Topologie, analyse et calcul différentiel

Frédéric Paulin

Version préliminaire

Formation Interuniversitaire de
Mathématiques Fondamentales et Appliquées

Cours de troisième année de licence

École Normale Supérieure

Année 2008-2009

Table des matières

[1]

[1]Je remercie les élèves de la promotion 2007, en particulier Olivier Begassat, Igor Kortchemsk

Arthur Leclaire, et les élèves de la promotion 2008, en particulier Nicolas Dreyfus, David Gontier et Arthur Milchior, pour leurs nombreuses corrections sur les premières versions de ce texte, en espérant que ceux des promotion suivantes aideront encore à le peaufiner !

Dans ces notes, nous supposons connues les notions d'espaces vectoriels normés réels ou complexes (et leurs distance et topologie associées) contenues dans le programme du cours de Mathématiques Spéciales MP*. Nous reviendrons plus longuement sur les espaces vectoriels normés dans le paragraphe 2.8 et le chapitre 6. Les preuves qui ne sont pas données ci-dessous sont les mêmes que dans le cas particulier des espaces vectoriels normés, ou sont laissées en exercice. La consultation de livres de contre-exemples [GO, Ste, Kha] est souvent profitable (surtout pour le premier).

1 Vocabulaire

Les références recommandées sont [Bou1, Dix, Dug].

1.1 Le corps ordonné des nombres réels

On ne ferait pas grand chose en analyse sans le corps ordonné $\mathbb{R}$ des nombres réels. Disons quelques mots sur cet objet en préambule.

Soit E un ensemble. Rappelons qu'un *ordre* (ou *ordre partiel*) sur E est une relation $\preceq$ qui est réflexive ($\forall\, x \in E,\ x \preceq x$), antisymétrique ($\forall\, x, y \in E$, si $x \preceq y$ et $y \preceq x$, alors $x = y$) et transitive ($\forall\, x, y, z \in E$, si $x \preceq y$ et $y \preceq z$, alors $x \preceq z$). On note $x \prec y$ si $x \preceq y$ et $x \neq y$, $x \succeq y$ si $y \preceq x$, et $x \succ y$ si $x \succeq y$ et $x \neq y$. Un *ensemble ordonné* est un ensemble muni d'un ordre.

Si $(E, \preceq)$ et $(F, \preceq)$ sont deux ensembles ordonnés, une application de E dans F *préserve l'ordre* si $f(x) \preceq f(y)$ pour tous $x \preceq y$. Si une bijection préserve l'ordre, alors son inverse aussi.

Exemples. L'inclusion est un ordre (partiel) sur l'ensemble $\mathscr{P}(E)$ des parties de E, et sera souvent sous-entendu. Si $\preceq$ est un ordre sur E, alors la relation $\preceq'$ définie par $x \preceq' y$ si et seulement si $y \preceq x$ est encore un ordre, appelé l'*ordre inverse* de $\preceq$. Si $(E, \preceq)$ et $(F, \preceq)$ sont deux ensembles ordonnés, alors la relation $\preceq$ sur l'ensemble produit $E \times F$, définie par

$$(x, y) \preceq (x', y') \iff (x \prec x' \text{ ou } (x = x' \text{ et } y \preceq y'))$$

est une relation d'ordre sur $E \times F$, appelé l'*ordre lexicographique*. Si $f : E \to F$ est une application, alors les applications image d'une partie $A \mapsto f(A)$ et image réciproque d'une partie $B \mapsto f^{-1}(B)$ préservent l'ordre, respectivement de $\mathscr{P}(E)$ dans $\mathscr{P}(F)$ et de $\mathscr{P}(F)$ dans $\mathscr{P}(E)$.

Soient E un ensemble ordonné et A une partie de E. Un élément x de E est un *majorant* de A si

$$\forall\, y \in A \quad y \preceq x\ .$$

Un élément x de E est un *minorant* de A si

$$\forall\, y \in A \quad y \succeq x\ .$$

La *borne supérieure* (resp. *inférieure*) de A est (lorsqu'il existe) le plus petit majorant (resp. le plus grand minorant) de A (il est alors unique), noté $\sup A$ (resp. $\inf A$). Par exemple, $s \in E$ est la borne supérieure de A si et seulement si

$$\forall\, x \in A,\ x \preceq s \quad \text{et} \quad \forall\, s' \in E,\ (\forall\, x \in A,\ x \preceq s') \Rightarrow s \preceq s'\ .$$

Si $(x_i)_{i \in I}$ est une famille d'éléments de E, on note $\sup_{i \in I} x_i = \sup\{x_i \ :\ i \in I\}$ (re
$\inf_{i \in I} x_i = \inf\{x_i \ :\ i \in I\}$), lorsqu'ils existent.

Pour tous x, y dans un ensemble ordonné $(E, \preceq)$, on note

$$\begin{aligned}
[x, y] &= \{z \in E \ :\ x \preceq z \preceq y\}\ ,\\
]x, y] &= \{z \in E \ :\ x \prec z \preceq y\}\ ,\\
[x, y[&= \{z \in E \ :\ x \preceq z \prec y\}\ ,\\
]x, y[&= \{z \in E \ :\ x \prec z \prec y\}\ ,\\
[x, +\infty[&= \{z \in E \ :\ x \preceq z\}\ ,\\
]x, +\infty[&= \{z \in E \ :\ x \prec z\}\ ,\\
]-\infty, x] &= \{z \in E \ :\ x \succeq z\}\ ,\\
]-\infty, x[&= \{z \in E \ :\ x \succ z\}\ ,
\end{aligned}$$

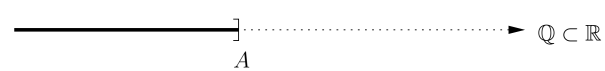
que l'on appelle les *intervalles* de E. Les premiers, cinquièmes et septièmes sont les *int*
valles fermés. Les quatrièmes, sixièmes et huitièmes sont les *intervalles ouverts*.

Un *ordre total* sur E est un ordre $\preceq$ tel que pour tous x, y dans E, on ait $x \preceq y$ ou $y \preceq$
On note $\min\{x, y\} = x$ et $\max\{x, y\} = y$ si $x \preceq y$, et $\min\{x, y\} = y$ et $\max\{x, y\} =$
si $y \preceq x$. Un ensemble muni d'un ordre total est un *ensemble totalement ordonné*. P
exemple, l'ordre lexicographique sur le produit de deux ensembles totalement ordon
est un ordre total.

Un *corps (totalement) ordonné* est un corps (commutatif) K muni d'un ordre total
tel que, pour tous x, y, z dans K, si $x \preceq y$, alors $x + z \preceq y + z$ (propriété de compatibi
de l'ordre avec la structure de groupe additif, aussi appelée invariance de l'ordre p
translations) et si $x \preceq y$ et $0 \preceq z$, alors $xz \preceq yz$ (propriété de compatibilité de l'ordre a
la multiplication, aussi appelée invariance de l'ordre par multiplication par un élém
positif). Un *isomorphisme de corps ordonnés* est un isomorphisme de corps préserva
l'ordre.

Nous supposons connus dans ce texte le corps ordonné $(\mathbb{R}, \leq)$ et sa valeur abso
$|\cdot|$. Il existe de nombreuses constructions de $\mathbb{R}$ (voir par exemple [Bou1, TG IV.3]),
nécessitent plus ou moins de travail. Nous préférons introduire $\mathbb{R}$ immédiatement,
cela permettra de donner des exemples et des constructions en topologie et en anal
très rapidement. Rappelons-en (car cela n'est pas au programme des classes préparatoi
une construction élémentaire à partir du corps ordonné $(\mathbb{Q}, \leq)$.

Une *coupure* de $\mathbb{Q}$ est une partie A de $\mathbb{Q}$, différente de $\emptyset$ et de $\mathbb{Q}$, telle que pour t
x dans A et y dans $\mathbb{Q}$, si $y \leq x$, alors $y \in A$.



On note $\mathbb{R}$ l'ensemble des coupures de $\mathbb{Q}$, et on note $\leq$ la relation d'inclusion en
coupures, qui est un ordre total sur $\mathbb{R}$, comme on le vérifie facilement (pour deux coupu
A et B, on a $\min\{A, B\} = A \cap B$ et $\max\{A, B\} = A \cup B$). Sauf mention contraire,
intervalle dans ce texte sera un intervalle de $\mathbb{R}$.

On identifie $\mathbb{Q}$ avec son image dans $\mathbb{R}$ par l'application $r \mapsto \{x \in \mathbb{Q} \ :\ x \leq r\}$, qui
une injection préservant l'ordre. Si A et B sont deux coupures de $\mathbb{Q}$, on pose

$$A + B = \{x + y \ :\ x \in A,\ y \in B\}$$

et on montre facilement que $(\mathbb{R},+)$ est un groupe abélien, d'élement neutre la coupure $0=\{x\in\mathbb{Q}\ :\ x\leq 0\}$, et d'opposée de la coupure A la coupure

$$-A=\{y\in\mathbb{Q}\ :\ \forall\, x\in A,\ \ y\leq -x\}\ .$$

Si A et B sont deux coupures de $\mathbb{Q}$, on pose

$$AB=\begin{cases}\{z\in\mathbb{Q}\ :\ \exists\, x\in A, x>0,\ \exists\, y\in B, y>0,\ z\leq xy\} & \text{si } A,B>0\ ,\\ -((-A)B) & \text{si } A<0, B>0\ ,\\ -(A(-B)) & \text{si } A>0, B<0\ ,\\ (-A)(-B) & \text{si } A,B<0\ ,\\ 0 & \text{si } A=0 \text{ ou } B=0\ .\end{cases}$$

On vérifie facilement que $(\mathbb{R},\leq)$ est un corps (commutatif) totalement ordonné pour les deux lois ci-dessus, l'élément neutre pour la multiplication étant la coupure $1=\{x\in\mathbb{Q}\ :\ x\leq 1\}$, et l'inverse de la coupure $A>0$ étant la coupure

$$1/A=\{y\in\mathbb{Q}\ :\ \forall\, x\in A,\ x>0\ \ \Rightarrow\ \ y\leq 1/x\}\ .$$

On vérifie facilement que la *valeur absolue* $|\cdot|$ (où $|x|=\max\{x,-x\}$ pour tout x dans $\mathbb{R}$) du corps ordonné $\mathbb{R}$ vérifie, pour tous A,B,C dans $\mathbb{R}$:
- $|A|=0$ si et seulement si $A=0$,
- $|AB|=|A|\,|B|$,
- $|A+B|\leq |A|+|B|$,

cette dernière propriété étant appelée l'*inégalité triangulaire*.

Il est de plus *archimédien*, i.e. pour tous $A,B>0$ dans $\mathbb{R}$, il existe n dans $\mathbb{N}$ tel que $B\leq nA$, comme on le vérifie facilement : comme $A>0$ et $B\neq\mathbb{Q}$, il existe des éléments p,q,r,s de $\mathbb{N}-\{0\}$ tels que $0<p/q\leq A$ et $B\leq r/s$, et $n=rq$ convient (car $ps\geq 1$).

Une autre propriété cruciale est la suivante.

Théorème 1.1 *Toute partie majorée (resp. minorée) et non vide de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure (resp. inférieure).*

Preuve. Soit P une partie majorée non vide de $\mathbb{R}$. Alors $S=\bigcup_{A\in P}A$ est une coupure de $\mathbb{Q}$, car si B est un majorant de P, alors $\emptyset\neq S\subset B\neq\mathbb{Q}$. De plus, si B est un majorant de P, alors $A\subset B$ pour tout A dans P, donc $S\leq B$, ce qui montre le résultat.

On peut raisonner de même pour un ensemble minoré non vide P, ou remarquer que l'ensemble $-P$ des éléments opposés des éléments de P est un ensemble majoré non vide, et que si S est la borne supérieure de $-P$, alors $-S$ est la borne inférieure de B. □

Il existe de très nombreuses caractérisations de $\mathbb{R}$, dont celle disant que $\mathbb{R}$ est, à isomorphisme de corps ordonnés près, l'unique corps totalement ordonné archimédien dans lequel toute partie majorée non vide admet une borne supérieure (voir par exemple [Bou2, Chap. V, §2]).

1.2 Espaces topologiques

Soit E un ensemble. Une *topologie* sur E est un ensemble $\mathscr{O}$ de parties de E tel que

(1) toute intersection finie d'éléments de $\mathscr{O}$ appartient à $\mathscr{O}$,

(2) toute union d'éléments de $\mathscr{O}$ appartient à $\mathscr{O}$.

Par convention, une intersection vide de parties d'un ensemble E est égal à E, et u
union vide de parties de E est égale à la partie vide. Donc $\emptyset$ et E appartiennent à $\mathscr{O}$
$\mathscr{O}$ est une topologie sur E. La première condition (stabilité par intersections finies) p
être remplacée indifféremment par : E appartient à $\mathscr{O}$ et $A\cap B$ appartient à $\mathscr{O}$ pour to
A,B dans $\mathscr{O}$.

Un *espace topologique* est un ensemble X muni d'une topologie $\mathscr{O}$ sur X. Par abus,
note souvent X le couple $(X,\mathscr{O})$. Les éléments de $\mathscr{O}$ sont appelés les *ouverts* de X (ou
la topologie $\mathscr{O}$ quand on veut préciser).

Les complémentaires des ouverts d'une topologie s'appellent les *fermés* de cette
pologie. Toute union finie de fermés est fermée, toute intersection de fermés est ferm
donc $\emptyset$ et X sont fermés. Étant donné un ensemble de parties d'un ensemble E, stable p
intersections et par unions finies, l'ensemble des complémentaires de ces parties est u
topologie sur E. On peut remplacer la stabilité par unions finies par le fait de conteni
et d'être stable par l'union de deux éléments.

Exemples 1 : Si E est un ensemble, alors $\mathscr{O}=\{\emptyset,E\}$ est une topologie sur E, d
topologie grossière. L'espace $(E,\mathscr{O})$ est alors dit *grossier*. Les seuls fermés d'un espa
grossier E sont $\emptyset$ et E.

L'ensemble $\mathscr{P}(E)$ de toutes les parties de E est une topologie sur E, appelée *topolo*
discrète. L'espace topologique $(E,\mathscr{P}(E))$ est alors dit *discret*. Toute partie d'un espa
discret est ouverte et fermée. Un espace topologique est discret si et seulement si tous
singletons sont ouverts.

Exemples 2 : Si E et F sont des ensembles, si $\mathscr{O}$ est une topologie sur E et si
$F\to E$ est une application, alors l'ensemble $f^{-1}(\mathscr{O})$ des $f^{-1}(A)$ lorsque A parcourt $\mathscr{O}$
une topologie, appelée *topologie image réciproque*, sur F (voir aussi le paragraphe 2.
L'ensemble des fermés de $f^{-1}(\mathscr{O})$ est exactement l'ensemble des images réciproques
fermés de $\mathscr{O}$.

Exemples 3 : L'intersection $\mathscr{O}=\bigcap_{j\in J}\mathscr{O}_j$ d'une famille $(\mathscr{O}_j)_{j\in J}$ de topologies sur E
une topologie sur E (si cette famille est vide, par convention, cette intersection est ég
à l'ensemble de toutes les parties de E). En effet, si $(U_i)_{i\in I}$ est une famille d'éléme
de $\mathscr{O}$, alors pour tous $i\in I$ et $j\in J$, la partie U_i appartient à $\mathscr{O}_j$; par conséquent,
parties $\bigcap_{i\in I}U_i$ si I est fini et $\bigcup_{i\in I}U_i$ appartiennent à $\mathscr{O}_j$, pour tout j dans J, donc el
appartiennent à $\mathscr{O}$.

Nous utiliserons cet exemple dans le chapitre 2 pour construire des topologies les p
petites possibles (pour l'inclusion), comme intersection de topologies vérifiant certai
propriétés.

Exercice E.1 *Soit E un ensemble. Montrer que l'ensemble des parties vides ou comp*
mentaires de parties finies de E, est une topologie sur E.

Une bijection $f:X\to Y$ entre deux espaces topologiques est un *homéomorphis*
si l'image réciproque par f de la topologie de Y est la topologie de X. Deux espa
topologiques X et Y sont *homéomorphes* s'il existe un homéomorphisme de X dans Y

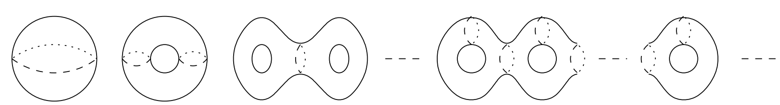
De manière équivalente, $f:X\to Y$ est un homéomorphisme si et seulement si l'ima
réciproque par f de tout ouvert de Y est un ouvert de X et si l'image directe pa
de tout ouvert de X est un ouvert de Y. La bijection inverse d'un homéomorphisme

encore un homéomorphisme. La composition de deux homéomorphismes est un homéomorphisme. L'application identité d'un espace topologique est un homéomorphisme. "Être homéomorphe à" est une relation d'équivalence sur tout ensemble d'espaces topologiques.

Une propriété (P) sur une collection $\mathscr{C}$ d'espaces topologiques est dite *invariante par homéomorphismes* si tout élément de $\mathscr{C}$, homéomorphe à un élément de $\mathscr{C}$ ayant la propriété (P), admet aussi la propriété (P). Nous ne préciserons pas $\mathscr{C}$ lorsque $\mathscr{C}$ est la collection de tous les espaces topologiques.

Par exemple, les propriétés "être grossier" et "être discret" sont des propriétés invariantes par homéomorphismes.

Un type de problème préféré des topologues est de classer à homéomorphismes près les espaces topologiques d'une collection donnée. Par exemple : étant donné un élément n de $\mathbb{N}$, classer à homéomorphismes près les variétés topologiques de dimension n (voir la définition à la fin du paragraphe 1.7), éventuellement avec des conditions (invariantes par homéomorphismes) supplémentaires données, telles que compactes (voir la partie 4), connexes (voir le paragraphe 1.9) ... Par exemple, voici la classification topologique des surfaces compactes connexes orientables (nous ne définirons pas ce terme ici, mais c'est le cas (par un théorème non trivial) de toutes les surfaces compactes contenues dans $\mathbb{R}^3$, et il suffit de considérer ce cas dans cette introduction) : toute surface compacte connexe orientable est homéomorphe à une, et exactement une, surface de la liste ci-dessous, indexée par un entier $g \in \mathbb{N}$ introduit par Riemann, appelé *genre* (voir par exemple [Gra, Rey]) :



$\mathbb{S}_2$ sphère — $\mathbb{T}^2$ tore — $\mathbb{T}^2\#\mathbb{T}^2$ — $\mathbb{T}^2\#\mathbb{T}^2\#\dots\#\mathbb{T}^2$ surface orientable de genre g

Le cas $n = 3$ a bien sûr fait couler beaucoup d'encre récemment, avec les travaux de Thurston et de Perelman (voir par exemple [BBB]). Ces problèmes de classifications, même si leur résolution complète est infructueuse, donnent souvent lieu à l'invention (ou découverte, suivant les orientations philosophiques) d'invariants topologiques (le plus souvent, mais pas seulement, des objets de nature algébrique), par exemples des invariants de topologie algébrique (voir cours de l'année prochaine ...) ou les récents invariants quantiques (voir cours de seconde année de mastère).

Nous terminons ce paragraphe par un exemple d'origine algébrique.

Exemple 4 : Soient k un corps commutatif, n un élément de $\mathbb{N}$ et $\mathbb{A}_n(k) = k^n$. Un *fermé de Zariski* de $\mathbb{A}_n(k)$ est une partie de la forme

$$F = \{x \in k^n \ : \ \forall i \in I, P_i(x) = 0\},$$

avec $(P_i)_{i\in I}$ une famille de polynômes sur k^n. L'ensemble des fermés de Zariski est l'ensemble des fermés d'une unique topologie sur $\mathbb{A}_n(k)$, appelée la *topologie de Zariski*.

Preuve. L'ensemble vide est un fermé de Zariski, car c'est l'ensemble des zéros du polynôme constant 1. Si F, F' sont des fermés de Zariski, ensembles des zéros communs des familles de polynômes $(P_i)_{i\in I}, (Q_j)_{j\in J}$ respectivement, alors $F \cup F'$ est l'ensemble des

zéros communs de la famille de polynômes $(P_iQ_j)_{(i,j)\in I\times J}$, donc est un fermé de Zaris
Si F_j, pour $j \in J$, est un fermé de Zariski, ensemble des zéros communs de la famille
polynômes $(P_{i,j})_{i\in I_j}$, alors $\bigcap_{j\in J} F_j$ est l'ensemble des zéros communs des $P_{i,j}$ pour $j \in$
et $i \in I_j$, donc est un fermé de Zariski.

Remarque. En fait, par le théorème du Nullstellensatz de Hilbert (voir par exem
[Per]), tout fermé de Zariski de $\mathbb{A}_n(k)$ est l'ensemble des zéros communs d'une fam
finie de polynômes.

Un exemple crucial de collection d'espaces topologiques est donné dans la partie s
vante.

1.3 Espaces métriques

Soit E un ensemble. Une *distance* sur E est une application $d : E \times E \to [0, +\infty[$ t
que, pour tous x, y, z dans E,

(1) *(annulation sur la diagonale)* $d(x, x) = 0$;

(2) *(séparation)* si $d(x, y) = 0$, alors $x = y$;

(3) *(symétrie)* $d(x, y) = d(y, x)$;

(4) *(inégalité triangulaire)* $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

Si d est une distance sur E, alors

$$d(x, y) \geq |d(x, z) - d(z, y)|$$

pour tous x, y, z dans E (cette inégalité s'appelle *l'inégalité triangulaire inverse*).

Un *espace métrique* est un ensemble X muni d'une distance d. Par abus, nous notero
souvent X le couple (X, d), en notant plus précisément d_X la distance de X si nécessa
(le contexte aidant, cela l'est rarement, et d désignera par défaut la distance de tout esp
métrique considéré).

Une application $f : X \to Y$ entre deux espaces métriques est *isométrique* si

$$\forall\, x, y \in X, \quad d(f(x), f(y)) = d(x, y)\ .$$

Une application isométrique étant clairement injective, on parlera aussi d'*injection*
plongement) isométrique. Une *isométrie* entre deux espaces métriques est une bijection
est une application isométrique ; son inverse est alors aussi une application isométriq
Deux espaces métriques X et Y sont *isométriques* s'il existe une isométrie de X dans
"Être isométrique à" est une relation d'équivalence sur tout ensemble d'espaces métriqu

Remarque. Pour pouvoir définir une distance, nous avons eu besoin de l'interva
$[0, +\infty[$ de $\mathbb{R}$ et de propriétés de $\mathbb{R}$ (voir le paragraphe 1.1). Mais le lecteur vérifiera que
seules propriétés de $\mathbb{R}$ utilisées dans la définition d'une distance, et pour montrer l'iné
lité triangulaire inverse, sont celles de groupe abélien ordonné. Pour tout groupe abél
ordonné Λ, d'ensemble des éléments positifs ou nuls Λ^+, on définit une Λ-distance sur
comme une application $d : E \times E \to \Lambda^+$ vérifiant les axiomes (1) à (4) ci-dessus. No
renvoyons à [Chi] pour des exemples intéressants de Λ-espaces métriques, par exem
lorsque $\Lambda = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ muni de l'ordre lexicographique.

Soit (X, d) un espace métrique.

Soient $x \in X$ et $r > 0$. La *boule ouverte de centre x et de rayon r* est

$$B(x,r) = \{y \in X \ : \ d(x,y) < r\}\ .$$

La *boule fermée de centre x et de rayon r* est

$$\overline{B}(x,r) = \{y \in X \ : \ d(x,y) \leq r\}\ .$$

La *sphère de centre x et de rayon r* est

$$S(x,r) = \{y \in X \ : \ d(x,y) = r\}\ .$$

Lorsque l'on veut préciser la distance, on pourra la mettre en indice, et noter $B_d(x,r)$, $\overline{B}_d(x,r)$, $S_d(x,r)$.

Exercice E.2 *Soit d une distance sur un ensemble X. Elle est dite* ultramétrique *si son inégalité triangulaire est remplacée par la condition (plus forte)*

$$d(x,y) \leq \max\{d(x,z), d(z,y)\}\ ,$$

appelée inégalité triangulaire ultramétrique.

Si d est ultramétrique, montrer les propriétés suivantes.

(1) Pour tous x,y,z dans X,

$$\text{si} \ \ d(x,z) \neq d(z,y), \quad \text{alors} \quad d(x,y) = \max\{d(x,z), d(z,y)\}\ .$$

(2) Tout point d'une boule pour d en est un centre.

(3) Tout point d'une boule ouverte pour d est un centre de la sphère correspondante.

(4) Étant donné deux boules ouvertes, montrer qu'ou bien l'une des deux est contenue dans l'autre, ou bien elles sont disjointes.

Topologie induite par une distance L'ensemble $\mathscr{O}$ des parties U de X telles que

$$\forall\, x \in U, \ \ \exists\, \epsilon > 0, \quad B(x,\epsilon) \subset U$$

est une topologie sur X, appelée *topologie induite par la distance* d. Sauf mention contraire, tout espace métrique sera muni de la topologie induite par sa distance.

La preuve que $\mathscr{O}$ est bien une topologie est la même que celle pour les distances induites par des normes. En effet, soit $(U_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de $\mathscr{O}$. Si I est fini et $x \in \bigcap_{i\in I} U_i$, soit $\epsilon_i > 0$ tel que $B(x,\epsilon_i) \subset U_i$; alors $\epsilon = \inf_{i\in I} \epsilon_i > 0$ et $B(x,\epsilon) \subset \bigcap_{i\in I} U_i$. Si $x \in \bigcup_{i\in I} U_i$, soit $i_0 \in I$ tel que $x \in U_{i_0}$, et $\epsilon > 0$ tel que $B(x,\epsilon) \subset U_{i_0}$; alors $B(x,\epsilon) \subset \bigcup_{i\in I} U_i$.

Une isométrie entre deux espaces métriques est clairement un homéomorphisme pour les topologies induites par les distances (elle envoie boule ouverte sur boule ouverte, ainsi que son inverse). Voir le paragraphe 5.3 pour des généralisations.

Un espace topologique $(X,\mathscr{O})$ est dit *métrisable* s'il existe une distance sur l'ensemble X dont la topologie induite est $\mathscr{O}$. La propriété « être métrisable » est une propriété invariante par homéomorphismes. Si la plupart des espaces topologiques rencontrés sont métrisables, il existe quand même en analyse des exemples cruciaux qui ne sont pas métrisables (voir par exemple l'exercice E.9 ci-dessous). De plus, dans de nombreux cas,

il n'existe pas de distance naturelle (i.e. invariante par toutes les transformations que l
a envie d'étudier) induisant la topologie donnée (voir par exemple l'espace de Schwa
dans l'exemple (iv) ci-dessous). Il est donc crucial d'étudier les espaces topologiques po
eux-mêmes, sans les supposer, lorsque c'est possible, munis d'une distance fixée.

Deux distances d et d' sur un ensemble E sont dites *équivalentes* s'il existe $c \geq 1$
que

$$\forall\, x,y \in E, \quad \frac{1}{c}\, d(x,y) \leq d'(x,y) \leq c\, d(x,y)\ .$$

La relation « être équivalente à » sur l'ensemble des distances sur E est une relat
d'équivalence.

Deux distances sur un ensemble sont dites *topologiquement équivalentes* si elles
duisent la même topologie. Bien sûr, équivalent implique topologiquement équivale
mais la réciproque est loin d'être vraie, et on prendra garde à ne pas confondre ces de
notions : si $f : X \to X$ est un homéomorphisme d'un espace topologique X, et d u
distance sur X induisant la topologie de X, alors l'application $d' : X \times X \to [0,+$
définie par $d'(x,y) = d(f(x), f(y))$ est une distance sur X topologiquement équivalent
d, mais qui n'est équivalente à d que si f est bilipschitzienne (voir la partie 5.3).

Soit A une partie de X.

Pour $x \in X$, on appelle *distance de x à A* le nombre

$$d(x,A) = \inf\{d(x,y) \ : \ y \in A\}$$

(avec la convention $d(x,A) = +\infty$ si A est vide). Par des arguments d'inégalité triangula
et d'approximation de borne inférieure, la fonction distance à une partie non vide est
lipschitzienne (voir la partie 5.3), i.e.

$$\forall\, x,y \in X, \quad |d(x,A) - d(y,A)| \leq d(x,y)\ .$$

Le *r-voisinage ouvert* de A est l'ensemble

$$V_r(A) = \{x \in X \ : \ d(x,A) < r\}\ .$$

Le *r-voisinage fermé* de A est l'ensemble

$$\overline{V}_r(A) = \{x \in X \ : \ d(x,A) \leq r\}\ .$$

Exercice E.3 *Pour la topologie induite par une distance, montrer que les boules ouver
et les voisinages ouverts de parties sont ouverts, et que les boules fermées et les voisina
fermés de parties sont fermés.*

Si B est une partie de X, on appelle *distance* de A à B le nombre

$$d(A,B) = \inf\{d(x,y) \ : \ x \in A,\ y \in B\} = \inf\{d(x,B) \ : \ x \in A\} = \inf\{d(y,A) \ : \ y \in$$

(avec la convention $d(A,B) = +\infty$ si A ou B est vide).

Le *diamètre* de A est l'élément de $[0,+\infty]$ défini par

$$\operatorname{diam} A = \sup_{x,y\,\in\, A}\ d(x,y)$$

si A est non vide, avec la convention que $\operatorname{diam}\emptyset = -\infty$. Si B est une partie de A, alors $\operatorname{diam} B \leq \operatorname{diam} A$. Pour tout x dans X, et tout $r > 0$, le diamètre de $V_r(A)$ est, par inégalité triangulaire, au plus $2r + \operatorname{diam} A$; et le diamètre de $S(x, r)$ est au plus $2r$.

