.** — Soient  $E$  et  $F$  deux espaces de Banach, et  $T$  un opérateur continu de  $E$  dans  $F$ .

Alors  $T$  est continu si et seulement si son graphe  $G = \{(x, Tx) / x \in E\}$  est fermé dans  $E \times F$ .

*Démonstration.* — On introduit sur  $E$  la norme du graphe

$$\|x\|_G = \|x\|_E + \|Tx\|_F.$$

• Si  $T$  est continu, son graphe est toujours fermé : si  $(x, y) \in \bar{G}$ , il existe une suite  $(x_n)$  de  $E$  telle que  $(x_n, Tx_n) \rightarrow (x, y)$ , et par continuité  $y = Tx$ .

• Supposons maintenant que  $G \subset E \times F$  soit fermé. En particulier,  $G$  est un espace de Banach. On considère alors l'application

$$\Pi : (x, Tx) \in G \mapsto x \in E,$$

qui est clairement continue et bijective. D'après le théorème de l'application ouverte,  $\Pi$  est un homéomorphisme, ce qui implique que  $T$  est continu.  $\square$

Ces résultats peuvent aussi se généraliser au cas des espaces de Fréchet.

**Théorème 1.6.** — Soient  $E$  et  $F$  deux espaces de Fréchet, et  $T$  un opérateur continu de  $E$  dans  $F$ .

- Si  $T(E)$  n'est pas maigre dans  $F$ , alors  $T$  est une application surjective et ouverte.
- Si  $T$  est bijectif, c'est un homéomorphisme.



## CHAPITRE 2

### THÉORÈME DE HAHN-BANACH

Le théorème de Hahn-Banach donne l'existence de prolongements de formes linéaires satisfaisant à certaines conditions de norme.

- C'est un outil fondamental de l'**analyse fonctionnelle** car il permet d'introduire des topologies faibles (définies par dualité) pour lesquelles on a de bonnes propriétés de compacité, ce qui fera l'objet du prochain chapitre.
- Par son interprétation géométrique en termes d'hyperplans évitant un convexe fixé, il joue également un rôle primordial dans l'étude de la géométrie des convexes, et plus généralement en **analyse convexe** [7].

La preuve repose d'une part sur un argument simple permettant de prolonger une forme linéaire définie sur un sous-espace de codimension 1, et d'autre part sur le lemme de Zorn (équivalent à l'axiome du choix) qui permet d'obtenir une récurrence transfinie.

#### 2.1. Forme analytique

**Théorème 2.1.** — Soient  $E$  un espace vectoriel réel, et  $p : E \rightarrow \mathbf{R}$  une application sous-additive, positivement homogène, i.e. telle que

$$\begin{aligned}\forall x, y \in E, \quad p(x + y) &\leq p(x) + p(y), \\ \forall x \in E, \forall t \geq 0, \quad p(tx) &= tp(x).\end{aligned}$$

Si  $F$  est un sous-espace de  $E$ , et  $f$  est une forme linéaire sur  $F$  telle que

$$\forall x \in F, \quad f(x) \leq p(x),$$

il existe un prolongement linéaire  $\tilde{f}$  de  $f$  à  $E$  tel que

$$\forall x \in E, \quad \tilde{f}(x) \leq p(x),$$

*Démonstration.* — On considère l'ensemble  $\mathcal{P}$  des prolongements de  $f$  constitué des paires  $(G, g)$  où  $G$  est un sous-espace de  $E$  contenant  $F$  et  $g$  une forme linéaire sur  $G$  tels que

$$G|_F = f \text{ et } \forall x \in G, \quad g(x) \leq p(x).$$

On vérifie sans difficulté que

- $\mathcal{P} \neq \emptyset$  car  $(F, f) \in \mathcal{P}$ ;
- $\mathcal{P}$  est ordonné par la relation d'ordre partiel
 
$$(G_1, g_1) \prec (G_2, g_2) \text{ si } G_1 \subset G_2 \text{ et } g_2|_{G_1} = g_1 ;$$
- $\mathcal{P}$  est inductif (toute partie totalement ordonnée admet un majorant).

D'après le lemme de Zorn, il existe alors un élément maximal  $(\tilde{G}, \tilde{g}) \in \mathcal{P}$ .

Si  $\tilde{G} \neq E$ , il existe  $x_0 \in E \setminus \tilde{G}$ . On cherche alors  $\tilde{g}(x_0)$  de sorte à ce que l'application  $\tilde{g}$  définie sur  $\tilde{G} = \tilde{G} + \mathbf{R}x_0$  par

$$\tilde{g}(x + tx_0) = \tilde{g}(x) + t\tilde{g}(x_0),$$

satisfasse la majoration attendue : pour tout  $x \in \tilde{G}$  et tout  $t \in \mathbf{R}$

$$\tilde{g}(x) + t\tilde{g}(x_0) \leq p(x + tx_0).$$

Cela implique en particulier que

$$\sup_{x \in \tilde{G}} (\tilde{g}(x) - p(x - x_0)) \leq \tilde{g}(x_0) \leq \inf_{x \in \tilde{G}} (p(x + x_0) - \tilde{g}(x)).$$

Comme  $\tilde{g}(x) + \tilde{g}(x') \leq p(x + x') \leq p(x + x_0) + p(x' - x_0)$ , cette condition est satisfaite, et on vérifie qu'elle suffit à obtenir la majoration requise pour  $\tilde{g}$ . En particulier  $(\tilde{G}, \tilde{g}) \in \mathcal{P}$ , ce qui contredit la maximalité de  $(\tilde{G}, \tilde{g})$ .  $\square$

Sous des hypothèses supplémentaires sur l'espace  $E$ , on peut démontrer un résultat analogue sans utiliser le lemme de Zorn. C'est le cas par exemple si  $E$  est de dimension finie, si  $E$  est un espace de Hilbert (il suffit alors d'utiliser le théorème de projection sur les fermés), si  $E$  est un espace vectoriel normé séparable...

## 2.2. Forme géométrique

On rappelle qu'un espace vectoriel topologique est un espace vectoriel muni d'une topologie rendant continues l'addition et la multiplication par un scalaire.

**Définition 2.2.1.** — *Un espace vectoriel topologique est dit localement convexe si et seulement si tout voisinage de l'origine contient un voisinage convexe.*

En associant à chaque voisinage convexe de l'origine une semi-norme (jauge de Minkowski), on a alors la caractérisation suivante :

**Propriété 2.2.2.** — *Soit  $E$  un espace vectoriel topologique.  $E$  est localement convexe si et seulement si sa topologie peut être définie par une famille de semi-normes  $(p_\alpha)$  telles que*

$$\left( \forall \alpha, \quad p_\alpha(x) = 0 \right) \Rightarrow x = 0.$$

*Sans perte de généralité, on peut supposer de plus que cette famille est filtrante, c'est-à-dire que*

$$\forall \alpha_1, \dots, \alpha_n, \quad \exists \beta, \quad p_\beta \geq p_{\alpha_1} + \dots + p_{\alpha_n}.$$

*Une partie  $A$  de  $E$  est alors ouverte si et seulement si*

$$\forall x \in A, \quad \exists \alpha, \delta, \quad B_\alpha(x, \delta) \subset A.$$

Les espaces vectoriels normés et les espaces pré-Fréchet sont des espaces vectoriels topologiques localement convexes.

Par contre, l'espace des fonctions continues sur  $[0, 1]$  muni de la distance

$$d(f, g) = \int_0^1 \sqrt{|f - g|}$$

est un espace vectoriel topologique non localement convexe.

**Théorème 2.2.** — Soit  $E$  un espace vectoriel topologique localement convexe (de semi-normes  $(p_\alpha)$ ). Si  $A$  et  $B$  sont deux parties convexes non vides disjointes, alors

– si  $A$  est ouverte, il existe une forme linéaire  $f : F \rightarrow \mathbf{R}$  continue non nulle telle que

$$\sup_A f \leq \inf_B f;$$

– si  $A$  est compacte et  $B$  est fermée, il existe une forme linéaire  $f : F \rightarrow \mathbf{R}$  continue non nulle telle que

$$\sup_A f < \inf_B f.$$

*Démonstration.* — On va commencer par détailler les arguments dans le cas où l'un des ensembles est réduit à un point, puis on montrera comment on peut en déduire les autres cas.

• Cas où  $B = \{x_0\}$  et  $A$  ouvert contenant 0.

On introduit la jauge de Minkowski de  $A$

$$p(x) = \inf\{t > 0, \quad \frac{x}{t} \in A\},$$

et on va montrer qu'elle permet de caractériser l'ensemble  $A$  de façon fonctionnelle

$$A = \{x \in E / p(x) < 1\},$$

et qu'elle satisfait les hypothèses du théorème de Hahn-Banach analytique.

On commence par remarquer que, par définition,  $p$  est positivement homogène :

$$\forall x \in E, \forall \lambda \geq 0, \quad p(\lambda x) = \lambda p(x).$$

La sous-additivité est une conséquence de la convexité de  $A$ . Soient  $x, y \in E$  et  $\varepsilon > 0$  fixé. Par définition,

$$\tilde{x} = \frac{x}{p(x) + \varepsilon} \text{ et } \tilde{y} = \frac{y}{p(y) + \varepsilon} \text{ appartiennent à } A.$$

On a alors

$$\frac{x + y}{p(x) + p(y) + 2\varepsilon} = \frac{p(x) + \varepsilon}{p(x) + p(y) + 2\varepsilon} \tilde{x} + \frac{p(y) + \varepsilon}{p(x) + p(y) + 2\varepsilon} \tilde{y} \in A$$

de sorte que  $p(x + y) \leq p(x) + p(y) + 2\varepsilon$ .

Comme  $A$  est ouvert et contient l'origine, il existe  $\alpha$  et  $r > 0$  tels que  $B_\alpha(0, r) \subset A$ . On a alors les propriétés suivantes :

– Si  $p_\alpha(x) > 0$ , on a

$$\tilde{x} = \frac{rx}{p_\alpha(x)} \in A \text{ donc } p(x) \leq \frac{p_\alpha(x)}{r}.$$

– Si  $p_\alpha(x) = 0$ , pour tout  $t > 0$ ,  $p_\alpha(\frac{x}{t}) = 0$ , donc  $\frac{x}{t} \in A$  et  $p(x) = 0$ .

On en déduit que

$$\forall x \in E, \quad p(x) \leq Cp_\alpha(x).$$

Comme  $A$  est convexe et contient l'origine, on vérifie facilement que

$$\{x \in E / p(x) < 1\} \subset A, \text{ et } \{x \in E / p(x) > 1\} \cap A = \emptyset.$$

Puisque  $p$  est continue et  $A$  est ouvert, on a alors

$$A = \{x \in E / p(x) < 1\}.$$

On considère alors la forme linéaire définie sur  $\mathbf{R}x_0$  par  $f(tx_0) = t$ . En particulier,

$$f(tx_0) \leq p(tx_0) = tp(x_0).$$

En utilisant la forme analytique du théorème de Hahn-Banach, on prolonge  $f$  à  $E$  avec

$$\forall x \in E, \quad f(x) \leq p(x).$$

Comme  $p \leq Cp_\alpha$ ,  $f$  est continue. De plus,

$$\forall x \in A, \quad f(x) \leq p(x) < 1$$

de sorte que  $\sup_A f \leq f(x_0)$ .

• Cas où  $A$  est ouvert.

On se donne  $a_0 \in A$  et  $b_0 \in B$ , et on pose

$$C = A - B - a_0 + b_0 = \{x - y - a_0 + b_0 / x \in A, y \in B\} = \bigcup_{y \in B} (A - a_0 + b_0 - y).$$

On vérifie alors que  $C$  est ouvert, convexe et contient l'origine. De plus, comme  $A \cap B = \emptyset$ ,  $b_0 - a_0 \notin C$ .

En appliquant le résultat précédent, on obtient alors l'existence d'une forme linéaire  $f$  continue non nulle telle que

$$\forall x \in A, \forall y \in B, \quad f(x - y - a_0 + b_0) \leq f(b_0 - a_0),$$

ce qui montre que  $\sup_A f \leq \inf_B f$ .

• Cas où  $A$  est compact et  $B$  est fermé.

La preuve est ici un peu plus complexe et repose sur les deux propriétés suivantes qui sont vérifiées dans les espaces vectoriels topologiques localement convexes :

- (i) Soient  $A$  un compact, et  $B$  fermé non vide disjoint de  $A$ . Il existe un voisinage convexe  $V$  de  $0$  tel que  $(A + V) \cap B = \emptyset$ .
- (ii) Si  $f$  est une forme linéaire continue non nulle,  $f$  est ouverte.

D'après la propriété (i), il existe un voisinage convexe  $V$  de  $0$  tel que  $(A + V) \cap B = \emptyset$ . L'ensemble  $A + V$  est ouvert (comme réunion d'ouverts) et convexe (comme somme de deux convexes). D'après ce qui précède, il existe donc une forme linéaire  $f$  continue non nulle telle que  $\sup_A f \leq \inf_B f$ .

La propriété (ii) implique alors que  $f$  est ouverte, donc  $f(A + V)$  est un intervalle ouvert  $] \lambda_1, \lambda_2[$ . Comme  $A$  est compact, son image  $f(A)$  est compacte. On a alors  $\sup f(A) = \max f(A) < \lambda_2 \leq \inf_B f$ .

Il reste à montrer les deux propriétés utilisées dans la preuve.

- Soient  $A$  un compact, et  $B$  fermé non vide disjoint de  $A$ . Pour tout  $x \in A$ , il existe  $\alpha_x$  et  $\delta_x > 0$  tels que  $B_{\alpha_x}(x, \delta_x) \cap B = \emptyset$ . Par définition

$$A \subset \bigcup_{x \in A} B_{\alpha_x}(x, \frac{\delta_x}{2}).$$

Comme  $A$  est compact, on peut extraire un sous-recouvrement fini

$$A \subset \bigcup_{i=1}^N B_{\alpha_i}(x_i, \frac{\delta_i}{2}).$$

On définit alors l'ouvert convexe contenant 0

$$V = \bigcap_{i=1}^N B_{\alpha_i}(0, \frac{\delta_i}{2}).$$

L'inégalité triangulaire montre que

$$A + V \subset \bigcup_{i=1}^N B_{\alpha_i}(x_i, \delta_i)$$

de sorte que  $(A + V) \cap B = \emptyset$ , ce qui prouve la propriété (i).

- Soient  $f$  une forme linéaire continue non nulle, et  $U$  un ouvert (convexe) contenant 0. Il existe  $x_1$  tel que  $f(x_1) = 1$ . Pour  $t > 0$  suffisamment petit,  $[-tx_1, tx_1] \subset U$ . On a alors

$$[-t, t] \subset f([-tx_1, tx_1]) \subset f(U),$$

i.e.  $f(U)$  contient un voisinage ouvert de 0. Par linéarité, on en déduit que  $f$  est ouverte.  $\square$

### 2.3. Un exemple d'application : le théorème de Krein Milman

**Définition 2.3.1.** — Soit  $K$  une partie d'un espace vectoriel  $E$ . On dit que  $x_0$  est un point extrémal de  $K$  si

$$(x_0 = \theta z + (1 - \theta)y \text{ avec } \theta \in ]0, 1[ \text{ et } z, y \in K) \Rightarrow x_0 = y = z.$$

**Théorème 2.3.** — Soient  $E$  un espace vectoriel topologique localement convexe séparé et  $K$  une partie compacte de  $E$ . Alors  $K$  est inclus dans l'enveloppe convexe fermée de ses points extrémaux et coïncide avec elle si  $K$  est convexe.

*Démonstration.* — La démonstration de ce résultat se fait en deux étapes basées sur la version géométrique du théorème de Hahn-Banach : on commence par montrer que l'ensemble des points extrémaux  $\mathcal{E}$  est non vide, puis on prouve que tout point de  $K$  est nécessairement dans l'adhérence de l'enveloppe convexe de  $\mathcal{E}$ .

• On considère l'ensemble  $\mathcal{P}$  des parties extrémales de l'enveloppe convexe fermée  $\overline{co(K)}$  de  $K$ , i.e. des parties  $A$  compactes vérifiant

$$\text{s'il existe } x, y \in \overline{co(K)}, \theta \in ]0, 1[ \text{ tels que } \theta x + (1 - \theta)y \in A, \quad \text{alors } x, y \in A,$$

que l'on munit de la relation d'ordre  $A \prec B$  si  $B \subset A$ .

Si  $\tilde{\mathcal{P}} \subset \mathcal{P}$  est totalement ordonné,  $B = \bigcap_{A \in \tilde{\mathcal{P}}} A$  est une partie extrémale non vide (intersection de fermés emboîtés dans un compact) majorant  $\tilde{\mathcal{P}}$ . Donc  $\mathcal{P}$  est inductif. D'après le lemme de Zorn,  $\mathcal{P}$  a alors un élément maximal  $M$ .

Si  $M$  contient deux points distincts  $x_0$  et  $x_1$ , d'après le théorème de Hahn-Banach, il existe une forme linéaire continue sur  $E$  telle que  $f(x_0) < f(x_1)$ . On définit alors  $\tilde{M} = \{x \in M / f(x) = \inf_M f\}$ . Comme  $M$  est compact et  $f$  est continue,  $\tilde{M} \neq \emptyset$ . De plus,  $\tilde{M}$  est compact (fermé dans un compact) et extrémal

s'il existe  $x, y \in \overline{co(K)}$ ,  $\theta \in ]0, 1[$  tels que  $\theta x + (1 - \theta)y \in \tilde{M}$

$$\text{alors } \begin{cases} x, y \in M \text{ car } M \text{ est extrémal,} \\ \theta f(x) + (1 - \theta)f(y) = \inf_M f \end{cases} \quad \text{donc } x, y \in \tilde{M}.$$

Ceci est absurde puisque  $M$  est extrémal et que  $\tilde{M}$  est strictement inclus dans  $M$ .  $M$  est donc réduit à un point.

• Soit  $\mathcal{E}$  l'ensemble des points extrémaux de  $\overline{co(K)}$  (qui par définition appartiennent à  $K$ ), et  $x_0$  un point de  $\overline{co(K)}$  qui n'appartient pas à l'adhérence de l'enveloppe convexe de  $\mathcal{E}$ .

D'après le théorème de Hahn-Banach, il existe une forme linéaire continue  $f$  sur  $E$  telle que

$$f(x_0) > \sup\{f(x) / x \in \overline{co(\mathcal{E})}\}.$$

Soit  $A$  l'ensemble des points de  $\overline{co(K)}$  où  $f$  atteint son maximum. L'argument précédent montre que  $A$  est extrémal. L'ensemble des parties extrémales de  $\overline{co(K)}$  incluses dans  $A$  admet un élément maximal réduit à un point  $x_1 \in \mathcal{E}$  :

$$f(x_1) \geq f(x_0) > \sup\{f(x) / x \in \overline{co(\mathcal{E})}\} \geq \sup_{\mathcal{E}} f,$$

ce qui aboutit à une contradiction. □

**Remarque 2.3.2.** — Dans le cas des espaces de Fréchet, l'enveloppe convexe fermée d'un compact est précompacte donc compacte, et pour tout  $x$  dans l'enveloppe convexe, il existe une mesure de probabilité  $\mu_x$  sur l'ensemble  $\mathcal{E}$  des points extrémaux telle que  $x = \int_{\mathcal{E}} y d\mu_x(y)$  (théorème de Choquet).

## CHAPITRE 3

### DUALITÉ ET TOPOLOGIES FAIBLES

La notion de dualité est au coeur des méthodes d'analyse moderne, et jouera un rôle fondamental dans ce cours, puisqu'elle est à l'origine de la notion même de distributions.

La présentation qui en est faite dans ce chapitre est assez abstraite, mais on verra par la suite beaucoup d'applications : dérivation de fonctions non continues, définition des solutions faibles d'équations aux dérivées partielles, démonstration des propriétés de la transformée de Fourier,...

C'est probablement l'un des objectifs les plus importants de ce cours d'utiliser ce nouveau point de vue pour étudier les espaces de fonctions.

#### 3.1. Dual topologique

Si  $E$  et  $F$  sont deux espaces vectoriels, et  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  une forme bilinéaire de  $F \times E$  dans  $\mathbf{R}$  telle que

$$(3.1.1) \quad \begin{aligned} (\forall f \in F, \langle f, x \rangle = 0) &\Rightarrow x = 0, \\ (\forall x \in E, \langle f, x \rangle = 0) &\Rightarrow f = 0. \end{aligned}$$

on peut définir une topologie d'espace vectoriel localement convexe sur  $E$  (respectivement sur  $F$ ) en considérant toutes les semi-normes

$$p_B(x) = \sup_{f \in B} |\langle f, x \rangle| \text{ où } B \text{ est une partie finie de } F$$

(respectivement

$$q_A(f) = \sup_{x \in A} |\langle f, x \rangle| \text{ où } A \text{ est une partie finie de } E.)$$

Si  $E$  est un espace vectoriel topologique localement convexe séparé, défini par ses ouverts  $\tau(E)$ , on peut considérer la forme bilinéaire

$$(x, f) \in E \times E^* \mapsto \langle f, x \rangle = f(x) \in \mathbf{R}.$$

D'après le théorème de Hahn-Banach, le crochet de dualité vérifie l'hypothèse (3.1.1). On peut ainsi définir une nouvelle topologie sur  $E$ , notée  $\sigma(E, E^*)$ , et une topologie sur  $E^*$ , notée  $\sigma(E^*, E)$ .

**Théorème 3.1.** — Soit  $E$  est un espace vectoriel topologique localement convexe séparé (défini par ses semi-normes  $(p_\alpha)$ ).

Alors la topologie  $\sigma(E, E^*)$  est plus pauvre que  $\tau(E)$  : elle a moins d'ouverts, plus de compacts, il existe moins de fonctions continues sur  $E$  à valeurs réelles,...

*Démonstration.* — Soit  $A$  un ouvert pour  $\sigma(E, E^*)$ . Pour tout  $x_0 \in A$ , il existe une partie finie  $B$  de  $E^*$  et  $r > 0$  tels que

$$p_B(x - x_0) < r \Rightarrow x \in A.$$

Comme  $B$  est finie, ses éléments sont uniformément continus : il existe  $C > 0$  et  $\alpha$  tels que

$$\forall x \in E, \forall f \in B, \quad | \langle f, x - x_0 \rangle | \leq C h_\alpha(x - x_0).$$

On en déduit que  $B_\alpha(x_0, r/C) \subset A$ , et donc que  $A$  est ouvert pour la topologie initiale.  $\square$

Dans le cas d'un espace de Banach  $(E, \|\cdot\|)$ ,  $E$  et  $E^*$  sont mutuellement en dualité. En effet,  $E^*$  est un espace de Banach pour la norme duale

$$\|f\|_{E^*} = \sup_{x \neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|_E}.$$

**Définition 3.1.1.** — Soit  $(E, \|\cdot\|)$  un espace de Banach.

- La topologie associée à la norme  $\|\cdot\|$  est dite topologie forte sur  $E$ .
- La topologie  $\sigma(E, E^*)$  est dite topologie faible sur  $E$ .
- La topologie  $\sigma(E^*, E)$  est dite topologie faible sur  $E^*$ .

Si  $E$  est lui-même le dual d'un espace de Banach, on a alors trois topologies sur  $E$ .

**Propriété 3.1.2.** — Soit  $(E, \|\cdot\|)$  un espace de Banach.

- Si  $(x_n)$  converge fortement vers  $x$ ,  $x_n$  converge faiblement vers  $x$ .
- Si  $(x_n)$  converge faiblement vers  $x$ ,  $x_n$  est bornée et

$$\|x\| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|.$$

*Démonstration.* — La première propriété est une simple conséquence de la continuité de  $f \in E^*$  (voir aussi le théorème précédent comparant les topologies forte et faible).

La seconde propriété est un corollaire du théorème de Banach-Steinhaus. L'inégalité est obtenue en utilisant la caractérisation suivante de la norme

$$\|x\|_E = \max_{\|f\|_{E^*} \leq 1} |f(x)|$$

qui résulte du théorème de Hahn-Banach.  $\square$

De façon analogue, on a

**Propriété 3.1.3.** — Soit  $(E, \|\cdot\|)$  un espace de Banach, et  $E^*$  son dual.

- Si  $(f_n)$  converge fortement vers  $f$  dans  $E^*$ ,  $f_n$  converge faiblement\* vers  $f$ .

– Si  $(f_n)$  converge faiblement\* vers  $f$  dans  $E^*$ ,  $f_n$  est bornée et

$$\|f\| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|.$$

### 3.2. Topologie faible

Lorsque  $E$  est de dimension infinie, la topologie faible est distincte de la topologie forte : il existe toujours des fermés pour la topologie forte qui ne sont pas fermés pour la topologie faible (par exemple la sphère unité).

Pour les sous-ensembles convexes toutefois on a le résultat suivant :

**Théorème 3.2.** — Soit  $E$  est un espace vectoriel topologique localement convexe séparé.

Si  $C \subset E$  est un convexe fermé pour  $\tau(E)$ , alors  $C$  est aussi fermé pour  $\sigma(E, E^*)$ .

*Démonstration.* — Soit  $x_0 \notin C$ . D'après le théorème de Hahn-Banach, on peut séparer  $\{x_0\}$  et  $C$

$$\exists f \in E^*, \quad \exists \alpha \in \mathbf{R}, \quad f(x_0) < \alpha \leq \inf_C f.$$

En particulier,

$$\{x \in E / |f(x) - f(x_0)| < \alpha - f(x_0)\} \cap C = \emptyset,$$

ce qui signifie que  $C$  est fermé (complémentaire d'un ouvert) pour la topologie  $\sigma(E, E^*)$ .  $\square$

**Corollaire 3.2.1 (Lemme de Mazur).** — Soit  $E$  un espace de Banach. Si  $(x_n)$  converge faiblement vers  $x$  dans  $E$ , alors il existe une suite  $(y_n)$  avec chaque  $y_n$  combinaison convexe des  $(x_k)_{k \geq n}$ , qui converge fortement vers  $x$ .

*Démonstration.* — On considère l'enveloppe convexe  $C_n$  des  $(x_k)_{k \geq n}$ , de sorte que  $x$  appartient à la fermeture faible de  $C_n$ .

D'après le théorème 3.2, la fermeture forte de  $C_n$  est égale à la fermeture faible.  $\square$

**Proposition 3.2.2 ( sur l'équivalence continuité forte/faible).** — Soient  $E, F$  deux espaces de Banach,  $E^*, F^*$  leurs duaux respectifs, et  $T : E \rightarrow F$  une application linéaire.

Alors  $T$  est continue de  $(E, \|\cdot\|_E)$  dans  $(F, \|\cdot\|_F)$  si et seulement si  $T$  est continue de  $(E, \sigma(E, E^*))$  dans  $(F, \sigma(F, F^*))$ .

*Démonstration.* — • Supposons d'abord  $T$  continue de  $(E, \|\cdot\|_E)$  dans  $(F, \|\cdot\|_F)$ . Pour tout  $f \in F^*$ ,  $f \circ T \in E^*$  et donc est continue pour  $\sigma(E, E^*)$ . On en déduit alors que  $T$  est continue de  $(E, \sigma(E, E^*))$  dans  $(F, \sigma(F, F^*))$ .

En effet,  $\sigma(F, F^*)$  est la topologie la moins fine contenant la famille

$$\Lambda = \{f^{-1}(\omega) / f \in E^* \text{ et } \omega \text{ ouvert de } \mathbf{R}\}.$$

Soit  $U$  un ouvert de  $\sigma(F, F^*)$ , on a

$$U = \bigcup_{j \in J} \bigcap_{i \in I_j} f_i^{-1}(\omega_i)$$

où chaque  $I_j$  est fini,  $f_i \in F^*$  et  $\omega_i$  est un ouvert de  $\mathbf{R}$ . On a alors

$$T^{-1}(U) = \bigcup_{j \in J} \bigcap_{i \in I_j} (f_i \circ T)^{-1}(\omega_i)$$

qui est bien ouvert puisque chaque  $f_i \circ T$  est continue.

• Supposons maintenant que  $T$  est continue de  $(E, \sigma(E, E^*))$  dans  $(F, \sigma(F, F^*))$ . Alors le graphe de  $T$  est fermé pour  $\sigma(E \times F, E^* \times F^*)$  et donc aussi fortement fermé dans  $E \times F$ . Comme  $E$  et  $F$  sont des espaces de Banach, on déduit du théorème du graphe fermé, que  $T$  est continue de  $(E, \|\cdot\|_E)$  dans  $(F, \|\cdot\|_F)$ .  $\square$

### 3.3. Topologie faible\*

**Théorème 3.3 (de Banach-Alaoglu).** — Soient  $E$  un espace de Banach et  $E^*$  son dual.

Alors la boule unité  $B = \{f \in E^* / \|f\|_{E^*} \leq 1\}$  est compacte pour la topologie faible\*.

De plus, si  $E$  est séparable,  $B$  est séquentiellement compacte pour la topologie faible\*.

*Démonstration.* — En utilisant la correspondance entre  $f$  et  $(f(x))_{x \in E}$ , on peut voir  $B$  comme une partie de

$$K = \prod_{x \in E} [-\|x\|, \|x\|].$$

D'après le théorème de Tychonov (qui repose sur le lemme de Zorn), un produit quelconque d'espaces topologiques compacts est compact pour la topologie produit, donc  $K$  est compact. Comme  $B$  est le sous-ensemble de  $K$  constitué des fonctions linéaires

$$B = \{f \in K / \forall x, y \in E, \forall \lambda \in \mathbf{R}, \quad f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y)\},$$

$B$  est fermé dans  $K$ , donc compact.

Dans le cas où  $E$  est séparable, il existe une suite  $(x_j)$  dense dans  $E$ . Si on se donne une suite  $(f_n)$  de  $B$ , par extraction diagonale, on peut construire une suite  $n_k$  telle que, pour tout  $j$ ,

$$f_{n_k}(x_j) \rightarrow g(x_j) \text{ quand } k \rightarrow \infty \text{ avec } |g(x_j)| \leq \|x_j\|.$$

Par densité et linéarité, on peut alors prolonger  $g$  en une fonction linéaire sur  $E$  telle que,

$$\forall x \in E, \quad |g(x)| \leq \|x\|.$$

Par inégalité triangulaire, on peut alors montrer que  $f_{n_k}$  converge simplement vers  $g$  (convergence faible\*).

Cette preuve utilise uniquement le fait que, si  $U$  est un voisinage de 0,

$$K = \{f \in E^* / \forall x \in U, \quad |f(x)| \leq 1\} \text{ est compact.}$$

En particulier, le théorème de Banach-Alaoglu est encore vrai dans les espaces vectoriels topologiques localement convexes séparés.  $\square$

**Remarque 3.3.1.** — Si  $E$  est séparable, la topologie faible-\* sur la boule est métrisable : si  $(x_n)$  est une suite dense dans  $B_E(0, 1)$ , on peut définir par exemple

$$\forall f, g \in B_{E^*}(0, 1), \quad d(f, g) = \sum_0^{+\infty} -n |(f - g)(x_n)|.$$

Si  $K$  est un espace métrique compact,  $E = C(K)$  muni de la norme uniforme est un espace de Banach séparable. Son dual  $E^*$  est l'espace des mesures signées sur  $K$  (théorème de représentation de Riesz).

D'après le théorème de Banach-Alaoglu, si  $(\mu_n)$  est une suite de mesures de probabilités, il existe alors une probabilité  $\mu$  sur  $K$  telle que, à extraction d'une sous-suite près,  $\mu_n \rightharpoonup \mu$  faiblement\*.

### 3.4. Notion d'espace réflexif

Soit  $E$  un espace de Banach. On voit facilement que  $E$  s'identifie à un sous-espace vectoriel de  $E^{**}$  grâce à l'injection

$$j : x \in E \mapsto j(x) \in E^{**} \text{ où } \langle j(x), f \rangle = \langle f, x \rangle \text{ pour tout } f \in E^*,$$

qui est une isométrie d'espace vectoriel normé.

**Définition 3.4.1.** — Soit  $E$  un espace de Banach. On dit que  $E$  est réflexif s'il est le dual de son dual, i.e. si l'application  $j$  définie précédemment est surjective.

Pour un espace réflexif, on a donc  $\sigma(E, E^*) = \sigma(E^{**}, E^*)$  et la boule unité est faiblement compacte. Il s'agit en fait d'une caractérisation des espaces réflexifs :

**Théorème 3.4 (de Kakutani).** — Soit  $E$  un espace de Banach. Alors  $E$  est réflexif si et seulement si sa boule unité est compacte pour  $\sigma(E, E^*)$ .

La preuve de ce résultat est un peu technique car elle nécessite de jongler avec les différentes topologies. Elle repose sur les deux lemmes suivants.

**Lemme 3.4.2 (de Helly).** — Soit  $E$  un espace de Banach. On se donne  $f_1, \dots, f_n$  dans  $E'$  et  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  des réels. Alors les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $x_\varepsilon \in B_E$  tel que

$$\forall i = 1, \dots, n, \quad |f_i(x_\varepsilon) - \alpha_i| < \varepsilon;$$

(ii) pour tout  $\beta_1, \dots, \beta_n$  réels, on a

$$\left| \sum_{i=1}^n \beta_i \alpha_i \right| \leq \left\| \sum_{i=1}^n \beta_i f_i \right\|.$$

**Lemme 3.4.3 (de Goldstine).** — Soit  $E$  un espace de Banach. On définit

$$j : x \in E \mapsto j(x) \in E^{**} \text{ où } \langle j(x), f \rangle = \langle f, x \rangle \text{ pour tout } f \in E^*,$$

Alors  $j(B_E)$  est dense dans  $B_{E^{**}}$  pour la topologie faible\*  $\sigma(E^{**}, E^*)$ .

*Démonstration du théorème de Kakutani.* — Supposons d'abord que  $E$  est réflexif, de sorte que l'isométrie

$$j : x \in E \mapsto j(x) \in E^{**} \text{ où } \langle j(x), f \rangle = \langle f, x \rangle \text{ pour tout } f \in E^*,$$

est surjective :  $j(B_E) = B_{E^{**}}$ . D'après le théorème de Banach-Alaoglu,  $B_{E^{**}}$  est compact pour la topologie  $\sigma(E^{**}, E^*)$ .

Comme  $j^{-1}$  est une isométrie, pour tout  $f \in E^*$ ,  $f \circ j^{-1}$  est continue pour  $\sigma(E^{**}, E^*)$ . Cela implique que  $j^{-1}$  est continue de  $(E^{**}, \sigma(E^{**}, E^*))$  vers  $(E, \sigma(E, E^*))$ . La boule  $B_E$  est donc faiblement compacte dans  $E$ .

Réciproquement, si  $B_E$  est faiblement compacte, comme  $j$  est une isométrie de  $E$  sur  $E^{**}$ , elle est continue de  $(E, \sigma(E, E^*))$  dans  $(E^{**}, \sigma(E^{**}, E^{***}))$  d'après le Corollaire 3.2.2. Comme  $\sigma(E^{**}, E^*)$  est moins fine que  $\sigma(E^{**}, E^{***})$ ,  $j$  est aussi continue de  $(E, \sigma(E, E^*))$  dans  $(E^{**}, \sigma(E^{**}, E^*))$ . Cela implique que  $j(B_E)$  est compact pour  $\sigma(E^{**}, E^*)$ .

Le lemme de Goldstine montre alors que  $B_{E^{**}} = B_E$ , et donc  $E^{**} = E$ .  $\square$

Reste alors à établir les deux lemmes.

*Démonstration du lemme d'Helly.* — Supposons d'abord que pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $x_\varepsilon \in B_E$  tel que

$$\forall i = 1, \dots, n, \quad |f_i(x_\varepsilon) - \alpha_i| < \varepsilon.$$

Soient  $\beta_1, \dots, \beta_n$  des réels quelconques. On a

$$\left| \sum_{i=1}^n \beta_i \alpha_i \right| \leq \left\| \sum_{i=1}^n \beta_i f_i(x_\varepsilon) \right\| + \varepsilon \sum_{i=1}^n |\beta_i| \leq \left\| \sum_{i=1}^n \beta_i f_i \right\| + \varepsilon \sum_{i=1}^n |\beta_i|$$

d'où l'on déduit (ii) en faisant tendre  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

On établit ensuite la réciproque par contraposition. On définit  $F = (f_1, \dots, f_n)$ . Par définition,  $\overline{F(B_E)}$  est un convexe fermé de  $\mathbf{R}^n$ . D'après le théorème de Hahn-Banach, si  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \notin \overline{F(B_E)}$ , il existe une forme linéaire sur  $\mathbf{R}^n$  qui sépare strictement  $\alpha$  et  $F(B_E)$ , autrement dit il existe  $\beta_1, \dots, \beta_n$  et  $\gamma$  tels que :

$$\forall x \in B_E, \quad \sum_{i=1}^n \beta_i f_i(x) < \gamma < \sum_{i=1}^n \beta_i \alpha_i,$$

ce qui implique en particulier que

$$\left\| \sum_{i=1}^n \beta_i f_i \right\| < \left| \sum_{i=1}^n \beta_i \alpha_i \right|.$$

$\square$

*Démonstration du lemme de Goldstine.* — Soit  $\eta \in B_{E^{**}}$  et  $V$  un voisinage de  $\eta$  pour la topologie  $\sigma(E^{**}, E^*)$ . Il s'agit de montrer que  $V \cap j(B_E) \neq \emptyset$ .

Sans perte de généralité, on peut supposer qu'il existe  $\varepsilon > 0$ ,  $f_1, \dots, f_n$  dans  $E^*$  tels que

$$V = \{ \xi \in E^{**} / |(\xi - \eta)(f_i)| < \varepsilon \text{ pour tout } i = 1, \dots, n \}.$$

Si on pose  $\alpha_i = \eta(f_i)$ , on a

$$\forall \beta_1, \dots, \beta_n \in \mathbf{R}^n, \quad \left| \sum_{i=1}^n \beta_i \alpha_i \right| = \left| \eta \left( \sum_{i=1}^n \beta_i f_i \right) \right| \leq \left\| \sum_{i=1}^n \beta_i f_i \right\|.$$

D'après le lemme d'Helly, il existe alors  $x_\varepsilon \in B_E$  tel que

$$\forall i = 1, \dots, n, \quad |f_i(x_\varepsilon) - \alpha_i| < \varepsilon,$$

ce qui signifie exactement que  $j(x_\varepsilon) \in V$ , et donc que  $V \cap j(B_E) \neq \emptyset$ .  $\square$

Une condition suffisante pour qu'un espace de Banach soit réflexif est qu'il soit uniformément convexe.

**Définition 3.4.4.** — *Un espace vectoriel normé  $E$  est dit uniformément convexe si on a la propriété*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \left( \|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1 \text{ et } \frac{1}{2}\|x+y\| \geq 1 - \delta \right) \Rightarrow \|x - y\| \leq \varepsilon.$$

**Théorème 3.5 (de Milman-Pettis).** — *Tout espace de Banach uniformément convexe est réflexif.*

*Démonstration.* — On doit montrer que  $j(E) = E^{**}$ , ou de façon équivalente que  $j(B_E) = B_{E^{**}}$ . Comme  $j(B_E)$  est fermée, il suffit par homogénéité de montrer que  $j(B_E)$  est dense (pour la topologie forte) dans la sphère

$$S = \{\eta \in E^{**} / \|\eta\|_{E^{**}} = 1\}.$$

On se donne alors  $\eta \in S$  et  $\varepsilon > 0$ , et on va montrer qu'il existe  $x \in B_E$  tel que  $\|j(x) - \eta\| \leq \varepsilon$ .