La partie A est *bornée* si elle est vide ou si son diamètre est fini. Si X est non vide, ceci équivaut par l'inégalité triangulaire au fait qu'il existe $x_0 \in X$ et $r > 0$ tels que A soit contenue dans $\overline{B}(x_0, r)$. Une application d'un ensemble à valeurs dans X est *bornée* si son image est bornée.

Il est parfois utile de chercher s'il existe une unique boule de rayon minimal contenant une partie non vide bornée donnée (voir [BH] pour une très jolie collection d'espaces métriques dans lesquels ceci est possible).

Les vérifications des exemples suivants sont laissées en exercice.

Exemple (i) Pour tout ensemble E, l'application d définie par

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

est une distance sur E, appelée la *distance discrète*. La topologie induite par cette distance est la topologie discrète (les boules ouvertes de rayon $\frac{1}{2}$ sont les singletons).

Exemple (ii) Soient (X, d) un espace métrique et Y une partie de X. La restriction de d à $Y \times Y$ est une distance sur Y, dite *induite*. Sauf mention explicite du contraire, toute partie d'un espace métrique sera munie de la distance induite (et donc de la topologie induite par sa distance induite, que nous caractériserons et étudierons dans la partie 2.3 : il est facile de montrer qu'une partie A de Y est ouverte pour la topologie de Y si et seulement s'il existe un ouvert U de X tel que $A = U \cap Y$).

Exemple (iii) Soit E un espace vectoriel sur le corps $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Une *norme* sur E est une application $||\cdot||$ de E dans $[0, +\infty[$ telle que, pour tous x, y dans E et tout λ dans K,

(i) $||x|| = 0$ si et seulement si $x = 0$,

(ii) *(homogénéité)* $||\lambda x|| = |\lambda|\, ||x||$,

(iii) *(sous-additivité)* $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$.

Si $f : E \to F$ est un isomorphisme linéaire sur un espace vectoriel F sur $\mathbb{K}$, alors $y \mapsto ||f^{-1}(y)||$ est une norme sur F, appelée la *norme image* de $||\cdot||$ par f.

Un *espace vectoriel normé* (réel ou complexe) est un espace vectoriel (réel ou complexe) muni d'une norme. Par exemple, $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ et $(\mathbb{C}, |\cdot|)$ sont des espaces vectoriels normés. Si $(E, ||\cdot||)$ est un espace vectoriel (réel ou complexe) normé, alors il est facile de vérifier (et cela a été fait l'année dernière) que $d(x, y) = ||x - y||$ est une distance sur l'ensemble E, dite *induite par la norme*. La topologie induite par la distance induite par une norme est appelée la *topologie induite par cette norme* (et a déjà été introduite en classes préparatoires).

Sauf mention contraire, tout espace vectoriel normé sera muni de la distance induite par sa norme (et donc toute partie d'un espace vectoriel normé (en particulier toute partie de $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$) sera munie de la topologie induite par sa distance induite ...).

Remarquons qu'une application linéaire $f : E \to F$ entre deux espaces vectoriels normés est isométrique (pour les distances induites par les normes) si et seulement si elle *préserve la norme*, i.e. si

$$\forall\, x \in E, \quad ||f(x)|| = ||x|| \, .$$

Soit E un espace vectoriel réel ou complexe. Deux normes $||\cdot||$ et $||\cdot||'$ sur E s
dites *équivalentes* s'il existe une constante $c > 0$ telle que, pour tout x dans E,

$$\frac{1}{c}\, ||x|| \;\leq\; ||x||' \;\leq\; c\, ||x|| \, .$$

La relation « être équivalente à » sur l'ensemble des normes sur E est une relation d'éq valence.

Deux normes sont équivalentes si et seulement si leurs distances induites sont équi lentes, et ces distances sont alors topologiquement équivalentes.

Nous reviendrons plus longuement dans les paragraphes 2.8, 3.4 et surtout dans chapitre 6 sur la topologie des espaces vectoriels normés.

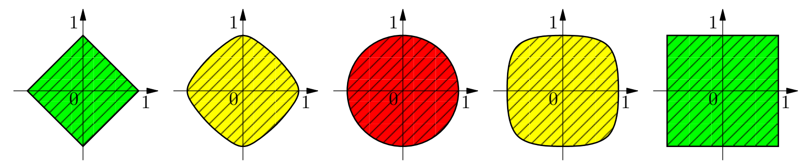
Ci-dessous, nous dessinons les boules unités, pour $n = 2$ et diverses valeurs de p da $[1, +\infty]$, des normes (équivalentes)

$$||(x_1, \dots, x_n)||_p = \Big(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\Big)^{1/p}$$

sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$, où par convention,

$$||(x_1, \dots, x_n)||_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| \, .$$

La norme $||\cdot||_2$ sur $\mathbb{R}^n$ est appelée la *norme euclidienne*, et la topologie induite par norme euclidienne est appelée la *topologie usuelle sur* $\mathbb{R}^n$.



boule unité de $||\cdot||_1$ — boule unité de $||\cdot||_{\frac{3}{2}}$ — boule unité de $||\cdot||_2$ — boule unité de $||\cdot||_4$ — boule unité de $||\cdot||_\infty$

Exercice E.4 *Déterminer toutes les isométries de $\mathbb{R}^n$ muni de la distance d_p induite la norme $||\cdot||_p$.*

L'exercice suivant dit que tout espace métrique est isométrique à un sous-espace d' espace vectoriel normé (ce sous-espace étant muni de la restriction de la distance indu par la norme). Mais ce n'est pas une raison pour ne considérer que les distances induites la norme des espaces vectoriels normés, la géométrie des distances particulières pouv apporter des informations supplémentaires pour étudier un problème donné.

Exercice E.5 (Théorème d'Arens-Fells) *Soient X un espace métrique, x_0 un po fixé de X, $\mathscr{F}$ l'ensemble des parties finies non vides de X, et $\mathscr{B}(\mathscr{F})$ l'espace vectoriel des applications bornées f de $\mathscr{F}$ dans $\mathbb{R}$, muni de la norme dite uniforme*

$$||f||_\infty = \sup_{A \in \mathscr{F}} |f(A)| \, .$$

Pour tout x dans X, notons $f_x : \mathscr{F} \to \mathbb{R}$ l'application définie par

$$f_x : A \mapsto d(x, A) - d(x_0, A) \, .$$

Montrer que $x \mapsto f_x$ est une isométrie de X sur son image dans $\mathscr{B}(\mathscr{F})$. En déduire tout espace métrique est isométrique à un fermé d'un espace vectoriel normé.

Exemple (iv) Si $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ et $E_1, \dots, E_n$ sont des espaces métriques, alors l'une quelconque des applications d_p ci-dessous, dites *distance produit*, est une distance sur l'ensemble produit $E = E_1 \times \dots \times E_n$: pour tout $p \in [1, +\infty]$, et pour tous $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n)$ dans E,

$$d_p(x, y) = \begin{cases} \Big(\sum_{i=1}^n d(x_i, y_i)^p \Big)^{1/p} & \text{si } p \neq +\infty \\ \max_{1 \le i \le n} d(x_i, y_i) & \text{sinon .} \end{cases}$$

De plus, ces distances d_p sont équivalentes.

Soient $n \in \mathbb{N} - \{0\}$, $E_1, \dots, E_n$ des espaces vectoriels normés, et $p \in [1, +\infty]$. Alors les applications $|| \cdot ||_p : E_1 \times \dots \times E_n \to [0, +\infty[$ définies par

$$||(x_1, \dots, x_n)||_p = \Big(\sum_{i=1}^n ||x_i||^p \Big)^{1/p}$$

si $p \neq +\infty$ et

$$||(x_1, \dots, x_n)||_\infty = \max_{1 \le i \le n} ||x_i||$$

sont des normes (équivalentes), appelées *normes produits* sur l'espace vectoriel produit $E_1 \times \dots \times E_n$, et la distance associée à la norme $|| \cdot ||_p$ est la distance produit d_p des distances associées aux normes des E_i.

Exemple (v) Une *pseudo-distance* (ou *écart*) sur un ensemble E est une application $d : E \times E \to [0, +\infty[$ vérifiant les axiomes (1), (3) et (4) des distances. On définit les pseudo-boules et les pseudo-distances à une partie comme pour les distances. En particulier, pour tous $x \in E$ et $\epsilon > 0$, on note

$$B(x, \epsilon) = \{y \in E \ : \ d(x, y) < \epsilon\} ,$$

(et $B_d(x, \epsilon)$ lorsque l'on veut préciser la pseudo-distance), que l'on appelle la *(pseudo-)boule ouverte de centre x et de rayon ϵ* pour la pseudo-distance d.

Une famille $(d_i)_{i \in I}$ de pseudo-distances sur un ensemble E est dite *séparante* si pour tous x, y distincts dans E, il existe $i \in I$ tel que $d_i(x, y) \neq 0$.

Remarques : • si $c > 0$ et si d est une pseudo-distance sur E, alors

$$c\,d \ , \ \ \min\{c, d\} \ , \ \ \frac{d}{1 + d}$$

sont des pseudo-distances sur E, les deux dernières étant bornées (majorées par c et 1 respectivement) : l'application $x \mapsto \frac{x}{1+x}$ est croissante sur $[0, +\infty]$, et, pour tous $x, y \ge 0$,

$$\frac{x + y}{1 + x + y} \le \frac{x}{1 + x} + \frac{y}{1 + y} \ .$$

Si de plus d est une distance, alors les pseudo-distances $c\,d, \min\{c, d\}, \frac{d}{1+d}$ sont des distances, induisant la même topologie que d sur E.

• Une somme convergente $\sum_{i \in I} d_i$ de pseudo-distances d'une famille dénombrable de pseudo-distances $(d_i)_{i \in I}$ est une pseudo-distance, qui est une distance si la famille est séparante.

• Une borne supérieure finie $\sup_{i \in I} d_i$ de pseudo-distances d'une famille de pseu
distances $(d_i)_{i \in I}$ est une pseudo-distance, qui est une distance si la famille est séparan

Topologie induite par une famille de pseudo-distances Soient E un ensemble $(d_\alpha)_{\alpha \in \mathscr{A}}$ une famille de pseudo-distances sur E. L'ensemble $\mathscr{O}$ des parties U de E tel que pour tout x dans U, il existe $\epsilon > 0$ et $\mathscr{A}'$ une partie finie de $\mathscr{A}$ tels que

$$\bigcap_{\alpha \in \mathscr{A}'} B_{d_\alpha}(x, \epsilon) \subset U$$

est une topologie sur X, qui est appelée la *topologie définie par la famille de pseu distances* $(d_\alpha)_{\alpha \in \mathscr{A}}$. Si la famille $(d_\alpha)_{\alpha \in \mathscr{A}}$ est composée d'un seul élément, qui est u distance, on retrouve bien sûr la définition précédente.

La preuve que $\mathscr{O}$ est bien une topologie est similaire à celle pour les distances. effet, soit $(U_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de $\mathscr{O}$.

Si I est fini et $x \in \bigcap_{i \in I} U_i$, alors pour tout $i \in I$, soient $\epsilon_i > 0$ et $\mathscr{A}_i$ une partie finie $\mathscr{A}$ tels que $\bigcap_{\alpha \in \mathscr{A}_i} B_{d_\alpha}(x, \epsilon_i) \subset U_i$. Alors $\epsilon = \inf_{i \in I} \epsilon_i$ est strictement positif, $\mathscr{A}' = \bigcup_{i \in I}$ est fini, et $\bigcap_{\alpha \in \mathscr{A}'} B_{d_\alpha}(x, \epsilon) \subset \bigcap_{i \in I} U_i$. Donc $\mathscr{O}$ est stable par intersections finies.

Si $x \in \bigcup_{i \in I} U_i$, soit $i_0 \in I$ tel que $x \in U_{i_0}$. Soient $\epsilon > 0$ et $\mathscr{A}'$ une partie finie de tels que $\bigcap_{\alpha \in \mathscr{A}'} B_{d_\alpha}(x, \epsilon) \subset U_{i_0}$. Alors $\bigcap_{\alpha \in \mathscr{A}'} B_{d_\alpha}(x, \epsilon) \subset \bigcup_{i \in I} U_i$. Donc $\mathscr{O}$ est stable p unions.

Exercice E.6 *(1) Soit E un ensemble muni d'une famille séparante de pseudo-distan $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Soient $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs telle que la série $\sum_{n=0}^{+\infty}$ converge, et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs convergeant vers 0.*

Montrer que les applications

$$\delta(x, y) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \ \min\{b_n, d_n(x, y)\}$$

$$\delta'(x, y) = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n \frac{d_n(x, y)}{1 + d_n(x, y)}$$

$$\delta''(x, y) = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n \min\{1, d_n(x, y)\}$$

sont des distances topologiquement équivalentes sur E, dont la topologie induite est topologie définie par la famille de pseudo-distances $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

(2) Donner un exemple d'ensemble E muni d'une famille séparante de pseudo-distan $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que les distances

$$\delta(x, y) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \ \min\{1, d_n(x, y)\} \quad , \quad \delta'(x, y) = \sum_{n \in \mathbb{N}} 2^{-n} \frac{d_n(x, y)}{1 + d_n(x, y)}$$

ne soient pas topologiquement équivalentes.

Une *semi-norme* sur un espace vectoriel E sur le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ est u application $|| \cdot ||$ de E dans $[0, +\infty[$ vérifiant

$$\forall \ x, y \in E, \ \forall \ \lambda \in \mathbb{K}, \quad ||0|| = 0 \ , \ \ ||\lambda x|| = |\lambda| \, ||x|| \ , \ \ ||x + y|| \le ||x|| + ||y|| \ ,$$

c'est-à-dire vérifiant toutes les propriétés d'une norme sauf peut-être l'axiome de séparation $||x|| = 0 \implies x = 0$.

Si $||\cdot||$ est une semi-norme sur un espace vectoriel E, alors $d(x,y) = ||x-y||$ est une pseudo-distance sur l'ensemble E, dite *induite par* $||\cdot||$. Une famille $(||\cdot||_i)_{i\in I}$ de semi-normes sur un espace vectoriel E est dite *séparante* si la famille des pseudo-distances associées l'est, ou, de manière équivalente, si, pour tout x dans E, si $||x||_\alpha = 0$ pour tout α dans $\mathscr{A}$, alors $x = 0$.

L'espace de Schwartz des fonctions à décroissance rapide Par exemple, pour tout $r \in \mathbb{N} - \{0\}$, une application f de l'espace euclidien usuel $\mathbb{R}^r$ dans $\mathbb{R}$, qui est *lisse* (i.e. de classe C^∞), est dite *à décroissance rapide* si pour tous k dans $\mathbb{N}$, $m = (m_1, \dots, m_r) \in \mathbb{N}^r$ et $x = (x_1, \dots x_r)$ (avec, de manière usuelle, $|m| = m_1 + \cdots + m_r$ et $\partial^m f = \dfrac{\partial^{|m|}}{\partial x_1^{m_1} \dots \partial x_r^{m_r}} f$), l'application

$$x \mapsto (1 + ||x||^k)\, \partial^m f(x)$$

est bornée. Notons $\mathscr{S}(\mathbb{R}^r)$ l'espace vectoriel réel des applications f de $\mathbb{R}^r$ dans $\mathbb{R}$ lisses à décroissance rapide. Alors

$$||f||_{k,m} = \sup_{x\in\mathbb{R}^r}\ (1 + ||x||^k)\, \left|\partial^m f(x)\right|$$

est une semi-norme sur $\mathscr{S}(\mathbb{R}^r)$. Notons $I = \mathbb{N}\times\mathbb{N}^r$, et $(d_{k,m})_{(k,m)\in I}$ la famille des pseudo-distances sur $\mathscr{S}(\mathbb{R}^r)$ induites par les semi-normes $||\cdot||_{k,m}$, qui est séparante.

Soit $\varphi : I \to [0, +\infty[$ une application telle que la série $\sum_{i\in I}\ 2^{-\varphi(i)}$ converge (par exemple $\varphi(k,m) = k + |m|$). Notons

$$d_\varphi(x,y) = \sum_{i\in I}\ 2^{-\varphi(i)} \frac{d_i(x,y)}{1 + d_i(x,y)} \ .$$

Alors les applications d_φ définies ci-dessus sont, par les exemples de pseudo-distances précédents, des distances bornées sur $\mathscr{S}(\mathbb{R}^r)$. De plus, les distances d_φ sont topologiquement équivalentes, comme on le montre aisément (voir l'exercice E.6 (1)).

Ainsi, l'ensemble $\mathscr{S}(\mathbb{R}^r)$ est muni de nombreuses distances topologiquement équivalentes. Nous définirons de manière intrinsèque la topologie définie par ces distances au paragraphe 2.2.

Nous définirons, dans le paragraphe 3.1, une suite convergente vers un élément y dans un espace métrique (X,d) comme une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $d(x_n, y) \to 0$. Il est facile de montrer que les distances d_φ définissent les mêmes suites convergentes dans $\mathscr{S}(\mathbb{R}^r)$ (i.e. une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathscr{S}(\mathbb{R}^r)$ converge vers un élément g de $\mathscr{S}(\mathbb{R}^r)$ pour l'une de ces distances si et seulement si elle converge vers ce même élément pour une autre, car c'est le cas si et seulement si pour tout couple (m,k), la suite de réels $||f_n - g||_{k,m}$ converge vers 0 quand n tend vers $+\infty$). Mais il n'est pas clair que l'une de ces distances soit "meilleure" que les autres. D'où l'intérêt d'une notion générale de convergence, voir la partie 3 : la notion de convergence n'est pas une propriété d'une distance, mais c'est une propriété de la topologie qu'elle induit.

Exercice E.7 *Soit E un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, et $\mathscr{O}$ une topologie sur E. On dit que $\mathscr{O}$ est* normable *s'il existe une norme sur E dont la topologie induite est $\mathscr{O}$. Si A est une partie de E et $\lambda \in \mathbb{K}$, on note $\lambda A = \{\lambda x \ :\ x \in A\}$.*

(1) Montrer que si $\mathscr{O}$ est normable, alors les applications

$$\begin{array}{ccc} E\times E & \longrightarrow & E \\ (x,y) & \mapsto & x-y \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} K\times E & \longrightarrow & E \\ (\lambda,y) & \mapsto & \lambda y \end{array}$$

sont continues (voir le paragraphe 1.8 pour la définition de la continuité, et le paragra 2.4 (et la remarque (iii) suivant la proposition 2.9) pour celle de la topologie d'un prod de deux espaces topologiques).

(2) Si la topologie $\mathscr{O}$ est normable, et définie par une distance d, montrer que p tout $\epsilon > 0$ suffisamment petit, l'ensemble $\mathscr{U} = \{\frac{1}{n+1}B(0,\epsilon)\ \ : n \in \mathbb{N}\}$ est un systè fondamental de voisinages ouverts du vecteur nul pour $\mathscr{O}$, i.e. $\mathscr{U} \subset \mathscr{O}$, 0 appartien tout élément de U, et tout ouvert de $\mathscr{O}$ contenant 0 contient un élément de $\mathscr{U}$ (voi paragraphe 1.5).

(3) En déduire que l'espace de Schwartz des fonctions à décroissance rapide n'est normable.

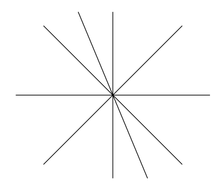
Exemple (vi) Les applications d de $\mathbb{C}\times\mathbb{C}$ dans $[0,+\infty[$ suivantes sont des distan sur $\mathbb{C}$, respectivement appelées *distance SNCF* et *distance du peigne* :

$$d(x,y) = \begin{cases} |x-y| & \text{si } x \text{ et } y \text{ sont colinéaires sur } \mathbb{R} \\ |x| + |y| & \text{sinon} \end{cases}$$

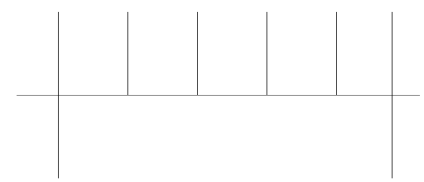
et

$$d(x,y) = \begin{cases} |x-y| & \text{si } \operatorname{Re} x = \operatorname{Re} y \\ |\operatorname{Im} x| + |\operatorname{Im} y| + |\operatorname{Re} x - \operatorname{Re} y| & \text{sinon.} \end{cases}$$

Remarquons que les topologies induites par ces distances sont différentes de la topolo usuelle de $\mathbb{C}$.



distance SNCF



distance du peigne

Exemple (vii) Soit (X,d) un espace métrique. Un *chemin* dans X est une applicat γ de $[0,1]$ dans X qui est continue (i.e. telle que

$$\forall\, \epsilon > 0,\ \ \forall\, t_0 \in [0,1],\ \ \exists\, \eta > 0,\ \ \forall t \in [0,1],\quad |t - t_0| < \eta \implies d(\gamma(t), \gamma(t_0)) < \epsilon\ ,$$

voir le paragraphe 1.8) . Les *extrémités* d'un chemin γ sont les points $\gamma(0)$ et $\gamma(1)$. *longueur* d'un chemin γ de X est

$$\operatorname{long}\gamma = \sup \sum_{i=0}^{n}\ d(\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1}))\ ,$$

où la borne supérieure est prise sur tous les n dans $\mathbb{N}$ et toutes les subdivisions $t_0 = 0$ $t_1 < \cdots < t_n < t_{n+1} = 1$ de $[0,1]$. En particulier,

$$\operatorname{long}\gamma \geq d(\gamma(0), \gamma(1))\ .$$

Deux chemins γ, γ' qui ne diffèrent que par reparamétrage à la source (i.e. $\gamma' = \gamma \circ \varphi$ où $\varphi : [0,1] \to [0,1]$ est un homéomorphisme) ont la même longueur.

Si $\gamma : [0,1] \to X$ et $\gamma' : [0,1] \to X$ sont deux chemins continus tels que $\gamma(1) = \gamma'(0)$, on appelle *concaténation* des chemins γ et γ' l'application $\gamma'' : [0,1] \to X$, notée souvent $\gamma \cdot \gamma'$, définie par

$$\gamma''(t) = \begin{cases} \gamma(2t) & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \gamma'(2t-1) & \text{si } t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}.$$

Dans l'espace métrique (X,d), il est facile de vérifier que la concaténation γ'' est encore un chemin (continu), de $\gamma(0)$ à $\gamma'(1)$.

Un espace métrique est *connexe par arcs rectifiables* si pour tous x, y dans X, il existe un chemin de longueur finie d'extrémités x, y. Si X est connexe par arcs rectifiables, alors l'application d_ℓ, qui au couple (x,y) de points de X associe la borne inférieure des longueurs des chemins d'extrémités x, y, est une distance sur X (pour vérifier l'inégalité triangulaire, utiliser la concaténation des chemins et des arguments classiques de passage à la borne inférieure). Elle est appelée la *distance de longueur induite* par d, et elle vérifie

$$d_\ell \geq d \quad \text{et} \quad (d_\ell)_\ell = d_\ell \,.$$

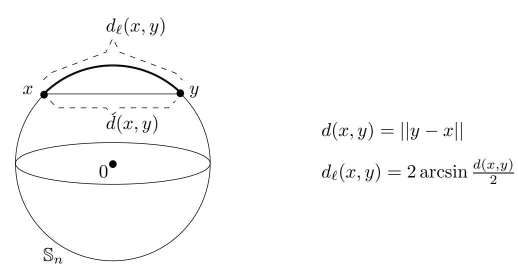
(Cette dernière égalité n'est pas si évidente que cela, car les distances d et d_ℓ ne sont pas toujours topologiquement équivalentes, voir [Gro1, page 5].) Un *espace de longueur* est un espace métrique (X,d) tel que $d = d_\ell$, et d est alors appelée une *distance de longueur*. Un espace métrique X est *géodésique* si pour tous x, y dans X, il existe un chemin d'extrémités x, y de longueur égale à $d(x,y)$. Bien sûr, un espace géodésique est un espace de longueur.

Exemples : • L'espace euclidien $\mathbb{R}^2$ privé de 0 est un espace de longueur qui n'est pas géodésique.

• Tout espace vectoriel normé, et plus généralement tout convexe d'un espace vectoriel normé, est un espace géodésique : par l'inégalité triangulaire, la ligne droite y est un plus court chemin !

• L'ensemble $\mathbb{C}$ muni de la distance SNCF ou de la distance du peigne est un espace géodésique.

• Sur la sphère unité $\mathbb{S}_n$ de l'espace euclidien usuel $\mathbb{R}^{n+1}$, la distance d induite par la distance euclidienne de $\mathbb{R}^{n+1}$ n'est pas une distance de longueur, et la distance de longueur d_ℓ induite par d, qui est la distance angulaire, est géodésique, les arcs de grands cercles y sont les plus courts chemins.



Des exemples d'espaces métriques géodésiques apparaissent naturellement en géométrie riemannienne, sous-riemannienne et leurs dégénérescences (voir par exemple [Gro1, Gro2]).

Exemple (viii) Soit (X,d) un espace métrique, et $\mathscr{P}_c(X)$ l'ensemble de ses part fermées bornées non vides. Nous allons munir $\mathscr{P}_c(X)$ d'une distance, invariante par isométries de X.

On appelle *correspondance* entre deux ensembles E et F une relation $\mathscr{R}$ entre E et (rappelons que $\mathscr{R}$ est une partie de $E \times F$, que l'on note $x \mathscr{R} y$ au lieu de $(x,y) \in \mathscr{R}$, que l'on dit alors que x est *en relation avec* y pour $\mathscr{R}$) telle que tout point de E soit relation pour $\mathscr{R}$ avec au moins un point de F et réciproquement.

Proposition 1.2 *Considérons l'application* $d_H : \mathscr{P}_c(X) \times \mathscr{P}_c(X) \to [0, +\infty[$ *définie*

$$d_H(K,K') = \max\Big\{ \sup_{x \in K} d(x,K'), \sup_{x' \in K'} d(x',K) \Big\}$$
$$= \inf\big\{ \epsilon > 0 \;:\; K \subset V_\epsilon(K') \text{ et } K' \subset V_\epsilon(K) \big\} \,,$$

ou encore en demandant que $d_H(K,K')$ *soit la borne inférieure des* $\epsilon > 0$ *tels qu'il ex une correspondance* $\mathscr{R}$ *entre* K *et* K' *telle que*

$$\forall\, x, y \in K \times K', \;\; x \mathscr{R} y \implies d(x,y) < \epsilon \,.$$

Alors d_H *est une distance sur* $\mathscr{P}_c(X)$, *invariante par les isométries de* X *: pour to isométrie* f *de* X, *on a* $d_H(f(K), f(K')) = d_H(K,K')$.

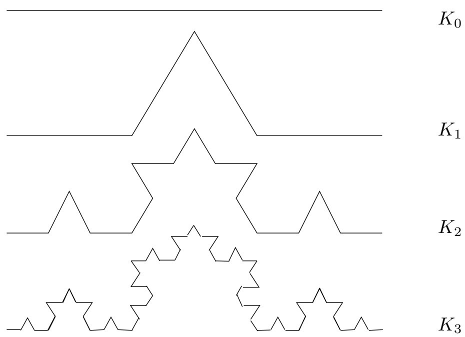
Cette distance, qui dépend bien sûr de d, est appelée la *distance de Hausdorff* $\mathscr{P}_c(X)$.

Exemples : • Si X est l'espace métrique $[0,1]$ usuel, et $A_n = \{\frac{k}{n+1}, 0 \leq k \leq n +$ alors

$$d_H(X, A_n) = \frac{1}{2(n+1)} \longrightarrow_{n \to +\infty} 0 \,.$$

• Pour tous les $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ et $p \in [1, +\infty]$, notons B_p la boule unité fermée de pour la norme $||\cdot||_p$ (voir l'exemple (iii)). Les B_p sont des fermés bornés non vides de muni de la distance euclidienne usuelle. Pour tout p_0 dans $[1, +\infty]$, il est facile de mont que $d_H(B_p, B_{p_0})$ tend vers 0 quand p tend vers p_0 dans $[1, +\infty]$.

• On considère la suite $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de lignes polygonales du plan $\mathbb{R}^2$, où K_n est for de 4^n segments consécutifs de longueurs $\frac{1}{3^n}$, qui est définie ainsi par récurrence : K_0 l'intervalle unité horizontal $[0,1]$; K_{n+1} est obtenu à partir de K_n en subdivisant en tr chacun des 4^n segments de K_n, et en remplacant le tiers du milieu τ par les deux aut côtés du triangle équilatéral ayant τ comme base (et situé à gauche en parcourant K_n, b que cela n'ait guère d'importance). Il est facile de montrer que $d_H(K_n, K_{n+1}) = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{3^n}$ qu'il existe un fermé borné K du plan tel que $d_H(K_n, K)$ converge vers 0 quand n tend v $+\infty$: l'application $f_n : [0,1] \to K_n$, obtenue en découpant l'intervalle $[0,1]$ en 4^n segme de longueurs égales, puis en prenant sur chacun de ces segments une application af sur le segment correspondant de K_n, est uniformément de Cauchy (voir le paragrap 3.4), donc converge vers une application continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}^2$, dont l'image est Ce fermé borné K est appelé la *courbe de von Koch*.



Exercice E.8 *Montrer que la courbe de von Koch est homéomorphe à* $[0,1]$ *(donc est connexe par arcs, au sens du paragraphe 1.9), mais n'est pas connexe par arcs rectifiables (pour la distance usuelle de* $\mathbb{R}^2$*).*

La notion de limite (voir le paragraphe 3.1) pour la distance de Hausdorff permet souvent de construire de très jolis objets fractals (voir par exemple [Man, Fal, Mat]).

Preuve. Par définition des ϵ-voisinages ouverts, les deux inclusions $K \subset V_\epsilon(K')$ et $K' \subset V_\epsilon(K)$ sont vérifiées si et seulement si la relation $x \mathscr{R} y$ définie par $d(x,y) < \epsilon$ est une correspondance entre K et K'. Si $K \subset V_\epsilon(K')$ et $K' \subset V_\epsilon(K)$, alors on a $\max\Big\{ \sup_{x\in K} d(x,K'), \sup_{x'\in K'} d(x',K)\Big\} \leq \epsilon$. Si $\max\Big\{ \sup_{x\in K} d(x,K'), \sup_{x'\in K'} d(x',K)\Big\} < \epsilon$, alors $K \subset V_\epsilon(K')$ et $K' \subset V_\epsilon(K)$. L'égalité des trois définitions en découle aisément.

La fonction d_H est finie (pour tous K, K' dans $\mathscr{P}_c(X)$, pour $x \in K$ et $x' \in K'$, on a $d_H(K,K') \leq \operatorname{diam} K + d(x,x') + \operatorname{diam} K'$), positive ou nulle, symétrique et nulle sur la diagonale. Par inégalité triangulaire, on a $V_\epsilon(V_{\epsilon'}(A)) \subset V_{\epsilon+\epsilon'}(A))$ pour toute partie A de X et tous $\epsilon, \epsilon' > 0$. Donc en utilisant la seconde définition, l'application d_H vérifie l'inégalité triangulaire. (On peut aussi composer les correspondances : si $\mathscr{R}$ est une correspondance entre K et K' telle que $d(x,x') < \epsilon$ si $x \mathscr{R} x'$, et si $\mathscr{R}'$ est une correspondance entre K' et K'' telle que $d(x',x'') < \epsilon'$ si $x' \mathscr{R}' x''$, alors la relation $\mathscr{R}''$ entre K et K'' définie par $x \mathscr{R}'' x''$ si et seulement s'il existe x' dans K' tel que $x \mathscr{R} x'$ et $x' \mathscr{R}' x''$ est une correspondance entre K et K'' telle que $d(x,x'') < \epsilon + \epsilon'$ si $x \mathscr{R}'' x''$, par inégalité triangulaire).

Si $d_H(K,K') = 0$, alors pour tout x dans K, on a $d(x,K') < \epsilon$ pour tout $\epsilon > 0$, donc $d(x,K') = 0$. Nous verrons dans le paragraphe 1.6 que si une partie A de X est fermée, alors $d(x,A) = 0$ si et seulement si x appartient à A. Donc $K \subset K'$. Par symétrie, ceci montre l'axiome de séparation de d_H. □

Exemple (ix) Soit (X,d) un espace métrique. Soit $\mathscr{B}$ la tribu de ses boréliens et $\mathscr{M}(X)$ l'ensemble de ses mesures (boréliennes) de probabilité (voir le cours d'Intégration et probabilité). Il existe sur $\mathscr{M}(X)$ plusieurs topologies intéressantes et naturelles (voir l'exemple (3) du paragraphe 2.2), et ces topologies suffisent en général. Mais pour les aficionados des distances, et quelques usages précis, il existe aussi plusieurs distances intéressantes et naturelles sur $\mathscr{M}(X)$ (voir [Par, Vil]). Nous n'en donnons qu'une ci-dessous, voir par exemple [Vil, Chap. 6] pour la définition et les premières propriétés des *distances de Wasserstein* $d_{W,p}$ entre deux éléments μ, ν de $\mathscr{M}(X)$, pour $p \in [0, +\infty[$:

$$d_{W,p}(\mu,\nu) = \left(\inf_{m\in\Pi(\mu,\nu)} \int_{X\times X} d(x,y)^p \; dm(x,y) \right)^{1/p} ,$$

où $\Pi(\mu,\nu)$ est l'ensemble des mesures (boréliennes) de probabilité m sur l'espace top logique produit $X \times X$ (voir paragraphe 2.4) telles que les mesures images (appel *marginales*, voir le cours d'Intégration et probabilité) $(\mathrm{pr}_1)_*m$ et $(\mathrm{pr}_2)_*m$ de m par projections canoniques $\mathrm{pr}_1 : (x,y) \mapsto x$ et $\mathrm{pr}_2 : (x,y) \mapsto y$ soient respectivement μ et ν

Proposition 1.3 *Considérons l'application* $d_P : \mathscr{M}(X) \times \mathscr{M}(X) \to [0, +\infty[$ *définie p*

$$d_P(\mu,\nu) = \inf\big\{\epsilon > 0 \;:\; \forall\, B \in \mathscr{B},\;\; \mu(B) \leq \nu(V_\epsilon(B)) + \epsilon \;\text{ et }\; \nu(B) \leq \mu(V_\epsilon(B)) + \epsilon\big\}$$

Alors d_P *est une distance sur* $\mathscr{M}(X)$.

Cette distance est appelée la *distance de Prokhorov* sur $\mathscr{M}(X)$.

Preuve. L'application d_p est à valeurs finies (majorées par 1), positives ou nulles ; est symétrique et nulle sur la diagonale, par construction. En utilisant de nouveau le f que $V_\epsilon(V_{\epsilon'}(A)) \subset V_{\epsilon+\epsilon'}(A))$ pour toute partie A de X et tous $\epsilon, \epsilon' > 0$, et qu'un voisina ouvert est ouvert, donc borélien, l'inégalité triangulaire en découle.

Si B est un fermé de X, alors $\big(V_{\frac{1}{n}}(B)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille décroissante de boréli d'intersection l'ensemble des x de X tels que $d(x,B) = 0$, qui est égal à B d'après le ragraphe 1.6. Donc par convergence monotone (voir le cours d'Intégration et probabilit pour tout μ dans $\mathscr{M}(X)$, la suite des $\mu\big(V_{\frac{1}{n}}(B)\big)$ converge vers $\mu(B)$. Il en découle que $d_P(\mu,\nu) = 0$, alors $\mu(B) = \nu(B)$ pour tout fermé B de X. Comme les fermés engendr la tribu des boréliens, ceci implique que $\mu = \nu$, ce qui montre l'axiome de séparation d_P.

Exemple (x) Une distance d sur un groupe G est dite *invariante à gauche* (resp.*à dr* si pour tous g, x, y dans G, nous avons

$$d(gx, gy) = d(x,y) \quad (\text{resp. } d(gx, gy) = d(x,y)\ ) \ .$$

Une distance est dite *bi-invariante* si elle est invariante à droite et à gauche. Par exem la distance induite par une norme sur un espace vectoriel est invariante par translatio

Sur le groupe $(\mathbb{R}_+^*, \times)$, la formule

$$d(a,b) = |\log \frac{a}{b}|$$

est une distance invariante à gauche (donc à droite, par commutativité).

Sur le groupe $\mathrm{O}(n)$ des rotations de $\mathbb{R}^n$, la formule

$$d(x,y) = \big(\operatorname{trace}\ {}^t(y-x)(y-x)\big)^{\frac{1}{2}}$$

est une distance bi-invariante.

Nous renvoyons par exemple à [Gro1][Vil, Chap. 27] pour d'autres très jolis exem d'espaces métriques.

1.4 Topologie engendrée et base d'ouverts

Soit E un ensemble. Pour toute partie Σ de $\mathscr{P}(E)$, il existe une unique topologie la plus petite (pour l'inclusion) contenant Σ. C'est l'ensemble $\mathscr{O}$ des unions d'intersections finies d'éléments de Σ. C'est l'intersection de toutes les topologies contenant Σ. On dit que $\mathscr{O}$ est la *topologie engendrée* par Σ, et que Σ est une *prébase* de $\mathscr{O}$.

Preuve. L'intersection de toutes les topologies contenant Σ est une topologie, clairement la plus petite pour l'inclusion. Il est clair que toute topologie contenant Σ contient $\mathscr{O}$. Il suffit donc pour conclure de montrer que $\mathscr{O}$ est une topologie. Ceci découle du fait que $E \in \mathscr{O}$ et de la distributivité

$$\Big(\bigcup_{i\in I} A_i\Big) \cap \Big(\bigcup_{j\in J} B_j\Big) = \bigcup_{i\in I, j\in J} (A_i \cap B_j). \ \square$$

Une *base d'ouverts* d'un espace topologique $(X, \mathscr{O})$ est une partie $\mathscr{B}$ de $\mathscr{O}$ telle que tout ouvert de X soit union d'éléments de $\mathscr{B}$. De manière équivalente, une base d'ouverts de $(X, \mathscr{O})$ est une partie $\mathscr{B}$ de $\mathscr{O}$ telle que

$$\forall\, U \in \mathscr{O},\ \ \forall\, x \in U,\ \ \exists\, V \in \mathscr{B}, \quad x \in V \subset U\ .$$

Un espace topologique est *à base dénombrable d'ouverts* s'il admet une base d'ouverts qui est dénombrable.

Si $f : X \to Y$ est un homéomorphisme, si $\mathscr{B}$ est une prébase (respectivement une base) d'ouverts dans Y, alors $f^{-1}(\mathscr{B})$ est une prébase (respectivement une base) d'ouverts dans X. La propriété « être à base dénombrable d'ouverts » est une propriété invariante par homéomorphisme.

Exemples. (a) L'ensemble des intersections finies d'éléments d'une prébase est une base d'ouverts.

(b) Si (X, d) est un espace métrique, alors $\{B(x, r) \ : \ x \in X, r > 0\}$ est une base d'ouverts de la topologie induite par la distance d, par définition de celle-ci.

(c) Si X est un ensemble muni de topologie définie par une famille de pseudo-distances $(d_\alpha)_{\alpha\in\mathscr{A}}$, alors par définition, cette topologie est la topologie engendrée par l'ensemble des boules ouvertes pour ces pseudo-distances d_α. De plus, l'ensemble des intersections finies $\bigcap_{i=1}^n B_{d_{\alpha_i}}(x, \epsilon)$ de boules ouvertes (de mêmes centre et rayon) pour ces pseudo-distances, où $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathscr{A}$, $x \in X$ et $\epsilon > 0$, est une base d'ouverts de cette topologie.

(d) Un espace vectoriel normé de dimension finie est à base dénombrable d'ouverts : dans $\mathbb{R}^k$, l'ensemble des pavés dyadiques $\prod_{i=1}^d\ ]x_i - r_i, x_i + r_i[$, avec les x_i et $r_i > 0$ de la forme $\frac{n}{2^m}$ avec n, m dans $\mathbb{Z}$, est une base dénombrable d'ouverts ; plus généralement, l'ensemble des boules ouvertes de rayon rationnels et centrées en des points dont toutes les coordonnées dans une base fixée sont rationnelles.

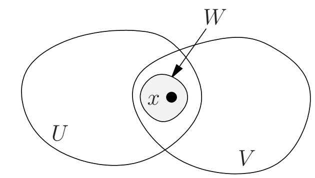
Par définition, tout ensemble de parties d'un ensemble est une prébase de sa topologie engendrée. Mais par contre la propriété « être une base d'ouverts d'une certaine topologie » est une condition non automatique sur les ensembles de parties d'un ensemble.

Proposition 1.4 (Critère pour qu'une prébase soit une base) *Soit E un ensemble. Soit $\mathscr{B}$ une partie de $\mathscr{P}(E)$ telle que $\bigcup \mathscr{B} = E$ et telle que*

$$(*) \quad \forall\, U, V \in \mathscr{B},\ \ \forall\, x \in U \cap V,\ \ \exists\, W \in \mathscr{B}, \quad x \in W \subset U \cap V\ .$$

Alors l'ensemble $\mathscr{O}$ des unions d'éléments de $\mathscr{B}$ est la topologie engendrée par $\mathscr{B}$. particulier, $\mathscr{B}$ est une base d'ouverts de sa topologie engendrée.

Preuve. Il suffit de montrer que $\mathscr{O}$ est une topologie. Comme $E \in \mathscr{O}$ et par la formule de distributivité ci-dessus, il suffit de montrer que l'intersection de deux éléments de $\mathscr{B}$ est union d'éléments de $\mathscr{B}$. Ceci découle de la condition $(*)$. $\square$



En fait, la topologie d'un espace métrique a été construite ainsi au paragraphe 1.2, prenant pour $\mathscr{B}$ l'ensemble des boules ouvertes, et en montrant que $\mathscr{B}$ satisfait au crit ci-dessus pour vérifier que la topologie induite par la distance est bien une topologie en était de même pour la topologie définie par une famille de pseudo-distances (exem (v) du paragraphe 1.2).

Exemple (1) : la droite numérique étendue.

Soient $+\infty$ et $-\infty$ deux ensembles distincts n'appartenant pas à $\mathbb{R}$. L'ensemble des p ties de $\mathbb{R}\cup\{+\infty, -\infty\}$ de la forme $]x-\frac{1}{n}, x+\frac{1}{n}[$ ou $\{-\infty\}\cup\,]-\infty, -n[$ ou $]n, +\infty[\,\cup\{+$ avec $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ est une base d'ouverts pour une topologie sur $\mathbb{R}\cup\{-\infty, +$ Cet ensemble muni de cette topologie est noté $\overline{\mathbb{R}}$.

Exemple (2) : les topologies de Schwartz et de Whitney sur l'espace des for tions lisses à support compact.

Soient $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $r \in \mathbb{N} - \{0\}$ et Ω un ouvert non vide de l'espace euclid usuel $\mathbb{R}^r$. Définissons le *support* d'une application f de Ω dans $\mathbb{K}$ comme le plus petit fer de Ω en dehors duquel f est nulle (i.e. l'intersection de tous les fermés en dehors desqu f est nulle, ou (en renvoyant au paragraphe 1.6 pour la notion d'adhérence) l'adhéren de l'ensemble des points x de Ω tels que $f(x) \neq 0$). En particulier, le support de f fermé. Rappelons qu'un *compact* de $\mathbb{R}^r$ est, pour l'instant, un fermé borné de $\mathbb{R}^r$, et *compact* de Ω un compact de $\mathbb{R}^r$ contenu dans Ω (nous reviendrons bien sûr longueme sur cette notion dans le chapitre 4, nous n'aurons besoin pour l'étude ultérieure de exemple que du fait que tout fermé contenu dans un compact est compact, et que de t recouvrement ouvert d'un compact on peut extraire un sous-recouvrement ouvert fini

Soit $\mathscr{D}(\Omega)$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ des applications de Ω dans $\mathbb{K}$ *lisses* (i.e. de cla C^∞) à support compact dans Ω. Remarquons que $\mathscr{D}(\Omega)$ est la réunion, pour K parcour les compacts de Ω, des sous-espaces vectoriels $\mathscr{D}_K(\Omega)$ des applications dont le supp (compact) est contenu dans K.

Soit $\mathscr{C}^0_{0,+}(\Omega)$ l'ensemble des applications continues de $\overline{\Omega}$ dans $\mathbb{R}$, nulles sur la fronti de Ω et strictement positives dans Ω. Il n'est pas si évident que cela que $\mathscr{C}^0_{0,+}(\Omega)$ est r vide et même non-dénombrable, mais nous verrons dans le paragraphe 1.8 que puisqu complémentaire ${}^c\Omega$ de Ω est fermé, et s'il est non vide (sinon les applications constan strictement positives conviennent), alors pour tout $t > 0$, l'application $x \mapsto t\, d(x, {}^c\Omega)$ $\overline{\Omega}$ dans $\mathbb{R}$ est continue, nulle sur la frontière de Ω et strictement positive dans Ω, do appartient à $\mathscr{C}^0_{0,+}(\Omega)$.

(i) Pour tout f dans $\mathscr{D}(\Omega)$, pour tout ε dans l'ensemble $\mathscr{C}^0_{0,+}(\Omega)$, notons $B_{f,\varepsilon}$ l'ensem des g dans $\mathscr{D}(\Omega)$ tels que

$$|\partial^m f(x) - \partial^m g(x)| < \varepsilon(x)$$

pour tous les x dans Ω et $m \in \mathbb{N}^r$ tels que $|m| \leq \frac{1}{\varepsilon(x)}$.

Proposition 1.5 *L'ensemble $\mathscr{B}$ des $B_{f,\varepsilon}$ pour $f \in \mathscr{D}(\Omega)$ et $\varepsilon \in \mathscr{C}^0_{0,+}(\Omega)$ est une base d'une topologie sur $\mathscr{D}(\Omega)$, appelée la* topologie de Schwartz.

Preuve. Appliquons le critère précédent. Tout d'abord, nous verrons, dans le paragraphe 1.6 suivant, que si $\partial\Omega \neq \emptyset$, alors l'application $\varepsilon_0 : x \mapsto d(x, \partial\Omega)$ est continue, strictement positive sur Ω et nulle sur $\partial\Omega$. Si $\partial\Omega = \emptyset$, posons $\varepsilon_0 : x \mapsto 1$. Alors dans les deux cas, $\varepsilon_0 \in \mathscr{C}^0_{0,+}(\Omega)$. Comme $f \in B_{f,\varepsilon_0}$, l'ensemble $\mathscr{B}$ recouvre $\mathscr{D}(\Omega)$.

Soit $g \in B_{f,\varepsilon} \cap B_{f',\varepsilon'}$. L'application de Ω dans $[0,1[$ définie par

$$x \mapsto \max_{m \in \mathbb{N}^r \,:\, |m| \leq 1/\varepsilon(x)} \frac{|\partial^m f(x) - \partial^m g(x)|}{\varepsilon(x)} ,$$

ainsi que celle obtenue en remplaçant (f, ε) par (f', ε'), est continue, nulle en dehors d'un compact et strictement inférieure à 1, donc est strictement inférieure à η pour un $\eta \in]0,1[$. Soit $\varepsilon'' = (1-\eta)\min\{\varepsilon, \varepsilon'\}$, qui appartient à $\mathscr{C}^0_{0,+}(\Omega)$. Par l'inégalité triangulaire de la valeur absolue, on vérifie que

$$B_{g,\varepsilon''} \subset B_{f,\varepsilon} \cap B_{f',\varepsilon'} ,$$

ce qui permet d'appliquer la proposition 1.4. $\square$

(ii) Pour tout f dans $\mathscr{D}(\Omega)$, pour tout ε dans l'ensemble $\mathscr{C}^0_{0,+}(\Omega)$ et pour tout k dans $\mathbb{N}$, notons $B'_{f,\varepsilon,k}$ l'ensemble des g dans $\mathscr{D}(\Omega)$ tels que, sur Ω,

$$|\partial^m f - \partial^m g| < \varepsilon$$

pour tout $m \in \mathbb{N}^d$ tel que $|m| \leq k$. De même, l'ensemble des $B'_{f,\varepsilon,k}$ pour $f \in \mathscr{D}(\Omega)$, $\varepsilon \in \mathscr{C}^0_{0,+}(\Omega)$ et $k \in \mathbb{N}$, est une base d'une topologie sur $\mathscr{D}(\Omega)$, appelée la *topologie de Whitney*.

Ce genre de topologies (surtout celle de Schwartz) intervient dans la théorie des distributions (voir par exemple [Sch]). Nous reviendrons moultes fois sur cet exemple, qui nous servira d'illustrations pour de nombreuses notions de topologie et d'analyse.

Exemple (3) : la topologie de l'ordre.

Soit $(E, \preceq)$ un ensemble totalement ordonné. La *topologie de l'ordre* est la topologie dont une base d'ouverts est l'ensemble des parties I de E de la forme $I = E$ ou

$$I =]x, y[= \{z \in E \ : \ x \prec z \prec y\} \ \textit{ou}$$

$$I =]-\infty, y[= \{z \in E \ : \ z \prec y\} \ \textit{ou} \ I =]x, +\infty[= \{z \in E \ : \ x \prec z\}$$

pour les x, y dans E (l'ensemble de ces parties vérifie le critère pratique 1.4). Par exemple, il est facile de vérifier que si $\leq$ est l'ordre usuel sur toute partie A de $\mathbb{R}$, alors la topologie de A (induite par la valeur absolue de $\mathbb{R}$) et la topologie de l'ordre pour $\leq$ sur A coïncident. En particulier, les intervalles ouverts de $\mathbb{R}$ sont des ouverts, et les intervalles fermés de $\mathbb{R}$ sont des fermés.

Nous reviendrons sur les propriétés des topologies de l'ordre ultérieurement. Nous donnons ci-dessous quelques définitions sur les bons ordres, qui nous serviront pour construire des exemples d'espaces topologiques plus tard.

Un ordre total sur E est un *bon ordre* si toute partie non vide de E admet un plus petit élément (i.e. $\forall\ A \subset E$, si $A \neq \emptyset$ alors $\exists\ x \in A,\ \forall\ y \in A,\ x \preceq y$). Un ensemble

muni d'un bon ordre est un *ensemble bien ordonné* (par définition, ceci implique qu'il totalement ordonné).

Par exemple, l'ensemble $\mathbb{N}$ muni de son ordre usuel est bien ordonné. Par exemple E, F sont deux ensembles bien ordonnés, alors l'ensemble produit $E \times F$ muni de l'or lexicographique (défini au paragraphe 1.1) est bien ordonné.

Rappelons qu'une application $f : E \to F$ entre deux ensembles ordonnés E, F *prése l'ordre* si pour tous x, y dans E, si $x \preceq y$ alors $f(x) \preceq f(y)$. Deux ensembles ordon sont dit *isomorphes* s'il existe une bijection de l'un dans l'autre préservant l'ordre. relation « être isomorphe à » est une relation d'équivalence. Un *ordinal* est une cla d'isomorphisme d'ensembles bien ordonnés. Comme un *cardinal* est une classe d'équi lence d'ensembles pour la relation « être en bijection », le cardinal d'un ordinal est b défini. Un ordinal est dit *dénombrable* si son cardinal l'est (i.e. si son cardinal est le car nal d'une partie de $\mathbb{N}$). Par un théorème de Zermelo (voir [Kri]), tout ensemble admet bon ordre, et donc il existe un ordinal non dénombrable (voir ci-dessous pour un exem ne dépendant pas de l'axiome du choix).

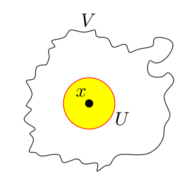
Soit E un ensemble bien ordonné. Un *segment initial* de E est une partie de la for $\{y \in E \ : \ y \prec x\}$ pour un x dans E. Muni de l'ordre induit de celui de E, un segm initial de E est bien ordonné. Soit α, β deux ordinaux, on dit que $\alpha \prec \beta$ si α est isomor à un segment initial de β (ce qui ne dépend pas des choix des représentants). On n $\alpha \preceq \beta$ si $\alpha \prec \beta$ ou $\alpha = \beta$. On montre que tout ensemble d'ordinaux, muni de cet ordre est bien ordonné. En particulier, la classe d'isomorphisme de l'ensemble (qui en est b un) bien ordonné des ordinaux dénombrables est un ordinal non dénombrable, qui es plus petit ordinal non dénombrable.

1.5 Voisinages

Soit X un espace topologique et A une partie de X.

Un *voisinage* de A est une partie de X contenant un ouvert contenant A. On appelle *voisinage* d'un point x de X un voisinage de $\{x\}$.

Un *système fondamental de voisinages* de A (ou du point x si $A = \{x\}$) est un ensemble $\mathscr{P}$ de voisinages de A tels que tout voisinage de A contienne un élément de $\mathscr{P}$.



Cette notion de voisinages permet de reconstruire la topologie. En effet, une par A de X est ouverte si et seulement si elle est voisinage de chacun de ses points, car e est alors égale à la réunion des ouverts qu'elle contient. En particulier, si deux topolog sur un même ensemble ont les mêmes ensembles de voisinages de points, alors elles s égales.

Si $\mathscr{V}(A)$ est l'ensemble des voisinages de A (on note $\mathscr{V}(x)$ si $A = \{x\}$), alors

– toute partie de X contenant un élément de $\mathscr{V}(A)$ appartient à $\mathscr{V}(A)$;
– toute intersection finie d'éléments de $\mathscr{V}(A)$ appartient à $\mathscr{V}(A)$.

(Si A est non vide, ces propriétés sont des propriétés de filtres (voir par exemple [D Bou1]), et on parle du *filtre des voisinages* de A.)

Exemple (0) L'ensemble des voisinages ouverts de A est un système fondamental voisinages de A. L'ensemble des voisinages de A contenus dans un voisinage donné V_0

A est un système fondamental de voisinages de A (car si V est un voisinage de A, alors $V \cap V_0$ est un voisinage de A contenu dans V et dans V_0).

Exemple (1) Soit (X, d) un espace métrique. Pour n'importe quelle suite de réels strictement positifs $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendant vers 0, l'ensemble $\{B(x, r_n) \ : \ n \in \mathbb{N}\}$ est un système fondamental (dénombrable) de voisinages de $x \in X$. En considérant les boules fermées, tout point d'un espace métrique admet un système fondamental de voisinages fermés. Mais ceci n'est pas vrai pour tous les espaces topologiques (voir l'exercice E.11).

Par contre, étant donnée une partie A de X, l'ensemble $\{V_\epsilon(A) \ : \ \epsilon > 0\}$ n'est pas toujours un système fondamental de voisinages de A. Par exemple, si $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x > 0, xy = 1\}$ et $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x, y > 0\}$, alors U est un voisinage ouvert de A qui ne contient aucun $V_\epsilon(A)$. Voir l'exercice E.85 du paragraphe 8.1 pour une condition suffisante sur A pour que $\{V_\epsilon(A) \ : \ \epsilon > 0\}$, ainsi que $\{\overline{V}_\epsilon(A) \ : \ \epsilon > 0\}$, soit un système fondamental de voisinages de A.

De même, soit X un espace topologique dont la topologie est définie par une famille dénombrable de pseudo-distances $(d_\alpha)_{\alpha\in\mathscr{A}}$. Pour tout x dans X, l'ensemble des parties $\bigcap_{\alpha\in\mathscr{A}'} B_\alpha(x, \epsilon)$ de X, où $\epsilon > 0$ et $\mathscr{A}'$ est une partie **finie** de $\mathscr{A}$, est un système fondamental de voisinages de x.

En particulier, tout point d'un espace métrique admet un système fondamental dénombrable de voisinages. De même, tout point d'un espace topologique dont la topologie est définie par une famille dénombrable de pseudo-distances admet un système fondamental dénombrable de voisinages.

Ce fait donne un critère souvent utilisé pour montrer qu'un espace topologique est non métrisable : il suffit d'y exhiber un point qui n'admet pas de système fondamental dénombrable de voisinage.

Exemple (2) En reprenant les notations de l'exemple (2) du paragraphe 1.4, pour tout $f \in \mathscr{D}(\Omega)$ fixé, l'ensemble des $B'_{f,\varepsilon,k}$ pour $\varepsilon \in \mathscr{C}^0_{0,+}(\Omega)$ et $k \in \mathbb{N}$ est un système fondamental (non dénombrable) de voisinages de f pour la topologie de Whitney. De même, pour tout $f \in \mathscr{D}(\Omega)$ fixé, l'ensemble des $B_{f,\varepsilon}$ pour $\varepsilon \in \mathscr{C}^0_{0,+}(\Omega)$ est un système fondamental (non dénombrable) de voisinages de f pour la topologie de Schwartz.

Exercice E.9 *Montrer que les topologies de Whitney et de Schwartz ne sont pas métrisables.*

Le type de construction de topologie comme celle induite par une distance et celle de l'exemple (2) est un moyen très répandu de construire des bases d'ouverts : on se donne, pour tout point x d'un ensemble E, un ensemble E_x de parties de E le contenant, et on montre que la réunion des E_x lorsque x parcourt E vérifie le critère 1.4 pour être une base d'ouverts d'une topologie. Bien souvent (mais bien sûr pas automatiquement, nous laissons au lecteur le soin de donner un critère nécessaire et suffisant pour cela), pour tout x, l'ensemble E_x sera un système fondamental de voisinages de x. Attention, ce n'est pas parce qu'une topologie est construite par la donnée d'un système fondamental non dénombrable de voisinages en chaque point qu'elle n'admet pas de système fondamental dénombrable de voisinages en chaque point (penser déjà au cas des espaces métriques).

Si $f : X \to Y$ est un homéomorphisme et $x \in X$, alors $f(\mathscr{V}(x)) = \mathscr{V}(f(x))$, et l'image par f d'un système fondamental de voisinages de x est un système fondamental de voisinages de $f(x)$.

1.6 Intérieur, adhérence, frontière

Soient X un espace topologique et A une partie de X.

L'*intérieur* de A est l'ensemble, noté $\overset{\circ}{A}$ (ou parfois int(A)), des points de A dont A
un voisinage. L'*adhérence* de A est l'ensemble, noté $\overline{A}$ (ou parfois adh(A)), des points
X dont tout voisinage rencontre A. On note aussi parfois $\overline{A}^{\mathscr{O}}$ pour désigner l'adhére
d'une partie A pour une topologie $\mathscr{O}$, lorsque l'on veut préciser la topologie. La *fronti*
de A est l'ensemble, noté ∂A, des points de X adhérents à A et à son complémentaire

$$\partial A = \overline{A} \cap \overline{{}^cA}\ .$$

Pour tout x dans X, soit $\mathscr{V}_x$ un système fondamental de voisinages de x. Alors
découle des définitions que $x \in \overset{\circ}{A}$ si et seulement s'il existe V dans $\mathscr{V}_x$ tel que $V \subset A$
$x \in \overline{A}$ si et seulement si pour tout V dans $\mathscr{V}_x$, l'intersection $V \cap A$ est non vide.

Les propriétés suivantes se montrent de la même manière que pour les topologies
espaces vectoriels normés, et sont donc laissées en exercices. Les inclusions du sixiè
point ne sont en général pas des égalités, des contre-exemples ayant déjà été vus
prenant des intervalles bien choisis dans l'espace topologique $\mathbb{R}$).