Comme  $E$  est uniformément convexe, il existe  $\delta > 0$  tel que

$$\forall x, y \in B_E, \quad \|x - y\| > \varepsilon \Rightarrow \|x + y\| \leq 2(1 - \delta).$$

On choisit alors  $f \in E^*$  telle que

$$\|f\|_{E^*} = 1 \text{ et } \eta(f) \geq 1 - \frac{\delta}{2}.$$

D'après le lemme de Goldstine,  $j(B_E)$  est dense dans  $B_{E^{**}}$  pour la topologie faible\*  $\sigma(E^{**}, E^*)$  : il existe donc  $x \in B_E$  tel que

$$|\eta(f) - f(x)| < \frac{\delta}{2}.$$

- si  $\|j(x) - \eta\|_{E^{**}} \leq \varepsilon$ , on a la propriété voulue.
- si  $\|j(x) - \eta\|_{E^{**}} > \varepsilon$ , comme  $E^{**} \setminus B_{E^{**}}(j(x), \varepsilon)$  est ouvert pour la topologie  $\sigma(E^{**}, E^*)$ , il résulte du lemme de Goldstine qu'il existe  $y \in B_E$  tel que

$$\|j(y) - j(x)\| = \|x - y\| > \varepsilon \text{ et } |\eta(f) - f(y)| < \frac{\delta}{2}.$$

On a alors

$$\frac{1}{2}\|x + y\| \geq (1 - \delta)$$

puisque

$$1 - \frac{\delta}{2} \leq \eta(f) < \frac{1}{2}f(x+y) + \frac{\delta}{2} \leq \frac{1}{2}\|x+y\| + \frac{\delta}{2}$$

ce qui aboutit à une contradiction.  $\square$

Pour tout ouvert  $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ , on définit  $L^p(\Omega)$  comme l'espace des fonctions de puissance  $p$ -ième intégrable, quotienté par la relation d'équivalence d'égalité presque partout, et muni de la norme

$$\|f\|_p = \left( \int_{\Omega} |f|^p(x) dx \right)^{1/p}.$$

Ces espaces ont été introduits de façon détaillée dans le cours Zhan Shi (voir aussi les notes de cours de Jean-François Legall). On en rappelle sans démonstration quelques propriétés fondamentales :

**Propriété 3.4.5.** — Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbf{R}^N$ . Si  $p \in [1, \infty[$ ,

- l'espace  $L^p(\Omega)$  est complet;
- l'espace  $L^p(\Omega)$  est séparable;
- $C_c^\infty(\Omega)$  (et a fortiori  $C_c(\Omega)$ ) est dense dans  $L^p(\Omega)$ .

Un autre résultat important est que ces espaces sont réflexifs si  $p \in ]1, +\infty[$ , et que les bornés sont donc faiblement compacts.

**Propriété 3.4.6.** — Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbf{R}^N$ . Si  $p \in ]1, \infty[$ ,  $L^p(\Omega)$  est uniformément convexe, donc réflexif.

*Démonstration.* — On pose

$$h(x) = (1 + x^{1/p})^p + |1 - x^{1/p}|^p.$$

On a alors

$$\begin{aligned} h'(x) &= (1 + x^{-1/p})^{p-1} + |1 - x^{-1/p}|^{p-2} (1 - x^{-1/p}) \\ h''(x) &= \frac{p-1}{p} x^{-1-\frac{1}{p}} \left[ |1 - x^{-1/p}|^{p-2} - (1 + x^{-1/p})^{p-2} \right] \end{aligned}$$

de sorte que  $h$  est convexe sur  $\mathbf{R}^+$  si  $p \leq 2$  et concave si  $p \geq 2$ .

Si  $p \geq 2$ , l'inégalité de Jensen donne

$$h\left(\frac{\int_{\Omega} v^p dx}{\int_{\Omega} u^p dx}\right) \geq \frac{\int_{\Omega} u^p h\left(\left(\frac{v}{u}\right)^p\right) dx}{\int_{\Omega} u^p dx},$$

soit encore

$$\|u + v\|_p^p + \|u - v\|_p^p \leq (\|u\|_p + \|v\|_p)^p + \left| \|u\|_p - \|v\|_p \right|^p.$$

En particulier, si  $\|u\|_p = \|v\|_p = 1$  et  $\|u - v\|_p > 2\varepsilon$ ,

$$\left\| \frac{1}{2}(u + v) \right\|_p \leq (1 - \varepsilon^p)^{1/p}.$$

Donc  $L^p(\Omega)$  est uniformément convexe.

Si  $p \leq 2$ ,

$$\|u + v\|_p^p + \|u - v\|_p^p \geq (\|u\|_p + \|v\|_p)^p + \left| \|u\|_p - \|v\|_p \right|^p.$$

En particulier, si  $\|\tilde{u}\|_p = \|\tilde{v}\|_p = 1$ ,

$$\left\| \frac{1}{2}(\tilde{u} + \tilde{v}) \right\|_p + \left\| \frac{1}{2}(\tilde{u} - \tilde{v}) \right\|_p^p + \left| \left\| \frac{1}{2}(\tilde{u} + \tilde{v}) \right\|_p - \left\| \frac{1}{2}(\tilde{u} - \tilde{v}) \right\|_p \right|^p \leq 2$$

Donc  $L^p(\Omega)$  est uniformément convexe. □

## **PARTIE II**

### **DISTRIBUTIONS**



## CHAPITRE 4

### LA THÉORIE DE SCHWARTZ

L'espace des distributions est, en un sens convenable, le “plus petit espace” contenant les fonctions continues, et où la dérivation est partout définie. La théorie des distributions, élaborée par Schwartz à la fin des années quarante, est l'aboutissement d'un processus s'étalant sur plus d'un demi-siècle et comprenant, entre autres, le calcul symbolique de l'ingénieur Heaviside (1893), le formalisme introduit par le physicien Dirac (1926), les “parties finies” d'intégrales divergentes de Hadamard (1932) et les dérivées généralisées de Sobolev (1936). On trouvera une présentation complète de cette théorie par exemple dans [13], [18].

L'idée de départ consiste à changer de point de vue pour décrire les fonctions : plutôt que de considérer une fonction  $f$  de variable réelle comme la collection de ses valeurs  $f(x)$  où  $x$  parcourt  $\mathbf{R}$ , on décrit  $f$  par la collection de ses moyennes pondérées  $\int f\varphi(x)dx$  où  $\varphi$  parcourt  $C_c^\infty(\mathbf{R})$ . La formule d'intégration par parties

$$\int_{\mathbf{R}} f'\varphi(x)dx = - \int_{\mathbf{R}} f\varphi'(x)dx$$

permet alors de définir l'objet  $f'$ .

#### 4.1. Définition et propriétés élémentaires

##### 4.1.1. L'espace des distributions. —

**Définition 4.1.1.** — Une distribution  $T$  sur un ouvert  $\Omega \subset \mathbf{R}^N$  est une forme linéaire sur  $C_c^\infty(\Omega)$

$$\varphi \in C_c^\infty(\Omega) \mapsto \langle T, \varphi \rangle \in \mathbf{R},$$

qui vérifie la propriété de continuité : pour tout  $K$  compact de  $\Omega$ , il existe  $p \in \mathbf{N}$  et  $C > 0$  tels que

$$(4.1.1) \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega) \text{ à support dans } K, \quad |\langle T, \varphi \rangle| \leq C \sup_{|\alpha| \leq p} \|\partial^\alpha \varphi\|_\infty.$$

Si on peut choisir  $p$  indépendamment du compact  $K$ , on dit que la distribution  $T$  est d'ordre fini  $p$ .

L'espace  $\mathcal{D}'(\Omega)$  des distributions sur  $\Omega$  est un espace vectoriel. C'est en fait le dual topologique de  $C_c^\infty(\Omega)$ .

- Pour chaque compact  $K \subset \Omega$ , l'ensemble des fonctions  $C^\infty(\Omega)$  à support dans  $K$  muni des semi-normes

$$p_m(\varphi) = \sup_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha \varphi\|_\infty$$

est un espace de Fréchet, donc un espace métrisable.

- On définit alors la topologie de  $C_c^\infty(\Omega) = \cup_{K \subset \subset \Omega} C^\infty(K)$  comme limite inductive des  $C^\infty(K)$ , i.e. comme la topologie la plus fine rendant continues les injections de  $C^\infty(K)$  dans  $C_c^\infty(\Omega)$ ;
- On vérifie que la condition (4.1.1) exprime bien la continuité pour cette topologie.

**Lemme 4.1.2.** — Soient  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbf{R}^N$ ,  $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$  et  $(\varphi_n)$  une suite de  $C_c^\infty(\Omega)$  convergeant vers  $\varphi$  dans  $C_c^\infty(\Omega)$ . Alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle T, \varphi_n \rangle = \langle T, \varphi \rangle.$$

*Démonstration.* — Si  $(\varphi_n)$  converge vers  $\varphi$  dans  $C_c^\infty(\Omega)$ , alors par définition

- il existe un compact  $K \subset \Omega$  tel que

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad \forall x \notin K, \quad \varphi_n(x) = 0,$$

(en particulier  $\varphi$  est à support dans  $K$ ),

- pour tout  $\alpha \in \mathbf{N}^N$ , la suite  $(\partial^\alpha \varphi_n)$  converge vers  $\partial^\alpha \varphi$  uniformément sur  $K$ .

Puisque  $T$  est une distribution, il existe  $C > 0$  et  $p \in \mathbf{N}$  (dépendant uniquement de  $K$ ) tels que

$$|\langle T, \varphi_n - \varphi \rangle| \leq C \sup_{|\alpha| \leq p} \|\partial^\alpha (\varphi_n - \varphi)\|_\infty,$$

ce qui donne la convergence attendue. □

Le théorème d'annulation sur  $L_{loc}^1(\Omega)$

$$\left( \forall v \in C_c^\infty(\Omega), \quad \int_\Omega uv dx = 0 \right) \Rightarrow u = 0 \text{ presque partout}$$

permet d'identifier  $L_{loc}^1(\Omega)$  à un sous-espace de  $\mathcal{D}'(\Omega)$ . A chaque  $f \in L_{loc}^1(\Omega)$ , on associe en effet (de manière injective) la distribution  $T_f$  définie par

$$\forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega), \quad \langle T_f, \varphi \rangle = \int_\Omega f \varphi dx$$

de sorte que

$$\forall \varphi \in C^\infty(\Omega) \text{ à support dans } K, \quad |\langle T_f, \varphi \rangle| \leq \|f\|_{L^1(K)} \|\varphi\|_\infty.$$

**Définition 4.1.3.** — Soient  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbf{R}^N$ , et  $(T_n)$  une suite de  $\mathcal{D}'(\Omega)$ . On dit que  $(T_n)$  converge vers  $T$  dans  $\mathcal{D}'(\Omega)$  si

$$\forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega), \quad \langle T_n, \varphi \rangle \rightarrow \langle T, \varphi \rangle \text{ quand } n \rightarrow \infty.$$

La convergence au sens des distributions est une convergence très faible : elle est impliquée par exemple par la convergence dans  $L_{loc}^1(\Omega)$ , mais aussi par la convergence faible dans  $L_{loc}^1(\Omega)$ .

#### 4.1.2. Dérivation au sens des distributions. —

**Définition 4.1.4.** — Soient  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbf{R}^N$ ,  $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$  et  $\alpha \in \mathbf{N}^N$ . La dérivée  $\partial^\alpha T$  d'ordre  $\alpha$  de la distribution  $T$  est la distribution définie par

$$\forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega), \quad \langle \partial^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, \partial^\alpha \varphi \rangle.$$

Il est facile de vérifier que la dérivée distribution coïncide avec la dérivée classique, en utilisant la formule de Green.

En utilisant cette remarque très simple et le lemme de fermeture suivant, on peut alors obtenir les règles de dérivation des distributions.

**Lemme 4.1.5.** — Soient  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbf{R}^N$ , et  $(T_n)$  une suite de  $\mathcal{D}'(\Omega)$  convergeant vers  $T$  dans  $\mathcal{D}'(\Omega)$ . Alors, pour tout  $\alpha \in \mathbf{N}^N$ ,

$$\partial^\alpha T_n \rightarrow \partial^\alpha T \text{ au sens des distributions.}$$

*Démonstration.* — On a

$$\langle \partial^\alpha T_n, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T_n, \partial^\alpha \varphi \rangle \rightarrow (-1)^{|\alpha|} \langle T, \partial^\alpha \varphi \rangle = \langle \partial^\alpha T, \varphi \rangle$$

et ceci pour toute fonction  $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ . □

**Propriété 4.1.6.** — Soient  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbf{R}^N$  et  $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ .

– Pour toute  $f \in C^\infty(\Omega)$ ,  $fT \in \mathcal{D}'(\Omega)$  et

$$\forall \alpha \in \mathbf{N}^N, \quad \partial^\alpha (fT) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\beta}{\alpha} \partial^{\alpha-\beta} f \partial^\beta T$$

avec les notations usuelles pour les multi-indices et les coefficients binomiaux.

– Pour tout difféomorphisme  $\phi \in C^\infty(\omega, \Omega)$ ,  $T \circ \phi \in \mathcal{D}'(\omega)$  et

$$\partial_j (T \circ \phi) = \sum_k (\partial_j \phi_k) (\partial_k T \circ \phi).$$

*Démonstration.* — Les règles de calcul s'obtiennent à partir du calcul différentiel usuel par dualité.

• On définit la distribution produit  $fT$  par

$$\forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega), \quad \langle fT, \varphi \rangle = \langle T, f\varphi \rangle$$

de sorte que, pour tout compact  $K$ ,

$$\begin{aligned} |\langle fT, \varphi \rangle| &\leq C \sup_{|\alpha| \leq p} \|\partial^\alpha (f\varphi)\|_\infty \\ &\leq \tilde{C} \sup_{|\alpha| \leq p} \|\partial^\alpha \varphi\|_\infty \end{aligned}$$

pour toute fonction  $\varphi \in C^\infty$  à support dans  $K$ , où  $\tilde{C}$  ne dépend que de  $C$  et de  $f$  (par la formule de Leibniz).

On a alors

$$\begin{aligned} \langle \partial_j (fT), \varphi \rangle &= -\langle fT, \partial_j \varphi \rangle = -\langle T, f \partial_j \varphi \rangle \\ &= -\langle T, \partial_j (f\varphi) - \varphi \partial_j f \rangle \\ &= \langle \partial_j T, f\varphi \rangle + \langle (\partial_j f)T, \varphi \rangle \end{aligned}$$

d'où  $\partial_j(fT) = (\partial_j f)T + f(\partial_j T)$  dans  $\mathcal{D}'(\Omega)$ . Par récurrence sur  $|\alpha|$ , on peut établir la formule de Leibniz annoncée.

• On définit l'image inverse  $T \circ \phi$  de  $T$  par le changement de variable  $\phi$  par

$$\forall \varphi \in C_c^\infty(\omega), \quad \langle T \circ \phi, \varphi \rangle = \langle T, |\det D\phi^{-1}| \varphi \circ \phi^{-1} \rangle.$$

En utilisant les règles de dérivation des fonctions composées, la formule de Leibniz et le fait que  $|\det D\phi^{-1}|$  est dans  $C^\infty(\Omega)$ , on obtient alors que, pour tout compact  $K$ ,

$$\begin{aligned} \langle T \circ \phi, \varphi \rangle &\leq C \sup_{|\alpha| \leq p} \|\partial^\alpha (|\det D\phi^{-1}| \varphi \circ \phi^{-1})\|_\infty \\ &\leq \tilde{C} \sup_{|\alpha| \leq p} \|(\partial^\alpha \varphi) \circ \phi^{-1}\|_{L^\infty(K)} \\ &\leq \tilde{C} \sup_{|\alpha| \leq p} \|(\partial^\alpha \varphi)\|_{L^\infty(\phi^{-1}(K))} \end{aligned}$$

pour toute fonction  $\varphi \in C^\infty$  à support dans  $\phi^{-1}(K)$ .

On a alors

$$\langle \partial_j(T \circ \phi), \varphi \rangle = - \left\langle T, |\det D\phi^{-1}| (\partial_j \varphi) \circ \phi^{-1} \right\rangle.$$

Par ailleurs

$$\begin{aligned} \left\langle \sum_k (\partial_k T \circ \phi) \partial_j \phi_k, \varphi \right\rangle &= \sum_k \left\langle \partial_k T, |\det D\phi^{-1}| (\partial_j \phi_k \varphi) \circ \phi^{-1} \right\rangle \\ &= - \sum_k \left\langle T, \partial_k (|\det D\phi^{-1}| (\partial_j \phi_k \circ \phi^{-1}) (\varphi \circ \phi^{-1})) \right\rangle \end{aligned}$$

Or, pour tout  $g \in C_c^\infty(\Omega)$ ,

$$\begin{aligned} \int_\omega \partial_j (g \circ \phi) dy &= \sum_k \int_\omega \partial_j \phi_k (\partial_k g \circ \phi) dy \\ &= \sum_k \int_\Omega (\partial_j \phi_k \circ \phi^{-1}) \partial_k g |\det D\phi^{-1}| dx = 0, \end{aligned}$$

d'où l'on déduit que

$$\partial_k \left( (\partial_j \phi_k \circ \phi^{-1}) |\det D\phi^{-1}| \right) = 0.$$

On obtient finalement

$$\begin{aligned} \left\langle \sum_k (\partial_k T \circ \phi) \partial_j \phi_k, \varphi \right\rangle &= - \sum_k \left\langle T, |\det D\phi^{-1}| (\partial_j \phi_k \circ \phi^{-1}) \partial_k (\varphi \circ \phi^{-1}) \right\rangle \\ &= - \langle T, |\det D\phi^{-1}| (\partial_j \varphi) \circ \phi^{-1} \rangle, \end{aligned}$$

ce qui conclut la preuve.  $\square$

## 4.2. Quelques exemples

**4.2.1. Mesures de Radon.** — L'ensemble  $\mathcal{M}_+(\Omega)$  des mesures positives localement finies sur  $\Omega$  s'identifie à un sous-ensemble de  $\mathcal{D}'(\Omega)$  via l'application

$$\mu \in \mathcal{M}_+(\Omega) \mapsto T_\mu \in \mathcal{D}'(\Omega)$$

définie par

$$\forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega), \quad \langle T_\mu, \varphi \rangle = \int_\Omega \varphi d\mu.$$

Cette application est en effet injective puisque  $C_c^\infty(\Omega)$  est dense dans  $C_c(\Omega)$ .

Il est facile de vérifier que les distributions ainsi obtenues sont d'ordre 0 : pour tout compact  $K \subset \Omega$ ,

$$\forall \varphi \in C^\infty \text{ à support dans } K, \quad |\langle T_\mu, \varphi \rangle| \leq \mu(K) \|\varphi\|_\infty.$$

On a en fait la caractérisation suivante :

**Théorème 4.1.** — Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbf{R}^N$ . Si  $T$  est une distribution positive sur  $\Omega$ , i.e.

$$\forall \varphi \in C^\infty(\Omega, \mathbf{R}^+), \quad \langle T, \varphi \rangle \geq 0.$$

alors  $T$  est une mesure de Radon positive.

*Démonstration.* — On commence par vérifier que  $T$  se prolonge en une forme linéaire positive sur  $C_c(\Omega)$ .

• Pour tout compact  $K \subset \Omega$ , on peut construire (par régularisation de  $\mathbb{1}_{\{x/d(x,K) \leq \delta\}}$ ) une fonction  $\psi \in C_c^\infty(\Omega)$  telle que

$$\psi(\Omega) \subset [0, 1], \text{ et } \psi|_K \equiv 1.$$

Pour toute fonction  $\varphi \in C^\infty$  à support dans  $K$ , on a alors

$$\forall x \in \Omega, \quad -\|\varphi\|_\infty \psi(x) \leq \varphi(x) \leq \|\varphi\|_\infty \psi(x).$$

Par positivité de  $T$ , on en déduit

$$|\langle T, \varphi \rangle| \leq \|\varphi\|_\infty \langle T, \psi \rangle,$$

ce qui signifie que  $T$  est continue pour la norme  $L^\infty(K)$ .

• Pour toute fonction  $g \in C_c(\Omega)$ ,  $g$  est la limite d'une suite  $(g_n)$  de  $C_c^\infty(\Omega)$  uniformément supportée dans un compact  $K$  (régularisation par convolution). On pose alors

$$\langle T, g \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle T, g_n \rangle$$

qui est bien définie car  $(\langle T, g_n \rangle)$  est de Cauchy.

Le théorème de représentation de Riesz permet alors de conclure que  $T$  s'identifie à une mesure de Radon.  $\square$

Attention : toute distribution ne s'écrit pas comme la différence de deux distributions positives. Par exemple,  $\delta'$  - qui est d'ordre 1 - n'est pas la différence de deux distributions positives.

#### 4.2.2. Valeurs principales et parties finies. —

**Définition 4.2.1.** — Soit  $T_n$  la distribution sur  $\mathbf{R}$  associée à la fonction intégrable

$$f_n(x) = \frac{1}{x} \mathbb{1}_{|x| \geq \frac{1}{n}}.$$

La valeur principale de  $1/x$  est la distribution  $vp(\frac{1}{x})$  d'ordre 1 sur  $\mathbf{R}$ , obtenue en passant à la limite dans la suite  $(T_n)$ . C'est la dérivée-distribution de  $\log|x|$ .

*Démonstration.* — Pour toute fonction  $\varphi \in C_c^\infty(\mathbf{R})$  à support dans  $[-a, a]$

$$\langle T_n, \varphi \rangle = \int_{\frac{1}{n} \leq |x| \leq a} \frac{\varphi(x)}{x} dx = \int_{\frac{1}{n} \leq |x| \leq a} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} dx$$

par parité.

Comme la fonction  $x \mapsto (\varphi(x) - \varphi(0))/x$  se prolonge par continuité en 0, elle est intégrable sur  $[-a, a]$ , et on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle T_n, \varphi \rangle = \int_{|x| \leq a} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} dx.$$

En utilisant à nouveau la parité, on obtient que la limite est indépendante de  $a$ . Par exemple,

$$\langle vp(\frac{1}{x}), \varphi \rangle = \int_{|x| \leq 1} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} dx + \int_{|x| > 1} \frac{\varphi(x)}{x} dx.$$

• Pour toute fonction  $\varphi \in C_c^\infty(\mathbf{R})$  à support dans  $[-a, a]$ , l'inégalité des accroissements finis donne

$$\left| \langle vp(\frac{1}{x}), \varphi \rangle \right| \leq 2a \|\varphi'\|_\infty.$$

On en déduit que  $vp(\frac{1}{x})$  est bien une distribution, d'ordre au plus 1. En particulier, on peut la prolonger en une forme linéaire continue sur  $C_c^1(K)$  pour tout compact  $K \subset \mathbf{R}$ .

Elle n'est pas d'ordre 0 comme on le voit facilement en choisissant  $\varphi_k = \rho_k * \mathbb{1}_{[0,1]}$ , elle est donc exactement d'ordre 1.

• Reste à prouver l'identité  $vp(\frac{1}{x}) = (\log|x|)'$ . Pour toute fonction  $\varphi \in C_c^\infty(\mathbf{R})$ ,

$$\langle (\log|x|)', \varphi \rangle = -\langle \log|x|, \varphi' \rangle = -\int \log|x| \varphi'(x) dx.$$

Comme  $x \mapsto \log|x|$  est dans  $L_{loc}^1(\mathbf{R})$ , on a

$$\int \log|x| \varphi'(x) dx = \lim_{n \rightarrow 0} \int_{|x| \geq 1/n} \log|x| \varphi'(x) dx.$$

Par intégration par parties,

$$\int_{|x| \geq 1/n} \log|x| \varphi'(x) dx = -\int_{|x| \geq 1/n} \frac{\varphi(x)}{x} dx + \log n \left( \varphi\left(\frac{1}{n}\right) - \varphi\left(-\frac{1}{n}\right) \right).$$

Le second terme du membre de droite tend vers 0 quand  $n \rightarrow \infty$  car  $\varphi$  est dérivable en 0, donc

$$\int \log|x| \varphi'(x) dx = -\lim_{n \rightarrow 0} \int_{|x| \geq 1/n} \frac{\varphi(x)}{x} dx = -\langle vp(\frac{1}{x}), \varphi \rangle,$$

ce qui est l'identité annoncée. □

De façon similaire, on définit les parties finies  $Pf(x_+^\alpha)$  pour  $\alpha \in ]-2, -1[$  par dérivation de  $x_+^{\alpha+1}/(\alpha+1)$ .

**Définition 4.2.2.** — La partie finie de  $x_+^\alpha$  est la distribution  $Pf(x_+^\alpha)$  d'ordre 1, définie par

$$\langle Pf(x_+^\alpha), \varphi \rangle = -\int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \varphi'(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{x \geq \frac{1}{n}} x^\alpha \varphi(x) dx.$$

**4.2.3. Dérivées des indicatrices et formule de saut.** — Soit  $K$  un compact de classe  $C^1$  de  $\mathbf{R}^N$ . En utilisant une partition de l'unité et des changements de carte locaux, on peut montrer la formule de Stokes

$$\partial_{x_i}(\mathbb{1}_K) = -\nu_i d\sigma,$$

où  $\nu$  est le vecteur unitaire normal à  $\partial K$  orienté vers l'extérieur et  $d\sigma$  est la mesure de Lebesgue superficielle de  $\partial K$ . Cette formule n'est rien d'autre que la généralisation de la formule d'intégration par parties

$$\frac{d}{dx} \mathbb{1}_{[a,b]} = \delta_a - \delta_b.$$

**Proposition 4.2.3.** — Soient  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbf{R}^N$ ,  $K$  un compact de classe  $C^1$  de  $\Omega$  et  $f \in C(\Omega)$  telle que  $\partial_{x_i} f \in L^1_{loc}(\Omega)$ . Alors

$$\partial_{x_i}(f\mathbb{1}_K) = (\partial_{x_i} f)\mathbb{1}_K - \nu_i f d\sigma$$

où  $\nu$  est le vecteur unitaire normal à  $\partial K$  orienté vers l'extérieur et  $d\sigma$  est la mesure de Lebesgue superficielle de  $\partial K$ .

*Démonstration.* — On commence par se ramener au cas d'une fonction à support compact. Par régularisation de  $\mathbb{1}_{\{x/d(x,K) \leq \delta\}}$  avec  $\delta \leq \frac{1}{2}d(K, \partial\Omega)$ , on peut construire une fonction  $\psi \in C_c^\infty(\Omega)$  vérifiant

$$\psi(\Omega) \subset [0, 1] \quad \text{et } \psi \equiv 1 \text{ sur un voisinage de } K.$$

Si on pose  $g = \psi f$ ,  $g \in C_c(\Omega)$  et  $\partial_{x_i} g \in L^1(\Omega)$ . Comme  $f \equiv g$  sur un voisinage de  $K$ , il suffit de prouver la formule des sauts pour  $g$ .

On se ramène alors au cas où la fonction est de classe  $C^\infty$  par régularisation. On se donne une suite régularisante  $(\rho_n)$  définie par

$$\forall x \in \mathbf{R}^N, \quad \rho_n(x) = n^N \rho(nx) \text{ où } \rho \in C^\infty(\mathbf{R}^N, [0, 1]) \text{ à support dans la boule unité,}$$

et on pose  $g_n = \rho_n * g$ . La formule de Stokes et la règle de dérivation du produit montrent que

$$\partial_{x_i}(g_n \mathbb{1}_K) = g_n(\partial_{x_i} \mathbb{1}_K) + (\partial_{x_i} g_n)\mathbb{1}_K = -\nu_i g_n d\sigma + (\partial_{x_i} g_n)\mathbb{1}_K.$$

Par le lemme de fermeture,

$$\partial_{x_i} g_n \rightarrow \partial_{x_i} g \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega), \quad \text{et } \partial_{x_i}(g_n \mathbb{1}_K) \rightarrow \partial_{x_i}(g \mathbb{1}_K) \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega).$$

Les résultats classiques sur la convolution montrent que

$$g_n \rightarrow g \text{ uniformément sur } \Omega, \quad \text{et } \partial_{x_i} g_n \rightarrow \partial_{x_i} g \text{ dans } L^1(\Omega).$$

On obtient alors la formule des sauts pour  $g$ . □

### 4.3. Localisation, convolution, régularisation

Comme pour les fonctions, le procédé de régularisation des distributions le plus standard est la convolution. Dans le cas où les distributions sont définies sur un ouvert  $\Omega$ , cette régularisation est partielle car elle ne va pas jusqu'au bord. On va donc définir la notion de support d'une distribution, mais pour simplifier la présentation, on exposera la suite des résultats dans le cas où  $\Omega = \mathbf{R}^N$ .

**Définition 4.3.1.** — Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbf{R}^N$  et  $T$  une distribution sur  $\Omega$ . Le support de  $T$  est le complémentaire du plus grand ouvert  $V$  tel que  $T|_V \equiv 0$ .

$$\text{Supp}(T) = \Omega \setminus \{x \in \Omega / \exists \omega \text{ voisinage de } x, \quad T|_\omega = 0\}.$$

On note  $\mathcal{E}'(\Omega)$  l'ensemble des distributions à support compact.

On a la caractérisation suivante des distributions dont le support est réduit à un point :

**Propriété 4.3.2.** — Soit  $a \in \mathbf{R}^N$ . Les distributions sur  $\mathbf{R}^N$  dont le support est  $\{a\}$  sont les combinaisons linéaires des dérivées de la masse de Dirac en  $a$ .

*Démonstration.* — On commence par montrer que les distributions à support compact sont toujours d'ordre fini. Soient  $T \in \mathcal{E}'(\Omega)$  et  $K$  un voisinage compact de  $\text{Supp}(T)$ . On peut construire (par régularisation d'une fonction caractéristique par exemple) une fonction  $\psi \in C_c^\infty(\Omega)$  à support dans  $K$  telle que

$$\psi(\Omega) \subset [0, 1] \text{ et } \psi|_{\text{Supp}(T)} \equiv 1.$$

On a alors  $T = T\psi$ . Donc, pour toute fonction  $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ , comme  $\psi\varphi$  est à support dans  $K$ ,

$$\begin{aligned} |\langle T, \varphi \rangle| &= |\langle T, \varphi\psi \rangle| \leq C_K \sup_{|\alpha| \leq p_K} \|\partial^\alpha(\psi\varphi)\|_\infty \\ &\leq C \sup_{|\alpha| \leq p_K} \|\partial^\alpha\varphi\|_\infty \end{aligned}$$

par la formule de Leibniz.  $T$  est donc d'ordre  $p_K$ .

Soit maintenant  $T$  une distribution dont le support est réduit à  $\{a\}$ , disons d'ordre  $p$ . On se donne une fonction  $\psi \in C_c^\infty(\Omega)$  à support dans  $B(a, \delta)$  telle que

$$\psi(\Omega) \subset [0, 1] \text{ et } \psi \equiv 1 \text{ sur un voisinage de } a,$$

et on pose  $\psi_n(x) = \psi(a + n(x - a))$ .

La formule de Taylor donne, pour toute fonction  $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$

$$\varphi(x) = \psi(x) \left( \sum_{|\alpha| \leq p} \frac{(x-a)^\alpha}{\alpha!} \partial^\alpha \varphi(a) \right) + \tilde{\varphi}(x)$$

avec

$$\forall \alpha \text{ tel que } |\alpha| \leq p, \quad \partial^\alpha \tilde{\varphi}(a) = 0.$$

Par définition du support de  $T$ ,

$$\langle T, \tilde{\varphi}(1 - \psi_n) \rangle = 0.$$

De plus, comme  $T$  est d'ordre  $p$ ,

$$|\langle T, \tilde{\varphi}\psi_n \rangle| \leq C \sup_{|\alpha| \leq p} \|\partial^\alpha(\tilde{\varphi}\psi_n)\|_\infty \leq \tilde{C}/n$$

en utilisant la formule de Leibniz et la formule de Taylor

$$\forall x \in B(a, \delta/n), \quad |\partial^\beta \tilde{\varphi}(x)| \leq C \left( \frac{1}{n} \right)^{p+1-|\beta|}.$$

On en déduit que  $\langle T, \tilde{\varphi} \rangle = 0$ .

Autrement dit,  $T$  est une combinaison linéaire de  $\delta_a$  et de ses dérivées jusqu'à l'ordre  $p$ . □

**Définition 4.3.3.** — Soient  $T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^N)$  et  $\varphi \in C_c^\infty(\mathbf{R}^N)$ . La convolution de  $T$  par  $\varphi$  est définie sur  $\mathbf{R}^N$  par

$$T * \varphi(x) = \langle T, \tau_x \hat{\varphi} \rangle \text{ où } \hat{\varphi}(y) = \varphi(-y).$$

**Proposition 4.3.4.** — Soient  $T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^N)$  et  $\varphi \in C_c^\infty(\mathbf{R}^N)$ . Alors

$$\text{Supp}(T * \varphi) \subset \text{Supp}T + \text{Supp}\varphi.$$

De plus,  $T * \varphi \in C^\infty(\mathbf{R}^N)$  et on a

$$\partial^\alpha(T * \varphi) = T * (\partial^\alpha \varphi) = (\partial^\alpha T) * \varphi.$$

*Démonstration.* — Soit  $x \notin \text{Supp}T + \text{Supp}\varphi$ , on a

$$\text{Supp}T \cap \text{Supp}(\tau_x \hat{\varphi}) = \text{Supp}T \cap (x - \text{Supp}\varphi) = \emptyset,$$

ce qui implique que  $T * \varphi(x) = \langle T, \tau_x \hat{\varphi} \rangle = 0$ .

Soient  $x \in \mathbf{R}^N$  et  $\alpha \in \mathbf{N}^N$  avec  $|\alpha| = 1$ . Pour tout  $\varepsilon > 0$ ,

$$\frac{1}{\varepsilon} \left( T * \varphi(x + \varepsilon \alpha) - T * \varphi(x) \right) = \frac{1}{\varepsilon} \langle T, (\tau_{x+\varepsilon \alpha} \hat{\varphi} - \tau_x \hat{\varphi}) \rangle.$$

Or on peut montrer que  $\frac{1}{\varepsilon}(\tau_{x+\varepsilon \alpha} \hat{\varphi} - \tau_x \hat{\varphi})$  converge vers  $\tau_x(\widehat{\partial^\alpha \varphi})$  dans  $C_c^\infty(\mathbf{R}^N)$  quand  $\varepsilon \rightarrow 0$  :

– pour tout  $\varepsilon \in ]0, 1]$ ,

$$\text{Supp} \left( \frac{1}{\varepsilon} (\tau_{x+\varepsilon \alpha} \hat{\varphi} - \tau_x \hat{\varphi}) \right) \subset \text{Supp}(\hat{\varphi}) + B(x, 1),$$

– pour tout  $\beta \in \mathbf{N}^N$

$$\partial^\beta \left( \frac{1}{\varepsilon} (\tau_{x+\varepsilon \alpha} \hat{\varphi} - \tau_x \hat{\varphi}) - \tau_x(\widehat{\partial^\alpha \varphi}) \right) \rightarrow 0$$

uniformément quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

On a alors

$$\frac{1}{\varepsilon} \left( T * \varphi(x + \varepsilon \alpha) - T * \varphi(x) \right) \rightarrow \langle T, \tau_x(\widehat{\partial^\alpha \varphi}) \rangle.$$

Par définition de la dérivation des distributions,

$$\begin{aligned} \langle \partial^\alpha T, \tau_x \hat{\varphi} \rangle &= -\langle T, \partial^\alpha \tau_x \hat{\varphi} \rangle \\ &= -\langle T, \tau_x \partial^\alpha \hat{\varphi} \rangle = \langle T, \tau_x \widehat{\partial^\alpha \varphi} \rangle, \end{aligned}$$

ce qui donne la dernière identité.

On conclut alors par récurrence sur la longueur de  $\alpha$ .

□

**Théorème 4.2.** — L'ensemble des fonctions lisses  $C^\infty(\mathbf{R}^N)$  est dense dans  $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^N)$ .

*Démonstration.* — Soit  $(\rho_n)$  une suite régularisante définie par

$$\forall x \in \mathbf{R}^N, \quad \rho_n(x) = n^N \rho(nx) \text{ où } \rho \in C^\infty(\mathbf{R}^N, [0, 1]) \text{ à support dans la boule unité.}$$

Pour toute fonction  $\varphi \in C_c^\infty(\mathbf{R}^N)$ ,  $\varphi * \hat{\rho}_n \rightarrow \varphi$  dans  $C_c^\infty(\mathbf{R}^N)$  puisque

– pour tout  $n \geq 1$ ,

$$\text{Supp}(\varphi * \hat{\rho}_n) \subset \text{Supp}(\varphi) + B(0, 1),$$

– pour tout  $\beta \in \mathbf{N}^N$

$$\partial^\beta (\varphi * \hat{\rho}_n) = (\partial^\beta \varphi) * \hat{\rho}_n \rightarrow \partial^\beta \varphi$$

uniformément quand  $n \rightarrow \infty$ .

On a alors

$$\begin{aligned} \langle T * \rho_n, \varphi \rangle &= \int_{\mathbf{R}^N} T * \rho_n(x) \varphi(x) dx = \int_{\mathbf{R}^N} \langle T, \tau_x \hat{\rho}_n \rangle \varphi(x) dx \\ &= \langle T, \int_{\mathbf{R}^N} \varphi(x) \tau_x \hat{\rho}_n dx \rangle = \langle T, \varphi * \hat{\rho}_n \rangle \rightarrow \langle T, \varphi \rangle \end{aligned}$$

en utilisant par exemple des sommes de Riemann pour justifier l'interversion du crochet de distribution et de l'intégrale.

$(T * \rho_n)_{n \in \mathbf{N}}$  est donc une suite de  $C^\infty(\mathbf{R}^N)$  qui converge vers  $T$  au sens des distributions.  $\square$

En fait, de façon plus générale, on peut définir la convolution de deux distributions, pourvu que l'une au moins soit à support compact.

**Définition 4.3.5.** — Soient  $T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^N)$  et  $S \in \mathcal{E}'(\mathbf{R}^N)$ . La convolution de  $T$  par  $S$  est la distribution définie par

$$\forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbf{R}^N), \quad \langle T * S, \varphi \rangle = \langle T, \hat{S} * \varphi \rangle$$

où  $\hat{S}$  est l'image inverse de  $S$  par le changement de variable  $x \mapsto -x$ .

Avec cette définition, on a les propriétés usuelles de la convolution :

**Propriété 4.3.6.** — Soient  $T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^N)$  et  $S, S_1, S_2 \in \mathcal{E}'(\mathbf{R}^N)$ .

$$\begin{aligned} \text{Supp}(T * S) &\subset \text{Supp}(T) + \text{Supp}(S), \quad \text{ordre}(T * S) \leq \text{ordre}(T) + \text{ordre}(S), \\ \forall \alpha \in \mathbf{N}^N, \quad \partial^\alpha (T * S) &= \partial^\alpha T * S = T * \partial^\alpha S, \\ S_1 * S_2 &= S_2 * S_1, \quad (T * S_1) * S_2 = T * (S_1 * S_2). \end{aligned}$$

*Démonstration.* — Puisque

$$\text{Supp}(\hat{S} * \varphi) \subset \text{Supp}(\hat{S}) + \text{Supp}(\varphi),$$

$\hat{S} * \varphi$  est une fonction  $C^\infty$  à support compact, et  $T * S$  est bien définie. De plus,

$$\begin{aligned} \text{si } \text{Supp}(\varphi) \cap (\text{Supp}(T) + \text{Supp}(S)) = \emptyset, \quad \text{alors } \text{Supp}(\hat{S} * \varphi) \cap \text{Supp}(T) &= \emptyset, \\ \text{et } \langle T * S, \varphi \rangle &= \langle T, \hat{S} * \varphi \rangle = 0. \end{aligned}$$

On obtient ainsi la condition sur les supports convolutifs.