Si A, B sont des parties de X, alors

- L'intérieur de A est la réunion des ouverts contenus dans A, c'est le plus grand (po
l'inclusion) ouvert contenu dans A.
- L'adhérence de A est l'intersection des fermés contenant A, c'est le plus petit (po
l'inclusion) fermé contenant A.
- A est ouvert si et seulement si $A = \overset{\circ}{A}$ (donc $\overset{\circ}{\overset{\circ}{A}} = \overset{\circ}{A}$).
- A est fermé si et seulement si $A = \overline{A}$ (donc $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$).
- $\overset{\circ}{\widehat{A \cap B}} = \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}, \quad \overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$
- $\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} \subset \overset{\circ}{\widehat{A \cup B}}, \quad \overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}.$
- $\partial(A \cup B) \subset \partial A \cup \partial B.$
- $X - \overset{\circ}{A} = \overline{X - A}$ (donc $\overset{\circ}{A} = X - \overline{X - A}$ et $\partial A = \overline{A} - \overset{\circ}{A}$).
- $X - \overline{A} = \overset{\circ}{\widehat{X - A}}$ (donc $\overline{A} = X - \overset{\circ}{\widehat{X - A}}$).
- si $f : X \to Y$ est un homéomorphisme, alors

$$f(\overset{\circ}{A}) = \overset{\circ}{\widehat{f(A)}}\ , \quad f(\overline{A}) = \overline{f(A)}\ , \quad f(\partial A) = \partial(f(A))\ .$$

Soit $\mathscr{B}$ une base d'ouverts de X. Une partie A de X est *dense* dans X si l'une
conditions clairement équivalentes suivantes est vérifiée :

- l'adhérence de A est égale à X,
- la partie A rencontre tout ouvert non vide de X (en au moins un point),
- tout élément non vide de $\mathscr{B}$ contient au moins un point de A,
- l'intérieur du complémentaire de A est vide.

Une partie de X est *nulle part dense* si l'intérieur de son adhérence est vide.

Par exemple, $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$; $\mathbb{R}$ est dense dans l'espace $\overline{\mathbb{R}}$ défini dans l'exem
1 du paragraphe 1.4 ; l'ouvert des matrices inversibles de l'espace vectoriel $\mathscr{M}_d(\mathbb{R})$ (mu
d'une norme matricielle quelconque) est dense dans $\mathscr{M}_d(\mathbb{R})$; $\mathbb{Z}$ (et plus généraleme

tout ensemble infini) est dense dans $\mathbb{A}_1(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ pour la topologie de Zariski définie par l'exemple 4 du paragraphe 1.2 ; $\mathbb{Z}^n$ est Zariski-dense dans $\mathbb{A}_n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^n$.

Exemple. Si X est un espace métrique et si A est une partie de X, alors

$$x \in \overset{\circ}{A} \iff \exists\, \epsilon > 0,\ \ B(x,\epsilon) \subset A\ ,$$

$$x \in \overline{A} \iff \forall\, n \in \mathbb{N},\ \ B(x, \tfrac{1}{n+1}) \cap A \neq \emptyset\ .$$

Autrement dit,

$$x \in \overline{A} \iff d(x,A) = 0\ .$$

En particulier, A est fermé si et seulement si l'ensemble des x dans X tels que $d(x,A) = 0$ est égal à A ; et A est dense dans X si et seulement si pour tout $\epsilon > 0$ et tout x dans X, il existe a dans A tel que $d(x,a) < \epsilon$. Dans un espace métrique X, on a, pour tous les x dans X et $r > 0$,

$$B(x,r) \ \subset\ \overset{\circ}{\overbrace{\overline{B}(x,r)}} \quad \text{et} \quad \overline{B(x,r)}\ \subset\ \overline{B}(x,r)\ .$$

Ces inclusions sont des égalités dans le cas des espaces vectoriels normés, mais sont fausses en général.

Plus généralement, si X est un ensemble muni de la topologie définie par une famille de pseudo-distances $(d_i)_{i\in I}$ (voir l'exemple (v) du paragraphe 1.3), et si A est une partie de X, alors

$$x \in \overset{\circ}{A} \iff \exists\, n \in \mathbb{N}, \exists\, i_0, \dots, i_n \in I,\ \exists\, \epsilon > 0,\ \ \bigcap_{k=0}^{n} B_{d_{i_k}}(x,\epsilon) \subset A\ ,$$

$$x \in \overline{A} \iff \forall\, i \in I,\ \ d_i(x,A) = 0\ .$$

Un espace topologique est *séparable* s'il admet une partie dénombrable dense. La propriété « être séparable » est invariante par homéomorphismes. Par exemple $\mathbb{R}$, et tout espace vectoriel (réel ou complexe) normé de dimension finie, est séparable (car $\mathbb{Q}^n$ est dense dans $\mathbb{R}^n$).

Proposition 1.6 *Un espace topologique à base dénombrable d'ouverts est séparable.*

Preuve. Si $(U_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une base d'ouverts (que l'on peut supposer non vides), si x_i est un point de U_i, alors la partie $\{x_i\ :\ i \in \mathbb{N}\}$ est dense, car elle rencontre tout ouvert non vide. □

De nombreux espaces topologiques, même très gros, sont séparables (voir la partie 6.1). En particulier, pour tout ouvert non vide Ω de $\mathbb{R}^n$ et tout p dans $[1, +\infty[$, l'espace vectoriel normé $\mathbb{L}^p(\Omega)$ est séparable ; par contre, l'espace vectoriel normé $\mathbb{L}^\infty(\Omega)$ n'est pas séparable (voir le cours d'Intégration et probabilité, et [Bre, page 66]).

Exercice E.10 *(1) Montrer qu'un espace métrisable X est séparable si et seulement s'il est à base dénombrable d'ouverts.*

(2) Considérons $\mathscr{B} = \{\ ]a,b]\ :\ a,b \in \mathbb{R},\ a < b\}$.

i) Montrer que $\mathscr{B}$ est une base d'une topologie $\mathscr{O}$ sur $\mathbb{R}$.

ii) Montrer que l'espace topologique $(\mathbb{R}, \mathscr{O})$ est séparable.

iii) Montrer que tout point de l'espace topologique $(\mathbb{R}, \mathscr{O})$ admet un système fondamer dénombrable de voisinages.

iv) Montrer que l'espace topologique $(\mathbb{R}, \mathscr{O})$ n'admet pas de base dénombrable d'ouve

v) Montrer que l'espace topologique $(\mathbb{R}, \mathscr{O})$ n'est pas métrisable.

1.7 Séparation

Un espace topologique X est *séparé* si deux points distincts de X admettent voisinages disjoints. (Les anglophones disent "Hausdorff space" pour espace séparé, et trouve parfois aussi la terminologie « espace T_2 » (voir[Dug, page 138]). On ne confon pas la séparation (propriété d'être séparé) et la séparabilité (propriété d'être séparabl

Les propriétés suivantes sont immédiates.

• Soit X un espace topologique. Pour tout x dans X, soit $\mathscr{V}_x$ un système fondamen de voisinages de x dans X. Alors X est séparé si et seulement si

$$\forall\, x,y \in X,\ \ \exists\, U \in \mathscr{V}_x,\ \ \exists\, V \in \mathscr{V}_y,\quad U \cap V = \emptyset\ .$$

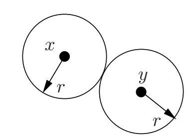
• Dans un espace séparé, les singletons sont fermés (puisque leur complémentaire voisinage de chacun de ses points).

• La topologie grossière sur un ensemble ayant au moins deux éléments n'est séparée.

• La propriété "être séparé" est invariante par homéomorphismes.

Proposition 1.7 *Tout espace topologique métrisable est séparé.*

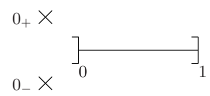
L'espace topologique $(\mathbb{R}, \mathscr{O})$ étudié dans l'exercice E.10 est séparé, mais non métrisa Nous verrons ultérieurement des exemples intéressants d'espaces séparés non métrisab comme l'espace $\mathscr{D}(\mathbb{R})$ des applications lisses à support compact sur $\mathbb{R}$ muni de la topolo de Schwartz (voir l'exemple 3.2 du paragraphe 2.2) ou l'espace topologique produit [0, (voir le paragraphe 2.4).



Preuve. Soient d une distance sur un ensemble X, et x, y deux points de X. Si $x \neq y$, alors $r = \frac{1}{2}d(x,y) > 0$. Si $B(x,r) \cap B(y,r)$ est non vide, soit z un de ses points. Alors $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) < 2r = d(x,y)$, impossible. □

C'est à cause de cette preuve que le second axiome des distances (voir le paragra 1.3) est appelé l'axiome de séparation. La topologie induite par une pseudo-distance (l'exemple (v) du paragraphe 1.3) n'est pas toujours séparée (par exemple la pseu distance (identiquement) nulle sur un ensemble induit la topologie grossière). Il est fa de montrer que la topologie définie par une famille de pseudo-distances est séparée si seulement si cette famille est séparante (voir aussi la proposition 2.1).

Exercice E.11 *Soient $0_-, 0_+$ deux ensembles distincts, n'appartenant pas à $[0,1]$. Soit X l'ensemble $\{0_+\} \cup \{0_-\} \cup]0,1]$. On note $\mathscr{B}(x) = \{]x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}[\ \cap\ ]0,1] \ : \ n \in \mathbb{N} - \{0\}\}$ pour $x \neq 0_\pm$ et $\mathscr{B}(0_\pm) = \{\{0_\pm\} \cup]0, \frac{1}{n}[\ :\ n \in \mathbb{N} - \{0\}\}$. Montrer que $\mathscr{B} = \bigcup_{u \in X} \mathscr{B}(u)$ est une base d'ouverts d'une topologie non séparée sur X. Montrer que 0_+ n'admet pas de système fondamental de voisinages fermés.*



Exercice E.12 *Montrer que tout ouvert de Zariski non vide de $\mathbb{A}^n(\mathbb{R})$ est un ouvert dense de $\mathbb{R}^n$ pour la topologie usuelle de $\mathbb{R}^n$. En déduire que la topologie de Zariski sur $\mathbb{A}^n(\mathbb{R})$ n'est pas séparée pour $n > 0$.*

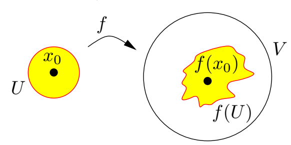
Exercice E.13 *Montrer que la topologie de l'ordre (voir l'exemple (3) du paragraphe 1.4) sur un ensemble totalement ordonné est séparée.*

Le problème de séparation des espaces topologiques sera un problème crucial pour les espaces topologiques quotients (voir la partie 2.6, qui fournira en particulier d'autres exemples d'espaces non séparés). Vérifier leur séparation devra être un réflexe (et ce problème n'est pas toujours trivial).

1.8 Continuité

Soient X et Y deux espaces topologiques, $x_0 \in X$ et $f : X \to Y$ une application.

On dit que f est *continue en* x_0 si, pour tout voisinage V de $f(x_0)$ dans Y, il existe un voisinage U de x_0 dans X tel que $f(U) \subset V$.



Il est immédiat que si Z est un espace topologique et si $g : Y \to Z$ est une application continue en $f(x_0)$, alors $g \circ f : X \to Z$ est continue en x_0 si f l'est.

Soit $\mathscr{U}$ un système fondamental de voisinages de x_0, et $\mathscr{V}$ un système fondamental de voisinages de $f(x_0)$. Alors en utilisant la définition d'un système fondamental de voisinage, il est facile de montrer que f est continue en x_0 si et seulement si pour tout $V \in \mathscr{V}$, il existe $U \in \mathscr{U}$ tel que $f(U) \subset V$. En particulier, on peut remplacer « voisinage » par « voisinage ouvert » dans la définition de la continuité en un point.

Exemple (1) Dans un espace métrique, l'ensemble des boules ouvertes (ainsi que des boules fermées) centrées en un point x de rayons strictement positifs (éventuellement seulement dans une partie de $]0, +\infty[$ s'accumulant sur 0) est un système fondamental de voisinages de x. Donc si Y est un espace métrique, alors f est continue en x_0 si et seulement si pour tout $\epsilon > 0$, il existe un voisinage U de x_0 tel que pour tout y dans U, on ait $d(f(y), f(x_0)) < \epsilon$.

En particulier, si la topologie de X est induite par une distance d et si celle de Y est induite par une distance d', alors f est continue en x_0 si et seulement si

$$\forall\, \epsilon > 0, \ \ \exists\, \eta > 0, \quad d(x, x_0) < \eta \ \ \Rightarrow \ \ d'(f(x), f(x_0)) < \epsilon.$$

Nous pouvons remplacer les deux dernières inégalités strictes par des inégalités larges, et prendre ϵ, η seulement de la forme $r_n > 0, s_n > 0$, où $r_n \to_{n \to +\infty} 0, s_n \to_{n\to+\infty} 0$.

La traduction de cette propriété dans le cas des espaces vectoriels normés est laissée lecteur, qui retrouvera la définition usuelle de la continuité en un point des applicatio entre (parties d')espaces vectoriels normés.

Proposition 1.8 *Soient $\mathscr{B}$ une base d'ouverts de Y, et Σ une prébase de Y (i.e. ensemble de parties de Y engendrant la topologie de Y). Les conditions suivantes s équivalentes :*

(1) pour tout ouvert U de Y, $f^{-1}(U)$ est un ouvert de X ;

(1') pour tout $U \in \mathscr{B}$, $f^{-1}(U)$ est un ouvert de X ;

(1") pour tout $U \in \Sigma$, $f^{-1}(U)$ est un ouvert de X ;

(2) pour tout fermé F de Y, $f^{-1}(F)$ est un fermé de X ;

(3) pour tout $x \in X$, f est continue en x ;

(4) pour tout $A \subset X$, $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.

On dit que f est *continue* si elle vérifie l'une de ces conditions.

Preuve. Il est immédiat que (1) implique (1') qui implique (1") (en prenant pour $\mathscr{B}$ l'e semble des intersections finies d'éléments de Σ, qui est une base d'ouverts). La réciproq découle du fait que tout ouvert de X est union d'intersections finies d'éléments de Σ, que l'image réciproque commute avec la réunion et l'intersection.

L'équivalence des assertions (1) et (2) se montre par passage au complémentaire.

L'équivalence de (1) et (3) découle du fait qu'une partie d'un espace topologique ouverte si et seulement si elle est voisinage de chacun de ses points.

Montrons que (4) implique (2). Soient F un fermé de Y et $A = f^{-1}(F)$. Alors $f(\overline{A})$ $\overline{f(A)} \subset \overline{F} = F$. Donc $\overline{A} \subset A$ et A est fermé.

Montrons que (1) implique (4). Soient $x \in f(\overline{A})$ et V un voisinage ouvert de x. S $y \in \overline{A}$ tel que $f(y) = x$. Alors $f^{-1}(V)$ est un voisinage ouvert de y, donc rencontre donc V rencontre $f(A)$. Par conséquent, $x \in \overline{f(A)}$, et le résultat en découle.

Les propriétés suivantes sont immédiates.

- L'image d'une partie dense de X par une application continue surjective $f : X \to$ est dense dans Y (appliquer (4)).
- Si X est discret, alors f est continue. Si Y est grossier, alors f est continue.
- Si $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$ sont deux applications continues, alors $g \circ f : X \to$ est continue.
- Une bijection $f : X \to Y$ est un homéomorphisme si et seulement si f et f^{-1} s continues.
- Si $\phi : X' \to X$ et $\psi : Y \to Y'$ sont des homéomorphismes, alors $\psi \circ f \circ \phi$ est contin (resp. continue en un point x'_0 de X') si et seulement si f est continue (resp. continue $\phi(x'_0)$).

Pour les premiers exemples d'applications continues, nous renvoyons aux applicatio continues entre (parties d')espaces vectoriels normés. Nous reviendrons plus longueme sur la continuité dans le chapitre 5.

Proposition 1.9 *Soit A une partie d'un espace métrique X. Alors l'application x $d(x, A)$ de X dans $\mathbb{R}$ est continue.*

Preuve. En utilisant l'exemple (1) ci-dessus, ceci découle du fait vu au paragraphe 1.3 que cette application est 1-lipschitzienne, et nous reverrons cela plus généralement dans le paragraphe 5.3. □

Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, avec leur topologie usuelle, si $f, g : X \to \mathbb{K}$ sont deux applications continues, alors les applications $f+g : X \to \mathbb{K}$ définie par $x \mapsto f(x)+g(x)$ et $fg : X \to \mathbb{K}$ définie par $x \mapsto f(x)g(x)$ sont continues. Il y a un moyen « propre » de montrer cela (voir le paragraphe 2.8), mais cela se démontre aisément « à la main » ainsi : pour tout x_0 dans X, pour tout $\epsilon > 0$, soient V, V' deux voisinages de x_0 tels que $|f(x) - f(x_0)| < \frac{\epsilon}{2}$ pour x dans V, et $|g(x) - g(x_0)| < \frac{\epsilon}{2}$ pour x dans V'. Alors pour x dans le voisinage $V \cap V'$ de x_0, on a

$$|(f+g)(x) - (f+g)(x_0)| \leq |f(x) - f(x_0)| + |g(x) - g(x_0)| < \epsilon \;,$$

ce qui montre la continuité de $f+g$. En utilisant qu'une fonction continue sur X à valeurs dans un espace métrique est bornée au voisinage de tout point de X, la continuité du produit se montre de même.

En particulier, comme les applications coordonnées sont continues de $\mathbb{K}^n$ dans $\mathbb{K}$ (par exemple car 1-lipschitziennes i.e. $|x_i - y_i| \leq ||x-y||$ pour tous x, y dans $\mathbb{K}^n$, avec $||\cdot||$ la norme euclidienne ou hermitienne usuelle, et x_i, y_i les i-èmes coordonnées de x, y respectivement), les applications polynomiales de $\mathbb{K}^n$ dans $\mathbb{K}$ sont continues.

Exemple (2) En reprenant les notations de l'exemple (2) du paragraphe 1.4, les translations dans l'espace vectoriel $\mathscr{D}(\Omega)$ sont continues (donc sont des homéomorphismes, car leurs inverses sont aussi des translations), à la fois pour la topologie de Whitney et celle de Schwartz : si $t_g : f \mapsto f+g$ est la translation par $g \in \mathscr{D}(\Omega)$, alors pour tous f, g dans $\mathscr{D}(\Omega)$

$$t_g^{-1}(B'_{f+g,\varepsilon,k}) = B'_{f,\varepsilon,k} \quad \text{et} \quad t_g^{-1}(B_{f+g,\varepsilon}) = B_{f,\varepsilon} \;.$$

Soient X, Y deux espaces topologiques et $f : X \to Y$ une application. On dit que f est *ouverte* si l'image par f de tout ouvert de X est un ouvert de Y. On dit que f est *fermée* si l'image par f de tout fermé de X est un fermé de Y. Donc une application entre deux espaces topologiques est un homéomorphisme si et seulement si c'est une bijection continue fermée, et si et seulement si c'est une bijection continue ouverte.

Exercice E.14 *Soient X et Y deux espaces topologiques, et $f : X \to Y$ une application continue injective. Montrer que si Y est séparé, alors X aussi.*

Le résultat suivant permet d'étendre une application continue, à valeurs réelles, définie sur une partie fermée d'un espace métrique à l'espace tout entier, et donc d'interpoler continuement deux applications continues à valeurs réelles définies sur des fermés disjoints.

Théorème 1.10 (Théorème de prolongement d'Urysohn) *Soient X un espace topologique métrisable, F un fermé non vide de X et $f : F \to \mathbb{R}$ une application continue bornée. Alors il existe une application continue $g : X \to \mathbb{R}$, prolongeant f, de mêmes bornes inférieures et supérieures que f :*

$$\forall\, x \in F,\; g(x) = f(x), \quad \sup_{x \in X} g(x) = \sup_{x \in F} f(x), \quad \inf_{x \in X} g(x) = \inf_{x \in F} f(x) \;.$$

Le fermé F est muni de la topologie induite par la restriction à F d'une distance d … X induisant la topologie de X (voir le paragraphe 2.3 pour éviter de telles contorsion…

Le résultat précédent est valable pour les applications à valeurs dans les espaces … Banach réels, et même dans les espaces vectoriels topologiques réels localement conve… (voir le chapitre 6 pour les définitions de ces notions, et [Dug, page 188] pour une preu… de ce théorème de Dugundji), en remplaçant les deux dernières conditions par le f… que l'image de g soit contenue dans l'enveloppe convexe fermée (voir définition aprè… corollaire 6.16) de l'image de f.

Preuve. Quitte à translater f et g par une constante, nous pouvons supposer que m… $\inf_{x \in F}\ f(x) > 0$. Posons

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in F \\ \inf_{y \in F} f(y) \frac{d(x,y)}{d(x,F)} & \text{sinon}\,, \end{cases}$$

qui est bien définie, car $d(x, F) = 0$ si et seulement si $x \in F$.

Montrons l'égalité des bornes de f et de g. Soit $M = \sup_{x \in F} f(x)$. Pour tout $x \notin F$… tout $\epsilon > 0$, il existe $y \in F$ tel que $d(x, y) \leq d(x, F)(1+\epsilon)$, donc $\sup_{x \in {}^cF} g(x) \leq M(1+$… En faisant tendre ϵ vers 0 et en utilisant le fait que $f = g$ sur F, on obtient que f… g ont la même borne supérieure. Comme $d(x, y) \geq d(x, F)$ pour tout y dans F, o… immédiatement que $\inf_{x \in {}^cF} g(x) \geq m$. En utilisant le fait que $f = g$ sur F, on obti… que f et g ont la même borne inférieure.

Montrons la continuité de g en $x_0 \notin F$. Bien que ${}^cF$ soit ouvert, ceci n'est pas au… matique, car une borne inférieure de fonctions continues n'est pas toujours continue (v… le paragraphe 5.4). Soit $\epsilon \in\,]0, 1[$. Comme $d(x_0, F) > 0$ et par continuité de la distanc… une partie (voir la proposition 1.9), il existe un voisinage U de x_0 et $C > 0$ tels que p… tous x, x' dans U, on ait

$$d(x, F) \geq C \;, \;\; d(x, x') \leq \epsilon \;\text{ et }\; \frac{d(x, F)}{d(x', F)} - 1 \leq \epsilon \;.$$

Notons que $U \subset {}^cF$. Soient x, x' dans U. Choisissons $y \in F$ tel que $f(y)\frac{d(x,y)}{d(x,F)} \leq g(x)$… Par inégalité triangulaire,

$$g(x') \leq f(y)\frac{d(x', y)}{d(x', F)} \leq f(y)\frac{d(x, y) + \epsilon}{d(x', F)} \leq g(x) + \epsilon + (\frac{d(x, F)}{d(x', F)} - 1)(g(x) + \epsilon) + \epsilon\frac{f(y…}{d(x',…}$$
$$\leq g(x) + \epsilon\big(1 + (M+1) + \frac{M}{C}\big) \;.$$

Par échangeabilité de x et de x', et en prenant $x' = x_0$, on en déduit que $|g(x) - g(x_0)|$… $\epsilon\big(2+M+\frac{M}{C}\big)$ pour tout x dans U, donc g est continue en x_0. (Le lecteur savant reconnaî… là un argument d'uniforme continuité, mais nous devrons attendre le paragraphe 5.3 ava… d'employer un tel argument).

Montrons la continuité de g en $x_0 \in F$. Par continuité de f sur F et de la distanc… une partie, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\epsilon' \in\,]0, \min\{1, \epsilon\}]$ et un voisinage U de x_0 tel q… pour tout x dans U, pour tout y dans F tels que $d(x, y) \leq \max\{\epsilon' + \epsilon'^2, \frac{M+1}{m}\epsilon'\}$, on ai…

$$d(x, F) \leq \epsilon' \;, \;\; d(x, x_0) \leq \epsilon' \;\text{ et }\; |f(y) - f(x_0)| \leq \epsilon \;.$$

Soit $x \in U$. Si $x \in F$, alors $|g(x) - g(x_0)| = |f(x) - f(x_0)| \leq \epsilon$. Sinon, soit y dans F… que $d(x, y) \leq d(x, F)(1+\epsilon')$. En particulier, $d(x, y) \leq \epsilon' + \epsilon'^2$. Alors

$$g(x) \leq f(y)\frac{d(x, y)}{d(x, F)} \leq f(y)(1+\epsilon') \leq (f(x_0) + \epsilon)(1+\epsilon') \leq f(x_0) + \epsilon(2+M) \;.$$

Réciproquement, soit $z \in F$ tel que $\inf_{y\in F} f(y)d(x,y) \geq f(z)d(x,z) - \epsilon' d(x,F)$. En particulier, $d(x,z) \leq \frac{1}{f(z)}(f(x_0)d(x,x_0) + \epsilon' d(x,F)) \leq \frac{M+1}{m}\epsilon'$. Alors

$$g(x) \geq f(z)\frac{d(x,z)}{d(x,F)} - \epsilon' \geq f(z) - \epsilon' \geq f(x_0) - \epsilon - \epsilon' \geq f(x_0) - 2\epsilon \ .$$

Ceci montre le résultat. □

Porisme 1.11 [2] *Soient X un espace topologique métrisable, F un fermé de X, et U un ouvert de X contenant F. Alors il existe une application continue de X dans $[0,1]$ valant 1 sur F et valant 0 en dehors de U.*

Preuve. Les parties F et ${}^cU$ sont des fermés de $F \cup {}^cU$ (pour la topologie induite par une distance induisant la topologie de X), par la caractérisation des fermés dans un espace métrique Y ($A \subset Y$ est fermé si et seulement si $A = \{x \in Y \ : \ d(x,A) = 0\}$). Comme $f^{-1}(0) =^c U$ et $f^{-1}(1) = F$, l'application $f : F \cup {}^cU \to [0,1]$ valant 0 sur ${}^cU$ et 1 sur F est donc continue (utiliser la caractérisation (2) de la proposition 1.8). On applique alors le théorème 1.10. □

Ce corollaire 1.11 est valable sur d'autres espaces topologiques que les espaces métriques, mais pas dans tous. Un espace topologique X est dit *normal* s'il est séparé et si deux fermés disjoints de X ont des voisinages disjoints, ou, de manière équivalente, si pour tout fermé F et tout ouvert V tels que $F \subset V$, il existe un ouvert U tel que

$$F \subset U \subset \overline{U} \subset V \ .$$

La propriété « être normal » est invariante par homéomorphismes. Il existe des espaces séparés non normaux (voir par exemple [Dug, page 144]).

Proposition 1.12 *Un espace topologique métrisable est normal.*

Preuve. Soit (X,d) un espace métrique. Soient F et F' deux fermés disjoints, posons $f : x \mapsto d(x,F)$ et $f' : x \mapsto d(x,F')$, qui sont continues par la proposition 1.9. Soient

$$U = \{x \in X \ : \ f(x) < f'(x)\} \quad \text{et} \quad U' = \{x \in X \ : \ f(x) > f'(x)\} \ .$$

Alors U et U' sont ouverts, par continuité de f et f', disjoints, et contiennent respectivement F et F', car f et f' ne s'annulent que sur les fermés F et F' respectivement. □

Le corollaire 1.11 du théorème 1.10 est vrai plus généralement pour les espaces normaux, comme le montre le résultat suivant.

Théorème 1.13 (Lemme d'Urysohn) *Soient X un espace topologique normal, et F et F' des fermés disjoints de X. Alors il existe une application continue $f : X \to [0,1]$ telle que $f(x) = 0$ pour tout x dans F et $f(x') = 1$ pour tout x' dans F'.*

[2] du grec $\pi\acute{o}\rho\iota\sigma\mu\alpha$, corollaire, voir par exemple les Éléments d'Euclide.

Cette propriété donne en fait une caractérisation des espace normaux : un esp
topologique séparé X est normal si et seulement si pour deux fermés disjoints quelconq
de X, il existe une application continue de X dans $[0,1]$, valant 0 sur l'un des fermés
1 sur l'autre (voir par exemple [Dug, page 146]).

Preuve. Notons $D_n = \{\frac{k}{2^n} \ : \ 0 \leq k \leq 2^n\}$, de sorte que la réunion croissante D
$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_n$ soit l'ensemble des nombre dyadiques de $[0,1]$. Par récurrence, construisons u
famille d'ouverts $(U_s)_{s\in D}$ de X tels que si $s < t$ sont dans D, alors

$$F \subset U_s \subset \overline{U_s} \subset U_t \subset \overline{U_t} \subset X - F' \ .$$

Puisque X est normal et F est un fermé contenu dans l'ouvert $X - F'$, il existe
ouvert U_0 tel que $F \subset U_0 \subset \overline{U_0} \subset X - F'$. De même, il existe un ouvert U_1 tel q
$\overline{U_0} \subset U_1 \subset \overline{U_1} \subset X - F'$.

Supposons que $(U_t)_{t\in D_n}$ soient construits, et soit $s \in D_{n+1} - D_n$. Alors il existe s_-,
deux éléments consécutifs de D_n tels que $s = \frac{s_1+s_2}{2}$. Soit U_s un ouvert de X tel q
$\overline{U_{s_-}} \subset U_s \subset \overline{U_s} \subset U_{s_+}$. Ceci conclut à l'existence de $(U_s)_{s\in D}$.

Maintenant, notons f l'application de X dans $[0,1]$ définie par $f(x) = 1$ si $x \in {}^c$
et sinon

$$f(x) = \inf\{s \in D \ : \ x \in U_s\} \ .$$

En particulier, $f(x) = 1$ si $x \in F'$ et $f(x) = 0$ si $x \in F$. Il n'est pas difficile de véri
que f est continue, ce qui démontre le résultat.

1.9 Connexité et connexité par arcs

Un espace topologique X est *connexe* si l'une des propriétés équivalentes suivantes
vérifiée :

(1) Les seules parties ouvertes et fermées de X sont $\emptyset, X$.

(2) Il n'existe pas de partition de X en deux ouverts non vides.

(3) Il n'existe pas de partition de X en deux fermés non vides.

(4) Toute application continue de X à valeurs dans un espace discret est constante.