Si  $T$  est d'ordre fini  $p$

$$\begin{aligned} |\langle T * S, \varphi \rangle| &= |\langle T, \hat{S} * \varphi \rangle| \leq C \sup_{|\alpha| \leq p} \sup_{x \in K + \text{Supp}(\hat{S})} |\partial^\alpha (\hat{S} * \varphi)(x)| \\ &\leq C \sup_{\substack{|\alpha| \leq p \\ |\beta| \leq p'}} \sup_{x \in K} |\partial^{\alpha+\beta} \varphi(x)| \end{aligned}$$

ce qui montre que l'ordre de  $T * S$  est inférieur à  $p + p'$ .

Pour la dérivation, en utilisant la dualité, on a les identités

$$\begin{aligned}\langle \partial^\alpha(T * S), \varphi \rangle &= (-1)^{|\alpha|} \langle T * S, \partial^\alpha \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, \hat{S} * \partial^\alpha \varphi \rangle \\ &= (-1)^{|\alpha|} \langle T, \partial^\alpha(\hat{S} * \varphi) \rangle = \langle \partial^\alpha T * S, \varphi \rangle \\ &= (-1)^{|\alpha|} \langle T, \partial^\alpha \hat{S} * \varphi \rangle = \langle T * \partial^\alpha S, \varphi \rangle.\end{aligned}$$

Les propriétés de réflexivité et d'associativité se prouvent par régularisation

$$\langle S_1 * S_2, \varphi \rangle = \langle S_1, \hat{S}_2 * \varphi \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle S_1 * \rho_n, \hat{S}_2 * \varphi \rangle$$

car  $\hat{S}_2 * \varphi \in C_c^\infty(\mathbf{R}^N)$  et  $S_1 * \rho_n \rightarrow S_1$  dans  $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^N)$ .

Comme précédemment, en utilisant des sommes de Riemann, on intervertit le crochet et l'intégrale

$$\begin{aligned}\langle S_1 * \rho_n, \hat{S}_2 * \varphi \rangle &= \int S_1 * \rho_n(x) \langle \hat{S}_2, \tau_x \hat{\varphi} \rangle dx = \langle \hat{S}_2, \int S_1 * \rho_n(x) \tau_x \hat{\varphi} dx \rangle \\ &= \langle \hat{S}_2, S_1 * (\rho_n * \hat{\varphi}) \rangle = \langle S_2, \hat{S}_1 * (\hat{\rho}_n * \varphi) \rangle \\ &= \langle S_2 * S_1, \hat{\rho}_n * \varphi \rangle \rightarrow \langle S_2 * S_1, \varphi \rangle\end{aligned}$$

ce qui donne la réflexivité.

De la même façon, on a

$$\begin{aligned}T * (S_1 * S_2) &= \lim_{n \rightarrow \infty} T * ((S_1 * \rho_n) * (S_2 * \rho_m)) \\ &= \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ m \rightarrow \infty}} (T * (S_1 * \rho_n)) * (S_2 * \rho_m) = (T * S_1) * S_2\end{aligned}$$

car

$$\forall \varphi_1, \varphi_2 \in C_c^\infty(\mathbf{R}^N), \quad T * (\varphi_1 * \varphi_2) = (T * \varphi_1) * \varphi_2.$$

Cela montre l'associativité.  $\square$

Les deux résultats qui précèdent reposent essentiellement sur les généralisations suivantes des théorèmes de Fubini et de dérivation sous le signe somme.

- **Intégration sous le crochet.** Soient  $S \in \mathcal{E}'(\mathbf{R}^N)$  et  $\varphi \in C^\infty(\mathbf{R}^{N+q})$ . Pour tout compact  $K \subset \mathbf{R}^q$ ,

$$\langle S, \int_K \varphi(\cdot, y) dy \rangle = \int_K \langle S, \varphi(\cdot, y) \rangle dy.$$

- **Dérivation sous le crochet.** Soient  $S \in \mathcal{E}'(\mathbf{R}^N)$  et  $\varphi \in C^\infty(\mathbf{R}^{N+q})$ . La fonction  $\phi : y \mapsto \langle S, \varphi(\cdot, y) \rangle$  est de classe  $C^\infty$  et

$$\partial^\alpha \langle S, \varphi(\cdot, y) \rangle = \langle S, \partial_y^\alpha \varphi(\cdot, y) \rangle.$$



## CHAPITRE 5

### SOLUTIONS SINGULIÈRES D'ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

On va présenter maintenant une application très simple de la notion de distribution à la résolution d'équations aux dérivées partielles présentant des singularités en temps fini. La résolution se fera par approximation, puis par passage à la limite : cela permettra donc de manipuler les différentes notions de convergence introduites aux chapitres précédents.

L'équation aux dérivées partielles que nous allons considérer ici n'a pas d'application physique directe, mais c'est un prototype de système hyperbolique de lois de conservation, comme il en apparaît naturellement par exemple en mécanique des fluides ou en élasticité [17], [4].

L'équation de Hopf est une équation scalaire unidimensionnelle, ce qui signifie que l'inconnue  $u$  est réelle et dépend du temps  $t \in \mathbf{R}^+$  et d'une seule variable d'espace  $x \in \mathbf{R}$ . Elle s'écrit

$$(5.0.1) \quad \partial_t u + \partial_x \left( \frac{1}{2} u^2 \right) = 0$$

ce qui est équivalent pour des solutions classiques régulières à

$$(5.0.2) \quad \partial_t u + u \partial_x u = 0.$$

Cette dernière équation est aussi appelée équation de Burgers non visqueuse.

#### 5.1. Méthode des caractéristiques et explosion

En utilisant la forme (5.0.2) de l'équation, on peut calculer explicitement la solution en fonction de la donnée initiale

$$u|_{t=0} = u_0,$$

au moins pour des temps petits. En effet, on dispose d'une méthode très générale pour la résolution des équations de transport, dite méthode des caractéristiques.

##### 5.1.1. La méthode des caractéristiques. —

*Proposition 5.1.1.* — *Les solutions de l'équation de transport*

$$(5.1.1) \quad \partial_t v + a(t, x) \partial_x v = 0, \quad v|_{t=0} = v_0$$

peuvent s'écrire simplement à partir des solutions de l'équation différentielle ordinaire

$$(5.1.2) \quad \frac{dX}{dt} = a(t, X), \quad X(0, x_0) = x_0$$

On a en effet

$$v(t, X(t, x_0)) = v_0(x_0).$$

Si  $X_t : x \mapsto X(t, x)$  est bijective, alors

$$v(t, x) = v_0(X_t^{-1}(x)).$$

Dans le cas d'un champ de convection constant  $a$ , le mouvement est uniforme

$$v(t, x) = v_0(x - at)$$

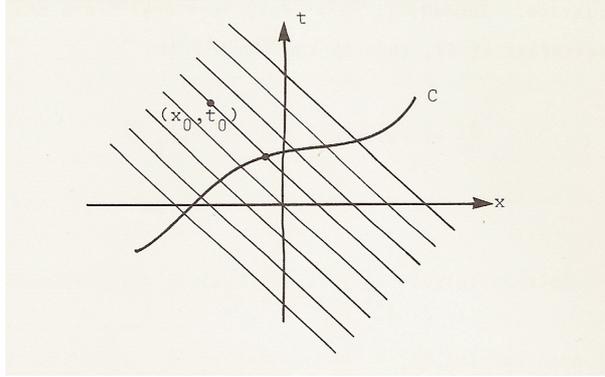


FIGURE 1. Les caractéristiques sont des lignes droites.

Sous des hypothèses de régularité sur le champ  $a$ , le théorème de Cauchy-Lipschitz assure que les trajectoires de (5.1.2) sont localement bien définies et uniques, de sorte que  $X_t$  est un difféomorphisme.

**Théorème 5.1 (de Cauchy-Lipschitz).** — Soit  $E$  un espace de Banach réel,  $U$  un ouvert de  $\mathbf{R} \times E$ , et  $a : U \rightarrow E$  une application lipschitzienne. Alors

- Pour tout  $(t_0, x_0) \in U$ , il existe une unique solution maximale  $X_{(t_0, x_0)} : I_{(t_0, x_0)} \rightarrow E$  de l'équation différentielle

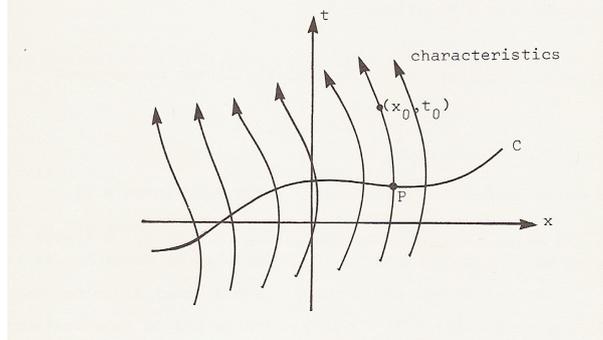
$$\frac{dX}{dt} = a(t, X(t)).$$

- L'application  $x \mapsto X_{(t_0, x)}(s)$  est continue au voisinage de  $x_0$  pour tout  $s \in I_{(t_0, x_0)}$ .
- Si  $a$  est de classe  $C^k$ , toute solution de l'équation différentielle est de classe  $C^{k+1}$ .

Dans le cas de l'équation de Hopf, le champ de vitesses  $u$  est transporté par lui-même. On a donc

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dt} &= u(t, X), \quad X(0, x_0) = x_0, \\ u(t, X(t, x)) &= u_0(x). \end{aligned}$$

tant que  $X$  est un difféomorphisme, i.e. un changement de variables régulier. On rappelle que le fait que  $X$  soit un difféomorphisme dépend de la régularité de  $u$  (par le théorème de Cauchy-Lipschitz).

FIGURE 2. Les caractéristiques définissent un difféomorphisme sur  $\mathbf{R}$ 

### 5.1.2. Apparition de singularité. —

En différentiant l'équation des caractéristiques par rapport à  $x$ , on obtient

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial X}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (u(t, X)) = u'_0(x)$$

En intégrant par rapport au temps  $t$ , on en déduit que

$$\frac{\partial X}{\partial x} = 1 + u'_0(x)t.$$

Au temps

$$t_0 = \frac{1}{\sup_{x \in \mathbf{R}} (-u'_0(x))_+}$$

la fonction  $\frac{\partial X}{\partial x}$  s'annule au moins en un point, de sorte que  $X$  n'est plus un difféomorphisme.

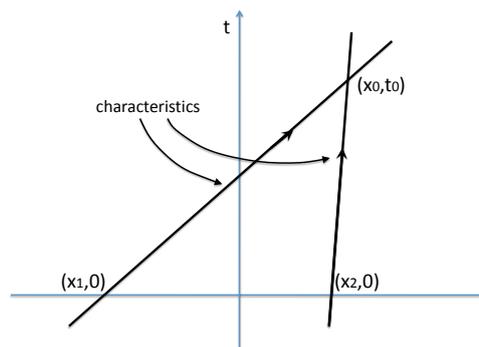


FIGURE 3. Croisement des caractéristiques

En effet, au point  $(t_0, x_0)$  la solution  $u$  devient multivaluée et donc  $u(t_0, x_0)$  n'est pas défini. De plus, il y a un saut

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} u(t_0, x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0^+} u(t_0, x).$$

En d'autres termes,  $t_0$  est le temps d'explosion, il correspond à l'apparition d'une singularité.

Il est alors naturel de se demander si les solutions peuvent être définies en un sens plus faible pour des temps au-delà de  $t_0$ .

## 5.2. Solutions faibles et critère d'unicité

### 5.2.1. Solutions au sens des distributions. —

**Définition 5.2.1.** — On appelle solution au sens des distributions de l'équation de Hopf (5.0.1) avec donnée initiale  $u_0$  une fonction  $u \in L^\infty(\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R})$  (définie et bornée presque partout) telle que, pour tout  $\phi \in C_c^\infty(\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R})$ ,

$$\iint \left( u \partial_t \phi + \frac{1}{2} u^2 \partial_x \phi \right) dx dt = - \int u_0 \phi|_{t=0} dx.$$

Attention : la distribution  $u^2$  est bien définie car on a imposé que  $u$  soit une fonction (définie et bornée presque partout) :  $u^2$  est donc une fonction définie et bornée presque partout.

Par contre, au sens des distributions, les deux formulations (5.0.1) et (5.0.2) de l'équation de Hopf ne sont pas équivalentes : on utilisera toujours la forme conservative (5.0.1), qui est la seule à être bien définie!

Avec cette notion de solution, on n'a plus d'unicité! Si on part par exemple de la fonction d'Heaviside  $u_0 = \mathbb{1}_{\mathbf{R}^+}$ , on peut vérifier que les deux fonctions  $u_1$  et  $u_2$  définies par

$$u_1(t, x) = H\left(x - \frac{1}{2}t\right),$$

$$u_2(t, x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x < 0 \\ \frac{x}{t} & \text{if } 0 < x < t \\ 1 & \text{if } x > t \end{cases}$$

sont des solutions au sens des distributions de l'équation de Hopf (5.0.1), i.e.

$$\iint \left( u \partial_t \phi + \frac{1}{2} u^2 \partial_x \phi \right) dx dt = - \int u_0 \phi|_{t=0} dx.$$

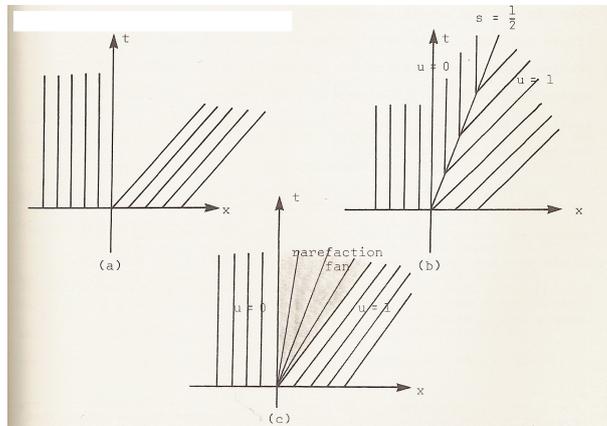


FIGURE 4. Non unicité des solutions au sens des distributions

**Remarque 5.2.2.** — *La méthode des caractéristiques ne prédit pas le comportement de la solution dans la zone de non unicité.*

### 5.2.2. Solutions entropiques. —

Les solutions physiquement pertinentes sont sélectionnées en imposant des conditions supplémentaires, qui devraient en particulier garantir l'unicité.

On considère le cas d'un choc, c'est-à-dire d'une discontinuité se propageant à la vitesse  $s$

$$u(t, x) = u_- + (u_+ - u_-) \mathbb{1}_{\{x \geq st\}}$$

et satisfaisant la condition de saut (dite condition de Rankine-Hugoniot)

$$-s[u]_-^+ + \frac{1}{2}[u^2]_-^+ = 0.$$

Par chaque point de la ligne de choc, il passe deux caractéristiques (définies par 5.1.2), une de chaque côté du choc.

- Soit chacune de ces caractéristiques peut être suivie en arrière jusqu'au temps initial,
- soit les deux caractéristiques sont définies après le choc.

Les chocs de la deuxième espèce, appelés chocs de raréfaction, ne sont pas admissibles physiquement car ils ne sont pas déterminés par la donnée initiale (principe de causalité). Seuls les chocs de la première espèce, appelés chocs entropiques, doivent être retenus.

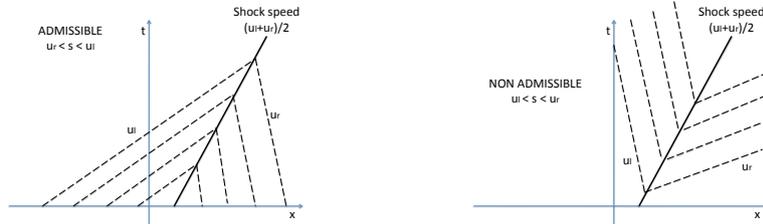


FIGURE 5. Condition d'entropie

Pour les chocs entropiques, on a

$$\partial_x u \leq 0 \text{ au sens des distributions.}$$

Pour les solutions régulières (par exemple pour la solution  $u_2$  définie au paragraphe précédent), on a

$$\partial_x u(t, x) = \partial_x u_0(X_t^{-1}(x)) = \left( \frac{u'_0}{1 + tu'_0} \right) (X_t^{-1}(x)) \leq \frac{1}{t}.$$

On va donc ajouter une condition de signe sur la partie singulière de  $\partial_x u$ .

Avec cette contrainte supplémentaire, on va retrouver l'unicité des solutions. Autrement dit, on s'attend à ce que le système

$$(5.2.1) \quad \left. \begin{aligned} \partial_t u + \frac{1}{2} \partial_x u^2 &= 0 \\ t \partial_x u &\leq 1 \end{aligned} \right\} \text{ au sens des distributions}$$

capture la dynamique de façon satisfaisante, au-delà de l'apparition des singularités.

### 5.3. Approximation visqueuse

Pour montrer l'existence de solutions au sens des distributions pour l'équation de Hopf, l'idée est de construire des solutions pour un modèle approché, puis de passer à la limite. Il existe trois procédures très classiques : l'approximation par discrétisation et résolution de problèmes de Riemann élémentaires (méthode de Glimm), l'approximation par des modèles cinétiques (méthode de relaxation), et l'approximation par des équations paraboliques (méthode de viscosité). On a choisi ici de présenter cette dernière approche.

L'équation de Burgers

$$\partial_t u + u \partial_x u = \frac{\varepsilon}{2} \partial_{xx}^2 u$$

est une approximation visqueuse de l'équation de Hopf (par analogie avec les modèles visqueux de la dynamique des gaz). On s'attend typiquement à ce que

- l'effet régularisant de l'équation de la chaleur (qui sera étudié de façon plus systématique dans la partie suivante du cours) permette de contrôler la nonlinéarité,
- les chocs soient lissés selon des profils réguliers à l'échelle  $\sqrt{\varepsilon}$ .

On va montrer en effet que, pour tout  $\varepsilon > 0$  fixé, il existe une unique solution globale (classique) à l'équation de Burgers, puis que cette famille converge quand  $\varepsilon \rightarrow 0$  vers l'unique solution entropique de l'équation de Hopf.

#### 5.3.1. La transformation de Cole-Hopf. —

La résolution de l'équation de Burgers est en fait explicite, elle repose sur un changement de variable très astucieux, appelé transformation de Cole-Hopf :

**Lemme 5.3.1 (Transformation de Cole-Hopf).** — *Soit  $\phi$  une solution (classique) positive de l'équation de la chaleur*

$$\partial_t \phi - \frac{\varepsilon}{2} \partial_{xx}^2 \phi = 0.$$

On définit  $u = \partial_x U$  où

$$\lambda U(t, x) = -\log \phi(t, x).$$

Alors  $u$  est une solution de l'équation de Burgers

$$\partial_t u + \frac{1}{2}(\varepsilon \lambda) \partial_x (u^2) - \frac{\varepsilon}{2} \partial_{xx}^2 u = 0.$$

*Démonstration.* — La preuve repose sur des calculs élémentaires. A partir de la formule  $\phi(t, x) = \exp(-\lambda U(t, x))$ , on obtient

$$\partial_t \phi - \frac{\varepsilon}{2} \partial_{xx}^2 \phi = -\lambda \exp(-\lambda U) \left( \partial_t U + \frac{1}{2}(\varepsilon \lambda) (\partial_x U)^2 - \frac{\varepsilon}{2} \partial_{xx}^2 U \right) = 0,$$

ce qui montre que

$$\partial_t U + \frac{1}{2}(\varepsilon \lambda) (\partial_x U)^2 - \frac{\varepsilon}{2} \partial_{xx}^2 U = 0.$$

En différentiant par rapport à  $x$ , on obtient finalement

$$\partial_t u + \frac{1}{2}(\varepsilon \lambda) \partial_x (u^2) - \frac{\varepsilon}{2} \partial_{xx}^2 u = 0$$

ce qui signifie que  $u$  est solution de l'équation de Burgers pourvu que  $\varepsilon \lambda = 1$ . □

La stratégie qu'on va utiliser pour résoudre l'équation de Burgers consiste alors

- à calculer la donnée initiale  $\phi_0$  pour l'équation de la chaleur associée

$$\phi_0 = \exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}U_0\right) \text{ avec } U_0(x) = \int_{-\infty}^x u_0(y)dy$$

qui est bien définie dès que  $u_0$  est régulière et rapidement décroissante à l'infini par exemple;

- à résoudre l'équation de la chaleur avec donnée initiale  $\phi_0$ ;

On vérifiera en particulier que  $\phi$  reste positive :

$$\forall t \geq 0, \forall x \in \mathbf{R}, \quad 0 \leq \phi(t, x) \leq \|\phi_0\|_\infty.$$

- à retrouver la solution de l'équation de Burgers par changement de variable inverse

$$u = -\varepsilon \frac{\partial_x \phi}{\phi}.$$

Comme l'équation de la chaleur est linéaire à coefficients constants, on en obtient toutes les solutions par convolution à partir de la fonction de Green, solution fondamentale de l'équation ayant la masse de Dirac comme donnée initiale. Nous verrons dans la suite de ce cours des méthodes systématiques pour étudier ce type d'équations, dite paraboliques, mais ici la situation est suffisamment simple pour que toutes les propriétés de  $\phi$  puissent être obtenues à partir des formules explicites :

**Lemme 5.3.2 (Fonction de Green).** — *La solution  $\phi$  de l'équation de la chaleur*

$$\partial_t \phi - \frac{\varepsilon}{2} \partial_{xx}^2 \phi = 0.$$

*avec donnée initiale  $\phi_0 = \exp(-\frac{1}{\varepsilon}U_0)$  s'écrit*

$$\phi(t, x) = \int \frac{1}{\sqrt{\varepsilon t}} \exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}U_0(x-y) - \left(\frac{y}{\sqrt{2\varepsilon t}}\right)^2\right) dy$$

*En particulier, elle est  $C^\infty$ , positive et vérifie le principe du maximum*

$$\forall t \geq 0, \quad \|\phi(t)\|_\infty \leq \|\phi_0\|_\infty.$$

*Démonstration.* — Soit  $G$  la solution au sens des distributions de l'équation de la chaleur ayant la masse de Dirac comme donnée initiale

$$\partial_t G - \frac{\varepsilon}{2} \partial_{xx}^2 G = 0, \quad G|_{t=0} = \delta_0.$$

On vérifie facilement, par définition de la convolution sur les distributions, que  $\phi = G * \phi_0$  est bien une fonction régulière et qu'elle satisfait l'équation de la chaleur au sens des distributions. Comme la dérivation-distribution coïncide avec la dérivation classique pour les fonctions régulières, on obtient ainsi une solution classique de l'équation de la chaleur.

• A cause de l'invariance par changement d'échelle de l'équation de la chaleur et de la forme particulière de la donnée initiale, il est naturel de chercher  $G$  sous la forme d'une solution auto-similaire du type

$$G(t, x) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon t}} g\left(\frac{x}{\sqrt{\varepsilon t}}\right).$$

En effet, cela assure que  $G(t)$  converge vers la masse de Dirac (au sens des distributions) quand  $t \rightarrow 0$ .

En insérant cet Ansatz dans l'équation de la chaleur, on obtient l'équation différentielle ordinaire :

$$g(\xi) + \xi g'(\xi) + g''(\xi) = 0$$

Une solution de cette équation différentielle est la distribution gaussienne

$$g(\xi) = \exp\left(-\frac{1}{2}\xi^2\right).$$

On a alors la formule explicite suivante

$$(5.3.1) \quad \begin{aligned} \phi(t, x) &= \int \frac{1}{\sqrt{\varepsilon t}} \exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}U_0(y) - \left(\frac{x-y}{\sqrt{2\varepsilon t}}\right)^2\right) dy \\ &= \int \frac{1}{\sqrt{\varepsilon t}} \exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}U_0(x-y) - \left(\frac{y}{\sqrt{2\varepsilon t}}\right)^2\right) dy \end{aligned}$$

• De la première formule, on déduit que  $\phi(t) \in C^\infty(\mathbf{R})$  pour tout  $t > 0$  (quelle que soit la régularité de la donnée initiale) : on dit que l'équation de la chaleur a un effet régularisant (caractéristique des équations paraboliques).

L'intégrande admet en effet des dérivées par rapport à  $x$  à tout ordre  $k$  : pour tout  $\varepsilon > 0$  et  $t > 0$  fixés, et tout  $x \in [-R, R]$

$$\left| \partial_x^k \left( \frac{1}{\sqrt{\varepsilon t}} \exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}U_0(y) - \left(\frac{x-y}{\sqrt{2\varepsilon t}}\right)^2\right) \right) \right| \leq C(\varepsilon, t, R) \exp\left(-\left(\frac{y}{\sqrt{4\varepsilon t}}\right)^2\right)$$

On peut alors échanger l'ordre de l'intégration et de la dérivation (théorème de convergence dominée de Lebesgue).  $\square$

**5.3.2. Le problème de Cauchy pour l'équation de Burgers.** — Les deux lemmes du paragraphe précédent permettent de mettre en oeuvre la stratégie proposée, et de montrer l'existence et l'unicité d'une solution pour l'équation de Burgers :

**Proposition 5.3.3 (Existence et unicité).** — Soit  $u_0$  une fonction bornée sur  $\mathbf{R}^+$ . L'équation de Burgers

$$\partial_t u + \frac{1}{2} \partial_x u^2 - \frac{\varepsilon}{2} \partial_{xx}^2 u = 0 \quad u|_{t=0} = u_0,$$

admet une unique solution  $u_\varepsilon$  bornée sur  $\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}$ , telle que  $u_\varepsilon(t)$  est de classe  $C^\infty$  pour tout  $t > 0$ .

*Démonstration.* — A partir de la seconde formule définissant  $\phi$  dans (5.3.1) et en utilisant le théorème de convergence dominée, on obtient

$$-\varepsilon \partial_x \phi(t, x) = \int \frac{1}{\sqrt{\varepsilon t}} u_0(x-y) \exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}U_0(x-y) - \left(\frac{y}{\sqrt{2\varepsilon t}}\right)^2\right) dy.$$

• Par inversion de la transformation de Cole-Hopf, on a alors

$$u(t, x) = -\varepsilon \frac{\partial_x \phi}{\phi}(t, x) = \frac{\int u_0(y) \exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}U_0(y) - \left(\frac{x-y}{\sqrt{2\varepsilon t}}\right)^2\right) dy}{\int \exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}U_0(y) - \left(\frac{x-y}{\sqrt{2\varepsilon t}}\right)^2\right) dy},$$

de sorte que pour tout  $t > 0$ , on a le principe du maximum

$$|u(x, t)| \leq \|u_0\|_\infty.$$

En combinant le théorème de dérivation sous l'intégrale, et les règles de calcul usuelles pour les dérivées de quotients, on a alors que  $u(t)$  est de classe  $C^\infty(\mathbf{R}^+)$  pour tout temps  $t > 0$ .

• Reste à établir l'unicité dans la classe des fonctions bornées. La transformation de Cole-Hopf est clairement injective, et elle envoie les fonctions bornées sur les fonctions à croissance au plus exponentielle. Il suffit donc d'établir l'unicité pour l'équation de la chaleur dans cette classe de fonctions. On présente ici une preuve élémentaire de ce résultat, mais on verra des méthodes plus systématiques dans la suite du cours.

Comme l'équation de la chaleur est une équation linéaire, il suffit de prouver que la solution nulle est l'unique solution qui a 0 pour donnée initiale. On considère donc une solution à croissance au plus exponentielle de

$$\partial_t \psi - \frac{\varepsilon}{2} \partial_{xx}^2 \psi = 0, \quad \psi|_{t=0} = 0.$$

Comme la convolution commute avec les opérateurs différentiels, quitte à régulariser  $\psi(t)$ , on peut supposer que  $\psi(t) \in C_b^\infty(\mathbf{R})$ .

En multipliant l'équation par  $\exp(-\mu|x|)\psi$  et en intégrant par parties, on obtient

$$\frac{1}{2} \partial_t \int \exp(-\mu|x|) \psi^2(t, x) dx + \frac{\varepsilon}{2} \int \exp(-\mu|x|) (\partial_x \psi)^2(t, x) dx + \frac{\varepsilon \mu}{2} \int \text{sign}(x) \exp(-\mu|x|) \psi \partial_x \psi(t, x) dx = 0.$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on en déduit que

$$\frac{1}{2} \partial_t \int \exp(-\mu|x|) \psi^2(t, x) dx + \frac{\varepsilon}{4} \int \exp(-\mu|x|) (\partial_x \psi)^2(t, x) dx \leq \frac{\varepsilon \mu^2}{4} \int \exp(-\mu|x|) \psi^2(t, x) dx.$$

L'inégalité de Gronwall montre alors que

$$\int \exp(-\mu|x|) \psi^2(t, x) dx \leq \left( \int \exp(-\mu|x|) \psi^2(0, x) dx \right) \exp\left(\frac{\varepsilon \mu^2}{2} t\right) \equiv 0.$$

Ceci prouve que  $\psi$  est identiquement nulle. □

### 5.3.3. Convergence vers l'équation de Hopf. —

Pour tout  $\varepsilon$  fixé, on note  $u_\varepsilon$  l'unique solution de l'équation de Burgers avec viscosité  $\varepsilon$  et donnée initiale  $u_0$ . On s'intéresse maintenant à la limite quand  $\varepsilon \rightarrow 0$  dans laquelle on s'attend à obtenir une solution de l'équation de Hopf. Plus précisément on va montrer

**Proposition 5.3.4.** — *Soit  $u_\varepsilon$  l'unique solution de l'équation de Burgers avec viscosité  $\varepsilon$  et donnée initiale continue  $u_0$ . Alors, quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ ,  $(u_\varepsilon)$  converge (en un sens faible) vers une fonction  $u$  définie globalement en temps, et bornée presque partout. De plus,*

- les points de discontinuité de  $u$  sont dénombrables;
- $u$  est une solution globale de l'équation de Hopf (au sens des distributions);
- $u$  vérifie la condition d'entropie

$$\partial_x u(t, \cdot) \leq \frac{1}{t}.$$

La preuve repose sur la formule explicite obtenue pour  $u_\varepsilon$  :

$$u_\varepsilon(t, x) = \int u_0(y) d\mu_\varepsilon(t, x, y)$$

où la mesure de probabilité  $\mu_\varepsilon$  est définie par

$$d\mu_\varepsilon(t, x, y) = \frac{\exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}U_0(y) - \left(\frac{x-y}{\sqrt{2\varepsilon t}}\right)^2\right) dy}{\int \exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}U_0(y) - \left(\frac{x-y}{\sqrt{2\varepsilon t}}\right)^2\right) dy}.$$

On va montrer que, dans la limite  $\varepsilon \rightarrow 0$ , la mesure  $\mu_\varepsilon$  va se concentrer sur les points minimaux de la phase

$$\Psi(t, x, y) = U_0(y) + \frac{1}{2t}(x - y)^2.$$

Comme  $\Psi(t, x, \cdot)$  est régulière (lipschitzienne) et tend vers l'infini en  $\pm\infty$ , l'ensemble des points où elle atteint son minimum est un compact

$$I(t, x) \subset \{y \in \mathbf{R} / u_0(y) - \frac{1}{t}(x - y) = 0\}.$$

On définit alors

$$y_-(t, x) = \min I(t, x), \quad y_+(t, x) = \max I(t, x).$$

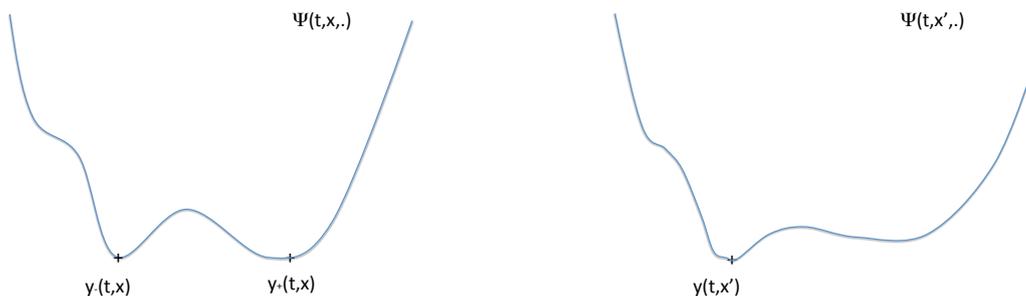


FIGURE 6. Représentation graphique de  $I(t, x)$

La première étape consiste donc à étudier les fonctions  $y_\pm$ .

**Lemme 5.3.5.** — *Pour tout  $t > 0$ , les fonctions  $y_+(t)$  et  $y_-(t)$  sont croissantes, et coïncident en dehors d'un ensemble dénombrable de points.*

*Démonstration.* — Soient  $x_1 < x_2$  et  $y < y_+(t, x_1)$ . Par définition de  $y_+(t, x_1)$ , on a

$$\begin{aligned} & \Psi(t, x_2, y) - \Psi(t, x_2, y_+(t, x_1)) \\ &= [\Psi(t, x_2, y) - \Psi(t, x_1, y)] + [(\Psi(t, x_1, y) - \Psi(t, x_1, y_+(t, x_1)))] + [\Psi(t, x_1, y_+(t, x_1)) - \Psi(t, x_2, y_+(t, x_1))] \\ &= \frac{1}{2t}(x_2 - x_1)(x_1 + x_2 - 2y) + [(\Psi(t, x_1, y) - \Psi(t, x_1, y_+(t, x_1)))] - \frac{1}{2t}(x_2 - x_1)(x_1 + x_2 - 2y_+(t, x_1)) \\ &\geq \frac{1}{t}(x_2 - x_1)(y_+(t, x_1) - y) > 0. \end{aligned}$$

On en déduit que

$$y_+(t, x_2) \geq y_-(t, x_2) \geq y_+(t, x_1) \geq y_-(t, x_1).$$

Les fonctions  $x \mapsto y_\pm(t, x)$  sont donc croissantes. En particulier, elles ont un ensemble dénombrable de points de discontinuité, qu'on appelle  $S_t$ .

Comme la fonction  $x \mapsto \min_{y \in \mathbf{R}} \Psi(t, x, y)$  est continue, on a

$$\lim_{x \rightarrow x_0} y_-(t, x) \in I(t, x_0), \quad \lim_{x \rightarrow x_0} y_+(t, x) \in I(t, x_0).$$

En utilisant la monotonie, on a de plus que

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0^-} y_-(t, x) &\leq y_-(t, x_0) = \min I(t, x_0), \\ \lim_{x \rightarrow x_0^+} y_+(t, x) &\geq y_+(t, x_0) = \max I(t, x_0), \end{aligned}$$

de sorte que

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0^-} y_-(t, x) &= y_-(t, x_0), \\ \lim_{x \rightarrow x_0^+} y_+(t, x) &= y_+(t, x_0). \end{aligned}$$

Autrement dit,

- $y_-(t)$  est continue à gauche;
- $y_+(t)$  est continue à droite.

On en déduit que

$$\begin{aligned} y_+(t, x) &\leq y_-(t, x+0) \leq y_+(t, x+0) = y_+(t, x), \\ y_-(t, x) &= y_-(t, x-0) \leq y_+(t, x-0) \leq y_-(t, x). \end{aligned}$$

En dehors de l'ensemble dénombrable  $S_t$ , on a donc  $y_+(t, x) = y_-(t, x)$  et les deux fonctions sont continues.  $\square$

La deuxième étape consiste alors à appliquer un résultat de “phase stationnaire” pour caractériser la limite  $u$  de la suite  $(u_\varepsilon)$ .

**Lemme 5.3.6.** — *Pour tout  $t > 0$ , la suite  $(u_\varepsilon)$  converge ponctuellement sur  $\mathbf{R} \setminus S_t$  vers la fonction  $u$  définie par*

$$u(t, x) = u_0(y_\pm(t, x)) = \frac{1}{t}(x - y_\pm(t, x)).$$

*Démonstration.* — Comme la fonction de phase  $\Psi$  se comporte comme  $y^2/2t$  quand  $y \rightarrow \pm\infty$ , on peut se restreindre à l'étude de l'intégrale sur un domaine borné : pour  $R$  assez grand,

$$\int \exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}(\Psi(t, x, y) - \Psi_{\min}(t, x))\right) dy = \int_{-R}^R \exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}(\Psi(t, x, y) - \Psi_{\min}(t, x))\right) dy + o(\exp(-R^2/4\varepsilon t)).$$

On décompose alors l'intégrale en deux termes, en fonction de la taille de  $\Psi(t, x, y) - \Psi_{\min}(t, x)$ . D'une part, on a

$$\int_{-R}^R \mathbb{1}_{\Psi(t, x, y) - \Psi_{\min}(t, x) > \delta} \exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}(\Psi(t, x, y) - \Psi_{\min}(t, x))\right) dy \leq 2R \exp(-\frac{\delta}{\varepsilon}).$$

D'autre part, comme  $\Psi(t, x, \cdot)$  est continue, il existe  $\omega$  tel que

$$\forall y \text{ tel que } |y - y(t, x)| \leq \omega(t, x), \quad \Psi(t, x, y) - \Psi_{\min}(t, x) < \delta/2,$$

de sorte que

$$\int_{-R}^R \mathbb{1}_{\Psi(t, x, y) - \Psi_{\min}(t, x) < \delta} \exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}(\Psi(t, x, y) - \Psi_{\min}(t, x))\right) dy \geq 2\omega \exp(-\frac{\delta}{2\varepsilon}).$$

En particulier, quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ ,

$$\int \exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}(\Psi(t, x, y) - \Psi_{\min}(t, x))\right) dy \sim \int \mathbb{1}_{\Psi(t, x, y) - \Psi_{\min}(t, x) < \delta} \exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}(\Psi(t, x, y) - \Psi_{\min}(t, x))\right) dy.$$

Cela signifie que le support de la mesure limite  $\mu$  est inclus dans l'ensemble

$$\{y / \Psi(t, x, y) - \Psi_{\min}(t, x) < \delta\}$$

et ceci pour tout  $\delta > 0$ .

La mesure limite  $\mu$  est donc une mesure de probabilité, supportée par  $\{y_{\pm}(t, x)\}$ . On en déduit la formule de Lax-Oleinik

$$u(t, x) = u_0(y_{\pm}(t, x)) = \frac{1}{t}(x - y_{\pm}(t, x)).$$

□

*Démonstration de la Proposition 5.3.4. —*

• On commence par prouver que  $u$  est une solution de l'équation de Hopf au sens des distributions.

Le lemme précédent montre que  $u_{\varepsilon}$  converge presque partout vers  $u$ . D'après le principe du maximum,  $|u_{\varepsilon}|$  est uniformément bornée (par  $\max |u_0|$ ). Le théorème de convergence dominée permet donc de conclure que

$$u_{\varepsilon} \rightarrow u \text{ dans } L^2, \text{ et donc au sens des distributions.}$$

On peut alors passer à la limite dans la formulation faible de l'équation de Burgers

$$\int_0^{+\infty} \int \left( u_{\varepsilon} \partial_t \varphi + \frac{1}{2} u_{\varepsilon}^2 \partial_x \varphi + \frac{\varepsilon}{2} u_{\varepsilon} \partial_{xx} \varphi \right) dt dx = - \int u_0 \varphi|_{t=0} dx,$$

ce qui donne

$$\int_0^{+\infty} \int \left( u \partial_t \varphi + \frac{1}{2} u^2 \partial_x \varphi \right) dt dx = - \int u_0 \varphi|_{t=0} dx$$

qui est la formulation faible de l'équation de Hopf.

• On vérifie ensuite que  $u$  coïncide avec l'unique solution classique de l'équation de Hopf tant que cette dernière est définie.

L'explosion de la solution classique a lieu au temps de première intersection des caractéristiques

$$t_0 = \frac{1}{\sup_{x \in \mathbf{R}} (-u'_0(x))_+}$$

ce qui signifie que pour tout  $t \in [0, t_0[$

$$y \mapsto y + tu_0(y) \text{ est une fonction continue bijective (croissante) sur } \mathbf{R}.$$

Autrement dit,

$$\frac{\partial}{\partial y} \Psi(t, x, y) = \frac{1}{t}(y - x + tu_0(y)) \text{ est une fonction continue bijective (croissante) sur } \mathbf{R}.$$

En particulier, pour tout  $t \in [0, t_0[$  et tout  $x \in \mathbf{R}$ , il existe un unique  $y = y(t, x)$  tel que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \Psi(t, x, y) &= u_0(y) + \frac{1}{t}(y - x) = 0, \\ \Psi(t, x, y(t, x)) &= \min_{y \in \mathbf{R}} \Psi(t, x, y) \end{aligned}$$

L'ensemble  $S_t$  est donc vide, et la formule de Lax-Oleinik donne

$$u(t, x) = \frac{1}{t}(x - y(t, x)) = u_0(y(t, x))$$

ce qui est exactement la formule des caractéristiques.

• Pour finir, on va montrer que la solution  $u$  de l'équation de Hopf (obtenue à partir des solutions de l'équation de Burgers dans la limite de viscosité évanescence) satisfait de plus la condition d'entropie

$$\partial_x u(t, \cdot) \leq \frac{1}{t}$$

ce qui signifie que  $u$  décroît sur les discontinuités admissibles.

On sait que l'application  $x \mapsto y_+(t, x)$  est continue en dehors de l'ensemble dénombrable  $S_t$  et localement bornée. C'est donc une distribution, et elle admet une dérivée au sens des distributions. Comme  $x \mapsto y_+(t, x)$  est croissante, on a de plus

$$\partial_x y_+ \geq 0 \text{ au sens des distributions.}$$

En utilisant la formule de Lax-Oleinik, on a alors

$$t\partial_x u = 1 - \partial_x y_+ \leq 1 \text{ au sens des distributions,}$$

ce qui conclut la preuve. □



## **PARTIE III**

### **ANALYSE DE FOURIER**



## CHAPITRE 6

### TRANSFORMATION DE FOURIER

L'analyse de Fourier consiste à décomposer une fonction et plus généralement une distribution en une "superposition" de fonctions oscillantes simples (fonctions exponentielles complexes). Cette analyse en fréquences est un outil très puissant pour l'étude d'un certain nombre de questions, notamment les phénomènes oscillants (par définition), les phénomènes régis par des équations aux dérivées partielles linéaires à coefficients constants (telles que l'équation de la chaleur), les problèmes de régularité [10], [9], [15], [14], [16].

L'idée fondamentale est que l'opération de convolution est transformée en produit, ou encore que la régularité est transformée en décroissance à l'infini.

#### 6.1. Transformation de Fourier des fonctions sommables

**Définition 6.1.1.** — Soit  $f \in L^1_{loc}(\mathbf{R}^N)$ . La transformée de Fourier de  $f$  est la fonction  $\mathcal{F}f$  définie sur  $\mathbf{R}^N$  par

$$\mathcal{F}f(\xi) = \int_{\mathbf{R}^N} \exp(-ix \cdot \xi) f(x) dx.$$

**Propriété 6.1.2.** — Soient  $f, g \in L^1(\mathbf{R}^N)$ . Alors

(i)  $\mathcal{F}f$  est continue sur  $\mathbf{R}^N$  et  $\|\mathcal{F}f\|_\infty \leq \|f\|_{L^1}$ ;

(ii) on a l'identité  $\mathcal{F}(f * g) = (\mathcal{F}f) \times (\mathcal{F}g)$ .

*Démonstration.* — Ces deux propriétés découlent très simplement de la théorie de l'intégration.

• La continuité de  $\mathcal{F}f$  repose sur le théorème de convergence dominée. En effet, on a

$$\forall \xi \in \mathbf{R}^N, \quad |\mathcal{F}f(\xi)| \leq \int_{\mathbf{R}^N} |\exp(-ix \cdot \xi)| |f(x)| dx \leq \|f\|_{L^1}.$$

Comme, pour tout  $x \in \mathbf{R}^N$ ,

$$\lim_{\xi \rightarrow \xi_0} \exp(-ix \cdot \xi) = \exp(-ix \cdot \xi_0),$$

on a alors

$$\lim_{\xi \rightarrow \xi_0} \mathcal{F}f(\xi) = \mathcal{F}f(\xi_0).$$

- Pour obtenir l'identité sur la convolution, on utilise le théorème de Fubini. Par définition,

$$\mathcal{F}(f * g)(\xi) = \int_{\mathbf{R}^N} \exp(-ix \cdot \xi) \left( \int_{\mathbf{R}^N} f(x-y)g(y)dy \right) dx.$$

Comme la fonction à intégrer est sommable sur  $\mathbf{R}^{2N}$ , on a

$$\mathcal{F}(f * g)(\xi) = \int_{\mathbf{R}^{2N}} \exp(-ix \cdot \xi) f(x-y)g(y)dx dy,$$

d'où, par le changement de variable  $z = x - y$ ,

$$\mathcal{F}(f * g)(\xi) = \int_{\mathbf{R}^{2N}} \exp(-iz \cdot \xi) f(z) \exp(-iy \cdot \xi) g(y) dx dy = \mathcal{F}f(\xi) \mathcal{F}g(\xi),$$

ce qui prouve que la convolution est transformée en produit.  $\square$

L'ensemble des fonctions gaussiennes est conservé par transformation de Fourier. En effet, si on note  $f : x \in \mathbf{R} \mapsto \exp(-\frac{x^2}{2})$ , en utilisant le théorème de convergence dominée, on montre que  $\mathcal{F}f$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbf{R}$  et que

$$\begin{aligned} (\mathcal{F}f)'(\xi) &= \int_{\mathbf{R}} (-ix) \exp(-ix \cdot \xi) \exp(-\frac{x^2}{2}) dx = i \int_{\mathbf{R}} \exp(-ix \cdot \xi) \frac{d}{dx} \left( \exp(-\frac{x^2}{2}) \right) dx \\ &= -\xi \int_{\mathbf{R}} \exp(-ix \cdot \xi) \exp(-\frac{x^2}{2}) dx = -\xi \mathcal{F}f(\xi). \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\mathcal{F}f(\xi) = \mathcal{F}f(0) \exp(-\frac{\xi^2}{2}) \text{ avec } \mathcal{F}f(0) = \int_{\mathbf{R}} \exp(-\frac{x^2}{2}) dx = \sqrt{2\pi}.$$

Cette propriété permet d'obtenir un procédé de régularisation (par convolution), qui est bien adapté à la transformation de Fourier. Il est utilisé par exemple pour montrer le

**Théorème 6.1 (Théorème d'inversion de Fourier).** — Soit  $f \in L^1(\mathbf{R}^N)$  telle que  $\mathcal{F}f \in L^1(\mathbf{R}^N)$ . Alors on a l'identité

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{\mathbf{R}^N} \exp(ix \cdot \xi) \mathcal{F}f(\xi) d\xi = \frac{1}{(2\pi)^N} \bar{\mathcal{F}}(\mathcal{F}f)(x) \text{ presque partout sur } \mathbf{R}^N.$$

*Démonstration.* — La valeur au point  $x$  de la fonction figurant au membre de droite peut s'écrire

$$\frac{1}{(2\pi)^N} \int_{\mathbf{R}^N} \exp(ix \cdot \xi) \left( \int_{\mathbf{R}^N} \exp(-iy \cdot \xi) f(y) dy \right) d\xi,$$

mais il est impossible d'appliquer le théorème de Fubini, la fonction à intégrer n'étant pas sommable dans  $\mathbf{R}^{2N}$ . On la multiplie alors par la gaussienne  $\exp(-\varepsilon^2 \frac{\xi^2}{2})$  qui tend vers 1 quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ , et on évalue l'intégrale

$$I_\varepsilon(x) = \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{\mathbf{R}^{2N}} \exp(i(x-y) \cdot \xi) \exp(-\varepsilon^2 \frac{\xi^2}{2}) f(y) dy d\xi$$

de deux façons différentes.

- En intégrant d'abord par rapport à  $y$ , on obtient

$$I_\varepsilon(x) = \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{\mathbf{R}^N} \exp(ix \cdot \xi) \exp(-\varepsilon^2 \frac{\xi^2}{2}) \mathcal{F}f(\xi) d\xi.$$

Le théorème de convergence dominée de Lebesgue montre alors que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_\varepsilon(x) = \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{\mathbf{R}^N} \exp(ix \cdot \xi) \mathcal{F}f(\xi) d\xi.$$

• En intégrant d'abord par rapport à  $\xi$ , on obtient - en utilisant l'invariance de la gaussienne par transformation de Fourier -

$$\begin{aligned} I_\varepsilon(x) &= \frac{1}{(2\pi\varepsilon)^N} \int_{\mathbf{R}^N} f(y) \int_{\mathbf{R}^N} \exp\left(i\frac{1}{\varepsilon}(x-y) \cdot \varepsilon\xi\right) \exp \text{Big}\left(-\varepsilon^2 \frac{\xi^2}{2}\right) \varepsilon^N d\xi \\ &= \frac{1}{(\varepsilon\sqrt{2\pi})^N} \int_{\mathbf{R}^N} f(y) \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{2\varepsilon}\right) dy \end{aligned}$$

La fonction  $\rho_\varepsilon$  définie par

$$\rho_\varepsilon(z) = \frac{1}{\varepsilon^N} \rho\left(\frac{z}{\varepsilon}\right) \quad \text{où} \quad \rho(z) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right)$$

est positive, régulière (de classe  $C^\infty$ ) et d'intégrale 1. Autrement dit,  $\rho_\varepsilon$  est une suite régularisante qui converge (en mesure) vers la masse de Dirac. On a alors

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_\varepsilon(x) = f(x).$$

La formule d'inversion est alors obtenue par unicité de la limite. □

A posteriori, on voit que si  $f$  et  $\mathcal{F}f$  sont dans  $L^1(\mathbf{R}^N)$ ,  $f$  est égale (presque partout) à une fonction continue. Cela écarte des fonctions d'un usage tout-à-fait courant en mathématiques et en physique.

Plancherel a donc étendu la transformée de Fourier aux fonctions de carré sommable, et Schwartz aux distributions tempérées.

## 6.2. Transformation de Fourier sur la classe de Schwartz

**Définition 6.2.1.** — La classe de Schwartz  $\mathcal{S}(\mathbf{R}^N)$  est l'ensemble des fonctions  $\varphi \in C^\infty(\mathbf{R}^N)$  à décroissance rapide, c'est-à-dire telles que

$$\forall p \in \mathbf{N}, \quad \exists C_p > 0, \quad \sup_{|\alpha| \leq p, |\beta| \leq p} \|x^\alpha \partial^\beta \varphi(x)\|_\infty \leq C_p.$$

**Propriété 6.2.2.** — La classe de Schwartz  $\mathcal{S}(\mathbf{R}^N)$  est stable par dérivation, et par multiplication par les polynômes.

Les fonctions  $C_c^\infty(\mathbf{R}^N)$  sont denses dans  $\mathcal{S}(\mathbf{R}^N)$ .

*Démonstration.* — On se donne  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^N)$ .

• La stabilité par dérivation et par multiplication par les polynômes se vérifie par un simple calcul :

Pour tout  $i \in \{1, \dots, N\}$ ,  $\partial_i \varphi \in C^\infty(\mathbf{R}^N)$  et

$$\forall p \in \mathbf{N}, \quad \sup_{\substack{|\alpha| \leq p \\ |\beta| \leq p}} \|x^\alpha \partial^\beta \partial_i \varphi\|_\infty \leq \sup_{\substack{|\alpha| \leq p+1 \\ |\beta| \leq p+1}} \|x^\alpha \partial^\beta \varphi\|_\infty < +\infty.$$

Autrement dit,  $\partial_i \varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^N)$ .

Pour tout  $P \in \mathbf{R}[X]$ ,  $P\varphi \in C^\infty(\mathbf{R}^N)$  et, grâce à la formule de Leibniz,

$$\forall p \in \mathbf{N}, \quad \sup_{\substack{|\alpha| \leq p \\ |\beta| \leq p}} \|x^\alpha \partial^\beta (P\varphi)\|_\infty \leq C \sup_{\substack{|\alpha| \leq p+k \\ |\beta| \leq p+k}} \|x^\alpha \partial^\beta \varphi\|_\infty < +\infty,$$

où  $k$  est le degré de  $P$ . Autrement dit,  $(P\varphi) \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^N)$ .

• L'approximation par des fonctions  $C_c^\infty(\mathbf{R}^N)$  s'obtient par troncature.

On se donne  $\psi \in C_c^\infty(\mathbf{R}^N, [0, 1])$  telle que  $\psi \equiv 1$  sur  $B(0, 1)$ . On définit alors

$$\psi_j(x) = \psi\left(\frac{x}{j}\right) \text{ et } \varphi_j = \varphi \psi_j,$$

de sorte que  $\varphi_j \in C_c^\infty(\mathbf{R}^N)$  et  $\varphi_j \equiv \varphi$  sur  $B(0, j)$ .

D'après la formule de Leibniz,

$$\partial^\beta (\varphi - \varphi_j)(x) = \partial^\beta \varphi (1 - \psi_j) - \sum_{\substack{\gamma \leq \beta \\ |\gamma| \geq 1}} C_{\beta}^{\gamma} j^{-|\gamma|} (\partial^\gamma \psi)_j \partial^{\beta-\gamma} \varphi,$$

de sorte que

$$\sup_{|\alpha| \leq p, |\beta| \leq p} \|x^\alpha \partial^\beta (\varphi - \varphi_j)\|_\infty \leq \frac{C}{j} \sup_{|\alpha| \leq p+1, |\gamma| \leq p+1} \|x^\alpha \partial^\gamma \varphi\|_\infty,$$

tend vers 0 quand  $j \rightarrow \infty$ . Ceci prouve que  $\varphi_j \rightarrow \varphi$  dans  $\mathcal{S}(\mathbf{R}^N)$ .  $\square$

L'exemple typique de fonction de  $\mathcal{S}(\mathbf{R})$  est la gaussienne, dont on a vu précédemment qu'elle est stable par transformation de Fourier. De façon plus générale, la classe de Schwartz est stable par transformation de Fourier.

**Théorème 6.2.** — *La transformation de Fourier  $\mathcal{F}$  est un isomorphisme de  $\mathcal{S}(\mathbf{R}^N)$  sur lui-même, d'inverse  $(2\pi)^{-N} \bar{\mathcal{F}}$ .*

*Démonstration.* — On commence par prouver que la transformation de Fourier échange régularité et décroissance à l'infini.

Soit  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^N)$ .

$$\begin{aligned} \partial_{\xi_j} (\exp(-ix \cdot \xi) \varphi(x)) &= -ix_j \exp(-ix \cdot \xi) \varphi(x), \\ |-ix_j \exp(-ix \cdot \xi) \varphi(x)| &\leq |x_j \varphi(x)| \in L^1(\mathbf{R}^N). \end{aligned}$$

Par le théorème de convergence dominée, on a alors

$$\partial_{\xi_j} (\mathcal{F}\varphi) = \mathcal{F}(-ix_j \varphi).$$

Par récurrence, on en déduit que

$$\partial^\alpha (\mathcal{F}\varphi) = (-i)^{|\alpha|} \mathcal{F}(x^\alpha \varphi).$$

D'autre part, par intégration par parties, on a

$$\begin{aligned} \int \exp(-ix_j \xi_j) \partial_j \varphi(x) dx_j &= i \xi_j \int \exp(-ix_j \xi_j) \varphi(x) dx_j, \\ |\partial_j \varphi|, |\varphi| &\in L^1(\mathbf{R}^N). \end{aligned}$$

Par le théorème de Fubini, on a alors

$$\mathcal{F}(\partial_j \varphi) = i \xi_j \mathcal{F}\varphi.$$

Par récurrence, on en déduit que

$$\mathcal{F}(\partial^\beta \varphi) = (i\xi)^\beta \mathcal{F}\varphi.$$

La transformation de Fourier applique donc  $\mathcal{S}(\mathbf{R}^N)$  dans lui-même. En effet, en utilisant les propriétés précédentes et la formule de Leibniz, on a

$$\begin{aligned} \sup_{|\alpha| \leq p, |\beta| \leq p} \|\xi^\alpha \partial^\beta \mathcal{F}\varphi\|_\infty &\leq \sup_{|\alpha| \leq p, |\beta| \leq p} \|\partial^\alpha (x^\beta \varphi)\|_{L^1} \\ &\leq C \sup_{|\alpha| \leq p, |\beta| \leq p} \|x^\beta \partial^\alpha \varphi\|_{L^1} \\ &\leq C \sup_{|\alpha| \leq p, |\beta| \leq p+N+1} \|x^\beta \partial^\alpha \varphi\|_\infty \end{aligned}$$

puisque  $(1 + |x|)^{-(N+1)}$  est intégrable sur  $\mathbf{R}^N$ . Cela signifie que, si  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^N)$ ,  $\mathcal{F}\varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^N)$ .

Le théorème d'inversion de Fourier, applicable lorsqu'on sait que  $\varphi$  et  $\mathcal{F}\varphi$  sont dans  $\mathcal{S}(\mathbf{R}^N) \subset L^1(\mathbf{R}^N)$ , assure alors que  $(2\pi)^{-N} \mathcal{F}\bar{\mathcal{F}} = (2\pi)^{-N} \bar{\mathcal{F}}\mathcal{F} = Id$ .  $\square$

### 6.3. Transformation de Fourier des distributions tempérées

**Définition 6.3.1.** — Une distribution  $u$  est dite tempérée ( $u \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^N)$ ) s'il existe  $p \in \mathbf{N}$  et  $C > 0$  tels que

$$\forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbf{R}^N), \quad |\langle u, \varphi \rangle| \leq C \sup_{|\alpha| \leq p, |\beta| \leq p} \|x^\alpha \partial^\beta \varphi\|_\infty.$$

Une telle distribution se prolonge de manière unique en une forme linéaire sur  $\mathcal{S}(\mathbf{R}^N)$ .

Soit  $(u_n)$  une suite de  $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^N)$ . On dit que  $(u_n)$  converge vers  $u$  dans  $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^N)$  si

$$\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^N), \quad \langle u_n, \varphi \rangle \rightarrow \langle u, \varphi \rangle \text{ quand } n \rightarrow \infty.$$

Les espaces de Lebesgue  $L^p(\mathbf{R}^N)$  s'identifient à des sous-ensembles de  $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^N)$ .

L'espace  $\mathcal{E}'(\mathbf{R}^N)$  est un sous-espace de  $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^N)$  car toute distribution à support compact est nécessairement d'ordre fini.

**Propriété 6.3.2.** — L'espace  $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^N)$  est stable par dérivation, et par multiplication par les fonctions  $f \in C^\infty(\mathbf{R}^N)$  à croissance lente, i.e. telles que

$$\forall \beta \in \mathbf{N}^N, \quad \exists C_\beta, m_\beta, \quad |\partial^\beta f(x)| \leq C_\beta (1 + |x|)^{m_\beta}.$$

*Démonstration.* — On se donne  $u \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^N)$ .

Pour tout  $i \in \{1, \dots, N\}$ ,

$$\begin{aligned} \forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbf{R}^N), \quad |\langle \partial_i u, \varphi \rangle| &= |\langle u, \partial_i \varphi \rangle| \leq C \sup_{|\alpha| \leq p, |\beta| \leq p} \|x^\alpha \partial^\beta \partial_i \varphi\|_\infty \\ &\leq \sup_{|\alpha| \leq p+1, |\beta| \leq p+1} \|x^\alpha \partial^\beta \varphi\|_\infty, \end{aligned}$$

ce qui prouve que  $\partial_i u \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^N)$ .

Pour toute fonction  $f$  à croissance lente,

$$\forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbf{R}^N), \quad |\langle uf, \varphi \rangle| = |\langle u, f\varphi \rangle| \leq C \sup_{|\alpha| \leq p, |\beta| \leq p} \|x^\alpha \partial^\beta (f\varphi)\|_\infty.$$

La formule de Leibniz donne

$$\partial^\beta (f\varphi) = \sum_{\gamma \leq \beta} C_\beta^\gamma \partial^\gamma f \partial^{\beta-\gamma} \varphi.$$

Si on désigne par  $M_p$  le plus grand des  $m_\beta$  intervenant dans la croissance de  $\partial^\beta f$  pour  $|\beta| \leq p$ , on a alors

$$\sup_{|\alpha| \leq p, |\beta| \leq p} \|x^\alpha \partial^\beta (f\varphi)\|_\infty \leq C \sup_{|\alpha| \leq p+M_p, |\beta| \leq p+M_p} \|x^\alpha \partial^\beta \varphi\|_\infty,$$

d'où l'on déduit que

$$|\langle uf, \varphi \rangle| \leq C \sup_{|\alpha| \leq p+M_p, |\beta| \leq p+M_p} \|x^\alpha \partial^\beta \varphi\|_\infty.$$

Finalement  $uf \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^N)$ . □

Par dualité, on peut alors définir la transformation de Fourier sur les distributions tempérées.

**Définition 6.3.3.** — Soit  $u \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^N)$ . La transformée de Fourier de  $u$  est la distribution  $\mathcal{F}u$  définie par

$$\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^N), \quad \langle \mathcal{F}u, \varphi \rangle = \langle u, \mathcal{F}\varphi \rangle.$$

La distribution  $\mathcal{F}u$  ainsi définie est une distribution tempérée puisqu'on a la majoration

$$\sup_{|\alpha| \leq p, |\beta| \leq p} \|\xi^\alpha \partial^\beta \mathcal{F}\varphi\|_\infty \leq C \sup_{|\alpha| \leq p+N+1, |\beta| \leq p+N+1} \|\xi^\beta \partial^\alpha \mathcal{F}\varphi\|_\infty.$$

**Théorème 6.3.** — La transformation de Fourier  $\mathcal{F}$  est un isomorphisme de  $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^N)$  sur lui-même, d'inverse  $(2\pi)^{-N} \bar{\mathcal{F}}$ .

*Démonstration.* — Par définition, la transformation de Fourier applique  $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^N)$  dans lui-même.

Comme  $(2\pi)^{-N} \mathcal{F}\bar{\mathcal{F}} = (2\pi)^{-N} \bar{\mathcal{F}}\mathcal{F} = Id$  sur  $\mathcal{S}(\mathbf{R}^N)$ , on a pour tout  $u \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^N)$ , et tout  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^N)$

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{F}\bar{\mathcal{F}}u, \varphi \rangle &= \langle u, \bar{\mathcal{F}}\mathcal{F}\varphi \rangle = (2\pi)^N \langle u, \varphi \rangle, \\ \langle \bar{\mathcal{F}}\mathcal{F}u, \varphi \rangle &= \langle u, \mathcal{F}\bar{\mathcal{F}}\varphi \rangle = (2\pi)^N \langle u, \varphi \rangle, \end{aligned}$$

d'où l'on déduit que  $(2\pi)^{-N} \mathcal{F}\bar{\mathcal{F}} = (2\pi)^{-N} \bar{\mathcal{F}}\mathcal{F} = Id$  sur  $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^N)$ . □

Comme conséquence directe de ce résultat, on obtient la formule de Plancherel pour les fonctions de carré sommable :

**Corollaire 6.3.4.** — La transformation de Fourier  $\mathcal{F}$  est un isomorphisme de  $L^2(\mathbf{R}^N)$  sur lui-même, d'inverse  $(2\pi)^{-N} \bar{\mathcal{F}}$ .

*Démonstration.* — On commence par montrer que  $(2\pi)^{-N/2}\mathcal{F}$  est une isométrie de  $\mathcal{S}(\mathbf{R}^N)$  sur lui-même, lorsque celui-ci est muni de la norme  $L^2$ . Pour toutes fonctions  $f, g \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^N)$ , on a

$$\begin{aligned} \int f(x)\bar{g}(x)dx &= \frac{1}{(2\pi)^N} \int f(x)(\mathcal{F}\bar{\mathcal{F}}g)(x)dx \\ &= \frac{1}{(2\pi)^N} \int \mathcal{F}f(\xi)(\bar{\mathcal{F}}g)(\xi)d\xi \\ &= \frac{1}{(2\pi)^N} \int \mathcal{F}f(\xi)\overline{\mathcal{F}g(\xi)}d\xi \end{aligned}$$

ce qui montre que  $(2\pi)^{-N/2}\mathcal{F}$  conserve le produit scalaire, et donc la norme  $L^2$  pour les éléments de  $\mathcal{S}(\mathbf{R}^N)$ .

L'ensemble  $\mathcal{S}(\mathbf{R}^N)$  (qui contient  $C_c^\infty(\mathbf{R}^N)$ ) est dense dans  $L^2(\mathbf{R}^N)$ . Pour tout  $u \in L^2(\mathbf{R}^N)$ , il existe donc une suite  $(u_j)$  de  $\mathcal{S}(\mathbf{R}^N)$  telle que

$$u_j \rightarrow u \text{ dans } L^2(\mathbf{R}^N).$$

La suite  $(u_j)$  est de Cauchy, et donc - par isométrie - la suite  $(\mathcal{F}u_j)$  est aussi de Cauchy dans  $L^2(\mathbf{R}^N)$ . Comme  $L^2(\mathbf{R}^N)$  est complet, on a alors

$$\mathcal{F}u_j \rightarrow g \text{ dans } L^2(\mathbf{R}^N).$$

En identifiant  $L^2(\mathbf{R}^N)$  à un sous-espace de  $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^N)$ , on obtient

$$\mathcal{F}u_j \rightarrow \mathcal{F}u \text{ dans } \mathcal{S}'(\mathbf{R}^N),$$

d'où l'on déduit que  $\mathcal{F}u = g \in L^2(\mathbf{R}^N)$ .

Par continuité de la norme, on a de plus  $(2\pi)^{-N/2}\|\mathcal{F}u\|_{L^2(\mathbf{R}^N)} = \|u\|_{L^2(\mathbf{R}^N)}$ .

En appliquant le même raisonnement à  $(2\pi)^{-N/2}\bar{\mathcal{F}}$ , on conclut qu'on a deux isométries de  $L^2(\mathbf{R}^N)$  dans lui-même, dont les composées à droite et à gauche sont égales à l'identité. Cela termine la démonstration du théorème.  $\square$

La définition de la transformée de Fourier d'une distribution ne constitue pas un moyen de calcul effectif. On dispose de formules explicites lorsque  $u$  est une fonction sommable. A partir de résultats déjà connus, on peut en déduire d'autres par inversion de Fourier, passage à la limite, dérivation, convolution...

**Propriété 6.3.5.** — Soit  $u \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^N)$ .

- (i) Si  $u$  possède la symétrie hermitienne,  $\mathcal{F}u$  est réelle.
- (ii) Si  $u$  est paire (resp. impaire),  $\mathcal{F}u$  est paire (resp. impaire).
- (iii) Si  $\tau_a$  désigne la translation de  $a$ ,  $\mathcal{F}(\tau_a u)(\xi) = \exp(-ia \cdot \xi)\mathcal{F}u(\xi)$ .
- (iv) Si  $h_\lambda$  désigne la dilatation de rapport  $\lambda$ ,  $\mathcal{F}(h_\lambda u) = |\lambda|^{-N}h_{\lambda^{-1}}(\mathcal{F}u)$ .
- (v) Si  $v \in \mathcal{E}'(\mathbf{R}^N)$ ,  $\mathcal{F}(u * v) = (\mathcal{F}u)(\mathcal{F}v)$ .

*Démonstration.* — Les propriétés (i) – (iv) se montrent par dualité, en utilisant la formule du changement de variable. Il suffit donc de les vérifier pour les fonctions  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^N)$ .

Si  $\varphi$  possède la symétrie hermitienne  $\varphi(-x) = \bar{\varphi}(x)$

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\varphi(\xi) &= \int \exp(-ix \cdot \xi) \varphi(x) dx \\ &= \frac{1}{2} \int (\exp(-ix \cdot \xi) \varphi(x) + \exp(ix \cdot \xi) \varphi(-x)) dx = \operatorname{Re} \left( \int \exp(-ix \cdot \xi) \varphi(x) dx \right)\end{aligned}$$

Pour la conservation de la parité, il suffit de remarquer que

$$\mathcal{F}\varphi(-\xi) = \int \exp(ix \cdot \xi) \varphi(x) dx = \int \exp(-ix \cdot \xi) \varphi(-x) dx.$$

De la même façon, on a

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(\tau_a \varphi)(\xi) &= \int \exp(-ix \cdot \xi) \varphi(x - a) dx = \int \exp(-i(y + a) \cdot \xi) \varphi(y) dy = \exp(-ia \cdot \xi) \mathcal{F}\varphi(\xi), \\ \mathcal{F}(h_\lambda \varphi)(\xi) &= \int \exp(-ix \cdot \xi) \varphi(\lambda x) dx = \frac{1}{|\lambda|^N} \int \exp(-iy \cdot \frac{\xi}{\lambda}) \varphi(y) dy = |\lambda|^{-N} h_{\lambda^{-1}}(\mathcal{F}\varphi)(\xi).\end{aligned}$$

Reste à montrer l'échange de la convolution et de la multiplication.

• On commence pour cela par prouver que pour toute distribution  $v \in \mathcal{E}'(\mathbf{R}^N)$ ,  $\mathcal{F}v$  est une fonction à croissance lente et que  $\mathcal{F}v(\xi) = \langle v, \exp(-ix \cdot \xi) \rangle$ .

D'après le théorème de dérivation sous le crochet, la fonction  $\xi \mapsto \langle v, \exp(-ix \cdot \xi) \rangle$  est de classe  $C^\infty$  et

$$\partial^\alpha \langle v, \exp(-ix \cdot \xi) \rangle = \langle v, (-ix)^\alpha \exp(-ix \cdot \xi) \rangle.$$

Si  $K$  est un voisinage compact du support de  $v$  et si  $p$  est l'ordre de  $v$ ,

$$|\partial^\alpha \langle v, \exp(-ix \cdot \xi) \rangle| \leq C \sup_{|\beta| \leq p} \|\partial^\beta (x^\alpha \exp(-ix \cdot \xi))\|_\infty \leq C(1 + |\xi|^p)$$

où  $C$  ne dépend que de  $K$  et de  $\alpha$ . La fonction  $\xi \mapsto \langle v, \exp(-ix \cdot \xi) \rangle$  est donc à croissance lente.

Pour  $\varphi \in C_c^\infty(\mathbf{R}^N)$ , d'après le théorème d'intégration sous le crochet, on a

$$\int_{\mathbf{R}^N} \langle v, \exp(-ix \cdot \xi) \rangle \varphi(\xi) d\xi = \left\langle v, \int \exp(-ix \cdot \xi) \varphi(\xi) d\xi \right\rangle = \langle v, \mathcal{F}\varphi \rangle = \langle \mathcal{F}v, \varphi \rangle,$$

ce qui montre l'identité  $\mathcal{F}v(\xi) = \langle v, \exp(-ix \cdot \xi) \rangle$ .

• Soient alors  $u, v \in \mathcal{E}'(\mathbf{R}^N)$ . D'après ce qui précède,  $\mathcal{F}u$ ,  $\mathcal{F}v$  et  $\mathcal{F}(u * v)$  sont des fonctions  $C^\infty$  à croissance lente, et on a - en notant  $e_\xi : x \mapsto \exp(-ix \cdot \xi)$  -

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(u * v)(\xi) &= \langle u * v, e_\xi \rangle = \langle u, \hat{v} * e_\xi \rangle \\ \hat{v} * e_\xi(x) &= \langle \hat{v}, \widehat{\tau_x e_\xi} \rangle = \langle v, \tau_x e_\xi \rangle \\ &= \exp(-ix \cdot \xi) \langle v, e_\xi \rangle = \exp(-ix \cdot \xi) \mathcal{F}v(\xi)\end{aligned}$$

En reportant dans la première identité, on obtient

$$\mathcal{F}(u * v)(\xi) = \mathcal{F}u(\xi) \mathcal{F}v(\xi).$$

Si  $u \in \mathcal{E}'(\mathbf{R}^N)$  et  $v \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^N)$ , on approche  $v$  par une suite  $(v_j)$  d'éléments de  $\mathcal{E}'(\mathbf{R}^N)$  (obtenue par troncature) convergeant dans  $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^N)$ . On a alors

$$\mathcal{F}(u * v_j)(\xi) = \mathcal{F}u(\xi)\mathcal{F}v_j(\xi).$$

Comme  $\mathcal{F}u$  est à croissance lente, et que  $\mathcal{F}v_j \rightarrow \mathcal{F}v$  dans  $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^N)$ , on a

$$\mathcal{F}u\mathcal{F}v_j \rightarrow \mathcal{F}u\mathcal{F}v \text{ dans } \mathcal{S}'(\mathbf{R}^N).$$

Par conséquent,  $u * v_j$  converge dans  $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^N)$ . Comme par ailleurs on sait que  $u * v_j \rightarrow u * v$  dans  $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^N)$ , par unicité de la limite on a

$$\mathcal{F}(u * v_j) \rightarrow \mathcal{F}(u * v) \text{ dans } \mathcal{S}'(\mathbf{R}^N).$$

On a bien l'identité annoncée. □

#### 6.4. Equations de convolution

Comme on l'a déjà mentionné au chapitre précédent, la transformation de Fourier est un outil très puissant pour résoudre les équations aux dérivées partielles linéaires à coefficients constants.

De façon plus générale, on s'intéresse ici aux équations de convolution, i.e. aux équations de la forme

$$(6.4.1) \quad T * S = R \text{ où } S \in \mathcal{E}'(\mathbf{R}^N), R \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^N) \text{ sont des distributions données.}$$

Quand  $R = \delta$ , on dit que  $T$  est une solution élémentaire de l'équation de convolution de noyau  $S$ .

D'après la propriété 6.3.5 (v), l'équation (6.4.1) est équivalente à

$$\mathcal{F}(S)\mathcal{F}(T) = \mathcal{F}(R)$$

puisque la transformation de Fourier est bijective sur  $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^N)$ .

Lorsque  $S$  est une distribution supportée en  $\{0\}$ , donc de la forme

$$S = \sum_{|\alpha| \leq m} c_\alpha \delta^{(\alpha)}$$

on a

$$T * S = \sum_{|\alpha| \leq m} c_\alpha T * \delta^{(\alpha)} = \sum_{|\alpha| \leq m} c_\alpha \partial^\alpha T$$

L'équation de convolution (6.4.1) est équivalente à l'équation aux dérivées partielles

$$\sum_{|\alpha| \leq m} c_\alpha \partial^\alpha T = R.$$

**Proposition 6.4.1.** — Soit  $P(\partial) = \sum_{|\alpha| \leq m} c_\alpha \partial^\alpha$  un opérateur différentiel à coefficients constants. L'équation

$$P(\partial)T = 0$$

possède une solution tempérée non nulle si et seulement si le polynôme  $P(i\xi)$  possède une racine  $\xi_0 \in \mathbf{R}^N$ .

*Démonstration.* — Pour  $T \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^N)$ , l'équation  $P(\partial)T = 0$  équivaut à

$$P(i\xi)\mathcal{F}T = 0.$$

On a donc  $\mathcal{F}T \equiv 0$  (et  $T \equiv 0$ ) si le polynôme  $P(i\xi)$  ne s'annule jamais.

Réciproquement, s'il existe  $\xi_0 \in \mathbf{R}^N$  tel que  $P(i\xi_0) = 0$ , alors la distribution tempérée

$$T(x) = \exp(i\xi_0 \cdot x) \text{ est telle que } \mathcal{F}T = (2\pi)^{-N}\delta_{\xi_0}.$$

Elle vérifie donc  $P(\partial)T = 0$ . □

On vérifie ainsi que les distributions tempérées harmoniques sont nécessairement des polynômes. En effet, si

$$\mathcal{F}(\Delta T) = -|\xi|^2\mathcal{F}T = 0,$$

le support de  $\mathcal{F}T$  est  $\{0\}$ , ce qui implique que  $\mathcal{F}T$  est une combinaison linéaire de la masse de Dirac et de ses dérivées. Autrement dit,

$$T(x) = \sum_{|\alpha| \leq m} c_\alpha \frac{(-ix)^\alpha}{(2\pi)^N}.$$

Attention : dès que  $N \geq 2$ , il existe des polynômes harmoniques de degré arbitraire, puisque  $T = (x_1 + ix_2)^k$  vérifie  $\Delta T = 0$ .

## CHAPITRE 7

### ESPACES DE SOBOLEV

Les espaces de Sobolev constituent un outil fondamental pour l'étude des problèmes d'analyse non linéaire [1]. Ce sont en effet des espaces de Banach, plus faciles à manipuler que des distributions quelconques.

Ils sont construits à partir des espaces de Lebesgue  $L^p(\Omega)$ . Pour  $s \in \mathbf{N}$ ,

- l'espace  $W^{s,p}(\Omega)$  est le sous-espace de  $L^p(\Omega)$  constitué des fonctions dont les dérivées jusqu'à l'ordre  $s$  sont dans  $L^p(\Omega)$ ;
- l'espace  $W^{-s,p}(\Omega)$  est un espace de distributions d'ordre  $s$ , défini par dualité.

En particulier, sous certaines conditions sur  $s$  et  $p$ , on va pouvoir définir des produits, et plus généralement des quantités non linéaires.

Dans cette partie du cours, on se limitera à l'étude des espaces de Sobolev construits sur  $L^2(\mathbf{R}^N)$ , ce qui permet d'avoir une caractérisation très simple en termes de la transformée de Fourier.

#### 7.1. Définition et propriétés topologiques

**Définition 7.1.1.** — Soit  $s \in \mathbf{R}$ . La distribution tempérée  $u$  appartient à l'espace de Sobolev  $H^s(\mathbf{R}^N)$  si et seulement si

$$\mathcal{F}u \in L^2_{loc}(\mathbf{R}^N) \quad \text{et} \quad \mathcal{F}u \in L^2(\mathbf{R}^N, (1 + |\xi|^2)^s d\xi).$$

Pour tout  $s \in \mathbf{R}$ , l'espace de Sobolev  $H^s(\mathbf{R}^N)$ , muni de la norme

$$\|u\|_{H^s}^2 = \int |\mathcal{F}u(\xi)|^2 (1 + |\xi|^2)^s d\xi,$$

est un espace de Banach (et même un espace de Hilbert comme on le verra dans la suite).