(5) Toute application continue de X à valeurs dans l'espace discret $\{0,1\}$ est constan

L'équivalence est immédiate : en utilisant les complémentaires, les trois premiè
propriétés sont équivalentes. De plus (4) implique (5), qui implique (2), car une applicat
valant 0 sur un ouvert non vide et 1 sur un ouvert non vide complémentaire est contin
Enfin, (1) implique (4), car l'image réciproque d'un point d'un espace discret par u
application continue f est une partie non vide à la fois fermée et ouverte.

Méthodologie : Un argument de connexité permet souvent de vérifier que tout po
d'un espace topologique X vérifie une propriété donnée (P) : si X est connexe, et
l'ensemble des points de X qui vérifie la propriété (P) est non vide, fermé et ouvert, al
il est égal à X.

Exemples.

• Les intervalles de $\mathbb{R}$ sont connexes (si U et V sont deux ouverts non vides disjoi
de réunion un intervalle I, alors la borne inférieure ou la borne supérieure d'un interva
maximal contenu dans U n'appartient pas à I).

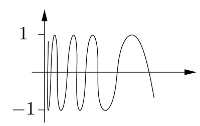
• Si $f : X \to Y$ est une application continue surjective, et si X est connexe, alors Y l'est (par composition d'applications continues et la propriété (5) ci-dessus).

Un espace topologique X est *connexe par arcs* si pour tous x, y dans X, il existe un *chemin* (continu) de x à y, i.e. une application continue $f : [0,1] \to X$ telle que $f(0) = x, f(1) = y$.

Par exemple, les convexes de $\mathbb{R}^n$ et des espaces vectoriels normés E sont connexes par arcs, car, pour tous x, y dans E, l'application $f : t \mapsto tx + (1-t)y$ est continue (et même lipschitzienne, voir la partie 5.3) : $||f(t) - f(s)|| \leq |t-s|(||x|| + ||y||)$.

Un espace connexe par arcs est connexe (utiliser la propriété (5), la composition d'applications continues et la connexité des intervalles).

Exemple. Par exemple, l'adhérence dans $\mathbb{R}^2$ du graphe de la fonction $x \mapsto \sin\frac{1}{x}$, définie sur $]\,0, +\infty[$, est connexe, mais n'est pas connexe par arcs (nous montrerons ces deux affirmations plus tard, mais il est important de garder cet exemple en tête).



Nous reviendrons plus longuement sur la connexité et connexité par arcs dans le paragraphe 2.3.

1.10 Indications pour la résolution des exercices

Schème [3] **E.2** (1) Si $d(x,z) < d(z,y)$, alors

$$d(x,y) \leq \max\{d(x,z), d(z,y)\} = d(z,y) \leq \max\{d(x,z), d(x,y)\} = d(x,y)\ .$$

(2) et (3) Il découle de l'inégalité triangulaire ultramétrique que

$$\forall\, x,y \in E,\ \forall\, r > 0, \quad d(x,y) < r \implies B(x,r) = B(y,r)\ ,$$

$$\forall\, x,y \in E,\ \forall\, r > 0, \quad d(x,y) \leq r \implies \overline{B}(x,r) = \overline{B}(y,r)\ ,$$

et

$$\forall\, x,y \in E,\ \forall\, r > 0, \quad d(x,y) < r \implies S(x,r) = S(y,r)\ .$$

Schème E.3 Nous ne traitons que le cas des voisinages ouverts (dont le cas des boules ouvertes est un cas particulier). Soit $r > 0$ et A une partie d'un espace métrique X. Soit $y \in V_r(A)$, et $\epsilon = r - d(y,A) > 0$. Par inégalité triangulaire, pour tout z dans X, on a $d(z,A) \leq d(z,y) + d(y,A)$. Donc $B(y,\epsilon) \subset V_r(A)$, ce qui montre le résultat.

Schème E.6 (1) Le fait que δ, δ' et δ'' soient des distances découle des remarques dans l'exemple (v). Le fait qu'elles soient topologiquement équivalentes découlera du fait qu'elles induisent toutes la même topologie. Montrons que la topologie $\mathscr{O}''$ induite par δ'' est égale à la topologie $\mathscr{O}_*$ définie par la famille de pseudo-distances $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Les deux autres vérifications sont semblables, et laissées au lecteur.

Soit $M > 0$ la somme de la série $\sum a_n$. Pour tout $\epsilon > 0$, soit N tel que $\sum_{n=N+1}^{+\infty} a_n \leq \frac{\epsilon}{2}$. Alors pour tout x dans E, la boule $B_{\delta''}(x,\epsilon)$ contient l'intersection $\bigcap_{n=0}^{N} B_{d_n}(x, \frac{\epsilon}{2M})$, donc par la définition des ouverts pour $\mathscr{O}''$ et pour $\mathscr{O}_*$, tout ouvert de $\mathscr{O}''$ est un ouvert de $\mathscr{O}_*$.

[3] n.m. (gr. $\sigma\chi\eta\mu\alpha$). Structure d'ensemble d'un processus.

Réciproquement, pour tout N dans $\mathbb{N}$, pour tout $\epsilon \in\,]0,1[$, pour tout x dans E, soi
$b = \min_{0\leq n\leq N}\ a_n > 0$ et $y \in E$ tels que $\delta''(x,y) < b\,\epsilon$. Alors pour tout n dans $\{0,\ldots,N$
nous avons $a_n \min\{1, d_n(x,y)\} < b\,\epsilon$, ce qui implique que $d_n(x,y) < \epsilon$. Donc $\bigcap_{n=0}^{N} B_{d_n}(x$
contient $B_{\delta''}(x, b\epsilon)$. Par conséquent, par la définition des ouverts pour $\mathscr{O}''$ et pour $\mathscr{O}_*$, to
ouvert de $\mathscr{O}_*$ est un ouvert de $\mathscr{O}''$. D'où $\mathscr{O}'' = \mathscr{O}_*$.

(2) L'application δ est bien une distance, toujours par les remarques dans l'exem
(v).

Soit $E = [0,1]^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $[0,1]$. Si $x = (x_i)_{i\in\mathbb{N}}$
$y = (y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ sont deux éléments de E, alors pour tout i dans $\mathbb{N}$, on note $d_i(x,y) = |x_i -$
Il est immédiat que $(d_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une famille séparante de pseudo-distances sur E. Note
0 la suite constante nulle de E. Pour tout n dans $\mathbb{N}$, notons $x_n = (x_{n,i})_{i\in\mathbb{N}}$ l'élément de
défini par

$$x_{n,i} = \begin{cases} \frac{1}{n+1} & \text{si } i \leq n \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors $\delta(0, x_n) = 1$ et on montre facilement que $\delta'(0, x_n)$ converge vers 0 quand n tend v
$+\infty$, ce qui montre le résultat.

Schème E.9 Montrons que la fonction nulle 0 de $\mathscr{D}(\Omega)$ n'admet pas de système fo
damental dénombrable de voisinages (à la fois pour la topologie de Whitney et celle
Schwartz), ce qui implique le résultat. Comme pour tous $\varepsilon \in \mathscr{C}^0_{0,+}(\Omega)$ et $k \in \mathbb{N}$,

$$B_{0,\min\{\varepsilon,\frac{1}{k}\}} \subset B'_{0,\varepsilon,k}\ ,$$

il suffit de considérer la topologie de Schwartz. Supposons par l'absurde qu'il existe un s
tème fondamental dénombrable de voisinages $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de 0 pour la topologie de Schwar
Soit $\varepsilon_n \in \mathscr{C}^0_{0,+}(\Omega)$ tel que B_{0,ε_n} soit contenu dans V_n. En particulier, pour tout x da
Ω, la suite $\varepsilon_n(x)$ converge vers 0. Nous allons construire une application $\varepsilon \in \mathscr{C}^0_{0,+}(\Omega)$
tend vers 0 quand on se rapproche du bord de Ω plus vite que n'importe quel ε_n.

Soit $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de compacts de Ω tels que $K_n \subset \overset{\circ}{K}_{n+1}$ (par exemple

$$K_n = \big\{x \in \mathbb{R}^r\ :\ d(x, {}^c\Omega) \geq \frac{1}{n+1},\ \ d(x,0) \leq n\big\}\ ,$$

où d est la distance euclidienne usuelle sur $\mathbb{R}^n$). En particulier, les frontières ∂K_n sont
compacts deux à deux disjoints de $\mathbb{R}^r$, non vides si n est assez grand, ce que l'on suppo
quitte à extraire. Soit $\varepsilon : \Omega \to\,]0,+\infty[$ qui, pour tout n dans $\mathbb{N}$ coïncide avec $\frac{1}{2}\varepsilon_n$ sur
fermé ∂K_n, et qui est prolongé continuement par le théorème de prolongement d'Uryso
1.10 sur l'ouvert $A_n = \overset{\circ}{K}_{n+1} - K_n$, de sorte que

$$\sup_{y\in\overline{A_n}} \varepsilon(y) = \max\{\sup_{y\in\partial K_n} \varepsilon_n(y),\ \sup_{y\in\partial K_{n+1}} \varepsilon_{n+1}(y)\}\ ,$$

et

$$\inf_{y\in\overline{A_n}} \varepsilon(y) = \min\{\inf_{y\in\partial K_n} \varepsilon_n(y),\ \inf_{y\in\partial K_{n+1}} \varepsilon_{n+1}(y)\}\ .$$

En particulier, ε est continue et strictement positive sur Ω, et se prolonge continueme
par 0 sur $\partial\Omega$: on peut utiliser que ε est continue sur chaque $\overline{A_n}$, puis utiliser les résultats
recollement d'applications continues (la proposition 2.3 et l'exercice E.15) du paragrap
2.3 dans le chapitre suivant.

Maintenant, $B_{0,\varepsilon}$ est un voisinage ouvert de 0 pour la topologie de Schwartz, qui ne contient aucun B_{0,ε_n} (car on construit aisément un élément de $B_{0,\varepsilon_n} - B_{0,\varepsilon}$), donc aucun V_n. Ceci contredit le fait que $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit un système fondamental de voisinages de 0 pour la topologie de Schwartz.

Schème E.10 (1) Si $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une suite dense dans X, montrons que

$$\{B(x_i, r)\ :\ i \in \mathbb{N},\ r \in \mathbb{Q},\ r > 0\}\ ,$$

qui est une famille dénombrable d'ouverts de X, est une base d'ouverts de X. Pour tout ouvert U de X et tout x dans U, soit $r \in \mathbb{Q}$ tel que $r > 0$ et $B(x,r) \subset U$. Par densité, soit $i \in \mathbb{N}$ tel que $x_i \in B(x, \frac{r}{2})$. Alors par l'inégalité triangulaire

$$x \in B(x_i, \frac{r}{2}) \subset B(x,r) \subset U\ ,$$

ce qui montre le résultat, par la proposition 1.6.

(2) i) On utilise le critère (*) de la proposition 1.4. Il est immédiat que $\mathbb{R}$ est égal à $\bigcup_{a,b\in\mathbb{R},\ a<b}\,]a,b]$, et le résultat découle alors du fait que $\mathscr{B}\cup\{\emptyset\}$ est stable par intersection de deux éléments : si $x \in\,]a,b]\cap\,]a',b']$, alors

$$x \in\,]\max\{a,a'\}, \min\{b,b'\}\,] = \,]a,b]\cap\,]a',b']\ .$$

ii) La partie $\mathbb{Q}$ est encore dense dans $(\mathbb{R},\mathscr{O})$, car elle rencontre tout élément de $\mathscr{B}$.

iii) Pour tout b dans $\mathbb{R}$, l'ensemble $\{\ ]b-\frac{1}{n+1}, b]\ :\ n \in \mathbb{N}\,\}$ est un système fondamental dénombrable de voisinages de b.

iv) Si $(\mathbb{R},\mathscr{O})$ admet une base dénombrable d'ouverts non vides $\mathscr{B}' = \{\,U_n\ :\ n\in\mathbb{N}\}$, si $U_n = \bigcup_{i\in I_n}\,]a_i,b_i]$, et si $b \notin \{\sup_{i\in I_n} b_i\ :\ n\in\mathbb{N}\}$, alors $]b-1,b\,]$ n'est pas union d'éléments de $\mathscr{B}'$, ce qui contredit le fait que $]b-1,b\,]$ soit ouvert.

v) Ceci découle de (1) et iv).

Schème E.11 Tout d'abord, la réunion des éléments de $\mathscr{B}$ est égale à X. Soient B et B' deux éléments de $\mathscr{B}$, et $y \in B\cap B'$. On vérifie aisément, en considérant six cas possibles, que $B\cap B'$ contient un élément B'' de $\mathscr{B}$ contenant y. Par le critère (*) de la proposition 1.4, l'ensemble $\mathscr{B}$ est donc bien une base d'ouverts.

De plus, $\mathscr{B}(0_\pm)$ est un système fondamental de voisinages de $0_\pm$. Comme tout élément de $\mathscr{B}(0_-)$ rencontre tout élément de $\mathscr{B}(0_+)$, l'espace topologique X n'est donc pas séparé.

Schème E.12 Tout fermé de Zariski est, par définition de la forme $F = \bigcap_{i\in I} P_i^{-1}(0)$ où $(P_i)_{i\in I}$ est une famille de polynômes réels à n variables. Comme un polynôme est continu, et une intersection de fermés est fermée, F est donc un fermé de la topologie usuelle de $\mathbb{R}^n$.

Supposons que F ne soit pas égal à $\mathbb{R}^n$, et montrons que son complémentaire est dense. Soit $x = (x_1,\dots,x_n)$ un élément de $\mathbb{R}^n$. Comme $F \neq \mathbb{R}^n$, il existe i dans I et une droite affine D passant par x telle que P_i ne soit pas identiquement nul sur D. Soit $(y_1,\dots,y_n)$ un vecteur directeur de D. Alors $P_i(Xy_1+x_1,\dots,Xy_n+x_n)$ est un polynôme non nul à coefficients réels en une variable, donc n'ayant qu'un nombre fini de racines $t_1,\dots,t_k$. Si t est un réel suffisament proche de 0 et différent de $t_1,\dots,t_k$, alors le point $(ty_1+x_1,\dots,ty_n+x_n)$ de $\mathbb{R}^n$ est proche de x, et n'annule pas P_i, donc n'appartient pas à F, ce qui montre le résultat.

On conclut en remarquant que deux ouverts denses d'un espace topologique non v
ont une intersection non vide.

Schème E.13 Soient $(E,\preceq)$ un ensemble totalement ordonné, et x,y deux points d
tincts de E. Supposons par exemple que $x \prec y$. S'il existe z dans E tel que $x \prec z \prec$
alors $U = \{t\in E\ :\ t\prec z\}$ et $U' = \{t\in E\ :\ z\prec t\}$ sont des voisinages ouverts disjoi
de x et y respectivement, pour la topologie de l'ordre. Sinon, $U = \{t\in E\ :\ t\prec y\}$
$U' = \{t\in E\ :\ x\prec t\}$ sont des voisinages ouverts disjoints de x et y respectivement, p
la topologie de l'ordre.

Schème E.14 Soient $x\neq y$ dans X. Alors $f(x)\neq f(y)$, donc il existe des voisina
ouverts disjoints U et V de $f(x)$ et $f(y)$ respectivement. Mézalor $f^{-1}(U)$ et $f^{-1}(V)$ s
des voisinages ouverts disjoints de x et y respectivement, par continuité de f.

2 Constructions de topologies

Les références recommandées sont [Bou1, Dix, Dug], ainsi que [Bre] pour le paragraphe 2.8.

2.1 Comparaison de topologies

Soit E un ensemble. Une topologie $\mathscr{O}_1$ sur E est *moins fine* qu'une topologie $\mathscr{O}_2$ sur E si $\mathscr{O}_1$ est contenue dans $\mathscr{O}_2$, et *plus fine* si $\mathscr{O}_1$ contient $\mathscr{O}_2$. (Un moyen mnémotechnique pour se souvenir de cette définition est de retenir qu'être plus fine signifie « avoir plus d'ouverts ».) La relation « être moins fine que » est une relation d'ordre sur l'ensemble des topologies de E, qui (voir le premier exemple ci-dessous) admet un plus petit et un plus grand élément.

Soient $\mathscr{O}_1, \mathscr{O}_2$ deux topologies sur X et, pour tout x dans X, soient $\mathscr{V}_1(x)$ et $\mathscr{V}_2(x)$ deux systèmes fondamentaux de voisinages de x pour respectivement $\mathscr{O}_1$ et $\mathscr{O}_2$. Il est immédiat de montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

– $\mathscr{O}_1$ est plus fine que $\mathscr{O}_2$;
– tout fermé pour $\mathscr{O}_2$ est fermé pour $\mathscr{O}_1$;
– l'application identique $(E, \mathscr{O}_1) \to (E, \mathscr{O}_2)$ est continue ;
– pour tout x de E, tout voisinage de x pour $\mathscr{O}_2$ est voisinage de x pour $\mathscr{O}_1$;
– pour tout x de E, tout élément de $\mathscr{V}_2(x)$ contient un élément de $\mathscr{V}_1(x)$.

Cette dernière propriété est souvent utile pour montrer que deux topologies coïncident : il suffit en effet de montrer que l'une est plus fine que l'autre, et réciproquement, par exemple en utilisant deux fois la dernière propriété ci-dessus.

Exemples. • La topologie grossière est la topologie la moins fine sur E, et la topologie discrète est la topologie la plus fine sur E.

• Si $n \geq 1$, la topologie usuelle sur $\mathbb{R}^n$ (i.e. celle induite par la distance euclidienne) est plus fine que la topologie de Zariski sur $\mathbb{A}_n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^n$ (et de même en remplaçant $\mathbb{R}$ par $\mathbb{C}$). En effet, tout fermé de Zariski de $\mathbb{R}^n$ est l'intersection des ensembles des zéros d'une famille d'applications polynomiales, donc continues. Donc tout fermé de Zariski est un fermé de la topologie usuelle de $\mathbb{R}^n$.

• La topologie induite par la distance SNCF sur $\mathbb{R}^2$ (voir l'exemple (vi) du paragraphe 1.3) est strictement plus fine que la topologie usuelle sur $\mathbb{R}^2$ (c'est un exercice).

• En reprenant les notations de l'exemple (2) du paragraphe 1.4, pour tout ouvert non vide Ω de l'espace euclidien usuel $\mathbb{R}^n$, la topologie de Schwartz sur $\mathscr{D}(\Omega)$ est plus fine que la topologie de Whitney sur $\mathscr{D}(\Omega)$. En effet, pour tout voisinage $B'_{f,\varepsilon,k}$ de $f \in \mathscr{D}(\Omega)$ pour la topologie de Whitney, si $\varepsilon' = \inf\{\varepsilon, \frac{1}{k}\}$, alors $\varepsilon' \in \mathscr{C}^0_{0,+}(\Omega)$ et $B'_{f,\varepsilon,k}$ contient le voisinage $B_{f,\varepsilon'}$ de f pour la topologie de Schwartz.

Les propriétés suivantes sont évidentes, juste un peu de gymnastique intellectuelle. Soit $\mathscr{O}_1$ une topologie sur E plus fine qu'une topologie $\mathscr{O}_2$.

• (Toute topologie plus fine qu'une topologie séparée l'est encore.) Si $\mathscr{O}_2$ est séparée, alors $\mathscr{O}_1$ aussi : deux ouverts disjoints pour $\mathscr{O}_2$ sont encore deux ouverts disjoints pour $\mathscr{O}_1$.

• (Toute topologie moins fine qu'une topologie séparable l'est encore.) Si $\mathscr{O}_1$ est séparable, alors $\mathscr{O}_2$ aussi : comme $\mathscr{O}_2 \subset \mathscr{O}_1$, une partie de E qui rencontre tout ouvert non vide de $\mathscr{O}_1$ rencontre aussi tout ouvert non vide de $\mathscr{O}_2$.

• Pour toute partie A de E, l'intérieur de A pour $\mathscr{O}_2$ est contenu dans l'intérieur A pour $\mathscr{O}_1$, et l'adhérence de A pour $\mathscr{O}_1$ est contenue dans l'adhérence de A pour $\mathscr{O}_2$ (l'intérieur d'une partie est le plus grand ouvert contenu dans une partie et son adhérer est le plus petit fermé la contenant).

• Si une application $f : X \to Y$ entre deux espaces topologiques est continue, al elle est encore continue pour toute topologie plus fine sur X et pour toute topologie mo fine sur Y.

En analyse fonctionnelle, il est souvent intéressant de travailler avec des topologies moins fines possibles, car si une topologie a moins d'ouverts, elle possède par contre p de compacts (voir le chapitre 4), et les phénomènes de compacité jouent un rôle importa en analyse.

Rappelons que l'intersection d'une famille de topologies est encore une topologie. Éta donné une propriété $\mathscr{P}$ sur les topologies de E, qui est stable par l'intersection d'u famille (quelconque) de topologies de E, il existe donc une topologie *la moins fine* vérifia la propriété $\mathscr{P}$: c'est l'intersection de toutes les topologies sur E vérifiant la propri $\mathscr{P}$.

Comme on ne peut remplacer intersection par union ci-dessus, cela explique po quoi les topologies initiales (par exemple produit) définies ci-dessous sont plus facile comprendre que les topologies finales (par exemple quotient) définies au paragraphe 2

2.2 Topologie initiale

Soit X un ensemble, soit $(Y_i)_{i\in I}$ une famille d'espaces topologiques et pour tout $i \in$ soit $f_i : X \to Y_i$ une application. La *topologie initiale* sur X définie par $(f_i)_{i\in I}$ est topologie la moins fine rendant continues les applications f_i pour $i \in I$. Celle-ci exis car l'intersection d'une famille de topologies sur X, rendant toutes les applications continues, rend encore toutes les f_i continues.

Les propriétés suivantes sont immédiates.

• C'est la topologie engendrée par $\{f_i^{-1}(U_i) \ : \ i \in I,\ U_i$ ouvert de $Y_i\}$. Dans le particulier où I est un singleton, nous pouvons omettre les mots "engendrée par" : topologie initiale est l'ensemble des images réciproques des ouverts de l'espace d'arri par l'unique élément de la famille.

• Si $\mathscr{B}_i$ est une base d'ouverts de Y_i pour tout $i \in I$, alors l'ensemble des intersectio finies d'éléments de $\{f_i^{-1}(U_i) \ : \ i \in I,\ U_i \in \mathscr{B}_i\}$ est une base d'ouverts de X.

En particulier, si I est dénombrable, et si Y_i est à base dénombrable pour tout $i \in$ alors X est à base dénombrable.

• Si $x \in X$ et $\mathscr{V}_i$ est un système fondamental de voisinages de $f_i(x)$ dans Y_i pour to $i \in I$, alors l'ensemble des intersections finies d'éléments de $\{f_i^{-1}(V_i) \ : \ i \in I,\ V_i \in$ est un système fondamental de voisinages de x dans X.

• Si Z est un espace topologique et si $g : Z \to X$ est une application, alors g continue si et seulement si chacune des applications $f_i \circ g$ est continue.

En effet, si g est continue, alors $f_i \circ g$ l'est par composition d'applications continu Réciproquement, comme les $f_i^{-1}(U_i)$, où $i \in I$ et U_i est un ouvert de Y_i, engendrent topologie de X, pour montrer que g est continue, il suffit de montrer que les $g^{-1}(f_i^{-1}(U$ sont des ouverts de Z. Or $g^{-1}(f_i^{-1}(U_i)) = (f_i \circ g)^{-1}(U_i)$, ce qui montre le sens réciproq

Exemple 1 : Topologie image réciproque Comme nous l'avons définie dans le ragraphe 1.2, si X est un ensemble, si $(Y, \mathscr{O})$ est un espace topologique et si $f : X \to$

est une application, alors la topologie image réciproque $f^{-1}(\mathscr{O})$ est (par exemple par le premier point ci-dessus) la topologie initiale sur X définie par (la famille réduite à une seule application) f.

Exemple 2 : Topologie définie par une famille de pseudo-distances. Soit X un espace topologique dont la topologie est définie par une famille de pseudo-distances $(d_i)_{i\in I}$ (voir l'exemple (v) du paragraphe 1.3). Alors cette topologie $\mathscr{O}_1$ coïncide avec la topologie initiale $\mathscr{O}_2$ sur X définie par la famille d'applications $\big(f_{\alpha,x_0} : x \mapsto d_\alpha(x, x_0)\big)_{x_0\in X,\, \alpha\in\mathscr{A}}$ de X dans $[0, +\infty[$, c'est-à-dire la topologie la moins fine rendant continue les applications pseudo-distances à un point.

En effet, comme la pseudo-boule $B_\alpha(x_0, \epsilon)$ est égale à ${f_{\alpha,x_0}}^{-1}([0, \epsilon[)$, la topologie $\mathscr{O}_1$ est moins fine que $\mathscr{O}_2$.

Réciproquement, soient $x_0 \in X$, $t_0 \in \mathbb{R}$, $\epsilon > 0$, $x \in {f_{\alpha,x_0}}^{-1}(]t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon[)$, et $\epsilon' = \epsilon - |d_\alpha(x, x_0) - t_0|$. Alors $\epsilon' > 0$ par définition de x. De plus, $B_\alpha(x, \epsilon')$ est contenue dans ${f_{\alpha,x_0}}^{-1}(]t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon[)$, car si $y \in B_\alpha(x, \epsilon')$, alors

$$\begin{aligned} |d_\alpha(y, x_0) - t_0| &\leq |d_\alpha(y, x_0) - d_\alpha(x, x_0)| + |d_\alpha(x, x_0) - t_0| \\ &\leq d_\alpha(x, y) + |d_\alpha(x, x_0) - t_0| \\ &< \epsilon' + |d_\alpha(x, x_0) - t_0| = \epsilon\ . \end{aligned}$$

Donc ${f_{\alpha,x_0}}^{-1}(]t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon[)$ est un voisinage pour $\mathscr{O}_1$ de chacun de ses points. Comme l'ensemble des ${f_{\alpha,x_0}}^{-1}(]t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon[)$ pour $x_0 \in X$, $t_0 \in \mathbb{R}$ et $\epsilon > 0$ est une prébase d'ouverts de $\mathscr{O}_2$ par la seconde propriété ci-dessus, la topologie $\mathscr{O}_2$ est moins fine que $\mathscr{O}_1$, et les deux topologies coïncident.

En particulier, la topologie d'un espace métrique (X, d) est la topologie initiale définie par la famille d'applications $\big(x \mapsto d(x, x_0)\big)_{x_0\in X}$ de X dans $\mathbb{R}$, c'est-à-dire la topologie la moins fine rendant continues les applications de distance à un point.

Exemple 3 : Topologie définie par une famille de semi-normes. Soient E un espace vectoriel réel ou complexe, et $(||\cdot||_\alpha)_{\alpha\in\mathscr{A}}$ une famille de semi-normes sur E. La *topologie définie par la famille* $(||\cdot||_\alpha)_{\alpha\in\mathscr{A}}$ sur E est la topologie initiale définie par la famille d'applications $\big(f_{\alpha,x_0} : x \mapsto ||x - x_0||_\alpha\big)_{x_0\in E,\, \alpha\in\mathscr{A}}$ de E dans $[0, +\infty[$, c'est-à-dire la topologie la moins fine rendant continue ces applications.

La topologie définie par $(||\cdot||_\alpha)_{\alpha\in\mathscr{A}}$ est exactement la topologie de E définie par la famille de pseudo-distances $d_\alpha(x, y) = ||x - y||_\alpha$ par ce qui précède. En particulier, elle est engendrée par les pseudo-boules

$$B_\alpha(x_0, \epsilon) = \{x \in E\ :\ ||x - x_0||_\alpha < \epsilon\}$$

où $x_0 \in E$, $\epsilon > 0$ et $\alpha \in \mathscr{A}$. Donc elle a pour base d'ouverts les intersections finies de telles boules. De plus (voir l'exemple (1) du paragraphe 1.5), l'ensemble des parties $\bigcap_{\alpha\in\mathscr{A}'}\{x \in E\ :\ ||x - x_0||_\alpha < \epsilon\}$ de E, où $\epsilon > 0$ et $\mathscr{A}'$ est une partie finie de $\mathscr{A}$, est un système fondamental de voisinages d'un point donné $x_0 \in E$.

Notons que les translations sont des homéomorphismes : pour tout v_0 dans E, l'application t_{v_0} de E dans E définie par $x \mapsto x + v_0$ est bijective, d'inverse t_{-v_0}, et elle est continue, car pour tous $x_0 \in E$ et $\alpha \in \mathscr{A}$, nous avons $f_{\alpha,x_0} \circ t_{v_0} = f_{\alpha,x_0-v_0}$ et on applique le quatrième point ci-dessus.

Soit Y un espace topologique, soit $y_0 \in Y$, soit $\mathscr{V}_{y_0}$ un système fondamental de voisinages de y_0 dans Y, et soit $f : Y \to E$ une application. D'après ce qui précède, si E est

munie de la topologie ci-dessus, alors f est continue en y_0 si et seulement si

$$\forall\, \epsilon > 0,\ \ \forall\, \alpha \in \mathscr{A},\ \ \exists\, U \in \mathscr{V}_{y_0},\ \ \forall\, y \in U,\quad ||f(y) - f(y_0)||_\alpha < \epsilon\ .$$

En effet, si f est continue en y_0, alors la propriété en découle par composition des appli tions continues f et $x \mapsto ||x - f(y_0)||_\alpha$. Réciproquement, si cette propriété est satisfai alors pour tout k dans $\mathbb{N}$, pour tous $x_1, \dots, x_k$ dans E, pour tous $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ dans $\mathscr{A}$ pour tout $\epsilon > 0$, il existe, pour tout entier i tel que $1 \leq i \leq k$, un élément $V_i \in \mathscr{V}_{y_0}$ que $||f(y) - f(y_0)||_{\alpha_i} < \epsilon$. Par conséquent, pour tout y dans le voisinage $\bigcap_{1\leq i\leq n} V_i$ de et pour $1 \leq i \leq n$, nous avons

$$\big|\,||f(y) - x_i||_{\alpha_i} - ||f(y_0) - x_i||_{\alpha_i}\big| \leq ||f(y) - f(y_0)||_{\alpha_i} < \epsilon\ ,$$

ce qui montre la continuité de f.