Le seul point à vérifier est la complétude. Par définition de la norme, si  $(u_n)$  est une suite de Cauchy de  $H^s(\mathbf{R}^N)$ , la suite  $(\mathcal{F}u_n)$  est une suite de Cauchy dans  $L^2(\mathbf{R}^N, (1 + |\xi|^2)^s d\xi)$ , et il existe donc  $\tilde{u} \in L^2(\mathbf{R}^N, (1 + |\xi|^2)^s d\xi)$  tel que

$$(7.1.1) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \|\mathcal{F}u_n - \tilde{u}\|_{L^2(\mathbf{R}^N, (1 + |\xi|^2)^s d\xi)} = 0.$$

En particulier,  $(\mathcal{F}u_n)$  converge vers  $\tilde{u}$  dans  $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^N)$ . Comme la transformée de Fourier est un isomorphisme de  $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^N)$ ,  $(u_n)$  tend vers  $\mathcal{F}^{-1}\tilde{u}$  dans  $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^N)$  et donc dans  $H^s(\mathbf{R}^N)$  par (7.1.1).

On note que la transformée de Fourier est un isomorphisme entre  $H^s(\mathbf{R}^N)$  et  $L^2(\mathbf{R}^N, (1 + |\xi|^2)^s d\xi)$ .

**Propriété 7.1.2.** — - Pour tout  $s \in \mathbf{N}$ , l'espace  $H^s(\mathbf{R}^N)$  est l'espace des fonctions de  $L^2(\mathbf{R}^N)$  dont toutes les dérivées au sens des distributions jusque'à l'ordre  $s$  sont dans  $L^2$

$$\|u\|_{H^s}^2 \sim \sum_{|\alpha| \leq s} \|\partial^\alpha u\|_{L^2}^2.$$

- Pour tout  $s \in \mathbf{R}$ ,  $\mathcal{S}(\mathbf{R}^N)$  est dense dans  $H^s(\mathbf{R}^N)$ .

*Démonstration.* — Comme la transformée de Fourier est, à constante près, une isométrie de  $L^2(\mathbf{R}^N)$ , on a

$$\xi^\alpha \mathcal{F}u \in L^2(\mathbf{R}^N) \quad \text{si et seulement si} \quad \partial^\alpha u \in L^2(\mathbf{R}^N).$$

De plus, pour tout  $s$  fini, il existe  $C_s > 0$  tel que

$$\forall \xi \in \mathbf{R}^N, \quad C_s^{-1} \left(1 + \sum_{|\alpha| \leq s} |\xi^\alpha|^2\right) \leq (1 + |\xi|^2)^s \leq C_s \left(1 + \sum_{|\alpha| \leq s} |\xi^\alpha|^2\right).$$

On en déduit que  $u \in H^s(\mathbf{R}^N)$  si et seulement si  $\partial^\alpha u \in L^2(\mathbf{R}^N)$  pour tout  $\alpha$  tel que  $|\alpha| \leq s$ , et on a l'équivalence des normes.

Pour tout  $u \in H^s(\mathbf{R}^N)$ ,  $(1 + |\xi|^2)^{s/2} \mathcal{F}u$  est dans  $L^2(\mathbf{R}^N)$  et peut donc être approché (par convolution) par une suite de fonctions de  $\mathcal{S}(\mathbf{R}^N)$ . Par stabilité de  $\mathcal{S}(\mathbf{R}^N)$  par transformation de Fourier et par multiplication par les fonctions à croissance lente, on en déduit que  $u$  peut être approché par une suite de fonctions de  $\mathcal{S}(\mathbf{R}^N)$ .  $\square$

Pour  $s \in \mathbf{R}$ , le dual de  $H^s(\mathbf{R}^N)$  s'identifie avec  $H^{-s}(\mathbf{R}^N)$ .

**Théorème 7.1.** — Si  $u \in (H^s(\mathbf{R}^N))'$ , il existe un unique  $v \in H^{-s}(\mathbf{R}^N)$  tel que

$$\forall \varphi \in H^s(\mathbf{R}^N), \quad \langle u, \varphi \rangle = \int \mathcal{F}v \overline{\mathcal{F}\varphi}(\xi) d\xi.$$

*Démonstration.* — Le point important de la preuve est la formule d'inversion de Fourier qui assure que

$$\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^N), \quad \langle u, \varphi \rangle = \langle \mathcal{F}u, \mathcal{F}\varphi \rangle.$$

On peut alors montrer que  $(1 + |\xi|^2)^{-s/2} \mathcal{F}u$  définit une forme linéaire continue sur  $L^2(\mathbf{R}^N)$ . En effet, pour toute fonction  $\psi \in L^2(\mathbf{R}^N)$ , la formule précédente donne

$$\begin{aligned} \left| \langle (1 + |\xi|^2)^{-s/2} \mathcal{F}u, \mathcal{F}\psi \rangle \right| &= \left| \langle \mathcal{F}u, (1 + |\xi|^2)^{-s/2} \mathcal{F}\psi \rangle \right| \leq \|u\|_{(H^s)'} \left\| \mathcal{F}^{-1} \left( (1 + |\xi|^2)^{-s/2} \psi \right) \right\|_{H^s} \\ &\leq C \|u\|_{(H^s)'} \|\mathcal{F}\psi\|_{L^2} \leq C \|u\|_{(H^s)'} \|\psi\|_{L^2}. \end{aligned}$$

Le théorème de représentation de  $L^2(\mathbf{R}^N)$  montre alors qu'il existe un unique  $\tilde{w} \in L^2(\mathbf{R}^N)$  tel que

$$\left\langle (1 + |\xi|^2)^{-s/2} \mathcal{F}u, \psi \right\rangle = \int_{\mathbf{R}^N} \tilde{w}(\xi) \psi(\xi) d\xi.$$

On en déduit que

$$\langle \mathcal{F}u, \psi \rangle = \int_{\mathbf{R}^N} (1 + |\xi|^2)^{s/2} \tilde{w}(\xi) \psi(\xi) d\xi.$$

En posant  $v = \mathcal{F}^{-1}((1 + |\xi|^2)^{s/2} \tilde{w})$ , on obtient la représentation attendue.  $\square$

## 7.2. Injections de Sobolev

L'objectif de cette section est de montrer des propriétés d'inclusion des espaces de Sobolev dans les espaces de Lebesgue. On va montrer en quelque sorte qu'on peut gagner de l'intégrabilité quitte à perdre de la régularité.

**Théorème 7.2 (Théorème d'injection de Sobolev).** — Si  $s > N/2$ , l'espace  $H^s(\mathbf{R}^N)$  s'injecte continûment dans  $C(\mathbf{R}^N)$

$$\forall \psi \in H^s(\mathbf{R}^N), \quad \|\psi\|_{C(\mathbf{R}^N)} \leq C \|\psi\|_{H^s(\mathbf{R}^N)}.$$

Si  $s < N/2$ , l'espace  $H^s(\mathbf{R}^N)$  s'injecte continûment dans  $L^p(\mathbf{R}^N)$  avec  $p = 2N/(N - 2s)$

$$\forall \psi \in H^s(\mathbf{R}^N), \quad \|\psi\|_{L^p(\mathbf{R}^N)} \leq C \|\psi\|_{H^s(\mathbf{R}^N)}.$$

*Démonstration.* — Le premier point du théorème est très facile à prouver : il repose sur le fait que la transformée de Fourier (inverse) d'une fonction  $\mathcal{F}\varphi \in L^1(\mathbf{R}^N)$  est une fonction continue, avec

$$\|\varphi\|_{\infty} \leq (2\pi)^{-N} \|\mathcal{F}\varphi\|_{L^1(\mathbf{R}^N)}.$$

Si  $u \in H^s(\mathbf{R}^N)$  avec  $s > N/2$ , l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne

$$\|\mathcal{F}u\|_{L^1(\mathbf{R}^N)} \leq \|(1 + |\xi|^2)^{s/2} \mathcal{F}u\|_{L^2(\mathbf{R}^N)} \|(1 + |\xi|^2)^{-s/2}\|_{L^2(\mathbf{R}^N)} \leq C \|u\|_{H^s(\mathbf{R}^N)},$$

ce qui montre que  $u$  est continue et qu'on a

$$\|u\|_{C(\mathbf{R}^N)} \leq C \|u\|_{H^s(\mathbf{R}^N)}.$$

Le second point de la preuve est plus délicat. Une façon intuitive de comprendre le choix de l'indice  $p$  est l'argument suivant d'invariance par changement d'échelle. Soit  $u$  une fonction définie sur  $\mathbf{R}^N$  et  $u_\lambda$  la fonction définie par  $u_\lambda(x) = u(\lambda x)$ . On a

$$\|u_\lambda\|_{L^p(\mathbf{R}^N)} = \lambda^{-N/p} \|u\|_{L^p(\mathbf{R}^N)}$$

et

$$\int |\xi|^{2s} |\mathcal{F}u_\lambda(\xi)|^2 d\xi = \lambda^{-2N} \int |\xi|^{2s} |\mathcal{F}u(\lambda^{-1}\xi)|^2 d\xi = \lambda^{-N+2s} \|u\|_{\dot{H}^s(\mathbf{R}^N)}^2.$$

Les normes  $L^p$  et  $\dot{H}^s$  ont le même scaling, ce qui signifie qu'elles ont le même comportement vis-à-vis des changements d'unité. Cela a donc du sens de les comparer.

On se donne  $u \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^N)$ . Quitte à multiplier  $u$  par une constante, on peut supposer sans perte de généralité que  $\|u\|_{\dot{H}^s} = 1$ . D'après le théorème de Fubini, on a

$$\|u\|_{L^p(\mathbf{R}^N)}^p = p \int_0^\infty \lambda^{p-1} \mu(|u| > \lambda) d\lambda.$$

On décompose alors  $u$  en une composante basse fréquence et une composante haute fréquence :

$$u_1 = \mathcal{F}^{-1}(\mathbb{1}_{|\xi| \leq A} \mathcal{F}u), \quad u_2 = \mathcal{F}^{-1}(\mathbb{1}_{|\xi| > A} \mathcal{F}u).$$

Comme la transformée de Fourier de  $u_1$  est à support compact, la fonction  $u_1$  est bornée, et plus précisément on a

$$(7.2.1) \quad \begin{aligned} \|u_1\|_\infty &\leq (2\pi)^{-N} \|\mathcal{F}u_1\|_{L^1(\mathbf{R}^N)} \leq (2\pi)^{-N} \int_{B(0,A)} |\xi|^{-s} |\xi|^s |\mathcal{F}u(\xi)| d\xi \\ &\leq C_{s,N} A^{N/2-s} \|u\|_{H^s(\mathbf{R}^N)} \leq C_{s,N} A^{N/2-s} \end{aligned}$$

L'inégalité triangulaire montre que

$$\{|u| > \lambda\} \subset \{|u_1| > \lambda/2\} \cup \{|u_2| > \lambda/2\}.$$

Si on choisit

$$A = (\lambda/4C_{s,N})^{2/(N-2s)}$$

l'estimation (7.2.1) montre que

$$\mu(\{|u_1| > \lambda/2\}) = 0.$$

On a alors

$$\|u\|_{L^p(\mathbf{R}^N)}^p \leq p \int_0^\infty \lambda^{p-1} \mu(|u_2| > \lambda/2) d\lambda.$$

L'inégalité de Bienaymé-Tchebichev donne

$$\mu(|u_2| > \lambda/2) \leq \frac{4}{\lambda^2} \|u_2\|_{L^2(\mathbf{R}^N)}^2$$

de sorte que

$$\|u\|_{L^p(\mathbf{R}^N)}^p \leq 4p \int_0^\infty \lambda^{p-3} \|u_2\|_{L^2(\mathbf{R}^N)}^2 d\lambda.$$

Comme la transformée de Fourier est, à constante près, une isométrie de  $L^2$ , on a

$$\|u_2\|_{L^2(\mathbf{R}^N)}^2 = (2\pi)^{-N} \int \mathbb{1}_{|\xi| \geq A} |\mathcal{F}u(\xi)|^2 d\xi.$$

Par définition de  $A$ ,

$$|\xi| \leq A \text{ si et seulement si } \lambda \leq C|\xi|^{N/2-s}$$

En appliquant le théorème de Fubini, on obtient alors

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^p(\mathbf{R}^N)}^p &\leq \frac{4p}{(2\pi)^N} \int_0^\infty \lambda^{p-3} \int \mathbb{1}_{|\xi| \geq A} |\mathcal{F}u(\xi)|^2 d\xi d\lambda \\ &\leq C_{p,N} \int |\xi|^{(N-2s)(p-2)/2} |\mathcal{F}u(\xi)|^2 d\xi. \end{aligned}$$

Comme  $(N/2 - s)(p - 2) = 2s$ , ceci prouve le théorème, par densité de  $\mathcal{S}(\mathbf{R}^N)$  dans  $H^s(\mathbf{R}^N)$ .  $\square$

Par dualité, on obtient que l'espace  $L^p(\mathbf{R}^N)$  pour  $p \in ]1, 2[$  s'injecte continûment dans  $H^{-s}(\mathbf{R}^N)$  avec  $s = N(\frac{1}{p} - \frac{1}{2})$ . On a en effet

$$\begin{aligned} \|u\|_{H^{-s}(\mathbf{R}^N)} &\leq C \sup_{\|\psi\|_{H^s} \leq 1} |\langle u, \psi \rangle| \\ &\leq C' \sup_{\|\psi\|_{L^{p'}} \leq 1} |\langle u, \psi \rangle|, \end{aligned}$$

par injection de  $L^{p'}(\mathbf{R}^N)$  dans  $H^s(\mathbf{R}^N)$ . On conclut alors avec l'inégalité de Hölder.

### 7.3. Restriction, prolongement et traces

Pour étendre les résultats des paragraphes précédents au cas de domaines plus généraux, on doit comprendre ce qui se passe au voisinage des bords. Pour simplifier, on se restreindra ici au cas où le bord est un hyperplan. Le cas des domaines réguliers s'en déduit en paramétrant le bord localement par des graphes.

Dans ce qui suit, on note  $\mathbf{R}_+^N$  le demi-espace ouvert de  $\mathbf{R}^N$

$$\mathbf{R}_+^N = \{x = (x_1, \dots, x_N) \in \mathbf{R}^N / x_N > 0\}.$$

**Proposition 7.3.1.** — *L'application de restriction*

$$f \in H^1(\mathbf{R}^N) \mapsto f|_{x_N > 0} \in H^1(\mathbf{R}_+^N)$$

est surjective, et il existe une application linéaire  $P : H^1(\mathbf{R}_+^N) \rightarrow H^1(\mathbf{R}^N)$  de prolongement telle que

$$\|P\| \leq \sqrt{2}, \quad P(f)|_{x_N > 0} = f.$$

*Démonstration.* — Pour  $f \in L^2(\mathbf{R}_+^N)$ , on définit la fonction  $P(f) \in L^2(\mathbf{R}^N)$  par symétrie en posant

$$P(f)(x', x_N) = f(x', |x_N|).$$

Pour  $g \in C^\infty(\mathbf{R}^N)$  vérifiant  $g|_{x_N > 0} \in H^1(\mathbf{R}_+^N)$ , la formule des sauts implique que les dérivées distributions de  $P(f)$  vérifient

$$\partial_j P(f) = P(\partial_j f) \text{ si } j < N, \text{ et } \partial_N P(f) = \text{sign}(x_N)P(\partial_N f)$$

donc  $P(f) \in H^1(\mathbf{R}^N)$  et

$$(7.3.1) \quad \|Pf\|_{H^1(\mathbf{R}^N)} \leq \sqrt{2}\|f\|_{H^1(\mathbf{R}_+^N)}.$$

Pour  $f \in H^1(\mathbf{R}_+^N)$  arbitraire, on commence par montrer qu'il existe une suite  $(\varphi_n)$  de fonctions  $C^\infty(\mathbf{R}^N)$  telles que  $\varphi_n|_{x_N > 0} \in H^1(\mathbf{R}_+^N)$  et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - \varphi_n\|_{H^1(\mathbf{R}_+^N)} = 0.$$

Pour cela, on utilise une approximation de l'identité  $(\rho_n)$  définie par

$$\forall x \in \mathbf{R}^N, \quad \rho_n(x) = n^N \rho(nx)$$

où  $\rho \in C^\infty(\mathbf{R}^N, \mathbf{R}^+)$  est à support dans la boule unité, d'intégrale 1 et telle que

$$\text{Supp}(\rho) \subset \left\{-\frac{3}{4} \leq x_N \leq -\frac{1}{4}\right\}.$$

On pose alors  $\varphi_n = \rho_n * (f \mathbb{1}_{x_N > 0})$ , de sorte que les fonctions  $\varphi_n$  appartiennent à  $C^\infty(\mathbf{R}^N)$  et convergent vers  $f \mathbb{1}_{x_N > 0}$  dans  $L^2(\mathbf{R}^N)$  quand  $n \rightarrow \infty$ . De plus, on a

$$\forall x \in \mathbf{R}^N, \quad \partial_j \varphi_n(x) = \langle \partial_j (f \mathbb{1}_{x_N > 0}), \tau_x \hat{\rho}_n \rangle.$$

Pour  $x_N > 0$ , comme le support de la fonction test est inclus dans  $\{y/y_N \geq x_N + \frac{1}{4n}\}$ , on a

$$\forall x \in \mathbf{R}^N, \quad \partial_j \varphi_n(x) = \langle (\partial_j f) \mathbb{1}_{x_N > 0}, \tau_x \hat{\rho}_n \rangle = ((\partial_j f) \mathbb{1}_{x_N > 0}) * \rho_n.$$

Comme  $((\partial_j f) \mathbb{1}_{x_N > 0}) * \rho_n$  converge vers  $(\partial_j f) \mathbb{1}_{x_N > 0}$  dans  $L^2(\mathbf{R}^N)$ , on a le résultat d'approximation annoncé.

L'estimation de continuité (7.3.1) montre alors que la suite  $P\varphi_{n|x_N>0}$  est de Cauchy dans  $H^1(\mathbf{R}^N)$ , donc converge vers  $h \in H^1(\mathbf{R}^N)$  vérifiant

$$\|h\|_{H^1(\mathbf{R}^N)} \leq \sqrt{2}\|f\|_{H^1(\mathbf{R}_+^N)}.$$

Comme  $P\varphi_{n|x_N>0}$  converge vers  $P\varphi$  dans  $L^2(\mathbf{R}^N)_+$ , on a bien  $h = Pf$ , ce qui conclut la preuve.  $\square$

Le théorème d'injection de Sobolev montre qu'en dimension 1, l'espace  $H^s(\mathbf{R})$  pour  $s > \frac{1}{2}$  s'injecte dans l'ensemble des fonctions continues : on peut donc définir ponctuellement la valeur d'une fonction  $H^s(\mathbf{R})$ . Il est alors naturel de se demander si en dimension quelconque  $N \geq 1$ , on peut définir la section d'une fonction  $H^s(\mathbf{R}^N)$  pour  $s > \frac{1}{2}$  sur des ensembles de codimension 1, typiquement des hyperplans.

On introduit donc l'espace  $C_b^0(\mathbf{R}, H^\sigma(\mathbf{R}^{N-1}))$  des fonctions continues bornées sur  $\mathbf{R}$  à valeurs dans  $H^\sigma(\mathbf{R}^{N-1})$ . Muni de la norme

$$\|u\|_{L^\infty(H^\sigma)} = \sup_{y \in \mathbf{R}} \|u(y)\|_{H^\sigma(\mathbf{R}^{N-1})},$$

c'est clairement un espace de Banach. De plus,  $C_b^0(\mathbf{R}, H^\sigma(\mathbf{R}^{N-1}))$  s'injecte dans  $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^N)$  en posant

$$\forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbf{R}^N), \quad \langle u, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \langle u(x_N), \varphi(\cdot, x_N) \rangle dx_N,$$

On a en effet pour  $q = \max(-\sigma, 0)$  et  $p > \frac{N-1}{2}$ ,

$$\begin{aligned} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \langle u(x_N), \varphi(\cdot, x_N) \rangle dx_N \right| &\leq \|u\|_{L^\infty(H^\sigma)} \int_{-\infty}^{\infty} \|\varphi(\cdot, x_N)\|_{H^{-\sigma}(\mathbf{R}^{N-1})} dx_N \\ &\leq C \|u\|_{L^\infty(H^\sigma)} \int_{-\infty}^{\infty} \sup_{|\alpha| \leq p, |\beta| \leq q} \|x^\alpha \partial^\beta \varphi(\cdot, x_N)\|_{L^\infty(\mathbf{R}^{N-1})} dx_N \\ &\leq \tilde{C} \|u\|_{L^\infty(H^\sigma)} \sup_{|\alpha| \leq p+2, |\beta| \leq q} \|x^\alpha \partial^\beta \varphi\|_\infty \end{aligned}$$

L'injectivité s'obtient en considérant par exemple la famille de fonctions test

$$\varphi_{n,z}(x) = \psi(x') \rho_n(z - x_N) \text{ où } \psi \in C_c^\infty(\mathbf{R}^{N-1}) \text{ et } (\rho_n) \text{ approximation de l'unité}$$

de sorte que

$$\left( \langle u, \varphi_{n,z} \rangle = 0 \quad \forall n, z, \psi \right) \Rightarrow \left( \langle u(z), \psi \rangle = 0 \quad \forall z, \psi \right) \Rightarrow \left( u(z) = 0 \quad \forall z \right).$$

En utilisant cette identification, on obtient le résultat attendu sur les sections :

**Proposition 7.3.2.** — Soient  $s > \frac{1}{2}$  et  $f \in H^s(\mathbf{R}^N)$ . Il existe un unique  $u \in C_b^0(\mathbf{R}, H^{s-1/2}(\mathbf{R}^{N-1}))$  tel que

$$\forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbf{R}^N), \quad \langle f, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \langle u(x_N), \varphi(\cdot, x_N) \rangle$$

et on a

$$\|u\|_{L^\infty(\mathbf{R}, H^{s-1/2}(\mathbf{R}^{N-1}))} \leq C \|f\|_{H^s(\mathbf{R}^N)}.$$

*Démonstration.* — Soit  $f \in H^s(\mathbf{R}^N)$ . Par définition,

$$a(\xi) = (1 + |\xi|^2)^{s/2} |\mathcal{F}f(\xi)| \text{ appartient à } L^2(\mathbf{R}^N).$$

Le théorème de Fubini montre alors qu'il existe une partie mesurable  $Z \subset \mathbf{R}^{N-1}$  de mesure nulle telle que

$$\forall \xi' \notin Z, \quad \xi_N \mapsto a(\xi', \xi_N) \text{ appartient à } L^2(\mathbf{R}).$$

Comme la fonction  $\xi_N \mapsto (1 + |\xi'|^2 + |\xi_N|^2)^{-s/2}$  appartient à  $L^2(\mathbf{R})$ ,

$$\forall \xi' \notin Z, \quad \xi_N \mapsto \mathcal{F}f(\xi', \xi_N) \text{ appartient à } L^1(\mathbf{R}).$$

On peut alors définir la transformation de Fourier partielle de  $\mathcal{F}f$  par rapport à la variable  $\xi_N$ . On pose donc

$$g(x_N, \xi') = \int \exp(ix_N \xi_N) \mathcal{F}f(\xi', \xi_N) d\xi_N$$

Pour  $\xi' \notin Z$ ,

$$\begin{aligned} |g(x_N, \xi')|^2 &\leq \left( \int |\mathcal{F}f(\xi', \xi_N)| d\xi_N \right)^2 \leq \left( \int (1 + |\xi'|^2 + |\xi_N|^2)^{-s} d\xi_N \right) \left( \int |a(\xi', \xi_N)|^2 d\xi_N \right) \\ &\leq C(1 + |\xi'|^2)^{-s+\frac{1}{2}} \int |a(\xi', \xi_N)|^2 d\xi_N \end{aligned}$$

d'où l'on déduit que

$$\int (1 + |\xi'|^2)^{s-\frac{1}{2}} |g(x_N, \xi')|^2 d\xi' \leq C \|f\|_{H^s(\mathbf{R}^N)}^2.$$

Le même calcul montre que

$$\int (1 + |\xi'|^2)^{s-\frac{1}{2}} |g(x_N, \xi') - g(y_N, \xi')|^2 d\xi' \leq C \int |\exp(ix_N \xi_N) - \exp(iy_N \xi_N)|^2 |a(\xi)|^2 d\xi,$$

donc, en appliquant le théorème de convergence dominée, on obtient la continuité de la fonction

$$x_N \in \mathbf{R} \mapsto g(x_N, \cdot) \in L^2(\mathbf{R}^{N-1}, (1 + |\xi'|^2)^{s-\frac{1}{2}} d\xi').$$

Comme la transformation de Fourier partielle  $\mathcal{F}'$  par rapport à la variable  $\xi'$  est une isométrie de  $H^{s-1/2}(\mathbf{R}^{N-1})$  sur  $E = L^2(\mathbf{R}^{N-1}, (1 + |\xi'|^2)^{s-1/2} d\xi')$ , on peut alors définir

$$(7.3.2) \quad u(x_N) = \frac{1}{2\pi} (\mathcal{F}')^{-1} g(x_N).$$

On a bien  $u \in C_b^0(\mathbf{R}, H^{s-1/2}(\mathbf{R}^{N-1}))$  avec

$$\|u\|_{L^\infty(\mathbf{R}, H^{s-1/2}(\mathbf{R}^{N-1}))} = \frac{1}{2\pi} \|g\|_{L^\infty(\mathbf{R}, E)} \leq C \|f\|_{H^s(\mathbf{R}^N)},$$

et, par le théorème de Fubini,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \langle u(x_N), \varphi(\cdot, x_N) \rangle &= \frac{1}{(2\pi)^{N-1}} \int \frac{1}{2\pi} g(x_N, \xi') \mathcal{F}' \varphi(x_N, -\xi') d\xi' dx_N \\ &= \frac{1}{(2\pi)^N} \int \mathcal{F}f(\xi) \mathcal{F}\varphi(-\xi) d\xi = \langle f, \varphi \rangle. \end{aligned}$$

ce qui conclut la preuve. □

En composant le prolongement  $\varphi \in H^1(\mathbf{R}_+^N) \mapsto P\varphi \in H^1(\mathbf{R}^N)$  défini dans la proposition 7.3.1, et la section  $\varphi \in H^1(\mathbf{R}^N) \mapsto \varphi|_{x_N=0} \in H^{1/2}(\mathbf{R}^{N-1})$  définie dans la proposition 7.3.2, on peut alors définir l'application trace qui à une fonction de  $\varphi \in H^1(\mathbf{R}_+^N)$  associe sa "valeur au bord"  $\varphi|_{x_N=0} \in H^{1/2}(\mathbf{R}^{N-1})$ .

Plus précisément, on va montrer qu'on a la suite exacte

$$0 \rightarrow H_0^1(\mathbf{R}_+^N) \subset H^1(\mathbf{R}_+^N) \rightarrow H^{1/2}(\mathbf{R}^{N-1}) \rightarrow 0,$$

l'image de chaque application de la suite étant le noyau de l'application suivante.

**Théorème 7.3.** — *L'application trace*

$$f \in C_c^\infty(\mathbf{R}^N) \mapsto f|_{x_N=0} \in H^{1/2}(\mathbf{R}^{N-1})$$

se prolonge de manière unique en une application  $\gamma$  continue de  $H^1(\mathbf{R}_+^N)$  dans  $H^{1/2}(\mathbf{R}^{N-1})$ . L'image de  $\gamma$  est  $H^{1/2}(\mathbf{R}^{N-1})$ , et son noyau est  $H_0^1(\mathbf{R}_+^N)$ .

*Démonstration.* — On construit l'application trace de la façon suivante :

$$\gamma(f) = u|_{x_N=0}$$

où  $u$  est l'unique élément de  $C_b^0(\mathbf{R}, H^{1/2}(\mathbf{R}^{N-1}))$  tel que

$$\forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbf{R}^N), \quad \langle Pf, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \langle u(x_N), \varphi(\cdot, x_N) \rangle$$

et  $Pf \in H^1(\mathbf{R}^N)$  est l'extension de  $f$  définie dans la proposition 7.3.1.

D'après les propositions 7.3.1 et 7.3.2,  $\gamma$  est continue.

De plus, si  $\tilde{f} \in H^1(\mathbf{R}^N)$  vérifie  $\tilde{f}\mathbb{1}_{x_N>0} = f\mathbb{1}_{x_N>0}$  et si  $\tilde{f} = v$  avec  $v \in C_b^0(\mathbf{R}, H^{1/2}(\mathbf{R}^{N-1}))$ , on a

$$u(x_N) = v(x_N) \text{ pour } x_N > 0$$

et donc aussi pour  $x_N = 0$  par continuité. Donc  $\gamma(f)$  ne dépend pas du prolongement  $P$  choisi. En particulier, pour  $\varphi \in C_c^\infty(\mathbf{R}^N)$ , on a

$$\gamma(\varphi) = \varphi|_{x_N=0}.$$

Vérifions que le noyau de  $\gamma$  est l'espace  $H_0^1(\mathbf{R}_+^N)$ , i.e. l'adhérence pour la topologie de  $H^1(\mathbf{R}_+^N)$  de  $C_c^\infty(\mathbf{R}_+^N)$ .

Comme  $\gamma(\varphi) = \varphi|_{x_N=0} = 0$  pour les fonctions  $\varphi \in C_c^\infty(\mathbf{R}_+^N)$ , le noyau de  $\gamma$  contient  $H_0^1(\mathbf{R}_+^N)$ .

Réciproquement, soit  $f \in H^1(\mathbf{R}_+^N)$  telle que  $\gamma(f) = 0$ . On vérifie facilement que la fonction de  $L^2(\mathbf{R}^N)$  définie par  $\bar{f} = f\mathbb{1}_{x_N \geq 0}$  appartient à  $C_b^0(\mathbf{R}, H^{1/2}(\mathbf{R}^{N-1}))$ . En effet, d'après les propositions 7.3.1 et 7.3.2,  $\bar{f} \in C_b^0(\mathbf{R}^+, H^{1/2}(\mathbf{R}^{N-1}))$  et sa trace en 0 est nulle par hypothèse. Le prolongement sur  $\mathbf{R}_*^-$  par 0 est donc continu.

On va alors montrer que  $\bar{f}$  appartient à  $H^1(\mathbf{R}^N)$ . Calculons pour cela ses dérivées au sens des distributions. Soit  $\psi \in C^\infty(\mathbf{R}, [0, 1])$  telle que

$$\psi \equiv 0 \text{ sur } (-\infty, 1] \text{ et } \psi \equiv 1 \text{ sur } [2, +\infty).$$

On a pour  $\varphi \in C_c^\infty(\mathbf{R}^N)$ ,

$$\begin{aligned}\langle \bar{f}, \partial_j \varphi \rangle &= - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbf{R}^N} \bar{f} \psi \left( \frac{x_N}{\varepsilon} \right) \partial_j \varphi dx = \int_{\mathbf{R}^N} \partial_j f \varphi dx \text{ si } j \neq N, \\ \langle \bar{f}, \partial_N \varphi \rangle &= \int_{\mathbf{R}^N} \partial_N f \varphi dx + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbf{R}^N} f \varphi \frac{1}{\varepsilon} \psi' \left( \frac{x_N}{\varepsilon} \right) dx.\end{aligned}$$

Comme  $\bar{f} \in C_b^0(\mathbf{R}, H^{1/2}(\mathbf{R}^{N-1}))$ , on a

$$\left| \int_{\mathbf{R}^N} f \varphi \frac{1}{\varepsilon} \psi' \left( \frac{x_N}{\varepsilon} \right) dx \right| \leq C \int_{\varepsilon}^{2\varepsilon} \|\bar{f}(x_N)\|_{H^{1/2}} \|\varphi(x_N)\|_{H^{-1/2}} \frac{1}{\varepsilon} \left| \psi' \left( \frac{x_N}{\varepsilon} \right) \right| dx_N \rightarrow 0.$$

quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ . On a donc

$$\partial_j \bar{f} = \mathbf{1}_{x_N \geq 0} \partial_j f \in L^2(\mathbf{R}^N),$$

ce qui prouve que  $\bar{f} \in H^1(\mathbf{R}^N)$ , et que

$$\psi \left( \frac{x_N}{\varepsilon} \right) \bar{f} \rightarrow \bar{f} \text{ dans } H^1(\mathbf{R}^N).$$

Comme  $C_c^\infty(\mathbf{R}^N)$  est dense dans  $H^1(\mathbf{R}^N)$ , il existe une suite  $(\varphi_n)$  de fonctions  $C^\infty(\mathbf{R}^N)$  telles que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\bar{f} - \varphi_n\|_{H^1(\mathbf{R}^N)} = 0.$$

La suite  $\psi \left( \frac{x_N}{\varepsilon} \right) \varphi_n$  est alors une suite de  $C_c^\infty(\mathbf{R}^N)$  à support dans  $\mathbf{R}_+^N$  qui approche  $\psi \left( \frac{x_N}{\varepsilon} \right) \bar{f}$ . Cela signifie que  $\psi \left( \frac{x_N}{\varepsilon} \right) \bar{f} \in H_0^1(\mathbf{R}_+^N)$ , et par conséquent que  $\bar{f} \in H_0^1(\mathbf{R}_+^N)$ .

Vérifions enfin la surjectivité de l'application trace. Soit  $g \in H^{1/2}(\mathbf{R}^{N-1})$  et  $\mathcal{F}'g$  sa transformée de Fourier. On choisit  $\theta \in C_c^\infty(\mathbf{R})$  tel que  $\int \theta(t) dt = 1$  et on définit  $f \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^N)$  par

$$\mathcal{F}f(\xi) = 2\pi (\mathcal{F}'g)(\xi') \theta \left( \frac{\xi_N}{\sqrt{1 + |\xi'|^2}} \right) \frac{1}{\sqrt{1 + |\xi'|^2}}.$$

On a

$$\int (1 + |\xi'|^2 + |\xi_N|^2) |\mathcal{F}f(\xi)|^2 d\xi = 4\pi^2 \left( \int (1 + t^2) \theta^2(t) dt \right) \left( \int \sqrt{1 + |\xi'|^2} |\mathcal{F}'g(\xi')|^2 d\xi' \right).$$

De plus, en utilisant la formule (7.3.2), on obtient bien que  $g = \gamma(f)$ .  $\square$

#### 7.4. Compacité

En combinant les résultats des deux paragraphes précédents, on obtient de nouveaux critères de compacité forte dans les espaces de Lebesgue sur des ouverts réguliers et bornés.

**Théorème 7.4 (Théorème de Rellich-Kondrachov).** — Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbf{R}^N$  de classe  $C^1$  (ou le produit de  $N$  intervalles ouverts bornés).

- si  $N > 2$  et  $1 \leq q < 2N/(N-2)$ , l'injection de  $H^1(\Omega)$  dans  $L^q(\Omega)$  est compacte.

- si  $N = 1$ , l'injection de  $H^1(\Omega)$  dans  $C^0(\bar{\Omega})$  est compacte.

*Démonstration.* — Le théorème de Rellich-Kondrakov se déduit du théorème d'injection de Sobolev et des théorèmes de compacité forte (théorème d'Ascoli dans  $C^0(\bar{\Omega})$ , théorème de Riesz dans les espaces de Lebesgue).

La première étape consiste à montrer qu'on peut étendre les injections de Sobolev pour les espaces  $H^1(\Omega)$  où  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbf{R}^N$  dont la frontière est bornée et de classe  $C^1$  (ou le produit de  $N$  intervalles ouverts bornés).

• Si  $\Omega$  est un ouvert de classe  $C^1$  dont la frontière est bornée, il existe un nombre fini  $K$  d'ouverts bornés  $U_j \subset \mathbf{R}^N$ , d'ouverts  $\omega_j \subset \mathbf{R}^{N-1}$ , de fonctions  $\alpha_j \in C^1(\omega_j)$  et de réels  $\delta_j$  tels que  $\partial\Omega \subset \cup_{j=1}^K U_j$

$$U_j = \{(y', \alpha_j(y') + t) / y' \in \omega_j, |t| < \delta_j\} \text{ dans un repère orthonormé}$$

$$\text{et } \Omega \cap U_j = \{(y', \alpha_j(y') + t) / y' \in \omega_j, 0 < t < \delta_j\}$$

Le théorème des partitions de l'unité implique alors l'existence de fonctions  $\psi_0, \dots, \psi_K \in C^\infty(\mathbf{R}^N, [0, 1])$  telles que

$$\text{Supp}(\psi_0) \subset \mathbf{R}^N \setminus \partial\Omega, \quad \text{Supp}(\psi_j) \subset U_j, \quad \text{et } \sum_{j=0}^K \psi_j \equiv 1.$$

Pour tout  $u \in H^s(\Omega)$ , on définit alors sur chacun des  $U_j$  le prolongement de  $u$  par réflexion

$$\forall t \in ]-\delta_j, \delta_j[, \quad u_j(y', \alpha_j(y') + t) = (u\psi_j)(y', \alpha_j(y') + |t|).$$

On pose finalement

$$Pu = u\psi_0 + \sum_{i=1}^K u_i\psi_i.$$

Les résultats du paragraphe précédent sur les prolongements par réflexion, couplés avec les règles de calcul des dérivées (changement de variable, produit) montrent que  $u_j\psi_j \in H^1(\Omega)$  avec

$$\|u_j\|_{H^1(\mathbf{R}^N)} \leq C_j \|u\|_{H^1(\Omega)}$$

d'où l'on déduit que

$$\|Pu\|_{H^1(\mathbf{R}^N)} \leq C \|u\|_{H^1(\Omega)}.$$

De plus, on a bien  $Pu|_\Omega = u$ .

• Si  $\Omega$  est le produit de  $N$  intervalles ouverts bornés, il suffit d'utiliser un nombre fini de prolongements par réflexion et une troncature. On conclut de la même façon que  $Pu|_\Omega = u$  et

$$\|Pu\|_{H^1(\mathbf{R}^N)} \leq C \|u\|_{H^1(\Omega)}.$$

**Cas  $N > 2$ .** D'après le théorème d'injection de Sobolev, pour tout  $u \in H^1(\Omega)$ ,

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq \|Pu\|_{L^p(\mathbf{R}^N)} \leq C \|Pu\|_{H^1(\mathbf{R}^N)} \leq \tilde{C} \|u\|_{H^1(\Omega)},$$

où  $p = 2N/(N-2)$ . Soit alors  $(u_n)$  une suite bornée de  $H^1(\Omega)$ .

- De l'inégalité de Hölder, on déduit que, pour  $q < p$

$$\|u_n\|_{L^q(\Omega)} \leq \|u_n\|_{L^p(\Omega)} |\Omega|^{\frac{1}{q} - \frac{1}{p}}.$$

- Soient  $\omega$  un ouvert relativement compact de  $\Omega$  et  $|y| < d(\omega, \partial\Omega)$ . Pour  $v \in C_c^\infty(\bar{\Omega})$ , on a

$$\begin{aligned} \|\tau_y v - v\|_{L^1(\omega)} &\leq |y| \int_\omega dx \int_0^1 dt |\nabla v(x - ty)| \\ &\leq |y| \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} |\Omega|^{1/2}, \end{aligned}$$

et donc par interpolation

$$\|\tau_y v - v\|_{L^q(\omega)} \leq (2\|v\|_{L^p(\Omega)})^\lambda \left( |y| \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} |\Omega|^{1/2} \right)^{1-\lambda}$$

où  $\frac{1}{q} = (1-\lambda) + \frac{\lambda}{p}$ .