Proposition 2.1 *(1) La topologie définie par une famille de semi-normes est séparée et seulement si la famille est séparante.*

(2) La topologie sur un espace vectoriel réel ou complexe, définie par une famille nombrable et séparante de semi-normes, est métrisable.

Preuve. (1) Si la famille n'est pas séparante, alors il existe deux points distincts x e dans E tels que $||y - x||_\alpha = 0$ pour tout $\alpha \in \mathscr{A}$, donc y appartient à tout voisinage de et E n'es pas séparé. La preuve du sens direct est similaire à celle du fait que la topolo induite par (une distance associée à) une norme est séparée.

En effet, si $x, y \in E$ sont distincts, soit $\alpha \in \mathscr{A}$ tel que $\epsilon = ||x - y||_\alpha > 0$. applications $f_x : u \mapsto ||u - x||_\alpha$ et $f_y : y \mapsto ||u - y||_\alpha$ sont continues. Donc $f_x^{-1}([0, \frac{\epsilon}{2}[)$ $f_y^{-1}([0, \frac{\epsilon}{2}[)$ sont des ouverts contenant respectivement x et y. Ces ouverts sont disjoin par inégalité triangulaire, car s'il existait z dans E tel que $||z - x||_\alpha < \frac{\epsilon}{2}$ et $||z - y||_\alpha <$ alors on aurait $||x - y||_\alpha < \epsilon$, ce qui n'est pas possible.

(2) Il n'est pas difficile de vérifier que chacune des distances définies dans l'exerc E.6 (1) du paragraphe 1.3 induit cette topologie.

En effet, avec les notations générales de l'exemple (2), supposons que l'ensemble d' dice $\mathscr{A}$ soit égal à $\mathbb{N}$ (ce qui est possible, à bijection près, quitte à rajouter, si $\mathscr{A}$ est fi des semi-normes nulles). Notons d_n la pseudo-distance associée à la semi-norme $||\cdot||_n$, d la distance définie par

$$d(x, y) = \sum_{n\in\mathbb{N}} 2^{-n} \min\{1, d_n(x, y)\}\ .$$

Notons $\mathscr{O}_{\rm norm}$ et $\mathscr{O}_{\rm dist}$ respectivement la topologie définie par la famille de semi-normes celle induite par la distance d. Comme les translations dans E sont des homéomorphism à la fois pour $\mathscr{O}_{\rm norm}$ et $\mathscr{O}_{\rm dist}$ (ce sont même des isométries pour $\mathscr{O}_{\rm dist}$) , il suffit de mont que tout voisinage du vecteur nul pour l'une contient un voisinage du vecteur nul po l'autre. Rappelons que

$$\{B_d(0, \epsilon)\ :\ \epsilon > 0\}$$

est un système fondamental de voisinages de 0 pour $\mathscr{O}_{\rm dist}$, et que

$$\Big\{\bigcap_{n=0}^{N}\{x \in E\ :\ ||x||_n < \epsilon\}\ :\ N \in \mathbb{N},\ \epsilon > 0\Big\}$$

est un système fondamental de voisinages de 0 pour $\mathscr{O}_{\text{norm}}$.

Soit $\epsilon > 0$. Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $\sum_{n=N+1}^{+\infty} 2^{-n} \le \frac{\epsilon}{2}$. Soit x dans X. Si $||x||_n < \frac{\epsilon}{4}$ pour $0 \le n \le N$, alors $d(x,0) < \frac{\epsilon}{4}\sum_{n=0}^{N} 2^{-n} + \frac{\epsilon}{2} \le \epsilon$. Donc tout voisinage de 0 pour $\mathscr{O}_{\text{dist}}$ contient un voisinage de 0 pour $\mathscr{O}_{\text{norm}}$

Réciproquement, soient $\epsilon \in \,]0,1[$ et $N \in \mathbb{N}$. Soit x dans X. Si $d(x,0) < \epsilon 2^{-N}$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on obtient $2^{-n}\min\{1, d_n(x,0)\} < \epsilon 2^{-N}$. Donc, pour $0 \le n \le N$, $||x||_n = \min\{1, d_n(x,0)\} < \epsilon$, et le résultat en découle. □

Exemple 3.1 : L'espace de Schwartz des applications lisses à décroissance rapide. Pour tout $r \in \mathbb{N} - \{0\}$, soit $\mathscr{S}(\mathbb{R}^r)$ l'espace vectoriel des applications C^∞ de $\mathbb{R}^r$ dans $\mathbb{R}$ à décroissance rapide, défini dans l'exemple (v) du paragraphe 1.3. Considérons la famille $(||\cdot||_{k,m})_{k\in\mathbb{N},\, m\in\mathbb{N}^r}$ de semi-normes définie dans l'exemple (v) du paragraphe 1.3. Par la preuve de la proposition 2.1 (2) précédente, la topologie définie par cette famille coïncide avec la topologie induite par la distance

$$d(x,y) = \sum_{k\in\mathbb{N},\, m\in\mathbb{N}^r} \frac{1}{2^{k+|m|}} \min\{1, ||x-y||_{k,m}\} \,.$$

Sauf mention contraire, l'espace vectoriel $\mathscr{S}(\mathbb{R}^r)$ sera muni de cette topologie (métrisable), et s'appelle *l'espace de Schwartz*.

Exemple 3.2 : L'espace des applications lisses à support dans un compact prescrit. Avec les notations de l'exemple (2) du paragraphe 1.4, pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, pour tout $r \in \mathbb{N} - \{0\}$, pour tout ouvert Ω de $\mathbb{R}^r$ et pour tout compact non vide K dans Ω, rappelons que $\mathscr{D}_K(\Omega)$ est l'espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ des applications C^∞ de Ω dans $\mathbb{K}$) dont le support est contenu dans K.

Pour tout f dans $\mathscr{D}_K(\Omega)$ et tout m dans $\mathbb{N}^r$, posons

$$||f||_m = \max_{x\in K} |\,\partial^m f(x)\,| \,.$$

Il est facile de vérifier que $||\cdot||_m$ est une semi-norme sur $\mathscr{D}_K(\Omega)$, et que la famille $(||\cdot||_m)_{m\in\mathbb{N}^r}$ est une famille dénombrable séparante de semi-normes sur $\mathscr{D}_K(\Omega)$. La topologie sur $\mathscr{D}_K(\Omega)$ définie par cette famille est donc métrisable (voir la proposition 2.1).

Exemple 3.3 : L'espace des applications lisses à support compact. Toujours avec les notations de l'exemple (2) du paragraphe 1.4, pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, pour tout $r \in \mathbb{N} - \{0\}$, pour tout ouvert non vide Ω de $\mathbb{R}^r$, rappelons que $\mathscr{D}(\Omega)$ est l'espace vectoriel des applications lisses de $\mathbb{R}^r$ dans $\mathbb{K}$) à support compact dans Ω. Pour tout f dans $\mathscr{D}(\Omega)$ et tout ε dans $\mathscr{C}^0_{0,+}(\Omega)$, posons

$$||f||_\varepsilon = \max_{x\in\Omega}\ \max_{m\in\mathbb{N}^r,\, |m|\le 1/\varepsilon(x)} \frac{|\,\partial^m f(x)\,|}{\varepsilon(x)} \,.$$

Il est facile de vérifier que la borne supérieure définissant $||f||_\varepsilon$ est bien un maximum (par compacité du support de f), que $||\cdot||_\varepsilon$ est une semi-norme sur $\mathscr{D}(\Omega)$, et que la famille

$$(||\cdot||_\varepsilon)_{\varepsilon\in\mathscr{C}^0_{0,+}(\Omega)}$$

est une famille (non-dénombrable) séparante de semi-normes sur $\mathscr{D}(\Omega)$: si $f \in \mathscr{D}(\Omega)$ n'est pas la fonction nulle, alors $||f||_\varepsilon > 0$ pour tout $\varepsilon \in \mathscr{C}^0_{0,+}(\Omega)$ (qui est non vide, comme vu dans l'exemple (2) du paragraphe 1.4).

Proposition 2.2 *La topologie sur $\mathscr{D}(\Omega)$ définie par cette famille de semi-normes es topologie de Schwartz. En particulier, la topologie de Schwartz est séparée.*

Mais comme indiqué dans l'exercice E.9, elle n'est pas métrisable.

Preuve. Pour ces deux topologies, les translations dans l'espace vectoriel $\mathscr{D}(\Omega)$ sont homéomorphismes (voir l'exemple (2) du paragraphe 1.8). Donc il suffit de montrer tout voisinage de la fonction nulle 0 pour l'une contient un voisinage de 0 pour l'autre réciproquement.

Rappelons que les

$$B_{0,\varepsilon} = \big\{ f \in \mathscr{D}(\Omega)\ :\ \forall\, x \in \Omega,\ \forall\, m \in \mathbb{N}^r,\ \ |m| \le 1/\varepsilon(x) \Longrightarrow |\,\partial^m f(x)\,| < \varepsilon(x) \big\} \,,$$

pour $\varepsilon \in \mathscr{C}^0_{0,+}(\Omega)$, forment un système fondamental de voisinages de 0 pour la topolo de Schwartz.

Soit $\varepsilon \in \mathscr{C}^0_{0,+}(\Omega)$. Il est immédiat que $\{f \in \mathscr{D}(\Omega)\ :\ ||f||_\varepsilon < 1\}$, qui est un voisin ouvert de 0 pour la topologie définie par la famille de semi-normes, est contenu dans B

Réciproquement, soient $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k$ dans $\mathscr{C}^0_{0,+}(\Omega)$ et $\eta_1, \dots, \eta_k$ dans $]0,2]$. Posons ε $\min_{1\le i\le k}\ \varepsilon_i$, qui appartient à $\mathscr{C}^0_{0,+}(\Omega)$, et $\eta = \min_{1\le i\le k}\ \eta_i$, qui est strictement posi Alors l'ensemble $\bigcap_{1\le i\le k} \{f \in \mathscr{D}(\Omega)\ :\ ||f||_{\varepsilon_i} < \eta_i\}$ contient le voisinage pour la topolo de Schwartz $B_{0,\eta\varepsilon/2}$, car $1/\varepsilon_i \le 2/(\eta\varepsilon)$ pour $1 \le i \le k$.

Remarquons qu'à la fois dans $\mathscr{S}(\mathbb{R}^r)$, dans $\mathscr{D}_K(\Omega)$ et dans $\mathscr{D}(\Omega)$, pour tout m d $\mathbb{N}^r$, les applications $f \mapsto \partial^m f$ sont continues : pour tous $k \in \mathbb{N}$, $m, m' \in \mathbb{N}^r$, $\varepsilon \in \mathscr{C}^0_{0,+}($ on a $\varepsilon/(1+m\varepsilon) \in \mathscr{C}^0_{0,+}(\Omega)$, et pour tout $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^r)$, pour tout $g \in \mathscr{D}_K(\Omega)$ et pour t $h \in \mathscr{D}(\Omega)$,

$$||\partial^m f||_{k,m'} = ||f||_{k,m+m'}, \quad ||\partial^m g||_{m'} = ||g||_{m+m'} \quad \text{et} \quad ||\partial^m h||_\varepsilon \le ||h||_{\varepsilon/(1+m\varepsilon)} \,.$$

Exemple 3 : Topologie étroite. Soit X un espace topologique. Notons $\mathscr{M}(X)$ l' semble des mesures boréliennes positives de probabilité sur X (voir le cours d'Intégrat et Probabilité, ou [Coh]). Notons $\mathscr{C}^0_b(X)$ l'espace vectoriel réel des applications contin bornées de X dans $\mathbb{R}$. La *topologie étroite* sur $\mathscr{M}(X)$ est la topologie initiale définie la famille d'applications $\mu \mapsto \mu(f)$ lorsque f parcourt $\mathscr{C}^0_b(X)$.

2.3 Sous-espace topologique

Soient X un espace topologique, A une partie de X et $i : A \hookrightarrow X$ l'inclusion.

La topologie initiale sur A définie par i est appelée la *topologie induite* sur A. L' semble A muni de cette topologie est appelé un *sous-espace topologique* de X (ou so espace par abus). Sauf mention contraire, toute partie d'un espace topologique sera mu de la topologie induite.

Les propriétés suivantes découlent de celles des topologies initiales, ou sont laissées exercice.

- L'inclusion i est continue, et la topologie induite sur A est la moins fine renda continue i.
- Si Y est un espace topologique, si $f : X \to Y$ est une application continue et si est une partie de Y contenant $f(A)$, alors la restriction $g : A \to B$ de f est contin

- Une partie U de A est ouverte dans A si et seulement s'il existe un ouvert U' de X tel que $U = U' \cap A$. Si $\mathscr{B}$ est une base d'ouverts de X, alors $\{U \cap A \ : \ U \in \mathscr{B}\}$ est une base d'ouverts de A.
- Une partie F de A est fermée dans A si et seulement s'il existe un fermé F' de X tel que $F = F' \cap A$.
- Pour tout x dans A, une partie V de A est un voisinage de x dans A si et seulement s'il existe un voisinage V' de x dans X tel que $V = V' \cap A$. Si $\mathscr{V}$ est un système fondamental de voisinages de $x \in A$ dans X, alors $\{V \cap A \ : \ V \in \mathscr{V}\}$ est un système fondamental de voisinages de x dans A.
- Tout ouvert de A est un ouvert de X si et seulement si A est ouvert dans X.
- Tout fermé de A est un fermé de X si et seulement si A est fermé dans X.
- Si $A \subset B \subset X$, alors l'adhérence de A dans B est l'intersection avec B de l'adhérence de A dans X.

Exemples et remarques. (1) Par exemple, par le cinquième point appliqué aux boules ouvertes, pour toute partie Y d'un espace métrique (X, d), la topologie induite sur Y par la distance induite sur Y par d est la topologie induite sur Y par la topologie induite sur X par la distance d.

(2) Par le troisième point, avec $\overline{\mathbb{R}}$ l'espace topologique défini dans l'exemple (1) du paragraphe 1.4, l'inclusion $\mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ est un homéomorphisme sur son image (celle-ci étant, comme dit ci-dessus, munie de la topologie induite).

(3) Par le dernier point, toute partie d'un espace topologique est dense dans son adhérence (celle-ci étant, comme dit ci-dessus, munie de la topologie induite).

(4) Reprenons les notations de l'exemple (2) du paragraphe 1.4 et des exemples 3.2 et 3.3 du paragraphe 2.2 précédent. Soient K et K' deux compacts non vides d'un ouvert Ω de $\mathbb{R}^r$ où $r \in \mathbb{N} - \{0\}$, tels que $K \subset K'$. Pour tout m dans $\mathbb{N}^r$, la restriction à $\mathscr{D}_K(\Omega)$ de la semi-norme $||\cdot||_m$ de $\mathscr{D}_{K'}(\Omega)$ est la semi-norme $||\cdot||_m$ de $\mathscr{D}_K(\Omega)$. Donc la topologie de $\mathscr{D}_K(\Omega)$ coïncide avec la topologie induite sur $\mathscr{D}_K(\Omega)$ par la topologie de $\mathscr{D}_{K'}(\Omega)$.

De plus, $\mathscr{D}_K(\Omega)$ est fermé dans $\mathscr{D}_{K'}(\Omega)$, car son complémentaire est ouvert : si $f_0 \in \mathscr{D}_{K'}(\Omega) - \mathscr{D}_K(\Omega)$, soit $x_0 \in K' - K$ tel que $\eta = |f_0(x_0)| > 0$, alors (avec $\underline{0}$ l'élément nul de $\mathbb{N}^r$) l'ensemble $\{f \in \mathscr{D}_{K'}(\Omega) \ : \ ||f - f_0||_{\underline{0}} < \eta/2\}$ est un voisinage ouvert de f_0 dans $\mathscr{D}_{K'}(\Omega)$ disjoint de $\mathscr{D}_K(\Omega)$.

La topologie induite par la topologie (de Schwartz) de $\mathscr{D}(\Omega)$ sur $\mathscr{D}_K(\Omega)$ est la topologie de $\mathscr{D}_K(\Omega)$, car pour tout f dans $\mathscr{D}_K(\Omega)$, pour tout $\varepsilon \in \mathscr{C}^0_{0,+}(\Omega)$, si $N = \max_{x \in K} \frac{1}{\varepsilon(x)}$, alors

$$||f||_\varepsilon \leq N \max_{m \in \mathbb{N}^r,\, |m| \leq N} ||f||_m \ ,$$

et réciproquement, pour tout m dans $\mathbb{N}^r$, si $\varepsilon \in \mathscr{C}^0_{0,+}(\Omega)$ est tel que $\kappa = \max_{x \in K} \varepsilon(x) \leq 1/|m|$, alors

$$||f||_m \leq \kappa \, ||f||_\varepsilon \ .$$

De plus, $\mathscr{D}_K(\Omega)$ est fermé dans $\mathscr{D}(\Omega)$, car son complémentaire est ouvert : si $f_0 \in {}^c\mathscr{D}_K(\Omega)$, soit $x_0 \in {}^cK$ tel que $\eta = |f_0(x_0)| > 0$, et $\varepsilon \in \mathscr{C}^0_{0,+}(\Omega)$ tel que $\varepsilon(x_0) < \frac{\eta}{2}$, alors $B_{f_0,\varepsilon}$ est un voisinage ouvert de f_0 dans $\mathscr{D}(\Omega)$ disjoint de $\mathscr{D}_K(\Omega)$.

On dit que $x \in A$ est un *point isolé* de A si le singleton $\{x\}$ est une partie ouverte du sous-espace topologique A, i.e. (voir le troisième point ci-dessus) s'il existe un voisinage V de x dans X tel que $V \cap A = \{x\}$. Si $X = \mathbb{R}$, un point x de A est *isolé à gauche* s'il est isolé dans $]-\infty, x] \cap A$, et *isolé à droite* s'il est isolé dans $[x, +\infty[\, \cap A$. Comme un

espace topologique est discret si et seulement si ses singletons sont ouverts, les assertic suivantes sont équivalentes :

- le sous-espace A est discret ;
- tout point de A est isolé.

La continuité d'une application est une propriété locale, c'est-à-dire qu'elle vérifie propriété (de faisceau, voir par exemple [God]) suivante.

Proposition 2.3 *Si $(U_i)_{i \in I}$ est une famille d'ouverts de X, de réunion égale à X, $f : X \to Y$ est une application de X dans un espace topologique Y, alors f est contin si et seulement si, pour tout $i \in I$, la restriction $f_{|U_i} : U_i \to Y$ de f à U_i (muni, com dit ci-dessus, de la topologie induite) est continue.*

Preuve. Si $f_i : U_i \to X$ est l'inclusion, alors $f_{|U_i} = f \circ f_i$, ce qui montre le sens direct p composition d'applications continues.

Réciproquement, si V est un ouvert de Y, alors $f^{-1}(V) = \bigcup_{i \in I} {f_{|U_i}}^{-1}(V)$ est un ouv de X, car tout ouvert de U_i est un ouvert de X, puisque U_i est ouvert.

La proposition précédente est en général fausse si l'on remplace ouverts par ferm mais reste vrai après un tel remplacement si l'on suppose que l'ensemble d'indice I fini, comme le montre l'exercice (corrigé) suivant.

Exercice E.15 *Soient X, Y deux espaces topologiques, A, A' deux fermés de X réunion X, et $f : A \to Y$, $f' : A' \to Y$ deux applications continues telles que $f_{|A \cap A'}$ ${f'}_{|A \cap A'}$. Alors l'application $g : X \to Y$, telle que $g(x) = f(x)$ si $x \in A$ et $g(x) = f'(x)$ $x \in A'$, est continue.*

Le résultat suivant donne une liste de propriétés topologiques qui sont héritées p passage à la topologie induite.

Proposition 2.4 *Soit X un espace topologique et A une partie de X (munie de la to logie induite).*

- *Si X est séparé, alors A l'est.*
- *Si X est à base dénombrable d'ouverts, alors A l'est.*
- *Si X est métrisable, alors A l'est.*
- *Si X est métrisable séparable, alors A l'est.*

Preuve. Comme les ouverts de A sont les traces sur A des ouverts de X, les de premières assertions sont immédiates. Nous avons déjà mentionné la troisième. Montre la quatrième.

Nous pouvons supposer A non vide. Si X est métrisable séparable, alors soient d u distance induisant sa topologie et $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dense dans X. Pour tout n dans $\mathbb{N}$, s a_n un élément de A tel que $d(x_n, a_n) < d(x_n, A) + \frac{1}{n+1}$, en supposant que $a_n = x_n$ si $x_n \in$ Alors la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dense dans A. En effet, pour tout a dans $A - \{a_n \ : \ n \in \mathbb{N}\}$ tout $\epsilon > 0$, soit n dans $\mathbb{N}$ tel que $d(a, x_n) < \frac{\epsilon}{3}$ et $n + 1 > \frac{3}{\epsilon}$ (s'il n'y avait qu'un nomb fini de points x_n dans $B(a, \frac{\epsilon}{3})$, alors a serait l'un des x_n, donc l'un des a_n, ce que no avons exclu). Alors

$$d(a, a_n) \leq d(a, x_n) + d(x_n, a_n) < \frac{\epsilon}{3} + d(x_n, A) + \frac{1}{n+1} \leq \frac{\epsilon}{3} + d(x_n, a) + \frac{1}{n+1} < \epsilon \ ,$$

ce qui montre le résultat. □

Comme le montre l'exercice suivant, ce n'est pas parce qu'un sous-espace topologique A d'un espace topologique X est séparé que deux points de A ont des voisinages disjoints dans X.

Exercice E.16 *Soit X un espace topologique, ω un ensemble n'appartenant pas à X, et $Y = X \cup \{\omega\}$. Montrer que l'ensemble des parties de Y, vides ou de la forme $U \cup \{\omega\}$ pour U un ouvert de X, est une topologie sur Y. Montrer que l'inclusion de X dans Y est un homéomorphisme sur son image (celle-ci étant munie de la topologie induite par Y). Montrer que deux voisinages dans Y de deux points de X ont une intersection non vide.*

Montrer que l'espace topologique Y est séparable (alors que son sous-espace X ne l'est pas forcément).

La proposition suivante donne en particulier des conditions pour qu'un espace « localement métrisable » soit métrisable. Remarquons que l'espace topologique $\{O_\pm\} \cup\,]0,1]$ de l'exercice E.11 est « localement métrisable » (tout point admet un voisinage métrisable), mais il n'est pas métrisable (car non séparé).

Notons $\ell^2(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel normé des suites réelles de carré sommable, pour la norme

$$||(x_n)_{n\in\mathbb{N}}||_2 = \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} x_n^2\Big)^{\frac{1}{2}} ,$$

(qui est un espace de Hilbert, voir le paragraphe 6.2, mais nous n'avons pas besoin de cette information ici)

Proposition 2.5 *Soit X un espace topologique dans lequel tout point admet un voisinage métrisable (donc un système fondamental de voisinages fermés dont la topologie induite est métrisable). Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(1) X est métrisable séparable ;

(2) X est séparé et à base dénombrable d'ouverts ;

(3) il existe une application de X dans $\ell_2(\mathbb{R})$ qui est un homéomorphisme sur son image (pour la topologie induite).

Preuve. L'espace vectoriel normé $\ell^2(\mathbb{R})$ est métrisable séparable (l'ensemble des suites presque nulles de rationnels est dense). Tout sous-espace topologique d'un espace métrisable séparable l'est encore (voir la proposition 2.4). Donc (3) implique (1).

Un espace métrique séparable est séparé (voir la proposition 1.7) et à base dénombrable (voir l'exercice corrigé E.10 (1)). Donc (1) implique (2).

Montrons que (2) implique (3). Soit $(U_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une base dénombrable d'ouverts de X. Nous pouvons supposer que $\overline{U_i}$ est métrisable (pour la topologie induite), car si J est l'ensemble des $i \in \mathbb{N}$ tels que $\overline{U_i}$ est métrisable, alors $(U_j)_{j\in J}$ est encore une base d'ouverts, par l'hypothèse sur X. (En effet, pour tout ouvert U de X, pour tout x dans U, si V_x est un voisinage métrisable de x dans X, et si d_x est une distance sur V_x induisant sa topologie, alors $\overline{B}_{d_x}(x,1) \cap U$ est un voisinage de x dans X, donc il existe i_x dans I tel que $x \in U_{i_x} \subset \overline{B}_{d_x}(x,1) \cap U$, et $U = \bigcup_{x\in U} U_{i_x}$.)

Notons d_i une distance sur l'espace $\overline{U_i}$ induisant sa topologie. Considérons la fonction $\varphi_i : X \to [0,1]$ définie par $\varphi_i(x) = \min\{1, d_i(x, \partial U_i)\}$ si x est dans U_i et $\varphi_i(x) = 0$ sinon. Il

est facile de vérifier que φ_i est continue et non nulle exactement sur U_i. Alors l'applicat
$f : x \mapsto \big(\frac{1}{i+1}\varphi_i(x)\big)_{i\in\mathbb{N}}$ est un homéomorphisme de X sur son image dans $\ell^2(\mathbb{R})$. En ef
l'injectivité découle du fait que X est séparé et que $(U_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une base d'ouverts.
continuité vient du fait que les φ_i sont continues et bornées en valeur absolue par 1. En
l'application $f : X \to f(X)$ est fermée, car si F est un fermé de X et si x n'est pas da
F, alors il existe i tel que $x \in U_i \subset X - F$, et donc $d(f(x), f(F)) \geq \varphi_i(x)/(i+1) > 0$
découle du paragraphe 1.8 qu'une injection continue fermée est un homéomorphisme
son image. Donc (2) implique (3).

Soit n un élément de $\mathbb{N}$. Une *variété topologique* de dimension n est un espace topolo
que métrisable séparable, dans lequel tout point admet un voisinage ouvert homéomorp
à un ouvert de l'espace euclidien usuel $\mathbb{R}^n$. Au lieu de demander que X soit métrisa
séparable, nous pourrions demander, de manière équivalente par la proposition 2.5, que
soit séparé à base dénombrable d'ouverts. Il est souvent plus facile de vérifier les conditi
séparé, à base dénombrable d'ouverts, que les conditions métrisable séparable (lorsque l
veut montrer qu'un objet est une variété topologique). Par contre, les secondes proprié
sont souvent plus utiles lorsque l'on travaille sur une variété topologique donnée, et
l'on a besoin des propriétés les plus fortes. Voir le cours de Géométrie différentielle
second semestre pour l'usage de ces conditions globales sur les variétés.

Exercice E.17 *Soient X un espace topologique et $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties de
On suppose vérifiée au moins l'une des deux conditions suivantes :*

- *$(\overset{\circ}{A}_i)_{i\in I}$ est un recouvrement (voir définition au chapitre 4) de X ;*
- *$(A_i)_{i\in I}$ est un recouvrement fermé de X localement fini (i.e. pour tout x dans X
existe un voisinage V de x tel que $\{i \in I \;:\; V \cap A_i \neq \emptyset\}$ est fini).*

*Montrer qu'une partie B de X est fermée (resp. ouverte) si et seulement si $A_i \cap B$
fermé (resp. ouvert) dans A_i.*

Parties connexes

Soit X un espace topologique.

L'espace X est *localement connexe* si tout point de X admet un système fondamen
de voisinages connexes. L'espace X est *localement connexe par arcs* si tout point de
admet un système fondamental de voisinages connexes par arcs.

Comme un espace connexe par arcs est connexe, un espace localement connexe
arcs est localement connexe.

Si $f : [0,1] \to X$ et $f' : [0,1] \to X$ sont deux chemins continus tels que $f(1) = f'($
on appelle *concaténation* des chemins f et f' l'application $g : [0,1] \to X$, notée souv
$f \cdot f'$, définie par

$$g(t) = \begin{cases} f(2t) & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ f'(2t-1) & \text{si } t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases} .$$

Par l'exercice (corrigé) E.15, la concaténation g est un chemin (continu) de $f(0)$ à $f'($

Proposition 2.6 *Si X est connexe et localement connexe par arcs, alors X est conn
par arcs.*

Preuve. Cette preuve est un exemple typique de la méthodologie introduite au pa
graphe 1.9.

Par concaténation de chemins, l'ensemble non vide A des points de X que l'on peut joindre par un chemin à un point x_0 donné de X est, par connexité locale par arcs, à la fois ouvert et de complémentaire ouvert.

(En effet, si $x \in A$, alors soient V un voisinage connexe par arcs de x, et f un chemin de x_0 à x. Pour tout y dans V, soit f' un chemin de x à y dans V. Alors la concaténation de f et f' est un chemin de x_0 à y, donc $V \subset A$ et A est ouvert. Si $x \notin A$, alors soit V un voisinage connexe par arcs de x. S'il existe un point y de V appartenant à A, alors soient f un chemin de x_0 à y et f' un chemin de y à x. La concaténation de f et f' est alors un chemin de x_0 à x, ce qui n'est pas possible. Donc $V \subset {}^cA$, et ${}^cA$ est ouvert.)

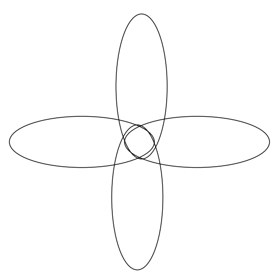
On conclut par connexité de X. □

Une *composante connexe* de X est un sous-espace connexe maximal (pour l'inclusion) de X. Une *composante connexe par arcs* de X est un sous-espace connexe par arcs maximal (pour l'inclusion) de X.

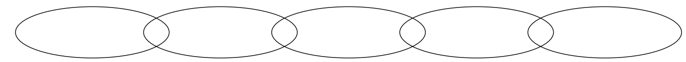
Un espace topologique est *totalement discontinu* si toutes ses composantes connexes sont réduites à des singletons. Par exemple, un espace discret est totalement discontinu, et l'espace de Cantor triadique (voir l'exercice E.22 du paragraphe 2.4) n'est pas discret, mais est totalement discontinu.