Par densité de  $C_c^\infty(\bar{\Omega})$  dans  $H^1(\Omega)$ , cette inégalité s'étend à toutes les fonctions de  $H^1(\Omega)$ . On a alors

$$\|\tau_y u_n - u_n\|_{L^q(\omega)} \leq C \|u_n\|_{H^1(\Omega)} |y|^{(\frac{1}{q} - \frac{1}{p}) / (1 - \frac{1}{p})}.$$

- Pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\Omega_k = \{x \in \Omega / d(x, \partial\Omega) > \frac{1}{k}\}$  tel que, pour tout  $n$ ,

$$\|u_n\|_{L^q(\Omega \setminus \Omega_k)} \leq \|u_n\|_{L^p(\Omega)} |\Omega \setminus \Omega_k|^{\frac{1}{q} - \frac{1}{p}} \leq \varepsilon.$$

Les trois hypothèses du théorème de Riesz sont satisfaites :  $(u_n)$  est donc précompacte dans  $L^q(\Omega)$ .

**Cas  $N = 1$ .** D'après le théorème d'injection de Sobolev, pour tout  $u \in H^1(\Omega)$ ,

$$\|u\|_{C(\bar{\Omega})} \leq \|Pu\|_{C(\mathbf{R})} \leq C \|Pu\|_{H^1(\mathbf{R})} \leq \tilde{C} \|u\|_{H^1(\Omega)}.$$

Soit alors  $(u_n)$  une suite bornée de  $H^1(\Omega)$ .

- la suite  $(u_n)$  est bornée dans  $C(\bar{\Omega})$ .

- Pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\delta > 0$  tel que, pour tout  $n$ , et pour tout  $|y| \leq \delta$ ,

$$\|\tau_y u_n - u_n\|_\infty \leq C |y|^{1/2} \|\nabla u_n\|_{L^2(\Omega)} \leq \varepsilon.$$

Les deux hypothèses du théorème d'Ascoli sont satisfaites :  $(u_n)$  est donc précompacte dans  $C(\bar{\Omega})$ .

□



## CHAPITRE 8

### A PROPOS DE LA TRANSFORMÉE DE HILBERT

La transformée de Hilbert est un outil mathématique très utilisé en théorie du signal pour décrire l'enveloppe complexe d'une grandeur réelle modulée par un signal. Elle a essentiellement pour effet de tourner de  $\pi/2$  la composante de fréquence négative et de  $-\pi/2$  la composante de fréquence positive.

Par exemple, de nombreux signaux peuvent être modélisés par le produit d'un signal harmonique à support borné  $\zeta_m$ , et d'une "porteuse" sinusoidale, typiquement :

$$\zeta(t) = \zeta_m(t) \cos(\omega t + \varphi).$$

Lorsque  $\zeta_m$  n'a pas de composante fréquentielle au delà de la fréquence de la porteuse  $\omega/2\pi$ ,

$$\mathcal{H}\zeta(t) \sim \zeta_m(t) \sin(\omega t + \varphi).$$

On a alors

$$\omega t + \varphi \sim \arctan(\mathcal{H}\zeta(t)/\zeta(t))$$

ce qui permet de reconstruire la porteuse. Le message  $\zeta_m$  peut ensuite être extrait de  $\zeta$  par une démodulation cohérente.

Le but de ce chapitre est de donner un cadre mathématique rigoureux pour l'étude de la transformée de Hilbert, et plus généralement d'introduire quelques outils fins d'analyse harmonique pour l'étude des opérateurs définis par des intégrales singulières.

#### 8.1. Définition et continuité sur $L^p$

On peut définir la transformée de Hilbert de plusieurs façons équivalentes. Ici, on a choisi de la présenter pour commencer comme un opérateur de convolution avec une distribution de type "valeur principale". On en donnera par la suite deux autres caractérisations.

##### 8.1.1. Définitions de la transformée de Hilbert. —

*Définition 8.1.1.* — La transformée de Hilbert d'une fonction  $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$  est la fonction définie par

$$H(f)(x) = \frac{1}{\pi} \left( vp \left( \frac{1}{x} \right) * f \right) (x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( (\mathbb{1}_{n|x| \geq 1}) \frac{1}{\pi x} * f \right) (x)$$

En utilisant la formule explicite de la valeur principale, on obtient

$$H(f)(x) = \frac{1}{\pi} \int_{|x-y|<1} \frac{f(y) - f(x)}{x-y} dy + \frac{1}{\pi} \int_{|x-y|\geq 1} \frac{f(y)}{x-y} dy,$$

ce qui montre que la transformée de Hilbert d'une fonction régulière par morceaux et intégrable est bien définie en tout point où la fonction est lipschitzienne.

Par exemple, si on note  $\chi_{[a,b]}$  la fonction caractéristique de l'intervalle  $[a, b]$ , on a

– si  $x \notin [a, b]$

$$H(\chi_{[a,b]})(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{|x-y|\geq 1/n} \frac{\chi_{[a,b]}(y)}{x-y} dy = \frac{1}{\pi} \log \frac{|x-a|}{|x-b|}$$

– si  $x \in ]a, b[$

$$H(\chi_{[a,b]})(x) = \frac{1}{\pi} \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \log(n|x-a|) + \log \frac{1}{n|x-b|} \right) = \frac{1}{\pi} \log \frac{|x-a|}{|x-b|}$$

En particulier,  $H(\chi_{[a,b]})$  explose logarithmiquement près de  $a$  et  $b$  et décroît comme  $|x|^{-1}$  à l'infini.

On va maintenant donner une caractérisation de la transformée de Hilbert en utilisant la transformée de Fourier.

**Proposition 8.1.2.** — Soit  $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$  et  $Hf$  sa transformée de Hilbert. On a l'identité

$$\mathcal{F}(Hf)(\xi) = -i \operatorname{sign}(\xi) \mathcal{F}(f)(\xi).$$

En particulier,

$$H^2 f = -f \text{ et } \|Hf\|_{L^2(\mathbf{R})} = \|f\|_{L^2(\mathbf{R})}.$$

*Démonstration.* — La valeur principale  $W_0 = \frac{1}{\psi} vp(\frac{1}{x})$  est la dérivée distribution de la fonction  $x \mapsto \log|x|$ , c'est donc une distribution tempérée et on peut calculer sa transformée de Fourier. Pour toute fonction  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$ , on a

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{F}(W_0), \varphi \rangle &= \langle W_0, \mathcal{F}\varphi \rangle = \frac{1}{\pi} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\frac{1}{n} \leq |\xi| \leq n} \frac{(\mathcal{F}\varphi)(\xi)}{\xi} d\xi \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \iint \mathbb{1}_{\frac{1}{n} \leq |\xi| \leq n} \varphi(x) \exp(-ix\xi) \frac{d\xi}{\xi} dx \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int \varphi(x) \left( \frac{-i}{\pi} \int \mathbb{1}_{\frac{1}{n} \leq |\xi| \leq n} \sin(x\xi) \frac{d\xi}{\xi} \right) dx. \end{aligned}$$

On montre par ailleurs, en étudiant la fonction  $a \mapsto \int_0^{+\infty} \sin(\xi) \exp(-a\xi) \frac{d\xi}{\xi}$ , que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int \mathbb{1}_{\frac{1}{n} \leq |\xi| \leq n} \sin(x\xi) \frac{d\xi}{\xi} = \int \sin(x\xi) \frac{d\xi}{\xi} = \pi \operatorname{sign}(x).$$

Le théorème de convergence dominée assure alors que

$$\langle \mathcal{F}(W_0), \varphi \rangle = -i \int \varphi(x) \operatorname{sign}(x) dx,$$

ce qui implique que

$$\mathcal{F}(W_0)(\xi) = -i \operatorname{sign}(\xi).$$

En particulier  $\mathcal{F}W_0$  est une fonction bornée.

Puisque  $W_0 \in \mathcal{S}'(\mathbf{R})$  et  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$ ,  $W_0 * \varphi \in \mathcal{S}'(\mathbf{R})$  et on a l'identité

$$\mathcal{F}(W_0 * \varphi) = (\mathcal{F}W_0)(\mathcal{F}\varphi),$$

ce qui donne exactement l'identité attendue.

En utilisant le fait que la transformée de Fourier est un isomorphisme de  $L^2(\mathbf{R})$  et la densité de  $\mathcal{S}(\mathbf{R})$  dans  $L^2(\mathbf{R})$ , on peut alors étendre la transformée de Hilbert aux fonctions  $f \in L^2(\mathbf{R})$  par la formule

$$\mathcal{F}(Hf)(\xi) = -i \operatorname{sign}(\xi)(\mathcal{F}f)(\xi).$$

On a de plus

$$\mathcal{F}(H^2f)(\xi) = -i \operatorname{sign}(\xi)\mathcal{F}(Hf)(\xi) = -(\mathcal{F}f)(\xi)$$

et

$$\|Hf\|_{L^2(\mathbf{R})} = \frac{1}{2\pi} \|\mathcal{F}(Hf)\|_{L^2(\mathbf{R})} = \frac{1}{2\pi} \|\mathcal{F}(f)\|_{L^2(\mathbf{R})} = \|f\|_{L^2(\mathbf{R})},$$

ce qui conclut la preuve.  $\square$

Une troisième approche classique - historiquement la plus ancienne - consiste à relier la transformée de Hilbert à la conjugaison harmonique, et à utiliser pour son étude les techniques d'analyse complexe.

**Proposition 8.1.3.** — Soit  $P_y$  le noyau de Poisson, et  $Q_y$  son noyau conjugué

$$P_y(x) = \frac{1}{\pi} \frac{y}{x^2 + y^2} \text{ et } Q_y(x) = \frac{1}{\pi} \frac{x}{x^2 + y^2}$$

(pour toute fonction  $f \in L^p(\mathbf{R})$ ,  $u_f(x + iy) = P_y * f(x)$  et  $v_f(x + iy) = Q_y * f(x)$  sont des fonctions harmoniques conjuguées puisque  $u_f + iv_f$  est holomorphe).

Soit  $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$ . Quand  $y \rightarrow 0$ , on a

$$P_y * f \rightarrow f \text{ et } Q_y * f \rightarrow Hf.$$

*Démonstration.* — La démonstration de ce résultat est immédiate.

• En réécrivant

$$P_y(x) = \frac{1}{y} \rho\left(\frac{x}{y}\right) \text{ avec } \rho(x) = \frac{1}{\pi}(1 + x^2)^{-1}$$

on voit que le noyau de Poisson est une approximation de la masse de Dirac.

• La convergence du noyau de Poisson conjugué s'obtient en utilisant la formule explicite

$$Q_y * f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{|x-t|<1} \frac{(f(t) - f(x))(x-t)}{(x-t)^2 + y^2} dt + \frac{1}{\pi} \int_{|x-t|\geq 1} \frac{f(t)(x-t)}{(x-t)^2 + y^2} dt,$$

le fait que pour tout  $x \neq 0$

$$Q_y(x) \rightarrow \frac{1}{\pi} \frac{1}{x},$$

et le théorème de convergence dominée.  $\square$

**8.1.2. Continuité sur  $L^p(\mathbf{R})$ .** — En utilisant l'égalité de Parseval, on a déjà montré que  $H$  était une isométrie de  $L^2(\mathbf{R})$ . Par un argument récursif, on va montrer ici qu'on obtient la continuité sur tous les  $L^p(\mathbf{R})$  pour  $p \in ]1, +\infty[$ .

**Proposition 8.1.4.** — Pour tout  $p \in ]1, +\infty[$ , il existe une constante  $C_p$  telle que, pour tout  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$ ,

$$\|Hf\|_{L^p(\mathbf{R})} \leq C_p \|f\|_{L^p(\mathbf{R})}$$

avec  $C_p \leq 2p$  pour  $p \geq 2$  et  $C_p \leq 2p/(p-1)$  pour  $p \geq 2$ .

En particulier, la transformée de Hilbert se prolonge en un opérateur borné de  $L^p(\mathbf{R})$ .

*Démonstration.* — La preuve repose sur l'identité suivante : pour toute  $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$ ,

$$(8.1.1) \quad (Hf)^2 = f^2 + 2H(fHf).$$

Cette formule peut s'interpréter assez facilement en termes de valeurs au bord de fonctions harmoniques, mais nous n'utiliserons pas cette approche ici.

Si  $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$ , on a vu que  $Hf \in L^2(\mathbf{R})$  de sorte que  $fHf \in L^2(\mathbf{R})$  : on peut donc définir la transformée de Fourier de  $f^2 + 2H(fHf)$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\left(f^2 + 2H(fHf)\right)(\xi) &= (\mathcal{F}f) * (\mathcal{F}f)(\xi) - 2i \operatorname{sign}(\xi) (\mathcal{F}f) * (\mathcal{F}(Hf))(\xi) \\ &= \int (\mathcal{F}f)(\eta) (\mathcal{F}f)(\xi - \eta) (1 - 2 \operatorname{sign}(\xi) \operatorname{sign}(\xi - \eta)) d\eta \\ &= \int (\mathcal{F}f)(\eta) (\mathcal{F}f)(\xi - \eta) (1 - \operatorname{sign}(\xi) \operatorname{sign}(\xi - \eta) - \operatorname{sign}(\xi) \operatorname{sign}(\eta)) d\eta \end{aligned}$$

par symétrie. Or, on a l'identité

$$1 - \operatorname{sign}(\xi) \operatorname{sign}(\xi - \eta) - \operatorname{sign}(\xi) \operatorname{sign}(\eta) = -\operatorname{sign}(\eta) \operatorname{sign}(\xi - \eta) \text{ presque partout.}$$

On en déduit que

$$\mathcal{F}\left(f^2 + 2H(fHf)\right)(\xi) = - \int \operatorname{sign}(\eta) (\mathcal{F}f)(\eta) \operatorname{sign}(\xi - \eta) (\mathcal{F}f)(\xi - \eta) d\eta = \mathcal{F}((Hf)^2)(\xi).$$

• Une fois qu'on a établi la formule (8.1.1), on obtient facilement par récurrence que  $H$  est bornée sur  $L^p(\mathbf{R})$  pour  $p = 2^k$ . On sait déjà que

$$\|Hf\|_{L^2(\mathbf{R})} = \|f\|_{L^2(\mathbf{R})}.$$

Supposons alors que pour  $p = 2^k$  ( $k \in \mathbf{N}$ )

$$\|Hf\|_{L^p(\mathbf{R})} \leq C_p \|f\|_{L^p(\mathbf{R})}.$$

On a

$$\begin{aligned} \|Hf\|_{L^{2p}(\mathbf{R})}^2 &= \|(Hf)^2\|_{L^p(\mathbf{R})} \leq \|f^2\|_{L^p(\mathbf{R})} + 2\|H(fHf)\|_{L^p(\mathbf{R})} \\ &\leq \|f\|_{L^{2p}(\mathbf{R})}^2 + 2C_p \|fHf\|_{L^p(\mathbf{R})} \\ &\leq \|f\|_{L^{2p}(\mathbf{R})}^2 + 2C_p \|f\|_{L^{2p}(\mathbf{R})} \|Hf\|_{L^{2p}(\mathbf{R})} \end{aligned}$$

Autrement dit,

$$\left(\frac{\|Hf\|_{L^{2p}(\mathbf{R})}}{\|f\|_{L^{2p}(\mathbf{R})}}\right)^2 - 2C_p \left(\frac{\|Hf\|_{L^{2p}(\mathbf{R})}}{\|f\|_{L^{2p}(\mathbf{R})}}\right) - 1 \leq 0,$$

ce qui montre que

$$\frac{\|Hf\|_{L^{2p}(\mathbf{R})}}{\|f\|_{L^{2p}(\mathbf{R})}} \leq C_p + \sqrt{C_p^2 + 1}.$$

On a donc que  $H$  est continue sur  $L^{2p}(\mathbf{R})$  avec la borne

$$C_{2p} \leq C_p + \sqrt{C_p^2 + 1},$$

ce qui conclut la récurrence.

En utilisant le théorème d'interpolation complexe de Riesz-Thorin (dont l'énoncé et la preuve sont rappelés dans l'appendice D), on obtient finalement que  $H$  est bornée sur tous les  $L^p(\mathbf{R})$  pour  $p \in [2, +\infty[$ .

Pour  $p \in ]1, 2]$ , on utilise un argument de dualité. On a en effet

$$\begin{aligned} \langle Hu, v \rangle &= \langle \mathcal{F}(Hu), \mathcal{F}^{-1}v \rangle = \frac{1}{2\pi} \langle \mathcal{F}u, -i \operatorname{sign}(\xi) \bar{\mathcal{F}}v \rangle \\ &= \langle \mathcal{F}u, -\mathcal{F}^{-1}Hv \rangle = -\langle u, Hv \rangle. \end{aligned}$$

• Cette démonstration présente l'avantage de donner des estimations assez fines de la norme de  $H$  dans  $L^p(\mathbf{R})$ , qui sont en fait optimales dans le cas où  $p = 2^k$ . En utilisant l'identité

$$\cot \frac{x}{2} = \cot x + \sqrt{1 + \cot^2 x}$$

et le fait que  $1 = \cot \frac{\pi}{4}$ , on montre par récurrence que pour  $p = 2^k$

$$C_p \leq \cot \frac{\pi}{2p} \leq p.$$

On conclut comme précédemment en utilisant le théorème de Riesz-Thorin et la dualité.  $\square$

## 8.2. Espaces de Lebesgue faibles

Le comportement de la transformée de Hilbert sur  $L^\infty(\mathbf{R})$  et sur  $L^1(\mathbf{R})$  est un problème plus délicat. On a vu par exemple que la transformée de Hilbert de la fonction caractéristique  $\chi_{[a,b]}$  est non bornée et non intégrable car elle se comporte comme  $|x|^{-1}$  à l'infini.

On va donc définir ici un espace fonctionnel adapté, l'espace de Lebesgue faible  $L^{1,\infty}(\mathbf{R})$ , qui est un peu plus gros que  $L^1(\mathbf{R})$  puisqu'il contient typiquement  $x \mapsto |x|^{-1}$ , et on montrera dans la section suivante que  $H : L^1(\mathbf{R}) \rightarrow L^{1,\infty}(\mathbf{R})$ .

**Définition 8.2.1.** — Pour  $p \in [1, \infty]$ , l'espace de Lebesgue faible  $L^{p,\infty}(\mathbf{R})$  est l'ensemble des fonctions mesurables sur  $\mathbf{R}$  telles que

$$\|f\|_{L^{p,\infty}(\mathbf{R})} = \sup_{\alpha \in \mathbf{R}^+} \alpha \left( \mu(\{|f| > \alpha\}) \right)^{1/p} < +\infty,$$

quotienté par la relation d'équivalence d'égalité presque partout.

Les espaces de Lebesgue faibles sont des espaces quasi-normés, puisqu'on montre sans difficulté que

$$\begin{cases} \|\lambda f\|_{L^{p,\infty}(\mathbf{R})} = |\lambda| \|f\|_{L^{p,\infty}(\mathbf{R})}, \\ \|f + g\|_{L^{p,\infty}(\mathbf{R})} \leq \max(2, 2^{1/p}) \left( \|f\|_{L^{p,\infty}(\mathbf{R})} + \|g\|_{L^{p,\infty}(\mathbf{R})} \right), \\ \|f\|_{L^{p,\infty}(\mathbf{R})} = 0 \Rightarrow f = 0 \end{cases}$$

Par définition,  $L^\infty(\mathbf{R}) = L^{\infty, \infty}(\mathbf{R})$ . Par contre, pour  $p \in [1, \infty[$ , l'inégalité de Bienaymé-Tchebichev

$$\alpha^p \mu(|f| > \alpha) \leq \int_{|f| > \alpha} |f(x)|^p dx \leq \|f\|_{L^p(\mathbf{R})}^p$$

montre que  $L^p(\mathbf{R}) \subset L^{p, \infty}(\mathbf{R})$  mais l'inclusion est stricte puisque  $x \mapsto |x|^{-1/p}$  appartient à  $L^{p, \infty}(\mathbf{R}) \setminus L^p(\mathbf{R})$ .

**Proposition 8.2.2.** — Soit  $p \in [1, \infty]$ . On considère une suite  $(f_n)$  de  $L^{p, \infty}(\mathbf{R})$  qui converge vers  $f$  dans  $L^{p, \infty}(\mathbf{R})$ . Alors

(i)  $f_n$  converge vers  $f$  en mesure, i.e. pour tout  $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu\left(\{x \in \mathbf{R} / |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}\right) = 0$$

(ii) à extraction près,  $f_n$  converge vers  $f$  presque partout.

*Démonstration.* — La première propriété est immédiate puisque, pour tout  $\varepsilon > 0$ ,

$$\mu\left(\{x \in \mathbf{R} / |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}\right) \leq \frac{1}{\varepsilon^p} \|f_n - f\|_{L^{p, \infty}(\mathbf{R})}^p.$$

La deuxième propriété est une conséquence générale de la convergence en mesure. Pour tout  $k \in \mathbf{N}$ , il existe  $n_k$  tel que

$$n > n_k \Rightarrow \mu\left(\{x \in \mathbf{R} / |f_n(x) - f(x)| > 2^{-k}\}\right) < 2^{-k}.$$

De plus, on peut supposer sans perte de généralité que la suite  $(n_k)$  est strictement croissante.

On définit alors

$$A_k = \{x \in \mathbf{R} / |f_{n_k}(x) - f(x)| > 2^{-k}\}.$$

Par définition de  $n_k$ , on a

$$\mu\left(\bigcup_{k=m}^{\infty} A_k\right) \leq \sum_{k=m}^{\infty} \mu(A_k) \leq 2^{1-m}$$

pour tout  $m \geq 1$ . En particulier,

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \leq 1 < \infty.$$

Le théorème de convergence dominée montre alors que la suite des mesures des ensembles  $\bigcup_{k=m}^{\infty} A_k$  converge vers

$$\mu\left(\bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{k=m}^{\infty} A_k\right) = 0.$$

Cela conclut la preuve car  $\bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{k=m}^{\infty} A_k$  contient l'ensemble de tous les  $x$  pour lesquels  $f_{n_k}(x)$  ne converge pas vers  $f(x)$ .  $\square$

### 8.3. Transformée de Hilbert sur $L^1(\mathbf{R})$

Pour montrer que l'intégrale singulière définissant la transformée de Hilbert est continue de  $L^1(\mathbf{R})$  dans  $L^{1, \infty}(\mathbf{R})$ , on va introduire la décomposition de Calderón-Zygmund, qui est une construction par exhaustion qui a de nombreuses autres applications.

**8.3.1. Décomposition de Calderón-Zygmund.** — Le résultat fondamental de Calderón-Zygmund montre que toute fonction de  $L^1$  peut se décomposer en une partie  $g$  intégrable et bornée, et une partie singulière intégrable et de moyenne nulle. Plus précisément, on a le

**Théorème 8.1.** — Soient  $f \in L^1(\mathbf{R})$  et  $\alpha > 0$  quelconque. Alors il existe des fonctions  $g$  et  $b$  sur  $\mathbf{R}$  telles que  $f = g + b$  et

- (i)  $\|g\|_{L^1(\mathbf{R})} \leq \|f\|_{L^1(\mathbf{R})}$  et  $\|g\|_{L^\infty(\mathbf{R})} \leq 2\alpha$ ;
- (ii)  $b = \sum_j b_j$  où les  $b_j$  sont de moyenne nulle et supportées sur des intervalles dyadiques  $Q_j$  d'intérieurs disjoints;
- (iii)  $\|b_j\|_{L^1(\mathbf{R})} \leq 4\alpha|Q_j|$  et  $\sum_j |Q_j| \leq \frac{1}{\alpha}\|f\|_{L^1(\mathbf{R})}$ .

*Démonstration.* — On commence par décomposer  $\mathbf{R}$  en une famille d'intervalles disjoints de longueur égale

$$\mathbf{R} = \bigcup_{m \in \mathbf{Z}} [m.2^{k_0}, (m+1).2^{k_0}[ = \bigcup_{m \in \mathbf{Z}} Q_m^{k_0},$$

où  $k_0$  est choisi de sorte que

$$2^{k_0} = |Q_m^{k_0}| \geq \frac{1}{\alpha}\|f\|_{L^1(\mathbf{R})}.$$

On définit alors

$$M_0 = \{Q_m^{k_0} / m \in \mathbf{Z}\} \text{ et } S_0 = \emptyset.$$

On construit ensuite les ensembles  $M_k$  et  $S_k$  par récurrence.

- A chaque étape, on subdivise les intervalles de  $M_k \setminus S_k$  en les coupant en deux intervalles semi-ouverts disjoints de même longueur, de sorte qu'on obtient un maillage deux fois plus fin

$$M_{k+1} = \{Q \text{ obtenu par subdivision d'un intervalle } Q' \in M_k \setminus S_k\}.$$

- On sélectionne alors les intervalles sur lesquels  $f$  est singulière. Plus précisément, on pose

$$S_{k+1} = \left\{ Q \in M_{k+1} / \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(x)| dx > \alpha \right\}.$$

Les intervalles dyadiques  $Q_j$  mentionnés dans l'énoncé du théorème sont alors les éléments (dénombrables) de  $S = \bigcup_{k=1}^{\infty} S_k$ . Par construction, ils sont disjoints : en effet, deux intervalles dyadiques de la forme  $[2^k m, 2^k(m+1)[$  sont nécessairement disjoints ou inclus strictement l'un dans l'autre. Or les intervalles de  $S_k$  ne sont jamais subdivisés.

On pose alors

$$b_j = \mathbb{1}_{Q_j} \left( f - \frac{1}{|Q_j|} \int_{Q_j} f dx \right).$$

Par définition, la fonction  $b_j$  est supportée dans  $Q_j$  et de moyenne nulle : la propriété (ii) est donc satisfaite.

Par construction, si  $Q_j \in S_k$ , on a

$$\frac{1}{|Q_j|} \int_{Q_j} |f(x)| dx > \alpha.$$

De plus, il existe  $Q'_j \in M_{k-1} \setminus S_{k-1}$  tel que  $Q_j$  est obtenu par subdivision de  $Q'_j$

$$\frac{1}{|Q'_j|} \int_{Q'_j} |f(x)| dx \leq \alpha.$$

En particulier

$$\frac{1}{|Q_j|} \int_{Q_j} |f(x)| dx \leq \frac{1}{|Q_j|} \int_{Q'_j} |f(x)| dx = \frac{2}{|Q'_j|} \int_{Q'_j} |f(x)| dx \leq 2\alpha.$$

On en déduit l'estimation fondamentale sur les parties singulières :

$$(8.3.1) \quad \alpha|Q_j| < \int_{Q_j} |f(x)| dx \leq 2\alpha|Q_j|.$$

L'inégalité triangulaire montre alors que

$$\|b_j\|_{L^1(\mathbf{R})} \leq \int_{Q_j} |f(x)| dx + \left| \int_{Q_j} f(x) dx \right| \leq 2 \int_{Q_j} |f(x)| dx \leq 4\alpha|Q_j|.$$

Comme les  $Q_j$  sont disjoints, on a aussi

$$\sum_j |Q_j| \leq \frac{1}{\alpha} \sum_j \int_{Q_j} |f(x)| dx \leq \frac{1}{\alpha} \|f\|_{L^1(\mathbf{R})},$$

ce qui conclut la preuve de la propriété (iii).

Il reste alors estimer la partie "régulière" de  $f$ , i.e.

$$g = f - \sum_j b_j.$$

Sur  $Q_j$ , on a

$$g = \frac{1}{|Q_j|} \int_{Q_j} f(x) dx.$$

On a alors

$$\int_{Q_j} |g(x)| dx = \left| \int_{Q_j} f(x) dx \right| \leq \int_{Q_j} |f(x)| dx$$

et la formule (8.3.1) montre que

$$\|g\|_{L^\infty(Q_j)} \leq 2\alpha.$$

Sur le complémentaire des  $Q_j$ , on a bien sûr

$$\int_{\mathbf{R} \setminus \cup_j Q_j} |g(x)| dx = \int_{\mathbf{R} \setminus \cup_j Q_j} |f(x)| dx.$$

D'autre part, pour tout  $x \notin \cup_j Q_j$ , il existe une suite d'intervalles dyadiques ( $Q'_k$ ) avec  $Q'_k \in M_k \setminus S_k$  tels que  $x \in Q'_k$ . Par définition,

$$|Q'_k| \leq 2^{k_0 - k} \rightarrow 0 \text{ quand } k \rightarrow \infty,$$

et

$$\frac{1}{|Q'_k|} \int_{Q'_k} |f(x)| dx \leq \alpha.$$

Le théorème de différentiation de Lebesgue montre alors que, pour presque tout  $x \in \mathbf{R} \setminus \cup_j Q_j$ ,

$$|f(x)| = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{|Q'_k|} \int_{Q'_k} |f(x)| dx \leq \alpha.$$

En combinant les estimations, on obtient les bornes annoncées sur  $g$

$$\|g\|_{L^1(\mathbf{R})} \leq \|f\|_{L^1(\mathbf{R})} \text{ et } \|g\|_{L^\infty} \leq 2\alpha,$$

ce qui donne la propriété (i). □

**8.3.2. Intégrales singulières.** — A l'aide de la décomposition de Calderón-Zygmund, on va pouvoir contrôler la transformée de Hilbert des fonctions de  $L^1(\mathbf{R})$ , et plus généralement les intégrales singulières définies par un noyau  $K : \mathbf{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbf{R}$  vérifiant

– une condition de taille du type

$$(8.3.2) \quad \sup_{R>0} \int_{R \leq |x| \leq 2R} |K(x)| dx = A_1 < +\infty$$

– une condition de régularité, dite condition de Hörmander

$$(8.3.3) \quad \sup_{y \neq 0} \int_{|x| \geq 2|y|} |K(x-y) - K(x)| dx = A_2 < +\infty$$

**Définition 8.3.1.** — On dit qu'une distribution tempérée  $W \in \mathcal{S}'(\mathbf{R})$  prolonge  $K$  si elle est de la forme

$$\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}), \quad \langle W, \varphi \rangle = \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{|x| \geq \delta_j} K(x) \varphi(x) dx,$$

pour une suite décroissante  $\delta_j \rightarrow 0$ .

L'existence d'une telle distribution nécessite la condition supplémentaire

$$(8.3.4) \quad \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\delta_j \leq |x| \leq 1} K(x) dx < +\infty$$

et n'est donc pas garantie pour toutes les fonctions  $K$  vérifiant les conditions (8.3.2)(8.3.3); prendre par exemple  $K(x) = |x|^{-1}$ .

L'unicité n'est pas vraie non plus en général : la distribution  $W$  peut dépendre de la suite  $(\delta_j)$ .

**Théorème 8.2.** — Soient  $K : \mathbf{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbf{R}$  un noyau vérifiant les conditions (8.3.2) et (8.3.3), et  $W \in \mathcal{S}'(\mathbf{R})$  une distribution tempérée prolongeant  $K$ .

On suppose que l'opérateur  $T : \varphi \in L^p(\mathbf{R}) \mapsto W * \varphi \in L^p(\mathbf{R})$  est continu pour un certain  $p \in ]1, \infty[$ , avec

$$\|T\|_{L^p \rightarrow L^p} \leq B.$$

Alors  $T$  a un prolongement qui envoie  $L^1(\mathbf{R})$  sur  $L^{1,\infty}(\mathbf{R})$  de norme

$$(8.3.5) \quad \|T\|_{L^1 \rightarrow L^{1,\infty}} \leq C(A_2 + B).$$

*Démonstration.* — On procède de façon habituelle, en montrant que l'estimation (8.3.5) est satisfaite pour les fonctions  $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$  (pour lesquelles  $T(f)$  est bien définie), puis en utilisant un argument de densité pour montrer que  $T$  s'étend aux fonctions de  $L^1(\mathbf{R})$ .

La stratégie est la suivante : en utilisant la décomposition de Calderón-Zygmund, on peut ré écrire

$$T(f) = T(g) + T(b)$$

où la fonction  $T(g) \in L^p(\mathbf{R})$  vérifie a fortiori une estimation de type  $L^p$  faible.

Pour estimer  $T(b)$ , on utilise le fait que la composante singulière  $b$  est la somme de fonctions  $b_j$  de moyenne nulle. Cette annulation permet de modifier l'intégrande définissant  $T(b_j)$  afin d'utiliser la condition de Hörmander.

• Soit  $\alpha > 0$ . D'après le théorème 8.1, il existe des fonctions  $g$  et  $b$  sur  $\mathbf{R}$  telles que  $f = g + b$  et

- (i)  $\|g\|_{L^1(\mathbf{R})} \leq \|f\|_{L^1(\mathbf{R})}$  et  $\|g\|_{L^\infty(\mathbf{R})} \leq 2\gamma\alpha$ ;
- (ii)  $b = \sum_j b_j$  où les  $b_j$  sont de moyenne nulle et supportées sur des intervalles dyadiques  $Q_j$  d'intérieurs disjoints;
- (iii)  $\|b_j\|_{L^1(\mathbf{R})} \leq 4\gamma\alpha|Q_j|$  et  $\sum_j |Q_j| \leq \frac{1}{\gamma\alpha}\|f\|_{L^1(\mathbf{R})}$ ;

où  $\gamma$  est une constante positive qui sera fixée ultérieurement.

Pour chaque intervalle  $Q_j$ , on définit l'intervalle  $Q_j^*$  de même milieu  $y_j$  et de longueur  $|Q_j^*| = 2|Q_j|$ . On a alors

$$\begin{aligned} & |\{x \in \mathbf{R} / |Tf(x)| > \alpha\}| \\ & \leq \left| \{x \in \mathbf{R} / |Tg(x)| > \frac{\alpha}{2}\} \right| + \left| \{x \in \mathbf{R} / |Tb(x)| > \frac{\alpha}{2}\} \right| \\ & \leq \frac{2^p}{\alpha^p} \|Tg\|_{L^p(\mathbf{R})}^p + |\cup_j Q_j^*| + \left| \{x \in \mathbf{R} \setminus \cup_j Q_j^* / |Tb(x)| > \frac{\alpha}{2}\} \right| \\ & \leq \frac{2^p B^p}{\alpha^p} \|g\|_{L^p(\mathbf{R})}^p + \sum_j |Q_j^*| + \frac{2}{\alpha} \int_{\mathbf{R} \setminus \cup_j Q_j^*} |Tb(x)| dx \end{aligned}$$

Le premier terme du membre de droite est estimé en utilisant la propriété (i) et l'inégalité de Hölder

$$\|g\|_{L^p(\mathbf{R})}^p \leq \|g\|_{L^1(\mathbf{R})} \|g\|_{L^\infty(\mathbf{R})}^{p-1} \leq (2\gamma\alpha)^{p-1} \|f\|_{L^1(\mathbf{R})}.$$

Le contrôle du second terme est donné par la propriété (iii)

$$\sum_j |Q_j^*| \leq 2 \sum_j |Q_j| \leq \frac{2}{\gamma\alpha} \|f\|_{L^1(\mathbf{R})}.$$

On a donc

$$(8.3.6) \quad |\{x \in \mathbf{R} / |Tf(x)| > \alpha\}| \leq \left( \frac{2^{2p-1} \gamma^{p-1} B^p}{\alpha} + \frac{2}{\gamma\alpha} \right) \|f\|_{L^1(\mathbf{R})} + \frac{2}{\alpha} \sum_j \int_{\mathbf{R} \setminus Q_j^*} |Tb_j(x)| dx$$

Il suffit alors de montrer que la dernière somme est bornée par  $C\|f\|_{L^1(\mathbf{R})}$ .

- On va utiliser ici le fait que les  $b_j$  sont de moyenne nulle (propriété (ii)) et la condition de Hörmander (8.3.3).

$$\begin{aligned} & \sum_j \int_{\mathbf{R} \setminus Q_j^*} |Tb_j(x)| dx = \sum_j \int_{\mathbf{R} \setminus Q_j^*} \left| \int_{Q_j} b_j(y) K(x-y) dy \right| dx \\ & = \sum_j \int_{\mathbf{R} \setminus Q_j^*} \left| \int_{Q_j} b_j(y) (K(x-y) - K(x-y_j)) dy \right| dx \\ & \leq \sum_j \int_{Q_j} |b_j(y)| \int_{\mathbf{R} \setminus Q_j^*} |K(x-y) - K(x-y_j)| dx dy \\ & \leq \sum_j \int_{Q_j} |b_j(y)| \int \mathbb{1}_{x'+y_j \notin Q_j^*} |K(x' - (y-y_j)) - K(x')| dx' dy \end{aligned}$$

Si  $x' + y_j \notin Q_j^*$  et  $y \in Q_j$ , on a par définition

$$|(x' + y_j) - y_j| \geq \frac{1}{2}|Q_j^*| \geq |Q_j| \text{ et } |y - y_j| \leq \frac{1}{2}|Q_j|.$$

En particulier,

$$|x'| \geq 2|y - y_j|.$$

On peut alors appliquer la condition de Hörmander

$$(8.3.7) \quad \begin{aligned} \sum_j \int_{\mathbf{R} \setminus Q_j^*} |Tb_j(x)| dx &\leq \sum_j \int_{Q_j} |b_j(y)| \int \mathbf{1}_{x'+y_j \notin Q_j^*} |K(x' - (y - y_j)) - K(x')| dx' dy \\ &\leq A_2 \sum_j \int_{Q_j} |b_j(y)| dy \leq 4A_2 \|f\|_{L^1(\mathbf{R})} \end{aligned}$$

d'après la propriété (iii).

- En rassemblant les deux estimations (8.3.6)(8.3.7), on a finalement

$$\alpha |\{x \in \mathbf{R} / |Tf(x)| > \alpha\}| \leq \left( 2^{2p-1} \gamma^{p-1} B^p + \frac{2}{\gamma} + 8A_2 \right) \|f\|_{L^1(\mathbf{R})}.$$

On obtient l'estimation (8.3.5) en choisissant par exemple  $\gamma = 1/(2B)$ .  $\square$

Par définition, la transformée de Hilbert est l'opérateur  $H : \varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}) \mapsto W_0 * \varphi$  où la distribution tempérée  $W_0 = \frac{1}{\pi} vp(\frac{1}{x})$  prolonge le noyau  $K(x) = \frac{1}{\pi x}$ .

On a montré dans le premier paragraphe de ce chapitre que la transformée de Hilbert  $H$  est continue sur tous les  $L^p(\mathbf{R})$  pour  $p \in ]1, \infty[$ , et que c'est même une isométrie de  $L^2(\mathbf{R})$

$$\|H\|_{L^2 \rightarrow L^2} = 1.$$

La continuité  $L^1 - L^{1,\infty}$  de  $H$  s'obtient alors simplement en montrant que le noyau  $K(x) = \frac{1}{\pi x}$  vérifient les propriétés (8.3.2)(8.3.3).

On a

$$\int_{R \leq |x| \leq 2R} \frac{dx}{|x|} = 2 \ln 2,$$

et, si  $y > 0$

$$\int_{|x| \geq 2y} \left| \frac{1}{x-y} - \frac{1}{x} \right| dx = \left[ \ln \frac{x-y}{x} \right]_{2y}^{\infty} + \left[ \ln \frac{|x-y|}{|x|} \right]_{-\infty}^{-2y} = \ln 3.$$

Le cas où  $y > 0$  s'en déduit par symétrie.

Ce résultat de continuité est essentiellement optimal puisque la transformée de Hilbert de la fonction caractéristique  $\chi_{[a,b]}$  se comporte comme  $|x|^{-1}$  à l'infini.



## **PARTIE IV**

### **ANALYSE SPECTRALE**



## CHAPITRE 9

### ESPACES DE HILBERT

Dans cette partie du cours, on va s'intéresser aux propriétés spectrales des opérateurs linéaires définis sur des espaces de Banach. Ces propriétés peuvent être précisées dans le cas où les espaces ont une structure hilbertienne, i.e. dans le cas où la norme est construite sur un produit scalaire.

On va donc commencer par rappeler quelques résultats importants concernant les espaces de Hilbert, et on renvoie aux notes de cours de Frédéric Paulin pour plus de détails.

#### 9.1. Définition et propriétés fondamentales

**Définition 9.1.1.** — *Un espace de Hilbert est un espace vectoriel  $H$  muni d'un produit scalaire (i.e. une forme bilinéaire de  $H \times H$  dans  $\mathbf{R}$ , symétrique et définie positive), et qui est complet pour la norme associée*

$$\forall u \in H, \quad |u| = (u, u)^{1/2}.$$

L'identité du parallélogramme

$$\left| \frac{a+b}{2} \right|^2 + \left| \frac{a-b}{2} \right|^2 = \frac{1}{2}(|a|^2 + |b|^2)$$

montre que les espaces de Hilbert sont uniformément convexes, donc réflexifs (théorème de Milman-Pettis). Les résultats de topologie générale, démontrés par exemple dans le cours de Jean-Marc Delort, permettent alors d'obtenir des propriétés très fortes sur la dualité ou les projections sur les convexes fermés.

On va en donner ici des démonstrations élémentaires constructives, basées sur l'utilisation du produit scalaire.

**Proposition 9.1.2 (Projection sur un convexe fermé).** — *Soient  $H$  un espace de Hilbert, et  $K \subset H$  un convexe fermé non vide. Alors pour tout  $f \in H$ , il existe une unique projection de  $f$  sur  $K$ , i.e. un unique  $u \in K$  tel que  $|f - u| = \min_{v \in K} |f - v|$ .*

— *La projection  $u \in K$  de  $f$  sur  $K$  est caractérisée par l'inégalité*

$$\forall v \in K, \quad (f - u, v - u) \leq 0;$$

*En particulier l'opérateur de projection  $P_K : f \mapsto u$  est contractant.*

– Si  $K$  est un sous-espace vectoriel, on a l'égalité

$$\forall v \in K, \quad (f - u, v - u) = 0;$$

et l'opérateur de projection  $P_K : f \mapsto u$  est linéaire.

*Démonstration.* — Soit  $(u_n)$  une suite minimisante pour la distance  $d = \inf_{v \in K} |f - v|$

$$u_n \in K, \quad d_n = |f - u_n| \rightarrow d.$$

En appliquant l'identité du parallélogramme avec  $a = f - u_n$  et  $b = f - u_m$ , on obtient

$$\left| f - \frac{u_n + u_m}{2} \right|^2 + \left| \frac{u_n - u_m}{2} \right|^2 = \frac{1}{2}(d_n^2 + d_m^2)$$

Comme  $(u_n + u_m)/2 \in K$ , sa distance à  $f$  est supérieure à  $d$ . Donc

$$\left| \frac{u_n - u_m}{2} \right|^2 = \frac{1}{2}(d_n^2 + d_m^2) - d^2 \rightarrow 0 \text{ quand } n, m \rightarrow \infty.$$

La suite  $(u_n)$  est de Cauchy et converge donc vers  $u \in K$ .

• Si  $u$  réalise la distance de  $f$  à  $K$ , on a pour tout  $v \in K$

$$\forall t \in [0, 1], \quad w = (1 - t)u + tv \in K$$

et donc

$$|f - u|^2 \leq |f - w|^2 \leq |(f - u) - t(v - u)|^2 = |f - u|^2 - 2t(f - u, v - u) + t^2|v - u|^2.$$

En faisant tendre  $t \rightarrow 0$ , on obtient alors

$$(f - u, v - u) \leq 0.$$

Inversement, si pour tout  $v \in K$  on a  $(f - u, v - u) \leq 0$ , alors

$$|u - f|^2 - |v - f|^2 = 2(f - u, v - u) - |v - u|^2 \leq 0$$

donc  $u$  réalise la distance de  $f$  à  $K$ .

Cette caractérisation de  $u$  montre en particulier que la projection  $P_K f$  est unique : si pour tout  $v \in K$

$$(f - u_1, v - u_1) \leq 0 \text{ et } (f - u_2, v - u_2) \leq 0,$$

alors

$$(u_1 - u_2, u_1 - u_2) \leq 0.$$

Elle montre aussi que le projecteur  $P_K$  est contractant : si pour tout  $v \in K$

$$(f_1 - u_1, v - u_1) \leq 0 \text{ et } (f_2 - u_2, v - u_2) \leq 0,$$

alors

$$(u_1 - u_2, u_1 - u_2) \leq (f_1 - f_2, u_1 - u_2) \leq |f_1 - f_2| |u_1 - u_2|.$$

• L'inégalité précédente devient une égalité dans le cas où  $K$  est un sous-espace vectoriel. En effet, si pour  $v \in K$  et tout  $t \in \mathbf{R}$ ,

$$(f - u, tv - u) \leq 0,$$

on a nécessairement

$$(f - u, v) = 0.$$

Cette identité montre en particulier que le projecteur est linéaire. □

**Théorème 9.1 (Théorème de Riesz-Fréchet).** — Soient  $H$  un espace de Hilbert, et  $H'$  son dual. Pour tout  $\varphi \in H'$ , il existe un unique  $f \in H$  tel que

$$\forall v \in H, \quad \langle \varphi, v \rangle = (f, v).$$

En particulier,  $\|\varphi\|_{H'} = |f|$ .

*Démonstration.* — Soit  $M = \varphi^{-1}(0)$ . Par définition,  $M$  est un sous-espace fermé de  $H$ .

Si  $M = H$ ,  $\varphi \equiv 0$  et on prend  $f = 0$ .

Sinon, il existe un élément  $h$  de  $H$  tel que  $\langle \varphi, h \rangle \neq 0$ , autrement dit tel que  $h \notin M$ . On pose alors

$$g = \frac{h - P_M h}{|h - P_M h|} \text{ de sorte que } |g| = 1 \text{ et } \forall w \in M, (g, w) = 0.$$

Tout  $v \in H$  se décompose alors sous la forme

$$v = \frac{\langle \varphi, v \rangle}{\langle \varphi, g \rangle} g + w \text{ avec } w \in M.$$

On a alors

$$(g|v) = \frac{\langle \varphi, v \rangle}{\langle \varphi, g \rangle} |g|^2 = \frac{\langle \varphi, v \rangle}{\langle \varphi, g \rangle}.$$

On obtient donc la représentation attendue en posant  $f = \langle \varphi, g \rangle g$ . □

Le théorème de Riesz-Fréchet montre que toute forme linéaire continue sur  $H$  peut se représenter à l'aide du produit scalaire, ce qui permet d'identifier  $H$  et  $H'$ . On fera très souvent cette identification, mais pas toujours.

Typiquement, si  $V$  et  $H$  sont deux espaces de Hilbert tels que  $V$  est un sous-espace vectoriel de  $H$  dense dans  $H$ , on a

$$V \subset H \text{ et } H' \subset V'.$$

On ne peut alors pas identifier simultanément  $H$  et  $H'$ , et  $V$  et  $V'$ . En général, on identifie l'espace pivot  $H$  et son dual  $H'$ , de sorte qu'on a

$$V \subset H = H' \subset V'.$$

## 9.2. Théorèmes de Stampacchia et de Lax-Milgram

**Définition 9.2.1.** — On dit qu'une forme bilinéaire  $a : H \times H \rightarrow \mathbf{R}$  est

– continue s'il existe  $C > 0$  telle que

$$\forall u, v \in H, \quad |a(u, v)| \leq C|u||v|,$$

– coercive s'il existe  $\alpha > 0$  telle que

$$\forall u \in H, \quad a(u, u) \geq \alpha|u|^2.$$

**Théorème 9.2 (Théorème de Stampacchia).** — Soient  $H$  un espace de Hilbert,  $K$  un convexe fermé non vide, et  $a : H \times H \rightarrow \mathbf{R}$  une forme bilinéaire continue coercive.

Pour tout  $\varphi \in H'$ , il existe un unique  $u \in K$  tel que

$$\forall v \in K, \quad a(u, v - u) \geq \langle \varphi, v - u \rangle.$$

De plus, si  $a$  est symétrique,  $u \in K$  est caractérisé par la propriété

$$\frac{1}{2}a(u, u) - \langle \varphi, u \rangle = \min_{v \in K} \left( \frac{1}{2}a(v, v) - \langle \varphi, v \rangle \right).$$

*Démonstration.* — La preuve de ce résultat repose sur le théorème de point fixe de Picard.

D'après le théorème de Riesz-Fréchet, il existe un unique  $f \in H$  tel que

$$\forall v \in H, \quad \langle \varphi, v \rangle = (f, v).$$

Comme, pour tout  $u \in H$  fixé, l'application  $v \mapsto a(u, v)$  est une forme linéaire continue sur  $H$ , il existe un élément  $Au$  de  $H$  tel que

$$\forall v \in H, \quad a(u, v) = (Au, v).$$

Comme  $a$  est bilinéaire, continue et coercive,  $A$  est un opérateur linéaire sur  $H$ , et on a pour tout  $u \in H$

$$|Au| \leq C|u|, \quad (Au, u) \geq \alpha|u|^2.$$

On cherche alors  $u \in K$  tel que

$$\forall v \in K, \quad (Au, v - u) \geq (f, v - u).$$

Soit  $\rho > 0$ . D'après la proposition 9.1.2, l'inégalité

$$\forall v \in K, \quad \left( \rho(f - Au) + u - u, v - u \right) \leq 0$$

est équivalente au fait que

$$u = Su \text{ où } Su = P_K(\rho f - \rho Au + u).$$

Or

$$\begin{aligned} |Su_1 - Su_2|^2 &\leq \left| (u_1 - u_2) - \rho A(u_1 - u_2) \right|^2 \\ &\leq |u_1 - u_2|^2 - 2\rho \left( A(u_1 - u_2), u_1 - u_2 \right) + \rho^2 \left( A(u_1 - u_2), A(u_1 - u_2) \right) \\ &\leq |u_1 - u_2|^2 (1 - 2\rho\alpha + \rho^2 C^2) \end{aligned}$$

En choisissant  $\rho < 2\alpha/C^2$ , on obtient que  $S$  est contractant. D'après le théorème de Picard,  $S$  a donc un unique point fixe, qui est la solution de l'équation

$$\forall v \in K, \quad a(u, v - u) \geq \langle \varphi, v - u \rangle.$$

Dans le cas où la forme bilinéaire est symétrique,  $a$  définit un nouveau produit scalaire sur  $H$ . De plus, comme  $a$  est continue et coercive, les deux normes sont équivalentes. En appliquant le théorème de Riesz-Fréchet, on obtient alors l'existence d'un unique  $g \in H$  tel que

$$\forall v \in H, \quad \langle \varphi, v \rangle = a(g, v).$$

L'équation

$$\forall v \in K, \quad a(u, v - u) \geq \langle \varphi, v - u \rangle$$

est alors équivalente à  $u = \tilde{P}_K g$  où  $\tilde{P}_K$  est la projection au sens du produit scalaire défini par  $a$ . D'après la proposition 9.1.2,  $u$  est alors la solution du problème de minimisation

$$a(g - u, g - u) = \min_{v \in K} a(g - v, g - v)$$

ou de façon équivalente

$$\frac{1}{2}a(u, u) - a(g, u) = \min_{v \in K} \left( \frac{1}{2}a(v, v) - a(g, v) \right).$$

On conclut en utilisant la définition de  $g$ . □

Le théorème de Stampacchia est le point de départ de la théorie des inéquations variationnelles; cette théorie a de nombreuses applications en mécanique, en physique et en contrôle optimal.

Pour la résolution des équations aux dérivées partielles elliptiques par exemple, l'approche variationnelle est la suivante :

- on définit la notion de solution faible en utilisant les espaces de Sobolev;
- on établit l'existence et l'unicité d'une solution faible en appliquant un corollaire du théorème de Stampacchia, dit théorème de Lax-Milgram;
- on montre alors des estimations de régularité pour la solution faible et on en déduit que c'est en fait une solution classique.

**Corollaire 9.2.2 (Théorème de Lax-Milgram).** — Soient  $H$  un espace de Hilbert, et  $a : H \times H \rightarrow \mathbf{R}$  une forme bilinéaire continue coercive.

Pour tout  $\varphi \in H'$ , il existe un unique  $u \in H$  tel que

$$(9.2.1) \quad \forall v \in H, \quad a(u, v) = \langle \varphi, v \rangle.$$

De plus, si  $a$  est symétrique,  $u$  est caractérisé par la propriété

$$(9.2.2) \quad \frac{1}{2}a(u, u) - \langle \varphi, u \rangle = \min_{v \in H} \left( \frac{1}{2}a(v, v) - \langle \varphi, v \rangle \right)$$

La relation entre l'équation (9.2.1) et le problème de minimisation (9.2.2) est l'expression mathématique du principe de moindre action.

### 9.3. Bases hilbertiennes

**Définition 9.3.1.** — Soient  $H$  un espace de Hilbert, et  $(E_n)_{n \geq 1}$  une suite de sous-espaces fermés de  $H$ . On dit que  $H$  est somme hilbertienne des  $E_n$  ( $H = \bigoplus_n E_n$ ) si

- les  $E_n$  sont deux-à-deux orthogonaux

$$\forall u \in E_m, \forall v \in E_n \text{ avec } n \neq m, \quad (u, v) = 0;$$

- l'espace vectoriel engendré par les  $E_n$  est dense dans  $H$ .

**Proposition 9.3.2 (Identité de Bessel-Parseval).** — Soient  $H$  un espace de Hilbert, et  $(E_n)_{n \geq 1}$  une suite de sous-espaces fermés de  $H$  tels que  $H = \bigoplus_n E_n$ .

Soient  $u \in H$  et  $u_n = P_{E_n} u$ . Alors

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ et } |u|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |u_n|^2.$$

*Démonstration.* — On pose

$$S_k = \sum_{n=1}^k P_{E_n}$$

de sorte que  $S_k$  est un opérateur linéaire continu de  $H$  dans  $H$ .

Pour tout  $u \in H$ , la proposition 9.1.2 montre que

$$(u, P_{E_n} u) = |u_n|^2$$

et donc par sommation

$$(9.3.1) \quad (u, S_k u) = \sum_{n=1}^k |u_n|^2 = |S_k u|^2.$$

On en déduit, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, que

$$|S_k u| \leq |u|.$$

Soit  $F$  l'espace vectoriel engendré par les  $(E_n)$ . Pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\bar{u} \in F$  tel que

$$|u - \bar{u}| \leq \varepsilon.$$

Pour  $k$  assez grand, on a  $\bar{u} = S_k \bar{u}$ , d'où l'on déduit que

$$|u - S_k u| \leq |u - \bar{u}| + |S_k \bar{u} - S_k u| \leq 2|u - \bar{u}| \leq 2\varepsilon.$$

On a donc  $u = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k u_n$ . En passant à la limite dans (9.3.1), on obtient l'égalité de Bessel-Parseval.  $\square$

**Définition 9.3.3.** — Soit  $H$  un espace de Hilbert. On appelle base hilbertienne de  $H$  une suite  $(e_n)_{n \geq 1}$  telle que

- $\forall m, n, (e_n, e_m) = \delta_{n,m}$ ;
- l'espace vectoriel engendré par les  $(e_n)$  est dense dans  $H$ .

D'après la proposition précédente, tout élément  $u \in H$  peut alors se décomposer

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} (e_n, u) e_n \text{ avec } \sum_{n=1}^{\infty} |(u, e_n)|^2 = |u|^2.$$

**Théorème 9.3.** — Tout espace de Hilbert séparable admet une base hilbertienne.

*Démonstration.* — Soit  $(u_n)$  un ensemble dénombrable dense de  $H$ . On note  $F_k$  l'espace vectoriel engendré par  $(u_n)_{1 \leq n \leq k}$ . Les  $(F_k)$  forment alors une suite croissante de sous-espaces de dimension finie telle que  $\bigcup_{k=1}^{\infty} F_k$  est dense dans  $H$ .

Le procédé d'orthonormalisation de Schmidt permet alors de construire une base hilbertienne.  $\square$

On verra au chapitre suivant comment construire une base hilbertienne formée de vecteurs propres d'opérateurs autoadjoints compacts. Dans  $L^2(\Omega)$ , on utilise très souvent des bases spéciales formées de fonctions propres d'un opérateur différentiel, ce qui est par exemple le point de départ de l'analyse harmonique.



## CHAPITRE 10

### OPÉRATEURS COMPACTS

L'objectif de la théorie spectrale consiste à décomposer les opérateurs linéaires en sommes d'opérateurs élémentaires, simplifiant ainsi la résolution des problèmes dans lesquels ils interviennent [6].

En dimension finie, des méthodes de nature algébrique - liées à l'étude des polynômes - permettent d'aboutir à la forme de Jordan, qui traduit la décomposition de l'opérateur en la somme d'opérateurs de multiplication et d'un opérateur nilpotent. Dans le cas particulier des opérateurs autoadjoints (matrices symétriques), l'opérateur nilpotent est nécessairement nul, ce qui confère à la matrice une structure diagonale dans une base de vecteurs propres.

En dimension infinie, les premiers résultats - relatifs à l'étude des équations intégrales - ont été obtenus par Fredholm puis Hilbert, et généralisés par Riesz en une théorie des opérateurs compacts. Ces résultats dépendent d'outils de l'analyse fonctionnelle, mais sont proches à beaucoup d'égards de ceux de la dimension finie. En particulier, la décomposition peut être précisée dans le cas où l'espace a une structure hilbertienne et l'opérateur a des propriétés de symétrie.

#### 10.1. Définitions et propriétés fondamentales

Soient  $E$  et  $F$  deux espaces de Banach, et  $A : D(A) \subset E \rightarrow F$  un opérateur linéaire non-borné de  $E$  dans  $F$ , de domaine  $D(A)$ . Dans toute la suite, on notera

- $G(A) = \bigcup_{u \in D(A)} [u, Au] \subset E \times F$  le graphe de  $A$ ;
- $R(A) = \bigcup_{u \in D(A)} Au \subset F$  l'image de  $A$ ;
- $N(A) = \{u \in D(A) / Au = 0\}$  le noyau de  $A$ .

**Définition 10.1.1.** — *L'adjoint de  $A$ , noté  $A^*$ , est l'opérateur linéaire de domaine*

$$D(A^*) = \{v \in F' / \exists C \geq 0, \forall u \in D(A), |\langle v, Au \rangle| \leq C \|u\|\}$$

*défini par*

$$\forall v \in D(A^*), \forall u \in D(A), \quad \langle v, Au \rangle = \langle A^*v, u \rangle.$$

Les graphes de  $A$  et  $A^*$  sont liés par une relation d'orthogonalité très simple :  $[v, f] \in F' \times E'$  appartient au graphe de  $A^*$  si et seulement si

$$\forall u \in D(A), \quad \langle f, u \rangle = \langle A^*v, u \rangle = \langle v, Au \rangle$$

c'est-à-dire si et seulement si  $[-f, v]$  appartient l'orthogonal du graphe de  $A$ .

En utilisant le théorème de Hahn-Banach, on peut alors établir les résultats d'orthogonalité suivants :

**Proposition 10.1.2.** — Soit  $A : D(A) \subset E \rightarrow F$  un opérateur linéaire non-borné, fermé, à domaine dense. Alors on a

$$N(A) = R(A^*)^\perp, \quad N(A^*) = R(A)^\perp, \quad \overline{R(A^*)} \subset N(A)^\perp, \quad \overline{R(A)} = N(A^*)^\perp.$$

De plus, les propriétés suivantes sont équivalentes

$$R(A) \text{ fermé} \Leftrightarrow R(A^*) \text{ fermé} \Leftrightarrow R(A) = N(A^*)^\perp \Leftrightarrow R(A^*) = N(A)^\perp.$$

*Démonstration.* — On introduit l'espace  $X = E \times F$ , de dual  $X' = E' \times F'$  et on considère les sous-espaces  $G = G(A)$  et  $L = E \times \{0\}$ . On vérifie alors que

$$\begin{aligned} N(A) \times \{0\} &= G \cap L, & E \times R(A) &= G + L, \\ \{0\} \times N(A^*) &= G^\perp \cap L^\perp, & R(A^*) \times F' &= G^\perp + L^\perp. \end{aligned}$$

Avec ce formalisme, la preuve du premier point ne présente pas de difficulté particulière. Si  $G$  et  $L$  sont deux sous-espaces fermés de  $X$ , on a en effet

$$G \cap L = (G^\perp + L^\perp)^\perp \text{ et } G^\perp \cap L^\perp = (G + L)^\perp.$$

La preuve du second point repose sur l'équivalence

$G + L$  fermé dans  $X \Leftrightarrow G^\perp + L^\perp$  fermé dans  $X' \Leftrightarrow G + L = (G^\perp \cap L^\perp)^\perp \Leftrightarrow G^\perp + L^\perp = (G \cap L)^\perp$  qui est un corollaire du théorème de l'application ouverte, démontré dans l'appendice E.  $\square$

**Définition 10.1.3.** — On dit qu'un opérateur  $T \in \mathcal{L}(E, F)$  est de rang fini si la dimension de l'image  $R(T)$  est finie.

On dit qu'un opérateur  $T \in \mathcal{L}(E, F)$  est compact si  $T(B_E)$  est relativement compact pour la topologie forte.

**Proposition 10.1.4.** — Soient  $E$  et  $F$  deux espaces de Banach. L'ensemble  $\mathcal{K}(E, F)$  des opérateurs compacts de  $E$  dans  $F$  est un sous-espace vectoriel fermé de  $\mathcal{L}(E, F)$ .

Il contient l'adhérence des opérateurs continus de rangs finis.

*Démonstration.* — Il est clair qu'un opérateur continu de rang fini est compact, et que la somme de deux opérateurs compacts est un opérateur compact. Il suffit donc de vérifier que  $\mathcal{K}(E, F)$  est fermé.

Supposons alors que  $(T_n)$  est une suite d'opérateurs compacts, convergeant en norme vers un opérateur  $T \in \mathcal{L}(E, F)$ . Comme  $F$  est complet, il suffit de montrer que  $T(B_E)$  est précompacte, c'est-à-dire que pour tout  $\varepsilon > 0$ ,  $T(B_E)$  peut être recouvert par un nombre fini de boules de taille  $\varepsilon$ . Soit  $n$  tel que

$$\|T_n - T\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Comme  $T_n(B_E)$  est relativement compact, il existe  $I$  fini tel que

$$T_n(B_E) \subset \bigcup_{i \in I} B(u_i, \frac{\varepsilon}{2}).$$

On a alors

$$T(B_E) \subset \bigcup_{i \in I} B(u_i, \varepsilon),$$

ce qui conclut la preuve.  $\square$

Le “problème de l’approximation” concerne la réciproque de la propriété précédente : étant donné un opérateur compact  $T$ , existe-t-il une suite  $(T_n)$  d’opérateurs continus de rangs finis telle que  $\|T_n - T\| \rightarrow 0$ ?

En général, la réponse est négative. Toutefois, elle est affirmative dans de nombreux cas, en particulier si  $F$  est un espace de Hilbert. En effet, pour tout  $\varepsilon > 0$ , on peut recouvrir le compact  $K = \overline{T(B_E)}$  par un nombre fini de boules de taille  $\varepsilon$  :

$$K \subset \bigcup_{i \in I} B(u_i, \varepsilon).$$

On définit alors  $G_\varepsilon$  l’espace vectoriel engendré par  $\{u_i / i \in I\}$ , et  $T_\varepsilon = P_{G_\varepsilon} \circ T$ , où  $P_{G_\varepsilon}$  est la projection orthogonale sur  $G_\varepsilon$ . Par définition,  $P_\varepsilon$  est un opérateur continu de rang fini. Vérifions alors que  $\|T_\varepsilon - T\| < 2\varepsilon$ . Pour tout  $v \in B_E$ , il existe  $i \in I$  tel que

$$\|Tv - u_i\| < \varepsilon.$$

Comme  $\|P_{G_\varepsilon}\| \leq 1$ , on a aussi

$$\|T_\varepsilon v - u_i\| < \varepsilon.$$

En combinant les deux inégalités, on obtient la borne attendue.

**Théorème 10.1 (Théorème de Schauder).** — Soient  $E$  et  $F$  deux espaces de Banach. Si l’opérateur  $T \in \mathcal{L}(E, F)$  est compact, alors  $T^* \in \mathcal{L}(F', E')$  est compact.

*Démonstration.* — Soit  $(v_n)$  une suite de  $B_{F'}$ . A chaque  $v_n$ , on associe la fonction  $\varphi_n$  continue sur le compact  $K = \overline{T(B_E)}$ , définie par

$$\varphi_n(x) = \langle v_n, x \rangle.$$

La famille  $(\varphi_n)$  est alors équibornée et équicontinue sur  $K$ , de sorte qu’on peut appliquer le théorème d’Ascoli et extraire une sous-suite convergente

$$\varphi_{n_k} \rightarrow \varphi \text{ in } C(K) \text{ quand } k \rightarrow \infty.$$

En particulier, la suite est de Cauchy et on a

$$\sup_{u \in B_E} |\langle v_{n_k} - v_{n_j}, Tu \rangle| \rightarrow 0 \text{ quand } j, k \rightarrow \infty.$$

Autrement dit  $(T^*v_{n_k})$  est de Cauchy, et converge dans  $E'$ .

Cela prouve que  $T^*(B_{F'})$  est relativement compact.  $\square$

## 10.2. Théorie de Riesz-Fredholm

L’alternative de Fredholm concerne la résolution de l’équation  $u - Tu = f$ , où  $T$  est un opérateur compact sur un espace de Banach  $E$ . Elle exprime que

- ou bien pour tout  $f \in E$ , l’équation  $u - Tu = f$  admet une solution unique;

- ou bien l'équation homogène  $u - Tu = 0$  admet  $n$  solutions indépendantes et, dans ce cas, l'équation non homogène  $u - Tu = f$  est résoluble si et seulement si  $f$  vérifie  $n$  conditions d'orthogonalité.

Ce résultat repose sur la caractérisation suivante des espaces de dimension finie.

**Théorème 10.2 (Théorème de Riesz).** — *Soit  $E$  un espace vectoriel normé. Si la boule unité  $B_E$  est compacte, alors  $E$  est de dimension finie.*

*Démonstration.* — Cette propriété se montre par contraposition en construisant une suite  $(u_n)$  qui n'admet aucune sous-suite convergente. Le point clé est le lemme suivant : si  $M \subset E$  est un sous-espace strict fermé, alors pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $u \in E$  tel que

$$\|u\| = 1 \text{ et } d(u, M) \geq 1 - \varepsilon.$$

- Commençons par montrer le lemme. Soit  $v \in E \setminus M$ . Comme  $M$  est fermé,  $d = d(v, M) > 0$ . On choisit alors  $m_0 \in M$  tel que

$$d \leq \|v - m_0\| \leq \frac{d}{1 - \varepsilon},$$

et on pose

$$u = \frac{v - m_0}{\|v - m_0\|} \text{ de sorte que } \|u\| = 1.$$

Soit  $m \in M$ . On a  $m_0 + \|v - m_0\|m \in M$ , donc

$$\|u - m\| = \frac{\|u - (m_0 + \|v - m_0\|m)\|}{\|v - m_0\|} \geq 1 - \varepsilon,$$

ce qui signifie que  $d(u, M) \geq 1 - \varepsilon$ .

- Si  $E$  est de dimension infinie, il existe une suite  $(E_n)$  strictement croissante de sous-espaces de dimension finie. D'après ce qui précède, on peut construire une suite  $(u_n)$  avec

$$u_n \in E_n, \quad \|u_n\| = 1, \quad \text{et } d(u_n, E_{n-1}) \geq \frac{1}{2}.$$

En particulier,

$$\forall m < n, \quad \|u_m - u_n\| \geq \frac{1}{2}.$$

La suite  $(u_n)$  n'admet donc aucune sous-suite convergente, ce qui implique que  $B_E$  n'est pas compacte. □

**Théorème 10.3 (Théorème de Fredholm).** — *Soient  $E$  un espace de Banach, et  $T \in \mathcal{K}(E)$  un opérateur compact. Alors*

- (i)  $N(I - T)$  est de dimension finie,  $R(I - T) = N(I - T^*)^\perp$ ;
- (ii) l'opérateur  $I - T$  est injectif si et seulement si il est surjectif;
- (ii)  $\dim N(I - T) = \dim N(I - T^*)$ .

*Démonstration.* — (i) On pose  $E_0 = N(I - T)$ . Alors

$$B_{E_0} = T(B_{E_0}) \subset T(B_E)$$

donc  $B_{E_0}$  est compact, et d'après le théorème de Riesz,  $E_0$  est de dimension finie.

D'après la proposition 10.1.2, pour montrer l'égalité  $R(I - T) = N(I - T^*)^\perp$ , il suffit de prouver que l'image de  $I - T$  est fermée. On se donne alors une suite  $(f_n)$  telle que

$$f_n = u_n - Tu_n \text{ et } f_n \rightarrow f.$$

Soit  $d_n = d(u_n, N(I - T))$ . Comme  $N(I - T)$  est de dimension finie, il existe  $v_n \in N(I - T)$  tel que  $d_n = \|u_n - v_n\|$ . On a

$$f_n = (u_n - v_n) - T(u_n - v_n).$$

On montre d'abord par l'absurde que  $(\|u_n - v_n\|)$  reste bornée. S'il existe une sous-suite telle que

$$\|u_n - v_n\| \rightarrow \infty,$$

la suite  $w_n = \frac{u_n - v_n}{\|u_n - v_n\|}$  associée vérifie

$$d(w_n, N(I - T)) = \frac{1}{d_n} d(u_n, N(I - T)) = 1$$

et

$$w_n - Tw_n = \frac{f_n}{\|u_n - v_n\|} \rightarrow 0$$

Comme  $T$  est compact, à extraction près,

$$Tw_n \rightarrow w \text{ et donc } w_n \rightarrow w.$$

On a alors

$$w \in N(I - T) \text{ et } d(w, N(I - T)) = 1,$$

ce qui donne la contradiction.

Puisque  $(\|u_n - v_n\|)$  reste bornée et que  $T$  est compact, à extraction près,

$$T(u_n - v_n) \rightarrow z \text{ et } u_n - v_n \rightarrow f + z.$$

En posant  $g = f + z$ , on a alors  $g - Tg = f$ , c'est-à-dire que  $f \in R(I - T)$ .

(ii) Si  $T$  est injectif mais pas surjectif, on définit pour  $n \geq 1$

$$E_n = (I - T)^n(E).$$

Il est alors facile de vérifier que  $E_{n+1}$  est un sous-espace de  $E_n$ .

- D'après la propriété précédente, comme  $T|_{E_n} \in \mathcal{K}(E_n)$ , l'image  $E_{n+1}$  de  $(I - T)|_{E_n}$  est fermée.

- De plus, comme  $I - T$  est injectif mais pas surjectif, l'inclusion  $E_{n+1} \subset E_n$  est stricte.

On a donc une suite strictement décroissante de sous-espaces fermés. D'après le lemme de Riesz, il existe une suite  $(u_n)$  telle que

$$u_n \in E_n, \quad \|u_n\| = 1, \quad \text{et } d(u_n, E_{n+1}) \geq \frac{1}{2}.$$

On a alors, pour  $n > m$

$$Tu_n - Tu_m = [-(u_n - Tu_n) + (u_m - Tu_m) + u_n] - u_m \text{ où } [-(u_n - Tu_n) + (u_m - Tu_m) + u_n] \in E_{m+1}$$

de sorte que  $\|Tu_n - Tu_m\| \geq \frac{1}{2}$ , ce qui est absurde puisque  $T$  est compact.

Donc  $T$  est surjectif.

Pour montrer la réciproque, on applique ce qui précède à l'opérateur  $T^*$ , et on utilise les relations

$$N(I - T) = R(I - T^*)^\perp, \quad N(I - T^*) = R(I - T)^\perp$$

établies dans la proposition 10.1.2.

(iii) Soit  $d = \dim N(I - T)$  et  $d^* = \dim N(I - T^*)$ . Comme  $N(I - T)$  est de dimension finie, le théorème de Hahn-Banach implique que  $N(I - T)$  admet un supplémentaire topologique dans  $E$  : il existe donc un projecteur continu  $P$  de  $E$  sur  $N(I - T)$ . D'autre part, comme  $R(I - T) = N(I - T^*)^\perp$  est de codimension finie  $d^*$ , il admet un supplémentaire topologique dans  $E$ , noté  $F$ , de dimension  $d^*$ . Si  $d < d^*$ , il existe une application linéaire  $\Lambda : N(I - T) \rightarrow F$  injective et non surjective. On définit alors

$$S = T + \Lambda \circ P \in \mathcal{K}(E)$$

puisque  $\Lambda \circ P$  est de rang fini. Si  $u \in N(I - S)$

$$0 = u - Su = (u - Tu) - \Lambda(Pu)$$

d'où

$$u - Tu = 0 \text{ et } \Lambda(Pu) = 0,$$

ce qui implique que  $u \in N(I - T)$  et  $Pu = 0$ , donc  $u = 0$ .

En appliquant la propriété (ii) à l'opérateur  $S$ , on voit que  $R(I - S) = E$ , ce qui est absurde puisqu'il existe  $f \in F \setminus R(\Lambda)$  pour lequel l'équation  $u - Su = f$  n'admet pas de solution. On en déduit que  $d \geq d^*$ .

En appliquant ce résultat à  $T^*$ , on voit que

$$\dim N(I - T^{**}) \leq \dim N(I - T^*) \leq \dim N(I - T).$$

Comme  $N(I - T) \subset N(I - T^{**})$ , on conclut que  $d = d^*$ . □

### 10.3. Spectre d'un opérateur compact

**Définition 10.3.1.** — Soient  $E$  un espace de Banach, et  $T \in \mathcal{L}(E)$ .

Le spectre  $\sigma(T)$  de  $T$  est le complémentaire de l'ensemble résolvant  $\rho(T)$  défini par

$$\rho(T) = \{\lambda \in \mathbf{R} / T - \lambda I \text{ bijection de } E\}.$$

On dit que  $\lambda$  est valeur propre de  $T$  si

$$N(T - \lambda I) \neq \emptyset.$$

Attention : il est clair que les valeurs propres appartiennent au spectre, mais en général l'inclusion est stricte.

**Proposition 10.3.2.** — Soient  $E$  un espace de Banach, et  $T \in \mathcal{L}(E)$ . Le spectre est un ensemble compact, et

$$\sigma(T) \subset \left[ -\|T\|, \|T\| \right].$$

*Démonstration.* — Soit  $\lambda > \|T\|$ . Pour tout  $f \in E$ , l'équation  $Tu - \lambda u = f$  peut se réécrire

$$u = \frac{1}{\lambda}(Tu - f).$$

Elle admet donc une unique solution, obtenue par le théorème de point fixe de Picard. On a donc  $\lambda \in \rho(T)$ . Ceci prouve que

$$\sigma(T) \subset \left[ -\|T\|, \|T\| \right].$$

Reste à prouver que le spectre  $\sigma(T)$  est fermé, ou de façon équivalente que l'ensemble résolvant  $\rho(T)$  est ouvert. Soit  $\lambda_0 \in \rho(T)$ . On cherche à résoudre

$$Tu - \lambda u = f$$

pour  $\lambda$  proche de  $\lambda_0$  et  $f$  quelconque fixé. Comme précédemment, on réécrit cette équation de sorte à pouvoir appliquer le théorème de point fixe de Picard. On a

$$Tu - \lambda u = (T - \lambda_0)u + (\lambda - \lambda_0)u = f$$

si et seulement si

$$u = (T - \lambda_0)^{-1} \left( (\lambda - \lambda_0)u + f \right).$$

D'après le théorème de l'application ouverte,  $(T - \lambda_0)^{-1}$  est continue. Cette équation possède donc une unique solution pourvu que

$$|\lambda - \lambda_0| < \frac{1}{\|(T - \lambda_0)^{-1}\|}.$$

L'ensemble résolvant contient donc un voisinage de  $\lambda_0$ . □

Pour les opérateurs compacts, on a une description beaucoup plus fine du spectre, qui est constitué des valeurs propres (qui ne peuvent s'accumuler qu'en 0) et de 0.

**Théorème 10.4.** — Soient  $E$  un espace de Banach de dimension infinie, et  $T \in \mathcal{K}(E)$ . Alors  $\sigma(T)$  est la réunion des valeurs propres et de 0. Plus précisément, on a l'une des situations suivantes

- $\sigma(T) \setminus \{0\}$  est fini (ou vide);
- $\sigma(T) \setminus \{0\}$  est une suite qui tend vers 0.

*Démonstration.* — La preuve de ce résultat repose sur l'alternative de Fredholm.

- On commence par prouver que  $\sigma(T)$  est la réunion des valeurs propres et de 0.

Si  $0 \notin \sigma(T)$ ,  $T$  est bijectif et  $I = T \circ T^{-1}$  est compact. La boule unité de  $E$  est alors précompacte, et cela implique que  $E$  est de dimension finie d'après le théorème de Riesz.

Considérons maintenant  $\lambda \in \sigma(T) \setminus \{0\}$ . Puisque  $R(T - \lambda I) \neq E$ , le théorème de Fredholm assure que  $N(T - \lambda I) \neq \{0\}$ , ce qui montre que  $\lambda$  est une valeur propre de  $T$ .

- On montre ensuite que tous les points de  $\sigma(T) \setminus \{0\}$  sont isolés.

Soit  $(\lambda_n)$  une suite de valeurs propres distinctes (et non nulles) telle que  $\lambda_n \rightarrow \lambda \neq 0$ . Pour tout  $n$ , il existe  $e_n \neq 0$  tel que

$$(T - \lambda_n I)e_n = 0.$$

On note  $E_k$  l'espace vectoriel engendré par  $(e_n)_{1 \leq n \leq k}$ .

On montre par récurrence que, pour tout  $k$ , les vecteurs  $(e_n)_{1 \leq n \leq k}$  sont linéairement indépendants. Admettons le résultat à l'ordre  $k$ . Si  $e_{k+1} = \sum_{n=1}^k \alpha_n e_n$ ,

$$Te_{k+1} - \lambda_{k+1}e_{k+1} = \sum_{n=1}^k \alpha_n(\lambda_n - \lambda_{k+1})e_n = 0$$

et donc, puisque  $\lambda_n - \lambda_{k+1} \neq 0$ ,  $\alpha_n = 0$  pour tout  $n \in \{1, \dots, k\}$ . On obtient alors une contradiction puisque  $e_{k+1} \neq 0$ . La suite  $(E_k)$  est donc strictement croissante.

Par ailleurs, on a  $(T - \lambda_{k+1}I)(E_{k+1}) \subset E_k$ . En appliquant le lemme de Riesz, on peut alors construire une suite  $(u_k)_{k \geq 1}$  telle que

$$u_k \in E_k, \quad \|u_k\| = 1 \text{ et pour } k \geq 2, \quad d(u_k, E_{k-1}) \geq \frac{1}{2}.$$

Si  $n > m > 1$ , on a alors  $E_{m-1} \subset E_m \subset E_{n-1} \subset E_n$  de sorte que

$$\left| \frac{Tu_n}{\lambda_n} - \frac{Tu_m}{\lambda_m} \right| = \left| \frac{Tu_n - \lambda_n u_n}{\lambda_n} - \frac{Tu_m - \lambda_m u_m}{\lambda_m} + u_n - u_m \right| \geq d(u_n, E_{n-1}) \geq \frac{1}{2}.$$

Comme  $\lambda_n \rightarrow \lambda \neq 0$ , on aboutit à une contradiction puisque  $(Tu_n)$  admet une sous-suite convergente.