Les propriétés suivantes des parties connexes et connexes par arcs de X sont immédiates.

- L'image d'un sous-espace connexe par une application continue est un sous-espace connexe (par le second point des propriétés des sous-espaces topologiques et le second exemple du paragraphe 1.9).
- L'image d'un sous-espace connexe par arcs par une application continue est un sous-espace connexe par arcs, par composition des applications continues.
- Pour tout sous-espace connexe C de X, si $C \subset D \subset \overline{C}$, alors D est connexe (le célèbre-par-le-nom *théorème de l'arbre et de l'écorce*, obtenu en appliquant la continuité d'une restriction d'application continue, les propriétés (5) du paragraphe 1.9 et (4) de la proposition 1.8, l'hypothèse impliquant que C est dense dans D). En particulier, l'adhérence d'un connexe est connexe (mais il n'est pas toujours vrai que l'adhérence d'un connexe par arcs est connexe par arcs, voir l'exemple ci-dessous).
- Une composante connexe est fermée (par le théorème de l'arbre et de l'écorce et par maximalité). Mais il n'est pas toujours vrai qu'une composante connexe par arcs est fermée, voir l'exemple ci-dessous.
- La réunion d'une famille de sous-espaces connexes d'intersection non vide est connexe (toujours en appliquant la propriété (5) du paragraphe 1.9, et puisque les restrictions d'applications continues sont continues). Donc si A est une partie connexe non vide de X (par exemple un singleton), alors la réunion de tous les sous-espaces connexes de X contenant A est la composante connexe de X contenant A. En particulier, deux composantes connexes distinctes sont disjointes. L'ensemble des composantes connexes de X est donc une partition de X.

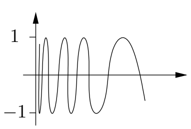


Exercice E.18 *(Le célèbre-par-le-nom théorème des chipolatas) Soit $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une fam de sous-espaces connexes de X, tels que, pour tout n dans $\mathbb{N}$, l'intersection $C_n \cap C_{n+1}$ s connexe. Montrer que la réunion $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n$ est connexe.*



- Si X est réunion d'une famille $(A_i)_{i\in I}$ de sous-espaces connexes par arcs d l'intersection $\bigcap_{i\in I} A_i$ est non vide, alors X est connexe par arcs, par concaténation chemins continus.
- Si X est localement connexe, alors les composantes connexes de X sont fermées ouvertes (car voisinages de chacun de leurs points).
- Dans un espace localement connexe par arcs, les composantes connexes par a sont ouvertes et fermées (car, par un argument déjà vu dans la preuve de la proposit 2.6, l'ensemble des points que l'on peut joindre à un point fixé par un chemin conti est ouvert et de complémentaire ouvert, par concaténation de chemins continus). Do dans un espace localement connexe par arcs, les composantes connexes et les composan connexes par arcs coïncident.

Exemple. Par exemple, l'adhérence dans $\mathbb{R}^2$ du graphe de la fonction $f : x \mapsto \sin\frac{1}{x}$, définie sur $]0, +\infty[$, est connexe (comme adhérence de l'image du connexe $]0, +\infty[$ par l'application continue $t \mapsto (t, f(t))$). Mais elle n'est pas localement connexe (il est facile de voir que le point $(0, 1)$ n'a pas de système fondamental de voisinages connexes). Elle a donc une seule composante connexe. Mais elle possède deux composantes connexes par arcs, l'une (le segment vertical $\{0\} \times [0, 1]$) fermée (donc non ouverte), et l'autre, bien sûr, non fermée et ouverte : le segment vertical $\{0\} \times [-1, 1]$ et le graphe de f sont connexes par arcs, comme images par des applications continues d'intervalles, et nous verrons au paragraphe 3.3 pourquoi ces deux connexes par arcs sont maximaux.



2.4 Topologie produit

Soient $(X_i)_{i\in I}$ une famille d'espaces topologiques et

$$X = \prod_{i\in I} X_i = \{(x_i)_{i\in I} \in (\bigcup_{i\in I} X_i)^I \;:\; \forall\, i \in I,\;\; x_i \in X_i\}$$

l'ensemble produit, muni de ses projections canoniques $pr_i : X \to X_i$ avec $pr_i(x) = x$ $x = (x_i)_{i\in I}$. La topologie initiale sur X définie par $(pr_i)_{i\in I}$ est appelée la *topologie prod* sur X. Sauf mention contraire, l'ensemble produit d'une famille d'espaces topologiq sera muni de la topologie produit.

Par exemple, si $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ et si $X_1, \ldots, X_n$ sont des espaces topologiques, alors topologie produit sur $X = X_1 \times \ldots \times X_n$ est la topologie la moins fine rendant contin les projections $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_i$ pour $1 \leq i \leq n$.

Un *ouvert élémentaire* de X est une partie de X de la forme

$$V_{J,(U_j)_{j\in J}} = \{(x_i)_{i\in I} \in X \ : \ \forall\, j \in J,\ \ x_j \in U_j\} = \bigcap_{j\in J} pr_j^{-1}(U_j)$$

pour J une partie $\boxed{\textbf{finie}}$ de I et U_j un ouvert de X_j pour tout j dans J.

Par exemple, si $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ et $X = X_1 \times X_2 \times ... \times X_n$, alors les ouverts élémentaires de X sont exactement les parties de la forme $U_1 \times U_2 \times ... \times U_n$ avec U_i un ouvert de X_i.

Les propriétés suivantes découlent des propriétés des topologies initiales, ou sont laissées en exercice :

- Les projections pr_i sont continues, et la topologie produit est la topologie la moins fine rendant continues les projections pr_i.
- L'ensemble des ouverts élémentaires de X est une base d'ouverts de la topologie produit de X.

  Plus généralement, si $\mathscr{B}_i$ est une base d'ouverts de X_i pour tout $i \in I$, alors l'ensemble des ouverts élémentaires de la forme $V_{J,(U_j)_{j\in J}}$, où J est une partie finie de I et $U_j \in \mathscr{B}_j$ pour $j \in J$, est une base d'ouverts de la topologie produit de X.
- Si $a = (a_i)_{i\in I} \in X$, si $\mathscr{V}_i$ est un système fondamental de voisinages de a_i dans X_i pour tout i dans I, alors l'ensemble des parties de X de la forme

  $$\{(x_i)_{i\in I} \in X \ : \ \forall\, j \in J,\ \ x_j \in V_j\} = \bigcap_{j\in J} pr_j^{-1}(V_j)\ ,$$

  lorsque J est une partie finie de I et $V_j \in \mathscr{V}_j$ pour $j \in J$, est un système fondamental de voisinages de a dans X pour la topologie produit.
- Soient Y un espace topologique et $f : Y \to X$ une application. On note $f_i = pr_i \circ f$ la *i-ème composante* de f, de sorte que $f(y) = (f_i(y))_{i\in I}$. Alors f est continue en $y \in Y$ si et seulement si $f_i : Y \to X_i$ est continue en y pour tout i dans I. De même, f est continue si et seulement si $f_i : Y \to X_i$ est continue pour tout i dans I.
- (Associativité de la topologie produit) Si $I = \bigcup_{\alpha\in A} I_\alpha$ est une partition de I, et si $Y_\alpha = \prod_{i\in I_\alpha} X_i$, alors l'application canonique

  $$\prod_{\alpha\in A} Y_\alpha \to \prod_{i\in I} X_i$$

  définie par $(y_\alpha)_{\alpha\in A} \mapsto (x_i)_{i\in I}$ si $y_\alpha = (x_i)_{i\in I_\alpha}$, est un homéomorphisme.
- (Commutativité de la topologie produit) Si $\sigma : I \to I$ est une bijection, alors l'application $\prod_{i\in I} X_i \to \prod_{i\in I} X_{\sigma(i)}$, définie par $(x_i)_{i\in I} \mapsto (x_{\sigma(i)})_{i\in I}$, est un homéomorphisme.
- Si A_i est une partie de X_i pour tout i dans I, alors

  $$\overline{\prod_{i\in I} A_i} = \prod_{i\in I} \overline{A_i}\ .$$

  En effet, l'inclusion du terme de gauche dans le terme de droite découle de la continuité des projections : pour tout j dans I,

  $$pr_j\big(\overline{\prod_{i\in I} A_i}\big)\ \subset\ \overline{pr_j\big(\prod_{i\in I} A_i\big)}\ \subset\ \overline{A_j}\ .$$

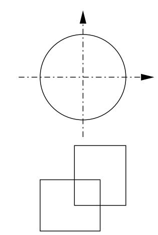
Réciproquement, soit $(x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \prod_{i\in I} \overline{A_i}$, soit J une partie finie de I et soit V_j voisinage de x_j pour $j \in J$. Posons $V_i = X_i$ si $i \notin J$. Puisque $x_i \in \overline{A_i}$, il exi $a_i \in A_i \cap V_i$ pour tout $i \in I$. Donc

$$(a_i)_{i\in I} \in \big(\prod_{i\in I} A_i\big) \cap \big(\bigcap_{j\in J} pr_j^{-1}(V_j)\big)\ ,$$

ce qui montre l'autre inclusion.
- Il découle du point précédent que si A_i est une partie de X_i, alors $\prod_{i\in I} A_i$ est fer dans X si A_i est fermé dans X_i pour tout i dans I, la réciproque étant vraie si A_i sont non vides.

Remarque. En particulier, si X, Y, Z sont des espaces topologiques, alors les applicatio $(X \times Y) \times Z \to X \times (Y \times Z)$ telles que $((x, y), z) \mapsto (x, (y, z))$, et $X \times Y \to Y \times X$ te que $(x, y) \mapsto (y, x)$, sont des homéomorphismes.

La dernière propriété ci-dessus est fausse pour les ouverts : $A = [0, 1[^{\mathbb{N}}$ n'est pas ouv dans $X = [0, 1]^{\mathbb{N}}$: le point de A dont toutes les composantes sont nulles est adhérent complémentaire de A, car tout voisinage d'un point de X contient un élément de X d les composantes sont égales à 1 à partir d'un certain rang, par le troisième point ci-dess



Attention, il existe des ouverts dans l'espace topologique produit $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ qui ne sont pas des ouverts élémentaires (i.e. pas produits de deux ouverts). Par exemple, la boule ouverte unité (pour la distance euclidienne usuelle) est un ouvert de la topologie produit, par exemple car c'est l'image réciproque de l'ouvert $]-\infty, 1[$ de $\mathbb{R}$ par l'application $(x, y) \mapsto x^2 + y^2$ continue pour la topologie produit (par continuité de la somme et du produit d'applications continues). Mais ce n'est pas un produit de deux parties de $\mathbb{R}$. La réunion de deux ouverts élémentaires n'est pas toujours un ouvert élémentaire (voir le dessin ci-contre).

Si X, Y, Z sont trois espaces topologiques, et si $f : X \to Y$, $g : X \to Z$ sont de applications continues, alors l'application $x \mapsto (f(x), g(x))$ de X dans l'espace topologi produit $Y \times Z$ est continue, par le quatrième point ci-dessus. On appelle *graphe* d'u application $h : E \to F$ entre deux ensembles E et F, l'application $x \mapsto (x, h(x))$ l'ensemble E dans l'ensemble produit $E \times F$ (on appelle aussi par abus *graphe* l'ima de cette application). En particulier, le graphe d'une application continue $f : X \to Y$ une application continue.

Exercice E.19 *Soit $(X_i)_{i\in I}$ une famille d'espaces topologiques non vides, de produit X $\prod_{i\in I} X_i$. Pour tout i dans I, soit x_i un point fixé de X_i. Montrer que pour tout j dans l'application $\phi_j : X_j \to X$ qui à x dans X_j associe la famille $(y_i)_{i\in I}$, où $y_i = x_i$ si $i \neq$ et $y_j = x$, est un homéomorphisme de X_j sur son image dans l'espace topologique prod X.*

En particulier, toute propriété invariante par homéomorphismes, préservée par passa à un sous-espace topologique, qui est vraie pour un produit d'espaces topologiques n vides, est vraie pour chacun d'eux.

Exercice E.20 *(Un produit de surjections ouvertes est ouverte) Soient $(X_i)_{i\in I}$ et $(Y_i)_{i\in I}$ deux familles d'espaces topologiques et $X=\prod_{i\in I} X_i$, $Y=\prod_{i\in I} Y_i$. Pour tout i dans I, soit $f_i : X_i \to Y_i$ une application ouverte et surjective, et soit $f : X \to Y$ l'application de i-ème composante $f_i \circ \mathrm{pr}_i$ pour tout $i \in I$ (i.e. $f\big((x_i)_{i\in I}\big)=\big(f_i(x_i)\big)_{i\in I}$). Montrer que f est ouverte.*

Proposition 2.7 *Un produit d'espaces topologiques séparés est séparé. Si un produit d'espaces topologiques non vides est séparé, alors chacun des facteurs est séparé.*

Preuve. Soit $X=\prod_{i\in I} X_i$ un espace topologique produit. Si $x=(x_i)_{i\in I} \neq y=(y_i)_{i\in I}$, alors il existe au moins un j dans I tel que $x_j \neq y_j$. Si les X_i sont séparés, alors il existe deux ouverts disjoints U, V dans X_j tels que $x_j \in U$ et $y_j \in V$. Donc $pr_j^{-1}(U)$ et $pr_j^{-1}(V)$ sont deux ouverts (élémentaires) de X, disjoints, et contenant respectivement x et y. Par conséquent, X est séparé.

Réciproquement, si X est séparé et si les X_i sont non vides, on choisit a_i dans X_i pour tout i dans I. Soit j dans I. L'application $\phi : X_j \to X$ définie par $x \mapsto (x_i)_{i\in I}$ où $x_j = x$ et $x_i = a_i$ pour tout $i \neq j$, est un homéomorphisme sur son image. En effet, elle est injective, et continue car $pr_i \circ \phi$ est continue pour tout i. Sa réciproque est la restriction à l'image de ϕ de la j-ème projection, donc est continue. □

Exercice E.21 *(1) Soient X, Y deux espaces topologiques, A une partie de X et B une partie de Y. Montrer que*

$$\partial(A \times B) = \big((\partial A)\times \overline{B}\big) \cup \big(\overline{A} \times (\partial B)\big)\ .$$

(2) Soit $(X_i)_{i\in I}$ une famille d'espaces topologiques. Pour tout i dans I, soit A_i une partie de X_i. Montrer que $\prod_{i\in I} A_i$ est dense dans X si A_i est dense dans X_i pour tout i dans I, la réciproque étant vraie si les A_i sont non vides.

Proposition 2.8 *Le produit d'une famille dénombrable d'espaces topologiques à base dénombrable (respectivement séparable) est encore à base dénombrable (respectivement séparable).*

Preuve. L'affirmation concernant l'existence d'une base dénombrable d'ouverts est une propriété des topologies initiales (et découle immédiatement du second point ci-dessus).

Pour tout $j \in \mathbb{N}$, soit $(x_{j,k})_{k\in\mathbb{N}}$ une suite dense dans un espace topologique X_j. Soit $a \in X = \prod_{i\in\mathbb{N}} X_n$. Considérons l'ensemble A des éléments $(x_i)_{i\in I}$ de X tels qu'il existe une partie finie J de I telle que $x_i = a_i$ si $i \notin J$, et que, pour tout $j \in J$, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $x_j = x_{j,k}$. Il n'est pas difficile de montrer que A est dénombrable et dense pour la topologie produit sur X. □

Proposition 2.9 *Le produit d'une famille dénombrable d'espaces topologiques métrisables est encore métrisable.*

Faisons quelques remarques avant de donner la preuve.

Remarques. (i) Par contre, le produit d'une famille non dénombrable d'espaces topologiques ayant au moins deux points n'est pas métrisable. Plus précisément (voir [Dug, page 189]), si $(X_i)_{i\in I}$ est une famille d'espaces topologiques ayant au moins deux points, alors l'espace topologique produit $\prod_{i\in I} X_i$ est métrisable si et seulement si I est dénombrable et X_i est métrisable pour tout i dans I.

(ii) Si $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ et si $E_1, \dots, E_n$ sont des espaces métriques, alors la topolo induite par l'une des distances produits (deux à deux équivalentes, donc topologiqueme équivalentes) d_p définies dans l'exemple (iv) du paragraphe 1.3 coïncide avec la topolo produit des topologies sur les E_i induites par leurs distances : en prenant la distan $d_\infty(x,y) = \max_{1\le i\le n} d(x_i, y_i)$, la boule ouverte de centre $(x_1, \dots, x_n)$ et de rayon ϵ po d_∞ est exactement le produit des boules ouvertes de centre x_i et de rayon ϵ dans E_i, po $1 \le i \le n$.

(iii) En particulier, si $E_1, \dots, E_n$ sont des espaces vectoriels (réels ou complexes) n més, alors dans l'espace vectoriel $E_1 \times \dots \times E_n$, muni de l'une quelconque de ses norm produits définies dans l'exemple (iv) du paragraphe 1.3 (elles sont équivalentes), la to logie induite par cette norme coïncide avec la topologie produit des topologies indui par les normes dans les E_i. Comme cas particulièrement particulier, la topologie prod sur $\mathbb{R}^n$ coïncide avec la topologie usuelle.

Preuve. Il suffit par la remarque (ii) de considérer le cas des familles infinies. Soi (X_i, d_i) un espace métrique pour tout i dans $\mathbb{N}$, et X l'ensemble produit $\prod_{i\in\mathbb{N}} X_i$. En app quant l'exercice corrigé E.6 (1) à la famille des pseudo-distances $(x,y) \mapsto d_i(pr_i(x), pr_i($ l'application $d : X \times X \to [0, +\infty[$ définie par

$$d(x,y) = \sum_{i\in\mathbb{N}} 2^{-i} \min\{1, d_i(pr_i(x), pr_i(y))\}$$

est une distance (parmi tant d'autres) sur l'ensemble produit X.

Des arguments similaires à ceux de la preuve de la proposition 2.1 montrent que topologie induite par la distance d est la topologie produit. En effet, d'une part, la bo ouverte pour d de centre x et de rayon $\epsilon \in\,]0,4]$ contient le voisinage ouvert élémenta de x égal à

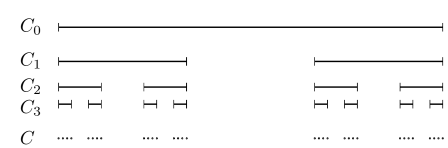
$$\bigcap_{i=0}^{N} pr_i^{-1}\big(B(pr_i(x), \frac{\epsilon}{4})\big)\ ,$$

où $N \in \mathbb{N}$ est fixé tel que $\sum_{i=N+1}^{+\infty} 2^{-i} \le \frac{\epsilon}{2}$. Réciproquement, le voisinage élémenta ouvert de x égal à

$$\bigcap_{i=0}^{N} pr_i^{-1}\big(B(pr_i(x), \epsilon_i)\big)\ ,$$

où $N \in \mathbb{N}$ et $\epsilon_i \in\,]0,1]$ pour $1 \le i \le N$, contient, en posant $\epsilon = \min_{1\le i\le N} \epsilon_i > 0$, la bo ouverte pour d de centre x et de rayon $\epsilon 2^{-N}$.

Exercice E.22 *On définit par récurrence une suite de fermés $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $[0,1]$, en pos $C_0 = [0,1]$, en supposant que C_n est la réunion disjointe de 2^n intervalles de longu $\frac{1}{3^n}$, et en construisant C_{n+1} en divisant chaque composante de C_n en trois intervalles longueurs égales, et en enlevant l'intérieur de celui du milieu. L'*ensemble triadique Cantor *C est défini par $C = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n$.*



(1) Montrer que C_n est un fermé borné non vide de $\mathbb{R}$, qu'il n'a pas de point isolé, et que ses composantes connexes sont ses singletons.

(2) On munit l'ensemble $\{0,1\}$ de la topologie discrète et $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ de la topologie produit. Montrer que l'application

$$\begin{array}{rcl} \phi : \{0,1\}^{\mathbb{N}} & \to & C \\ (x_i)_{i\in\mathbb{N}} & \mapsto & \displaystyle\sum_{i=0}^{\infty} \frac{2x_i}{3^{i+1}} \end{array}$$

est un homéomorphisme.

(3) Montrer que $C^{\mathbb{N}}$ et C sont homéomorphes.

(4) Soit F un ensemble fini ayant au moins deux éléments, muni de la topologie discrète. Montrer que $F^{\mathbb{N}}$ et C sont homéomorphes.

Exercice E.23 *Montrer que le produit d'une famille d'espaces topologiques connexes (respectivement connexes et localement connexes, connexes par arcs, connexes par arcs et localement connexes par arcs) est connexe (respectivement connexe et localement connexe, connexe par arcs, connexe par arcs et localement connexe par arcs).*

Réciproquement, montrer que si un produit d'une famille d'espaces topologiques non vides est connexe (respectivement connexe par arcs), alors chaque espace est connexe (respectivement connexe par arcs).

Montrer que le produit d'une famille finie d'espaces topologiques localement connexes (resp. localement connexes par arcs) est localement connexe (resp. localement connexe par arcs).

Attention, en munissant $\{0,1\}$ de la topologie discrète, alors l'espace produit $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ est un produit d'espaces localement connexes, qui n'est pas localement connexe.

Topologie limite projective.

Soit I un ensemble muni d'un ordre $\preceq$; pour tout $i \in I$, soit X_i un espace topologique ; et pour tous $i, j \in I$ tels que $i \preceq j$, soit $f_{ij} : X_j \to X_i$ une application continue telle que $f_{ii} = \mathrm{id}$ si $i \in I$ et

$$f_{ij} \circ f_{jk} = f_{ik}$$

si $i \preceq j \preceq k$. Une telle donnée $((X_i), (f_{ij}))$ est appelée un *système projectif d'espaces topologiques*.

On note $\varprojlim X_i$ l'ensemble des éléments $(x_i)_{i\in I}$ de l'ensemble produit $\prod_{i\in I} X_i$ tels que $f_{ij}(x_j) = x_i$ pour tout $i \preceq j$. Pour tout i dans I, on note $f_i : \varprojlim X_i \to X_i$ la restriction à $\varprojlim X_i$ de la i-ème projection $pr_i : \prod_{i\in I} X_i \to X_i$, qui vérifie

$$f_{ij} \circ f_j = f_i$$

si $i \preceq j$. La topologie initiale sur $\varprojlim X_i$ définie par $(f_i)_{i\in I}$ est appelée la *topologie limite projective*. Sauf mention contraire, l'ensemble $\varprojlim X_i$ sera muni de cette topologie.

Les propriétés des topologies initiales, et celles des sous-espaces topologiques et des espaces topologiques produits (propositions 2.4, 2.7, 2.8, 2.9) donnent des propriétés des espaces topologiques limites projectives. En particulier,

- la topologie limite projective est la topologie la moins fine rendant continue les applications $f_i : \varprojlim X_i \to X_i$; elle coïncide avec la topologie induite sur $\varprojlim X_i$ par la topologie produit sur $\prod_{i\in I} X_i$;

- une topologie limite projective d'espaces topologiques séparés est séparée ;
- la topologie limite projective d'un système projectif dénombrable d'espaces topo giques à base dénombrable (respectivement métrisables, métrisables séparables) est enc à base dénombrable (respectivement métrisable, métrisable séparable) ;
- Supposons que I soit *filtrant croissant* (i.e. pour tous i, j dans I, il existe k tel $i \preceq k$ et $j \preceq k$). Pour tout i dans I, soit $\mathscr{B}_i$ une base d'ouverts de X_i. Alors l'ensem des $f_i^{-1}(U_i)$ pour $i \in I$ et $U_i \in \mathscr{B}_i$ est une base d'ouverts de la topologie limite project sur $\varprojlim X_i$.

En effet, par les propriétés des sous-espaces et des espaces produits, on sait que l' semble des intersections finies de la forme $V = f_{i_1}^{-1}(U_{i_1}) \cap \cdots \cap f_{i_k}^{-1}(U_{i_k})$, pour $k \in$ $i_j \in I$ et $U_{i_j} \in \mathscr{B}_{i_j}$ pour $1 \le j \le k$, est une base d'ouverts de $\varprojlim X_i$. Soit $i \in I$ tel $i_j \preceq i$ pour $1 \le j \le k$. Alors $V = f_i^{-1}\big(f_{i_1 i}^{-1}(U_{i_1}) \cap \cdots \cap f_{i_k i}^{-1}(U_{i_k})\big)$. Donc pour tout x d V, le point $f_i(x)$ appartient à l'ouvert $f_{i_1 i}^{-1}(U_{i_1}) \cap \cdots \cap f_{i_k i}^{-1}(U_{i_k})$. Cet ouvert contient élément W de $\mathscr{B}_i$ contenant $f_i(x)$. D'où $x \in f_i^{-1}(W) \subset V$, et le résultat en découle.

Par exemple, soit p un nombre premier ; pour $m \le n$, notons $\pi_{m,n}$ la projection nonique de $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}$ (induite par passage au quotient de l'identité de $\mathbb{Z}$ d $\mathbb{Z}$), définie par $x \mod p^n \mapsto x \mod p^m$, qui vérifie $\pi_{n,n} = \mathrm{id}$ et $\pi_{m,n} \circ \pi_{n,r} = \pi_{m,}$ $m \le n \le r$. Nous munissons l'ensemble fini $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ de la topologie discrète (qui évidemment métrisable séparable) ; en particulier les $\pi_{m,n}$ sont continues.

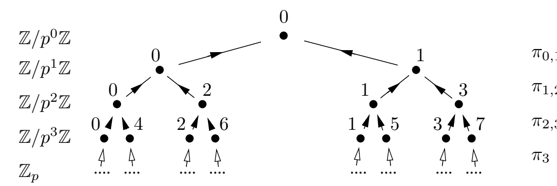


Figure : L'espace topologique $\mathbb{Z}_p$ pour $p = 2$.

L'espace topologique limite projective

$$\mathbb{Z}_p = \varprojlim\ \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$$

est un espace topologique métrisable séparable (sur lequel nous reviendrons), muni d' plications continues surjectives $\pi_n : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$.

Exercice E.24 *Montrer que l'espace topologique $\mathbb{Z}_p$ est homéomorphe à l'espace de C tor triadique. (On pourra montrer qu'il est homéomorphe à l'espace topologique prod $\{0, \dots, p-1\}^{\mathbb{N}}$, où $\{0, \dots, p-1\}$ est muni de la topologie discrète.)*

Proposition 2.10 *Soit $((X_i)_{i\in I}, (f_{ij})_{i\preceq j\in I})$ un système projectif d'espaces topologiqu Si les X_i sont séparés, alors $X = \varprojlim X_i$ est un sous-espace fermé de l'espace prod $\prod_{i\in I} X_i$.*

Preuve. Montrons que le complémentaire de X est ouvert. Si $x = (x_i)_{i\in I} \notin X$, alor existe $i \preceq j$ tels que $f_{ij}(x_j) \neq x_i$. Comme X_i est séparé, il existe des voisinages ouve V et V' de $f_{ij}(x_j)$ et x_i respectivement, qui sont disjoints. Comme f_{ij} est continue existe un voisinage ouvert V'' de x_j dans X_j tel que $f_{ij}(V'')$ soit contenu dans V. Al l'ensemble des $(y_i)_{i\in I}$ tels que $y_j \in V''$ et $y_i \in V'$ est un ouvert élémentaire de $\prod_{i\in I}$ contenu dans le complémentaire de X.

2.5 Topologie finale

Soit X un ensemble, soit $(Y_i)_{i\in I}$ une famille d'espaces topologiques et pour tout $i \in I$, soit $f_i : Y_i \to X$ une application. La *topologie finale* sur X définie par $(f_i)_{i\in I}$ est la topologie dont les ouverts sont les parties U de X telles que pour tout i dans I, la partie $f_i^{-1}(U)$ soit un ouvert de Y_i. Le fait que cette topologie vérifie bien les axiomes du paragraphe 1.2 vient du fait que les images réciproques commutent avec intersections et réunions.

Les propriétés suivantes sont immédiates.

- Une partie F de X est fermée si et seulement si pour tout i dans I, la partie $f_i^{-1}(F)$ est un fermé de Y_i.
- Cette topologie est la topologie sur X la plus fine rendant continue toutes les applications f_i.
- Soient Z un espace topologique et $g : X \to Z$ une application. Alors g est continue si et seulement si, pour tout i dans I, l'application $g \circ f_i$ est continue.

Exemple (1) : Topologie somme disjointe. Soit $(X_i)_{i\in I}$ une famille d'espaces topologiques. On rappelle qu'un ensemble X muni d'applications $f_i : X_i \to X$ est une *somme disjointe* des X_i si pour tout ensemble Y muni d'applications $g_i : X_i \to Y$, il existe une unique application (dite *canonique*) $\phi : X \to Y$ telle que le diagramme suivant commute pour tout i :

$$\begin{tikzcd} X_i \arrow[r, "f_i"] \arrow[dr, "g_i"'] & X \arrow[d, "\phi"] \\ & Y \end{tikzcd} .$$

L'ensemble $\{(x,i) \in (\bigcup_{i\in I} X_i) \times I \ : \ x \in X_i\}$, muni des applications $f_i : X_i \to X$ définies par $f_i(x) = (x,i)$, convient. Il est unique modulo l'unique bijection faisant commuter les diagrammes ci-dessus. On identifie $x \in X_i$ avec son image par f_i. On note $X = \coprod_{i\in I} X_i$, muni des inclusions $f_i : X_i \hookrightarrow X$.

La topologie finale sur X définie par $(f_i)_{i\in I}$ est appelée la *topologie somme disjointe*. Sauf mention contraire, un ensemble somme disjointe sera muni de la topologie somme disjointe.