• On en déduit que pour tout  $n \geq 1$ , l'ensemble

$$\sigma(T) \cap \left\{ \lambda \in \mathbf{R} / |\lambda| \geq \frac{1}{n} \right\}$$

est vide ou fini : en effet, s'il contenait une infinité de points distincts, comme  $\sigma(T)$  est compact, on aurait un point d'accumulation, ce qui contredit ce qui précède.

Lorsque  $\sigma(T) \setminus \{0\}$  contient une infinité de points distincts on peut donc les ranger en une suite qui tend vers 0.  $\square$

#### 10.4. Décomposition spectrale des opérateurs autoadjoints compacts

On suppose dans la suite que  $H$  est un espace de Hilbert. Si  $T \in \mathcal{L}(H)$ , en identifiant  $H'$  et  $H$ , on peut considérer que  $T^* \in \mathcal{L}(H)$ .

**Définition 10.4.1.** — On dit qu'un opérateur  $T \in \mathcal{L}(H)$  est autoadjoint si  $T^* = T$ , c'est-à-dire si

$$\forall u, v \in H, \quad (Tu, v) = (u, Tv).$$

**Proposition 10.4.2.** — Soient  $H$  un espace de Hilbert, et  $T \in \mathcal{L}(H)$  un opérateur autoadjoint. On pose

$$m = \inf_{u \in B_H} (Tu, u), \quad M = \sup_{u \in B_H} (Tu, u).$$

Alors le spectre de  $T$  satisfait

$$\{m, M\} \subset \sigma(T) \subset [m, M].$$

En particulier, si  $\sigma(T) = \{0\}$ , alors  $T = 0$ .

*Démonstration.* — On commence par montrer que tout  $\lambda > M$  est dans la résolvante. On a

$$\forall u \in H, \quad (Tu, u) \leq M|u|^2$$

et par conséquent

$$\forall u \in H, \quad (\lambda u - Tu, u) \geq (\lambda - M)|u|^2 \text{ avec } \lambda - M > 0.$$

En appliquant le théorème de Lax-Milgram, on en déduit que  $\lambda I - T$  est bijectif.

Montrons alors que  $M \in \sigma(T)$ . La forme

$$a(u, v) = (Mu - Tu, v)$$

est bilinéaire, symétrique et positive. En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz à la forme  $a(u, v)$ , on obtient

$$\forall u, v \in H, \quad |a(u, v)| \leq (a(u, u)a(v, v))^{1/2}$$

d'où l'on déduit en particulier que

$$\forall u \in H, \quad |Mu - Tu| \leq C(Mu - Tu, u)^{1/2}.$$

Soit  $(u_n)$  une suite maximisante, i.e. telle que

$$|u_n| = 1 \text{ et } (Tu_n, u_n) \rightarrow M.$$

On a alors  $|Mu_n - Tu_n| \rightarrow 0$ . Si  $M \notin \sigma(T)$ ,  $u_n = (MI - T)^{-1}(Mu_n - Tu_n) \rightarrow 0$ , ce qui est absurde. On a donc  $M \in \sigma(T)$ .

Les propriétés de  $m$  s'obtiennent en remplaçant  $T$  par  $-T$ . □

Le résultat suivant est fondamental ; il montre qu'un opérateur autoadjoint compact est diagonalisable dans une base convenablement choisie.

**Théorème 10.5.** — Soient  $E$  un espace de Hilbert séparable, et  $T \in \mathcal{K}(H)$  un opérateur autoadjoint compact.

Alors  $H$  admet une base hilbertienne formée de vecteurs propres de  $T$ .

*Démonstration.* — Soit  $(\lambda_n)_{n \geq 1}$  la suite des valeurs propres non nulles et distinctes de  $T$ . On pose  $E_0 = N(T)$  et  $E_n = N(T - \lambda_n I)$ . D'après le théorème de Riesz-Fredholm, on a

$$0 \leq \dim(E_0) \leq \infty \text{ et } 0 < \dim(E_n) < +\infty.$$

Il suffit alors de montrer que  $H$  est somme hilbertienne des  $(E_n)_{n \geq 0}$ . On conclut ensuite en choisissant dans chaque  $E_n$  une base hilbertienne : la réunion de ces bases est une base hilbertienne de  $H$  formée de vecteurs propres de  $T$ .

• Les  $(E_n)$  sont deux-à-deux orthogonaux. En effet, si  $u \in E_n$  et  $v \in E_m$  avec  $n \neq m$ , on a

$$\lambda_n(u, v) = (Tu, v) = (u, Tv) = \lambda_m(u, v)$$

ce qui implique que  $(u, v) = 0$ .

• Soit  $F$  l'espace vectoriel engendré par les  $(E_n)_{n \geq 0}$ . On vérifie facilement que  $T(F) \subset F$ , de sorte que  $T(F^\perp) \subset F^\perp$  : en effet

$$\forall u \in F^\perp, \forall v \in F, \quad (Tu, v) = (u, Tv) = 0.$$

L'opérateur  $T_0 = T|_{F^\perp}$  est autoadjoint compact et  $\sigma(T_0) = \{0\}$  : en effet, d'après le théorème 10.4,  $\sigma(T_0) \setminus \{0\}$  est constitué de valeurs propres de  $T_0$ , qui seraient alors aussi des valeurs propres de  $T$ . Les vecteurs propres associés appartiendraient donc à  $F$  et à  $F^\perp$ , ce qui est absurde.

D'après la proposition 10.4.2,  $T_0 = 0$  et on a

$$F^\perp \subset N(T) \subset F$$

ce qui implique que  $F^\perp = \{0\}$  ou autrement dit que  $F$  est dense dans  $H$ .  $\square$

### 10.5. L'équation de la chaleur sur un domaine borné

L'équation de la chaleur

$$(10.5.1) \quad \begin{aligned} \partial_t u - \Delta u &= 0 \text{ dans } \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} &= 0, \quad u|_{t=0} = u^0, \end{aligned}$$

modélise la distribution de la température  $u$  dans le domaine  $\Omega$  à l'instant  $t$ , si l'on maintient le bord à température nulle. C'est l'exemple le plus simple d'équation aux dérivées partielles parabolique, comme il en apparaît dans tous les phénomènes de diffusion.

Lorsque le domaine  $\Omega$  est borné le problème (10.5.1) peut être résolu par décomposition sur une base hilbertienne de  $L^2(\Omega)$  constituée de vecteurs propres de l'opérateur  $-\Delta$  avec condition de Dirichlet

$$\begin{aligned} -\Delta e_n &= \lambda e_n \text{ dans } \Omega, \\ u_n|_{\partial\Omega} &= 0. \end{aligned}$$

**Proposition 10.5.1.** — Soit  $\Omega$  un ouvert borné. Il existe une base hilbertienne  $(e_n)_{n \in \mathbf{N}}$  de  $L^2(\Omega)$  et une suite  $(\lambda_n)_{n \in \mathbf{N}}$  de réels strictement positifs avec  $\lambda_n \rightarrow \infty$  telles que

$$(10.5.2) \quad \begin{aligned} e_n &\in H_0^1(\Omega) \cap C^\infty(\Omega), \\ -\Delta e_n &= \lambda e_n \text{ dans } \Omega. \end{aligned}$$

*Démonstration.* — Etant donné  $f \in L^2(\Omega)$ , on note  $Tf$  l'unique solution  $u \in H_0^1(\Omega)$  du problème

$$\forall \varphi \in H_0^1(\Omega), \quad \int_{\Omega} \nabla u \nabla \varphi = \int_{\Omega} f \varphi$$

obtenue en appliquant le théorème de Lax-Milgram.

On considère alors  $T$  comme un opérateur de  $L^2(\Omega)$  dans  $L^2(\Omega)$ . Comme l'injection de  $H_0^1(\Omega)$  dans  $L^2(\Omega)$  est compacte,  $T$  est un opérateur compact. De plus, il est autoadjoint

$$\int_{\Omega} (Tf)g = \int_{\Omega} \nabla(Tg)\nabla(Tf) = \int_{\Omega} (Tg)f.$$

D'autre part,  $N(T) = \{0\}$  et

$$\int_{\Omega} (Tf)f = \int_{\Omega} |\nabla(Tf)|^2 \geq 0.$$

En utilisant les théorèmes 10.4 et 10.5, on en déduit que  $L^2(\Omega)$  admet une base hilbertienne  $(e_n)$  constituée de vecteurs propres de  $T$  associés à des valeurs propres  $\mu_n$  avec  $\mu_n > 0$  et  $\mu_n \rightarrow 0$ .

Autrement dit,  $e_n$  est une solution faible de (10.5.2) avec  $\lambda_n = \mu_n^{-1}$ . En utilisant la régularité elliptique, on peut alors montrer que  $e_n \in \bigcap_{m \geq 0} H^m(\omega) = C^\infty(\omega)$  pour tout  $\omega$  relativement compact dans  $\Omega$ . Ces estimations peuvent être obtenues par exemple en utilisant de l'analyse de Fourier, couplée avec des techniques de localisation (partition de l'unité).  $\square$

On cherche alors une solution de (10.5.1) sous la forme

$$u(t, x) = \sum_{n \in \mathbf{N}} a_n(t) e_n(x).$$

On obtient immédiatement

$$\dot{a}_n(t) + \lambda_n a_n(t) = 0, \quad \text{d'où } a_n(t) = a_n(0) \exp(-\lambda_n t),$$

et les constantes  $a_n(0)$  sont déterminées à partir de la relation

$$u^0(x) = \sum_{n \in \mathbf{N}} a_n(0) e_n(x).$$

Cette méthode, dite “méthode de Fourier” ou “méthode de séparation des variables” présente néanmoins deux inconvénients

- elle ne donne pas immédiatement la convergence de la série et la régularité de la solution;
- elle ne permet pas de résoudre l'équation de la chaleur sur un domaine non borné (pour lequel  $-\Delta$  a du spectre continu).



## CHAPITRE 11

### OPÉRATEURS MAXIMAUX MONOTONES

Pour l'étude du semi-groupe de générateur infinitésimal  $A$ , i.e. de la solution de

$$\frac{d}{dt}u + Au = 0 \text{ pour } t \geq 0, u|_{t=0} = u_0,$$

on n'a en fait pas besoin d'informations spectrales aussi fines qu'un résultat de diagonalisation.

On va définir dans ce dernier chapitre une classe d'opérateurs pour lesquels on peut construire ces solutions par un procédé d'approximation reposant sur un principe de monotonie.

#### 11.1. Définition et régularisation de Yosida

**Définition 11.1.1.** — Soient  $H$  un espace de Hilbert, et  $A : D(A) \subset H \rightarrow H$  un opérateur linéaire non-borné.

$A$  est monotone si, pour tout  $v \in D(A)$ ,  $(Av, v) \geq 0$ .

$A$  est maximal monotone si de plus  $R(I + A) = H$ .

**Proposition 11.1.2.** — Soit  $A : D(A) \subset H \rightarrow H$  un opérateur maximal monotone. Alors

- $D(A)$  est dense dans  $H$ .
- $A$  est fermé.
- Pour tout  $\lambda > 0$ ,  $(I + \lambda A)$  est bijectif de  $D(A)$  sur  $H$ , et son inverse  $(I + \lambda A)^{-1}$  est un opérateur borné, de norme inférieure à 1.

*Démonstration.* — Notons d'abord que, par définition,  $I + A$  est bijectif de  $D(A)$  sur  $H$ . La surjectivité vient de l'hypothèse de maximalité, et l'injectivité est une conséquence de la monotonie : pour  $f \in H$  quelconque, s'il existe  $u, \bar{u} \in D(A)$  tels que  $u + Au = \bar{u} + A\bar{u} = f$ , on a

$$|u - \bar{u}|^2 \leq (u - \bar{u}, u - \bar{u} + Au - A\bar{u}) = 0.$$

De plus, l'opérateur  $(I + A)^{-1} : H \rightarrow D(A)$  est borné, de norme inférieure à 1. Soit  $f \in H$  et  $u = (I + A)^{-1}f$ . Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$|u|^2 + (Au, u) = (f, u) \leq |f| \times |u| \text{ d'où } |u| \leq |f|.$$

• Pour montrer que  $D(A)$  est dense, il suffit de prouver que son orthogonal est réduit à  $\{0\}$ . Soit  $f \in H$  tel que

$$\forall v \in D(A), \quad (f, v) = 0.$$

On note  $v_0 = (I + A)^{-1}f$ . On a alors

$$|v_0|^2 \leq |v_0|^2 + (Av_0, v_0) = (v_0, f) = 0,$$

de sorte que  $v_0 = 0$ , et  $f = 0$ .

• Montrons alors que  $A$  est fermé. Soit  $([u_n, Au_n])$  une suite de  $G(A)$  telle que

$$[u_n, Au_n] \rightarrow [u, f].$$

On a

$$u_n = (I + A)^{-1}(u_n + Au_n) \rightarrow (I + A)^{-1}(u + f),$$

de sorte que  $u = (I + A)^{-1}(u + f)$ , i.e.  $u \in D(A)$  et  $Au = f$ .

• Supposons que pour  $\lambda_0 > 0$ ,  $\lambda_0 A$  est maximal monotone. On va montrer que pour tout  $\lambda > \frac{\lambda_0}{2}$ ,  $R(I + \lambda A) = H$ . Pour  $f \in H$  quelconque, on cherche donc à résoudre l'équation  $u + \lambda Au = f$ , qui s'écrit aussi

$$u + \lambda_0 Au = \left(1 - \frac{\lambda_0}{\lambda}\right)u + \frac{\lambda_0}{\lambda}f,$$

ou encore

$$u = (I + \lambda_0 A)^{-1} \left( \left(1 - \frac{\lambda_0}{\lambda}\right)u + \frac{\lambda_0}{\lambda}f \right).$$

En appliquant le théorème de point fixe de Picard, on obtient une unique solution dès que  $\lambda > \frac{\lambda_0}{2}$ .

En itérant cet argument, on obtient finalement que  $R(I + \lambda A) = H$  pour tout  $\lambda > 0$ . En d'autres termes,  $\lambda A$  est maximal monotone pour tout  $\lambda > 0$ .  $\square$

Une propriété cruciale des opérateurs maximaux monotones est qu'on peut les approcher par des opérateurs bornés.

**Définition 11.1.3.** — Soit  $A : D(A) \subset H \rightarrow H$  un opérateur maximal monotone. Pour tout  $\lambda > 0$ , on définit la résolvante  $J_\lambda = (I + \lambda A)^{-1}$  et la régularisée Yosida  $A_\lambda = \frac{1}{\lambda}(I - J_\lambda)$ .

**Proposition 11.1.4.** — Soit  $A : D(A) \subset H \rightarrow H$  un opérateur maximal monotone. Alors

– pour tout  $\lambda > 0$ ,

$$\forall v \in H, \quad A_\lambda v = A(J_\lambda v), \quad \text{et} \quad \forall v \in D(A), \quad A_\lambda v = J_\lambda(Av).$$

– quand  $\lambda \rightarrow 0$

$$\forall v \in H, \quad \lim J_\lambda v = v, \quad \text{et} \quad \forall v \in D(A), \quad \lim A_\lambda v = Av.$$

– pour tout  $\lambda > 0$  et tout  $v \in H$

$$(A_\lambda v, v) \geq \lambda |A_\lambda v|^2 \geq 0.$$

*Démonstration.* — Les propriétés ci-dessus s'obtiennent par de simples calculs.

- Par définition de  $J_\lambda$ , pour tout  $v \in H$

$$J_\lambda v + \lambda A J_\lambda v = v \text{ de sorte que } A J_\lambda v = A_\lambda v.$$

Par ailleurs, pour tout  $v \in D(A)$ ,

$$Av = \frac{1}{\lambda} \left( (I + \lambda A)v - v \right) = \frac{1}{\lambda} (I + \lambda A)(v - J_\lambda v) \text{ d'où } J_\lambda Av = \frac{1}{\lambda} (v - J_\lambda v).$$

- Si  $v \in D(A)$ , alors

$$|v - J_\lambda v| = \lambda |A_\lambda v| \leq \lambda |Av| \rightarrow 0 \text{ quand } \lambda \rightarrow 0.$$

Comme  $\overline{D(A)} = H$ , pour tout  $v \in H$  et tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $w \in D(A)$  tel que  $|v - w| \leq \varepsilon$ . On a alors

$$|v - J_\lambda v| \leq |w - J_\lambda w| + 2|v - w|$$

et donc  $|v - J_\lambda v|$  tend vers 0 quand  $\lambda \rightarrow 0$ . En couplant ce résultat avec l'identité  $A_\lambda v = J_\lambda(Av)$ , on conclut que pour tout  $v \in D(A)$  on a bien  $\lim A_\lambda v = Av$ .

- La dernière estimation s'obtient en utilisant l'identité

$$(A_\lambda v, v) = (A_\lambda v, v - J_\lambda v) + (A_\lambda v, J_\lambda v) = \lambda |A_\lambda v|^2 + (A J_\lambda v, J_\lambda v),$$

et la monotonie de  $A$ . □

## 11.2. Théorème de Hille-Yosida

Le théorème de Hille-Yosida permet d'établir une correspondance bijective entre les opérateurs maximaux monotones et les semi-groupes de contraction, i.e. les familles  $(S(t))_{t \geq 0}$  d'opérateurs linéaires continus telles que

- pour tout  $t \geq 0$ ,  $\|S(t)\|_{\mathcal{L}(H)} \leq 1$ ;
- pour tous  $t_1, t_2 \geq 0$ ,  $S(t_1 + t_2) = S(t_1) \circ S(t_2)$ , et  $S(0) = I$ ;
- pour tout  $u \in H$ ,  $\lim_{t \rightarrow 0^+} |S(t)u - u| = 0$ .

Plus précisément, il permet de résoudre le problème d'évolution

$$\frac{d}{dt}u + Au = 0$$

sur  $\mathbf{R}^+$ , dès que  $A$  est maximal monotone (propriété que l'on vérifie en résolvant une équation stationnaire).

**Théorème 11.1 (Théorème de Hille-Yosida).** — Soit  $A : D(A) \subset H \rightarrow H$  un opérateur maximal monotone. Alors, pour tout  $u_0 \in D(A)$ , il existe une unique solution  $u \in C^1(\mathbf{R}^+, H) \cap C(\mathbf{R}^+, D(A))$  du problème d'évolution

$$(11.2.1) \quad \begin{aligned} \frac{d}{dt}u + Au &= 0 \text{ sur } \mathbf{R}^+, \\ u|_{t=0} &= u^0. \end{aligned}$$

De plus, on a pour tout  $t \geq 0$

$$|u(t)| \leq |u^0|, \quad \left| \frac{d}{dt}u(t) \right| \leq |Au^0|.$$

*Démonstration.* — L'idée de la preuve est de passer à la limite dans une suite d'approximations, obtenues en remplaçant  $A$  par sa régularisée de Yosida  $A_\lambda$ . Dans toute la suite, on note  $u_\lambda \in C^1(\mathbf{R}^+, H)$  la solution du problème

$$(11.2.2) \quad \begin{aligned} \frac{d}{dt}u_\lambda + A_\lambda u_\lambda &= 0 \text{ sur } \mathbf{R}^+, \\ u_\lambda|_{t=0} &= u^0. \end{aligned}$$

dont l'existence et l'unicité sont garanties par le théorème de Cauchy-Lipschitz-Picard. Comme  $A_\lambda$  est borné de norme inférieure à  $1/\lambda$ , on montre en effet que l'opérateur

$$u \mapsto u_0 - \int_0^t A_\lambda u(s) ds$$

a un unique point fixe dans l'espace de Banach  $X \subset C(\mathbf{R}^+, H)$  muni de la norme

$$\|u\|_X = \sup_{t \in \mathbf{R}^+} \exp\left(-\frac{t}{2\lambda}\right) |u(t)|.$$

• On commence par prouver que les fonctions  $t \mapsto |u_\lambda(t)|$  et  $t \mapsto |A_\lambda u_\lambda(t)|$  sont décroissantes. On a en effet

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |u_\lambda|^2 \leq \left( \frac{d}{dt} u_\lambda, u_\lambda \right) + (A_\lambda u_\lambda, u_\lambda) = 0.$$

D'autre part, comme  $A_\lambda$  est un opérateur linéaire borné, on peut montrer par récurrence que  $u_\lambda \in C^\infty(\mathbf{R}^+, H)$  avec

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{d}{dt} \right)^k u_\lambda + A_\lambda \left( \frac{d}{dt} \right)^k u_\lambda = 0,$$

de sorte qu'en appliquant ce qui précède, on obtient que

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left| \frac{du_\lambda}{dt} \right|^2 \leq 0.$$

En particulier, on a

$$(11.2.3) \quad \forall \lambda > 0, \quad \forall t \geq 0, \quad \left| \frac{d}{dt} u_\lambda(t) \right| = |A_\lambda u_\lambda(t)| \leq |A u_0|$$

• On montre ensuite que  $u_\lambda(t)$  converge uniformément sur tout compact quand  $\lambda \rightarrow 0$ . Soient  $\lambda, \mu > 0$ .

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |u_\lambda - u_\mu|^2 + (A_\lambda u_\lambda - A_\mu u_\mu, u_\lambda - u_\mu) = 0.$$

En utilisant la Proposition 11.1.4, on obtient

$$\begin{aligned} (A_\lambda u_\lambda - A_\mu u_\mu, u_\lambda - u_\mu) &= (A_\lambda u_\lambda - A_\mu u_\mu, u_\lambda - J_\lambda u_\lambda + J_\mu u_\mu - u_\mu) + (A_\lambda u_\lambda - A_\mu u_\mu, J_\lambda u_\lambda - J_\mu u_\mu) \\ &= (A_\lambda u_\lambda - A_\mu u_\mu, \lambda A_\lambda u_\lambda - \mu A_\mu u_\mu) + (A(J_\lambda u_\lambda - J_\mu u_\mu), J_\lambda u_\lambda - J_\mu u_\mu) \\ &\geq (A_\lambda u_\lambda - A_\mu u_\mu, \lambda A_\lambda u_\lambda - \mu A_\mu u_\mu). \end{aligned}$$

On a alors

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |u_\lambda - u_\mu|^2 \leq 2(\lambda + \mu) |A u_0|^2.$$

Par intégration, on en déduit que

$$\forall t \in [0, T], \quad |u_\lambda - u_\mu| \leq 2\sqrt{(\lambda + \mu)T} |A u_0|,$$

donc  $(u_\lambda)$  est de Cauchy, et converge uniformément sur les compacts

$$u_\lambda(t) \rightarrow u(t) \text{ quand } \lambda \rightarrow 0, \text{ uniformément sur } [0, T].$$

- Si  $Au_0 \in D(A)$ , en appliquant le même raisonnement à  $v_\lambda = \frac{d}{dt}u_\lambda$ , on obtient que

$$\forall t \in [0, T], \quad |v_\lambda - v_\mu| \leq 2\sqrt{(\lambda + \mu)T}|A^2u_0|,$$

de sorte que  $(\frac{d}{dt}u_\lambda)$  est de Cauchy, et converge uniformément sur les compacts. Il en résulte que  $u \in C^1(\mathbf{R}^+, H)$  et que

$$\frac{d}{dt}u_\lambda(t) \rightarrow \frac{d}{dt}u(t) \text{ quand } \lambda \rightarrow 0, \text{ uniformément sur } [0, T].$$

On peut alors passer à la limite dans l'équation (11.2.2). Puisque

$$|J_\lambda u_\lambda(t) - u(t)| \leq |J_\lambda u_\lambda(t) - J_\lambda u(t)| + |J_\lambda u(t) - u(t)| \leq |u_\lambda(t) - u(t)| + |J_\lambda u(t) - u(t)|$$

tend vers 0 quand  $\lambda \rightarrow 0$ , en utilisant le fait que le graphe de  $A$  est fermé, on obtient que

$$u(t) \in D(A), \quad A_\lambda u_\lambda(t) = AJ_\lambda u_\lambda(t) \rightarrow Au(t).$$

On a alors

$$\frac{d}{dt}u(t) + Au(t) = 0$$

et  $u \in C^1(\mathbf{R}^+, H) \cap C(\mathbf{R}^+, D(A))$ . De plus, on a les estimations

$$(11.2.4) \quad \forall t \geq 0, \quad |u(t)| \leq |u_0| \text{ et } \left| \frac{d}{dt}u(t) \right| \leq |Au_0|$$

Plus généralement, si  $u_0 \in D(A^k)$ , on montre que  $u \in C^{k-j}(\mathbf{R}^+, D(A^j))$  pour tout  $j \leq k$ , avec l'estimation

$$\forall t \geq 0, \quad |u(t)| \leq |u_0| \text{ et } \left| \frac{d^j}{dt^j}u(t) \right| \leq |A^j u_0|$$

- Pour conclure la preuve d'existence, on doit alors utiliser la densité de  $D(A^2)$  dans  $D(A)$  (pour la norme du graphe).

Soit  $u_0 \in D(A)$  quelconque. On pose  $u_{0,n} = J_{1/n}u_0$  de sorte que

$$u_{0,n} \in D(A), \quad Au_{0,n} = n(u_0 - u_{0,n}) \in D(A).$$

D'autre part, on sait que

$$Au_{0,n} = A_{1/n}u_0 = J_{1/n}Au_0,$$

d'où l'on déduit que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_{0,n} = u_0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} Au_{0,n} = Au_0.$$

D'après l'étape précédente, pour tout  $n \in \mathbf{N}$ , il existe une solution  $u_n$  du problème

$$(11.2.5) \quad \begin{aligned} \frac{d}{dt}u_n + Au_n &= 0 \text{ sur } \mathbf{R}^+, \\ u_n|_{t=0} &= u_{0,n}. \end{aligned}$$

De plus, on a par (11.2.4)

$$|u_n(t) - u_m(t)| \leq |u_{0,n} - u_{0,m}| \text{ et } \left| \frac{d}{dt}u_n(t) - \frac{d}{dt}u_m(t) \right| \leq |Au_{0,n} - Au_{0,m}|.$$

Par conséquent, comme  $A$  est fermé, on peut passer à la limite dans (11.2.5) et on obtient une solution  $u \in C(\mathbf{R}^+, D(A))$  du problème (11.3.1).

• Il reste alors à prouver l'unicité, ce qui s'obtient très simplement à partir de la monotonie de  $A$ . Si  $u$  et  $\bar{u}$  sont deux solutions de même donnée initiale  $u_0$ , on a

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |u - \bar{u}|^2 = -(A(u - \bar{u}), u - \bar{u}) \leq 0,$$

d'où l'on déduit que la fonction  $u - \bar{u}$  est identiquement nulle.  $\square$

### 11.3. Cas symétrique

**Définition 11.3.1.** — Soit  $A : D(A) \subset H \rightarrow H$  un opérateur linéaire non borné à domaine dense.

$A$  est symétrique si  $\forall u, v \in D(A)$ ,  $(Au, v) = (u, Av)$ .

$A$  est autoadjoint si de plus  $D(A^*) = D(A)$ .

**Proposition 11.3.2.** — Soit  $A : D(A) \subset H \rightarrow H$  un opérateur maximal monotone symétrique. Alors  $A$  est autoadjoint, ainsi que sa résolvante.

*Démonstration.* — Soit  $J_1 = (I + A)^{-1}$ . Comme  $J_1$  est borné sur  $H$ , pour montrer qu'il est autoadjoint, il suffit de vérifier que

$$\forall u, v \in H, \quad (J_1 u, v) = (u, J_1 v).$$

Par définition, on a  $J_1 u, J_1 v \in D(A)$  et

$$J_1 u + A J_1 u = u, \quad J_1 v + A J_1 v = v.$$

Comme  $A$  est symétrique, on a alors

$$(u, J_1 v) = (J_1 u + A J_1 u, J_1 v) = (J_1 u, J_1 v + A J_1 v) = (J_1 u, v).$$

Montrons alors que  $D(A^*) = D(A)$ . Soit  $u \in D(A^*)$  quelconque. On définit  $f = u + A^* u$ . On a alors

$$\forall v \in D(A), \quad (f, v) = (u, v + Av).$$

Comme  $J_1$  est une bijection de  $H$  sur  $D(A)$ , ceci équivaut à

$$\forall w \in H, \quad (f, J_1 w) = (u, w)$$

On a donc  $u = J_1 f$  appartient à  $D(A)$ .  $\square$

**Théorème 11.2.** — Soit  $A : D(A) \subset H \rightarrow H$  un opérateur maximal monotone, autoadjoint. Alors, pour tout  $u_0 \in H$ , il existe une unique solution  $u \in C(\mathbf{R}^+, H) \cap C^1(\mathbf{R}_*^+, H) \cap C(\mathbf{R}_*^+, D(A))$  du problème d'évolution

$$(11.3.1) \quad \begin{aligned} \frac{d}{dt} u + Au &= 0 \text{ sur } \mathbf{R}_*^+, \\ u|_{t=0} &= u^0. \end{aligned}$$

De plus, on a pour tout  $t > 0$

$$|u(t)| \leq |u^0|, \quad \left| \frac{d}{dt} u(t) \right| \leq \frac{1}{t} |u^0|.$$

*Démonstration.* — L'unicité est obtenue comme dans le cas général en utilisant la monotonie de  $A$ .

Le point délicat consiste à montrer l'existence d'une solution quand  $u_0 \in H \setminus D(A)$ . La preuve repose à nouveau sur un procédé d'approximation, et sur l'estimation cruciale

$$(11.3.2) \quad \forall t > 0, \quad \left| \frac{d}{dt} u(t) \right| \leq \frac{1}{t} |u^0|.$$

• On commence par établir (11.3.2) quand  $u_0 \in D(A^2)$ . Pour cela, on part de l'approximation (11.2.2) utilisée dans le cas général.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} u_\lambda + A_\lambda u_\lambda &= 0 \text{ sur } \mathbf{R}^+, \\ u_\lambda|_{t=0} &= u^0. \end{aligned}$$

Par intégration contre  $u_\lambda$ , on obtient

$$\frac{1}{2} |u_\lambda(T)|^2 + \int_0^T (A_\lambda u_\lambda, u_\lambda)(t) dt = \frac{1}{2} |u_0|^2.$$

Par intégration contre  $t \frac{d}{dt} u_\lambda(t)$ , on a de plus

$$\int_0^T \left| \frac{du_\lambda}{dt}(t) \right|^2 t dt + \int_0^T (A_\lambda u_\lambda(t), \frac{du_\lambda}{dt}(t)) t dt = 0.$$

D'après la Proposition 11.3.2, pour tout  $\lambda > 0$ ,  $J_\lambda$  et  $A_\lambda$  sont autoadjoints : on a donc

$$\begin{aligned} \int_0^T t (A_\lambda u_\lambda(t), \frac{du_\lambda}{dt}(t)) dt &= \frac{1}{2} \int_0^T t \frac{d}{dt} (A_\lambda u_\lambda, u_\lambda) dt \\ &= \frac{T}{2} (A_\lambda u_\lambda(T), u_\lambda(T)) - \frac{1}{2} \int_0^T (A_\lambda u_\lambda, u_\lambda) dt \end{aligned}$$

D'autre part, comme la fonction  $t \mapsto \left| \frac{du_\lambda}{dt}(t) \right|$  est décroissante, on a

$$\int_0^T \left| \frac{du_\lambda}{dt}(t) \right|^2 t dt \geq \frac{T^2}{2} \left| \frac{du_\lambda}{dt}(T) \right|^2.$$

En combinant ces quatre estimations, on obtient finalement

$$\frac{1}{2} |u_\lambda(T)|^2 + T (A_\lambda u_\lambda(T), u_\lambda(T)) + T^2 \left| \frac{du_\lambda}{dt}(T) \right|^2 \leq \frac{1}{2} |u_0|^2,$$

ce qui implique en particulier l'inégalité

$$T^2 \left| \frac{du_\lambda}{dt}(T) \right|^2 \leq |u_0|^2.$$

On en déduit (11.3.2) en passant à la limite  $\lambda \rightarrow 0$ .

• On suppose maintenant que  $u_0 \in H$ . Puisque  $D(A^2)$  est dense dans  $D(A)$  et que  $D(A)$  est dense dans  $H$ , on sait construire une suite  $(u_{0,n})$  de  $D(A^2)$  telle que  $u_{0,n} \rightarrow u_0$ . Comme précédemment, on note  $u_n$  la solution du problème

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} u_n + A u_n &= 0 \text{ sur } \mathbf{R}^+, \\ u_n|_{t=0} &= u_{0,n}. \end{aligned}$$

D'après le théorème 11.1, on a

$$\forall m, n, \quad \forall t \geq 0, \quad |u_n(t) - u_m(t)| \leq |u_{0,n} - u_{0,m}|,$$

et d'après (11.3.2)

$$\forall t > 0, \quad \left| \frac{d}{dt} u_n(t) - \frac{d}{dt} u_m(t) \right| \leq \frac{1}{t} |u_{0,n} - u_{0,m}|.$$

Il en résulte que  $(u_n)$  converge uniformément sur  $\mathbf{R}^+$  quand  $n \rightarrow \infty$ , et que  $\left(\frac{du_n}{dt}\right)$  converge uniformément sur  $[\delta, +\infty[$  quand  $n \rightarrow \infty$ , et ce quel que soit  $\delta > 0$ . Donc  $u \in C(\mathbf{R}^+, H) \cap C^1(\mathbf{R}_*^+, H)$ .

Comme  $A$  est fermé,  $u(t) \in D(A)$  pour tout  $t > 0$  et vérifie l'équation (11.3.1). □

#### 11.4. L'équation de la chaleur

Dans le cas où le domaine  $\Omega$  n'est pas borné, l'équation de la chaleur

$$(11.4.1) \quad \begin{aligned} \partial_t u - \Delta u &= 0 \text{ dans } \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} &= 0, \quad u|_{t=0} = u^0, \end{aligned}$$

ne peut plus être résolue par la méthode de Fourier. En effet, le laplacien avec conditions de Dirichlet sur  $\Omega$  n'est pas à résolvante compacte, et on n'a pas de diagonalisation dans une base hilbertienne (à cause du spectre continu).

Par contre, on peut montrer l'existence et l'unicité d'une solution pour l'équation de la chaleur, en utilisant le fait que  $-\Delta$  est un opérateur maximal monotone autoadjoint, et la théorie de Hille-Yosida.

**Proposition 11.4.1.** — Soient  $\Omega$  un ouvert, et  $u_0 \in L^2(\Omega)$ . Alors il existe une unique solution de l'équation de la chaleur (11.4.1) telle que

$$u \in C(\mathbf{R}^+, L^2(\Omega)) \cap C(\mathbf{R}_*^+, H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \cap C^1(\mathbf{R}^+, L^2(\Omega)).$$

De plus, on a la régularisation parabolique

$$\forall \delta > 0, \quad u \in C^\infty(\bar{\Omega} \times [\delta, +\infty[),$$

et l'estimation d'énergie

$$\frac{1}{2} \|u(T)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^T \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 dt = \frac{1}{2} \|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

*Démonstration.* — On introduit l'opérateur non-borné  $A : D(A) \subset H \rightarrow H$  défini par

$$D(A) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega), \quad Au = -\Delta u.$$

La condition aux bords est donc codée dans la définition du domaine de  $A$ .

–  $A$  est monotone : si  $u \in D(A)$ , on a

$$(Au, u)_{L^2} = \int (-\Delta u)u = \int |\nabla u|^2 \geq 0.$$

–  $A$  est maximal monotone : en effet, le théorème de Lax-Milgram montre que le problème de Dirichlet

$$u - \Delta u = f \in L^2(\Omega), \quad u|_{\partial\Omega} = 0,$$

admet une unique solution  $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ .

–  $A$  est symétrique, donc auto-adjoint

$$\forall u, v \in D(A), \quad (Au, v)_{L^2} = \int \nabla u \cdot \nabla v = (u, Av)_{L^2}.$$

L'effet régularisant est obtenu en remarquant que  $D(A^k)$  s'injecte continûment dans  $H^{2k}(\Omega)$  (estimations de régularité elliptique).

L'estimation d'énergie est obtenue en multipliant l'équation par  $u$  et en intégrant sur  $[\delta, T]$  (attention  $u(t)$  n'est pas différentiable en 0!)

$$\frac{1}{2}\|u(T)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_{\delta}^T \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 dt = \frac{1}{2}\|u(\delta)\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Quand  $\delta \rightarrow 0$ ,  $\|u(\delta)\|_{L^2(\Omega)}^2$  tend vers  $\|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2$  et on en déduit l'inégalité d'énergie.  $\square$



## BIBLIOGRAPHIE

- [1] Robert A. Adams. *Sobolev spaces*. Academic Press [A subsidiary of Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York-London, 1975. Pure and Applied Mathematics, Vol. 65.
- [2] Luigi Ambrosio, Nicola Fusco, and Diego Pallara. *Functions of bounded variation and free discontinuity problems*. Oxford Mathematical Monographs. The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 2000.
- [3] Haïm Brezis. *Analyse fonctionnelle*. Collection Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise. [Collection of Applied Mathematics for the Master's Degree]. Masson, Paris, 1983. Théorie et applications. [Theory and applications].
- [4] Constantine M. Dafermos. *Hyperbolic conservation laws in continuum physics*, volume 325 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, third edition, 2010.
- [5] Guy David and Stephen Semmes. *Analysis of and on uniformly rectifiable sets*, volume 38 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1993.
- [6] Nelson Dunford and Jacob T. Schwartz. *Linear operators. Part I*. Wiley Classics Library. John Wiley & Sons Inc., New York, 1988. General theory, With the assistance of William G. Bade and Robert G. Bartle, Reprint of the 1958 original, A Wiley-Interscience Publication.
- [7] Ivar Ekeland and Roger Témam. *Convex analysis and variational problems*, volume 28 of *Classics in Applied Mathematics*. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, english edition, 1999. Translated from the French.
- [8] Lawrence C. Evans and Ronald F. Gariepy. *Measure theory and fine properties of functions*. Studies in Advanced Mathematics. CRC Press, Boca Raton, FL, 1992.
- [9] Loukas Grafakos. *Classical Fourier analysis*, volume 249 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, New York, second edition, 2008.
- [10] Loukas Grafakos. *Modern Fourier analysis*, volume 250 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, New York, second edition, 2009.
- [11] Serge Lang. *Real analysis*. Addison-Wesley Publishing Company Advanced Book Program, Reading, MA, second edition, 1983.
- [12] Walter Rudin. *Functional analysis*. International Series in Pure and Applied Mathematics. McGraw-Hill Inc., New York, second edition, 1991.

- [13] Laurent Schwartz. *Analyse*. Hermann, Paris, 1970. Deuxième partie: Topologie générale et analyse fonctionnelle, Collection Enseignement des Sciences, No. 11.
- [14] Elias M. Stein. *Singular integrals and differentiability properties of functions*. Princeton Mathematical Series, No. 30. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1970.
- [15] Elias M. Stein. *Harmonic analysis: real-variable methods, orthogonality, and oscillatory integrals*, volume 43 of *Princeton Mathematical Series*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1993. With the assistance of Timothy S. Murphy, Monographs in Harmonic Analysis, III.
- [16] Michael E. Taylor. *Pseudodifferential operators*, volume 34 of *Princeton Mathematical Series*. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1981.
- [17] G. B. Whitham. *Linear and nonlinear waves*. Pure and Applied Mathematics (New York). John Wiley & Sons Inc., New York, 1999. Reprint of the 1974 original, A Wiley-Interscience Publication.
- [18] Claude Zuily. *Distributions et équations aux dérivées partielles*. Collection Méthodes. [Methods Collection]. Hermann, Paris, second edition, 1986. Exercices corrigés. [Exercises with corrections].