Il est immédiat qu'un espace topologique somme disjointe d'espaces topologiques séparés est séparé, et qu'un espace topologique somme disjointe dénombrable d'espaces topologiques à base dénombrable (resp. séparables) est à base dénombrable (resp. séparable).

Exercice E.25 *Montrer qu'un espace topologique somme disjointe d'espaces topologiques métrisables est métrisable.*

Exemple (2) : Topologie faible. Soient X un ensemble et $(X_i)_{i\in I}$ une famille de parties de X. On suppose chaque X_i munie d'une topologie, et on note $f_i : X_i \to X$ l'inclusion. La topologie finale sur X définie par $(f_i)_{i\in I}$ est appelée la *topologie faible* définie par $(X_i)_{i\in I}$. (Cette terminologie n'est pas très bonne, car sémantiquement multivaluée)

Si X est somme disjointe des X_i, alors la topologie faible ci-dessus est la topologie somme disjointe.

Cette topologie intervient de manière importante pour définir les CW-complexes (quand ils ne sont pas finis) en topologie algébrique (voir le cours de l'année prochaine, ou par exemple [Hat, Pau, Spa]).

Les propriétés suivantes découlent de celles des topologies finales :

- une partie F de X est fermée si et seulement si $F \cap X_i$ est fermée dans X_i po
tout i dans I ;
- une partie O de X est ouverte si et seulement si $O \cap X_i$ est ouverte dans X_i po
tout i dans I ;
- Soient Z un espace topologique et $g : X \to Z$ une application. Alors g est contin
si et seulement si sa restriction $g\,|_{X_i}: X_i \to Y$ à X_i est continue pour tout i dans I.

La topologie faible définie par une famille dénombrable de parties $(X_i)_{i\in I}$ de X, mun
chacunes d'une topologie séparable et dont la réunion est X, est séparable, en pren
la réunion d'une famille dénombrable dense dans chaque X_i : tout ouvert non vide de
contient un point de cette réunion.

Une topologie faible n'est pas forcément séparée : il est facile de vérifier que la topolo
de l'espace topologique $X = \{0_-, 0_+\} \cup\ ]0,1]$ de l'exercice E.11 est la topologie fai
définie par les deux parties $X_\pm = \{0_\pm\} \cup\ ]0,1]$, homéomorphes à $[0,1]$ donc séparées.

Par exemple, si $X = \mathbb{R}^2$, et si $(X_i)_{i\in I}$ est la famille des droites vectorielles de $\mathbb{R}^2$, mun
de leur topologie usuelle, alors la topologie faible définie par $(X_i)_{i\in I}$ est (strictement) p
fine que la topologie usuelle sur $\mathbb{R}^2$, et même strictement plus fine que la topologie indu
par la distance SNCF sur $\mathbb{R}^2$ (voir l'exemple (vii) du paragraphe 1.3).

Exercice E.26 *Soit X un espace topologique. Montrer que les conditions suivantes s*
équivalentes :

- *X est discret ;*
- *la topologie de X est la topologie faible définie par la famille des singletons (*
singleton possède une et une seule topologie) ;
- *la bijection canonique $\coprod_{x\in X}\{x\} \to X$ est un homéomorphisme.*

Exercice E.27 *Soit X un ensemble, muni de la topologie faible définie par une fam*
$(X_i)_{i\in I}$ de parties de X munies chacune d'une topologie. Montrer que si, pour tous
dans I, les topologies induites sur $X_i \cap X_j$ par celles de X_i et de X_j coïncident, e
$X_i \cap X_j$ est fermé dans X_i et dans X_j, alors

- *la topologie de X_i coïncide avec la topologie induite sur X_i par la topologie de X*
- *X_i est fermé dans X.*

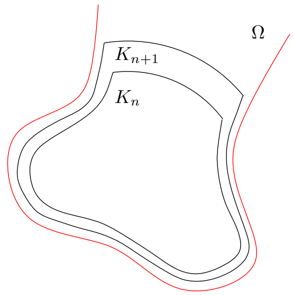
En particulier, si X est un ensemble, union croissante d'une famille de parties $(X_n)_n$
où X_n est munie d'une topologie, de sorte que X_n est fermé dans X_{n+1}, et la topolo
de X_n est la topologie induite sur X_n par la topologie de X_{n+1}, alors la topologie fai
sur X définie par la famille $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ induit sur chaque X_n la topologie de X_n, et X_n
fermé dans X.

Exemple (3) : Topologie de Schwartz

Soit Ω un ouvert non vide de $\mathbb{R}^r$, où $r \in \mathbb{N} - \{0\}$. Comme vu dans l'exemple (2)
paragraphe 1.4, l'espace vectoriel $\mathscr{D}(\Omega)$ des applications lisses à support compact sur
est la réunion, pour K parcourant les compacts non vide de Ω, des sous-espaces vectori
$\mathscr{D}_K(\Omega)$ des applications dont le support est contenu dans K.

Munissons l'espace vectoriel $\mathscr{D}(\Omega)$ de la topologie de Schwartz (voir l'exemple (2)
paragraphe 1.4), de base d'ouverts $(B_{f,\varepsilon})_{f\in\mathscr{D}(\Omega),\varepsilon\in C^0_{0,+}(\Omega)}$. Nous avons muni (voir l'exem
3.2 du paragraphe 2.2) l'espace vectoriel $\mathscr{D}_K(\Omega)$ d'une topologie, définie par la famille
semi-normes $(||\cdot||_m)_{m\in\mathbb{N}^r}$. Étudions la relation entre ces topologies.

Soit $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une *suite exhaustive de compacts* dans Ω, i.e. $K_0 = \emptyset$, K_n est un compact de Ω, contenu dans l'intérieur de K_{n+1}, et Ω est la réunion des K_n pour $n \in \mathbb{N}$. On a alors aussi que Ω est la réunion des ouverts $\overset{\circ}{K}_n$ pour $n \in \mathbb{N}$. Par exemple, on peut prendre, avec d la distance euclidienne, les fermés bornés contenus dans Ω définis par



$$K_n = \{x \in \mathbb{R}^r \ : \ d(x, {}^c\Omega) \geq 1/(n+1) \ , \ \ d(0,x) \leq n-1\} \ .$$

Nous avons besoin d'un peu de vocabulaire et d'un résultat préliminaire pour pouvoir démontrer la proposition 2.13.

Soit X un espace topologique. Un *recouvrement ouvert* de X est une famille d'ouverts de X, de réunion X. Une famille $(P_\alpha)_{\alpha\in\mathscr{A}}$ de parties de X est *localement finie* si pour tout x dans X, il existe un voisinage de x ne rencontrant qu'un nombre fini de P_α.

Une *partition (lisse) de l'unité* de Ω est une famille $(\varphi_\alpha)_{\alpha\in\mathscr{A}}$ d'applications C^∞ de Ω dans $\mathbb{R}$, d'images contenues dans $[0,1]$, dont la famille des supports est localement finie, et qui vérifie $\sum_\alpha \varphi_\alpha = 1$ (remarquer que la somme $\sum_\alpha \varphi_\alpha(x)$ ne possède qu'un nombre fini de termes non nuls pour tout x dans Ω). Soit $\mathscr{U} = (U_i)_{i\in I}$ un recouvrement ouvert de Ω. Une *partition de l'unité subordonnée à* $\mathscr{U}$ est une partition de l'unité $(\varphi_i)_{i\in I}$ de Ω, telle que, pour tout $i \in I$, le support de φ_i soit contenu dans U_i.

Remarque. Supposons que l'on ait une partition de l'unité $(\varphi'_\alpha)_{\alpha\in\mathscr{A}}$ de Ω, telle que, pour tout $\alpha \in \mathscr{A}$, il existe un élément de $\mathscr{U}$ contenant le support de φ'_α. Il est alors facile de modifier cette partition de l'unité pour la rendre subordonnée à $\mathscr{U}$. En effet, si $f : \mathscr{A} \to I$ est n'importe quelle application telle que le support de φ'_α soit contenu dans $U_{f(\alpha)}$ pour tout $\alpha \in \mathscr{A}$, posons

$$\varphi_i : x \mapsto \sum_{\alpha\in f^{-1}(i)} \varphi'_\alpha(x) \ ,$$

avec la convention usuelle $\sum_\emptyset = 0$. Alors $(\varphi_i)_{i\in I}$ est une partition de l'unité subordonnée à $\mathscr{U}$. En effet,

(1) φ_i est bien définie et C^∞, car au voisinage de tout point, φ_i est somme d'un nombre fini de φ'_α ;

(2) $\sum_i \varphi_i = \sum_\alpha \varphi'_\alpha = 1$;

(3) $(\mathrm{Supp}\ \varphi_i)_{i\in I}$ est localement finie, car $\varphi_i(x) \neq 0$ seulement s'il existe $\alpha \in \mathscr{A}$ tel que $i = f(\alpha)$ et $\varphi'_\alpha(x) \neq 0$, ce qui implique que pour tout ouvert U de Ω,

$$\{i \in I \ : \ \mathrm{Supp}\ \varphi_i \cap U \neq \emptyset\} \subset f\big(\{\alpha \in \mathscr{A} \ : \ \mathrm{Supp}\ \varphi'_\alpha \cap U \neq \emptyset\}\big)$$

et l'image d'une partie finie par une application est finie ;

(4) on a

$$\mathrm{Supp}\ \varphi_i \subset \overline{\bigcup_{\alpha\in f^{-1}(i)} \mathrm{Supp}\ \varphi'_\alpha} = \bigcup_{\alpha\in f^{-1}(i)} \mathrm{Supp}\ \varphi'_\alpha \subset U_i \ ,$$

car une union localement finie de fermés est fermé.

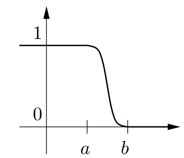
Proposition 2.11 *Tout recouvrement ouvert de Ω admet une partition lisse de l'unité qui lui est subordonnée.*

La preuve de cette proposition utilisera le lemme suivant.

Lemme 2.12 *Pour tout x_0 dans $\mathbb{R}^r$ et tout voisinage U de x_0, il existe une applicat C^∞ de $\mathbb{R}^r$ dans $\mathbb{R}$, de support contenu dans U, constante égale à 1 sur un voisinage x_0, et à valeurs dans $[0,1]$.*

Preuve. Rappelons que $\lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t^n} e^{-\frac{1}{t}} = 0$ pour tout n dans $\mathbb{R}$. Il est alors facile de vérifier que, pour tous $a < b$, l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

$$f_{a,b} : t \mapsto \begin{cases} \left(1 + e^{\frac{2t-(a+b)}{(b-t)(t-a)}}\right)^{-1} & \text{si } a < t < b \\ 1 & \text{si } t \leq a \\ 0 & \text{si } t \geq b \end{cases}$$



est C^∞. Alors, pour $\epsilon > 0$ suffisamment petit, l'application $x \mapsto f_{\epsilon/2,\epsilon}(||x - x_0||)$ convient, pour $||\cdot||$ la norme usuelle. □

Preuve de la proposition 2.11. Soit $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite exhaustive de compacts da Ω. Posons $K_{-1} = \emptyset$, et $K'_n = K_{n+1} - \overset{\circ}{K}_n$, qui est un compact de Ω.

Soit $\mathscr{U} = (U_\alpha)_{\alpha\in\mathscr{A}}$ un recouvrement ouvert de Ω. Posons

$$V_{n,\alpha} = U_\alpha \cap \left(\overset{\circ}{K}_{n+2} - K_{n-1}\right) \ .$$

Alors $(V_{n,\alpha})_{\alpha\in\mathscr{A}}$ est un recouvrement ouvert de K'_n.

Pour tout x dans K'_n, soit W_x un voisinage ouvert de x, contenu dans $V_{n,\alpha}$ pour ur dans $\mathscr{A}$. Par le lemme précédent, il existe donc (en prolongeant par 0 en dehors de W une application φ_x de Ω dans $[0,1]$ de classe C^∞, de support contenu dans W_x, consta égale à 1 sur un voisinage ouvert W'_x de x. Comme la famille d'ouverts $(W'_x)_{x\in K'_n}$ recou le compact K'_n, il existe une partie finie B_n de K'_n telle que $(W'_x)_{x\in B_n}$ recouvre K'_n. Pose

$$\varphi : y \mapsto \sum_{n\in\mathbb{N},\ x\in B_n} \varphi_x(y) \ ,$$

qui est une somme n'ayant localement qu'un nombre fini de termes non nuls (car po x dans B_n, l'application φ_x est nulle sur K_{n-1}, donc sur un voisiange de y si n est as grand), et qui est strictement positive (en fait supérieure ou égale à 1) pour tout y da Ω. Posons $\varphi'_x = \varphi_x/\varphi$. Alors $(\varphi'_x)_{n\in\mathbb{N},x\in B_n}$ est une partition de l'unité que l'on peut ren subordonnée à $\mathscr{U}$ en utilisant la remarque précédant la proposition 2.11.

Bien que nous ne le démontrerons pas (voir [Sch]), la topologie de Schwartz sur $\mathscr{D}$(est strictement moins fine que la topologie faible (ou limite inductive, voir la fin paragraphe 2.6 suivant) définie par la famille de sous-espaces $\mathscr{D}_K(\Omega)$ pour K compact Ω. Mais ces deux topologies sont quand même très proches, comme le montre le résul suivant.

Proposition 2.13 *Les ouverts convexes pour la topologie de Schwartz sur $\mathscr{D}(\Omega)$ s exactement les ouverts convexes pour la topologie faible définie par la famille des espa topologiques $\big(\mathscr{D}_{K_n}(\Omega)\big)_{n\in\mathbb{N}}$.*

Remarquons que pour tout compact K de Ω, puisque les ouverts $\overset{\circ}{K_n}$ recouvrent Ω, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $K \subset \bigcup_{1\leq k\leq n} \overset{\circ}{K_k} \subset K_n$. Nous avons vu dans les exemples et remarques du paragraphe 2.3 que la topologie de $\mathscr{D}_K(\Omega)$ coïncide avec la topologie induite sur $\mathscr{D}_K(\Omega)$ par la topologie de $\mathscr{D}_{K'}(\Omega)$ si $K \subset K'$.

Donc il découle de cette proposition que les ouverts convexes pour la topologie de Schwartz sur $\mathscr{D}(\Omega)$ sont aussi exactement les ouverts convexes pour la topologie faible définie par la famille des espaces topologiques $\big(\mathscr{D}_K(\Omega)\big)_K$ où K parcourt tous les compacts non vides de Ω.

Preuve. Comme les translations préservent la convexité et sont des homéomorphismes à la fois pour la topologie de Schwartz et pour la topologie faible, il suffit de montrer que tout voisinage convexe de la fonction nulle 0 pour l'une des deux topologies contient un voisinage de 0 pour l'autre, et réciproquement.

Puisque tout voisinage (convexe ou pas) de 0 pour la topologie de Schwartz contient $B_{0,\varepsilon}$ pour tout $\varepsilon \in C^0_{0,+}(\Omega)$, il suffit de démontrer, pour en déduire que la topologie de Schwartz est moins fine que la topologie faible, que tout $B_{0,\varepsilon}$ est un voisinage de 0 pour la topologie limite inductive. Il suffit pour cela de démontrer que, pour tout n dans $\mathbb{N}$, l'intersection $B_{0,\varepsilon} \cap \mathscr{D}_{K_n}(\Omega)$ est un voisinage de 0 dans $\mathscr{D}_{K_n}(\Omega)$. Soit $N = \max_{x\in K_n} \frac{1}{\varepsilon(x)}$, qui est fini car K_n est compact et ε est continue non nulle sur K_n, et $\eta = \inf_{x\in K_n} \varepsilon(x)$ qui est strictement positif car K_n est compact, et ε est continue, strictement positive, sur K_n. Alors

$$\bigcap_{m\in\mathbb{N}^r\,:\,|m|\leq N} \{f \in \mathscr{D}_{K_n}(\Omega)\ :\ ||f||_m < \eta\}$$

est un voisinage de 0 dans $\mathscr{D}_{K_n}(\Omega)$, qui est contenu dans $B_{0,\varepsilon} \cap \mathscr{D}_{K_n}(\Omega)$.

Réciproquement, soit V un voisinage convexe de 0 pour la topologie faible, et montrons qu'il contient un voisinage de 0 pour la topologie de Schwartz. Puisque V est un voisinage de 0 pour la topologie faible, pour tout n dans $\mathbb{N}$, il existe $N_n \in \mathbb{N} - \{0\}$ et $\eta_n > 0$ tel que

$$V_n = \bigcap_{m\in\mathbb{N}^r\,:\,|m|\leq N_n} \{f \in \mathscr{D}_{K_{n+2}}(\Omega)\ :\ ||f||_m < \eta_n\}$$

soit contenue dans $V \cap \mathscr{D}_{K_{n+2}}(\Omega)$. Nous pouvons supposer que la suite $(N_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante vers $+\infty$ et $(\eta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante vers 0.

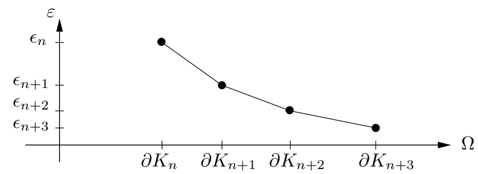
La famille $\mathscr{U} = (\overset{\circ}{K_{n+2}} - K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un recouvrement ouvert de Ω. La proposition 2.11 fournit une partition lisse de l'unité $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ subordonnée à ce recouvrement, que nous fixons. Pour tout n dans $\mathbb{N}$, comme le support de φ_n est contenu dans $K_{n+2} - K_n$, et par la formule de dérivation de Leibnitz, il existe une constante $k_n > 0$ telle que pour tout f dans $\mathscr{D}(\Omega)$ et tout $\epsilon > 0$, si

$$\forall\, x \in {}^cK_n,\ \ \forall\, m \in \mathbb{N}^r,\ \ |m| \leq N_n \implies |\partial^m f(x)| < \epsilon\ ,$$

alors

$$\forall\, m \in \mathbb{N}^r,\ \ |m| \leq N_n \implies ||2^{n+1}\varphi_n f||_m < k_n\epsilon\ .$$

Nous pouvons supposer que la suite $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante vers $+\infty$.



Posons $\epsilon_n = \min\{\frac{\eta_n}{k_n}, \frac{1}{N_n}\}$, de sorte que la suite $(\epsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante vers 0. Il facile de construire une application ε dans $C^0_{0,+}(\Omega)$ telle que pour tout x dans ${}^cK_n$, on $\varepsilon(x) \leq \epsilon_n$ (il suffit de définir ε comme valant ϵ_n sur ∂K_n, et d'interpoler continueme par le théorème d'Urysohn 1.10 dans $K_{n+1} - \overset{\circ}{K_n}$, les recollements étant continus par proposition 2.3 et l'exercice corrigé E.15 du paragraphe 2.3).

Soit $f \in B_{0,\varepsilon}$, montrons que f appartient à V. Comme V est convexe et

$$f = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{i+1}}(2^{i+1}\varphi_i f)$$

(cette somme n'ayant qu'un nombre fini de termes non identiquement nuls), il suffit montrer que pour tout n dans $\mathbb{N}$, l'application $2^{n+1}\varphi_n f$ est dans V_n (qui est conte dans V). Or $2^{n+1}\varphi_n f$ est nulle en dehors de $K_{n+2} - K_n$, donc en particulier apparti à $\mathscr{D}_{K_{n+2}}(\Omega)$. De plus, pour tout x dans ${}^cK_n$ et tout $m \in \mathbb{N}^r$, si $|m| \leq N_n$, alors $|m|$ $\frac{1}{\epsilon_n} \leq \frac{1}{\varepsilon(x)}$ par la construction de ε. Donc puisque $f \in B_{0,\varepsilon}$, pour tout x dans ${}^cK_n$ et to $m \in \mathbb{N}^r$ tel que $|m| \leq N_n$, nous avons $|\partial^m f(x)| < \varepsilon(x) \leq \frac{\eta_n}{k_n}$. Donc par définition k_n, pour tout $m \in \mathbb{N}^r$ tel que $|m| \leq N_n$, nous avons $||2^{n+1}\varphi_n f||_m < \eta_n$. Par conséque $2^{n+1}\varphi_n f$ appartient bien à V_n.

Porisme 2.14 *Une forme linéaire sur l'espace vectoriel (réel ou complexe) $\mathscr{D}(\Omega)$ (m de la topologie de Schwartz) est continue si et seulement si sa restriction à $\mathscr{D}_K(\Omega)$ continue pour tout compact non vide K de Ω.*

Preuve. La préimage d'un voisinage convexe de 0 dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ par une forme linéa est convexe.

Une forme linéaire continue sur $\mathscr{D}(\Omega)$ est appelée une *distribution* (voir par exem [Sch], ou le cours d'Analyse II du second semestre). Vu la lourdeur de manipulation la topologie de Schwartz, le corollaire ci-dessus est crucial, et dans de nombreux co et ouvrages, on définit une distribution comme étant une forme linéaire sur $\mathscr{D}(\Omega)$, d la restriction à $\mathscr{D}_K(\Omega)$ est continue pour tout compact non vide K de Ω. La topolo de $\mathscr{D}_K(\Omega)$ est, elle, bien plus gentille : elle se comporte bien par changement de compa (voir l'exemple (4) du paragraphe 2.3), est métrisable (voir l'exemple 3.2 du paragrap 2.2), et nous montrerons même que $\mathscr{D}_K(\Omega)$ est un espace de Fréchet (voir l'exemple du paragraphe 5.1).

2.6 Topologie quotient

Soient X un ensemble et $\mathscr{R} \subset X \times X$ une relation d'équivalence sur X. On n $Y = X/\mathscr{R}$ l'ensemble des classes d'équivalences de $\mathscr{R}$ et

$$\pi : X \to X/\mathscr{R} = Y$$

la projection canonique, qui à $x \in X$ associe sa classe d'équivalence $\mathscr{R}(x)$, que l'on notera souvent $[x]$ s'il n'y a pas d'ambiguité. On rappelle la propriété universelle des quotients : pour tout ensemble Z et pour toute application $f : X \to Z$ constante sur chaque classe d'équivalence de $\mathscr{R}$, il existe une et une seule application $f' : X/\mathscr{R} \to Z$ telle que $f = f' \circ \pi$, i.e. telle que le diagramme

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & Z \\ X/\mathscr{R} \arrow[ur, "f'"'] & \end{tikzcd}$$

commute. On dit que f' est l'application obtenue par *passage au quotient* de f.

Si X est un espace topologique, alors la topologie finale sur Y définie par π est appelée la *topologie quotient*. Sauf mention contraire, tout ensemble quotient sera muni de la topologie quotient.

Les propriétés suivantes découlent de celles des topologies finales, la première étant à retenir comme la définition de la topologie quotient la plus souvent utilisée :

- une partie U de Y est ouverte si et seulement si $\pi^{-1}(U)$ est ouvert dans X ;
- une partie F de Y est fermée si et seulement si $\pi^{-1}(F)$ est fermé dans X ;
- la projection canonique π est continue, et la topologie quotient est la topologie la plus fine sur Y rendant continue π ;
- pour tout espace topologique Z, une application $f : Y \to Z$ est continue si et seulement si $f \circ \pi : X \to Z$ est continue.

En particulier, toute application obtenue par passage au quotient d'une application continue est encore continue.

Exercice E.28 *Soient X un espace topologique, Y un espace topologique quotient de X, et $\pi : X \to Y$ la projection canonique.*

(i) Montrer que si X est connexe (resp. connexe par arcs), alors Y l'est aussi.

(ii) Montrer que si π est ouverte, et si X est localement connexe (resp. localement connexe par arcs), alors Y l'est aussi.

(iii) Soient Z un espace topologique, $f : X \to Z$ une application constante sur les classes d'équivalence, et $\overline{f} : Y \to Z$ l'application obtenue par passage au quotient. Montrer que si f est ouverte, alors $\overline{f}$ est aussi ouverte.

Soit A une partie de X. Le *saturé* de A par $\mathscr{R}$ est la partie de X définie par

$$\mathscr{R}A = \bigcup_{a \in A} \mathscr{R}(a) = \pi^{-1}(\pi(A)) \ .$$

La partie A est dite *saturée* si $A = \mathscr{R}A$.

Remarques. (1) Si A est ouvert (respectivement fermé) et saturé dans X, alors $\pi(A)$ est ouvert (respectivement fermé) dans Y, car alors $\pi^{-1}(\pi(A)) = A$. En général, l'hypothèse "saturée" ne peut être omise.

(2) L'image réciproque par la projection canonique est une bijection entre les parties de $X/\mathscr{R}$ et les parties saturées de X, qui préserve les opérations booléennes usuelles (intersection, union, complémentaire).

Proposition 2.15 *L'espace topologique quotient Y est séparé si et seulement si pour tous x et y dans X n'appartenant pas à la même classe d'équivalence, il existe deux ouverts U et V saturés disjoints contenant $x$et y respectivement.*

Preuve. On suppose la condition vérifiée. Soient x' et y' dans Y tels que $x' \neq y'$. Soien
et y dans X tels que $\pi(x) = x', \pi(y) = y'$. Soient U et V comme ci-dessus. Alors $\pi(U)$
$\pi(V)$ sont des ouverts (car leurs préimages par π sont U et V, qui sont ouverts), disjoi
et contenant x' et y' respectivement. Donc Y est séparé.

Réciproquement, si Y est séparé, si $x, y \in X$ ne sont pas équivalents, alors $x' = \pi(x)$
$\pi(y) = y'$. Soient U' et V' deux ouverts disjoints de Y contenant x' et y' respectiveme
Alors $U = \pi^{-1}(U')$ et $V = \pi^{-1}(V')$ conviennent.

Le quotient d'un espace séparé n'est pas toujours séparé. Regarder si un quotient
séparé ou non doit devenir un **réflexe**.

Exemple. Soient $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ et $\mathscr{R}$ la relation d'équivalence sur $\mathbb{R}^n$ définie par

$$x \,\mathscr{R}\, y \Longleftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}^n \ .$$

On note $\mathbb{T}^n$ ou $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ (voir aussi le paragraphe 2.9) l'espace topologique quotient $\mathbb{R}^n/$
que l'on appelle *tore de dimension n*. Soit $\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{T}^n$ la projection canonique.
identifie $\mathbb{R}^2$ avec $\mathbb{C}$ par $(x, y) \mapsto x + iy$. L'application

$$\begin{array}{cccc} \phi : & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & (\mathbb{S}_1)^n \\ & (t_1, ..., t_n) & \mapsto & (e^{2\pi i t_1}, ..., e^{2\pi i t_n}) \end{array}$$

est continue, surjective, et induit par passage au quotient une bijection

$$\begin{array}{cccc} \overline{\phi} : & \mathbb{T}^n & \longrightarrow & (\mathbb{S}_1)^n \\ & [(t_1, ..., t_n)] & \mapsto & (e^{2\pi i t_1}, ..., e^{2\pi i t_n}) \ . \end{array}$$

Cette bijection est continue, car $\overline{\phi} \circ \pi = \phi$ l'est. L'espace quotient $\mathbb{T}^n$ est séparé par
proposition 2.15 (car si $x, y \in \mathbb{R}^n$ ne sont pas équivalents, alors, en utilisant la distar
euclidienne, si $\epsilon = d(y, x + \mathbb{Z}^n)$, qui est strictement positif car $x + \mathbb{Z}^n$ est fermé, al
$\bigcup_{k \in \mathbb{Z}^n} B(x + k, \epsilon/2)$ et $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}^n} B(y + k, \epsilon/2)$ sont des voisinages ouverts saturés disjoi
de x et y), voir aussi l'exercice E.29 ci-dessous. Il découlera de la remarque suivant
théorème 4.13 que $\overline{\phi}$ est un homéomorphisme.

Exercice E.29 *Soient X un espace topologique et $\mathscr{R}$ une relation d'équivalence sur*

(1) Montrer que si $X/\mathscr{R}$ est séparé, alors $\mathscr{R} \subset X \times X$ est fermé.

(2) Montrer que si $\mathscr{R} \subset X \times X$ est fermé et si $\pi : X \to X/\mathscr{R}$ est ouverte, alors X est séparé.

(3) Montrer que si X' est un espace topologique séparé, si $f : X \to X'$ est application continue et si $x \,\mathscr{R}\, y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$, alors $X/\mathscr{R}$ est séparé.

La réciproque de la première assertion de l'exercice précédent n'est pas vraie en génér
la seconde assertion donnant une condition supplémentaire suffisante pour qu'elle devier
correcte (voir par exemple la proposition 2.25 pour une application fréquente).

Exercice E.30 *Soient X un espace topologique et $\mathscr{R}$ une relation d'équivalence sur
différente de $X \times X$ (i.e. ayant au moins deux classes d'équivalence). Montrer que
l'une des classes d'équivalence de $\mathscr{R}$ est dense, alors la topologie quotient sur $X/\mathscr{R}$ n
pas séparée. Montrer que si toutes les classes d'équivalence sont denses, alors la topolo
quotient sur $X/\mathscr{R}$ est la topologie grossière.*

Exercice E.31 *Soient X un espace topologique et $\mathscr{R}$ une relation d'équivalence sur X. On note $\pi : X \to X/\mathscr{R}$ la projection canonique. Soient A une partie de X et $\mathscr{R}_A = \mathscr{R} \cap (A \times A)$ la relation d'équivalence induite sur A. On a une application injective continue évidente $A/\mathscr{R}_A \hookrightarrow X/\mathscr{R}$. Montrer que sous l'une des conditions suivantes, la topologie quotient de $A/\mathscr{R}_A$ coïncide avec la topologie induite par celle de $X/\mathscr{R}$:*

- *tout ouvert saturé de A est la trace sur A d'un ouvert saturé de X ;*
- *A est ouvert et π est ouverte ;*
- *A est fermé et π est fermée ;*
- *$\pi_{|A} : A \to X/\mathscr{R}$ est fermée.*

Que se passe-t-il si $X = \mathbb{R}$, $x \,\mathscr{R}\, y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}$, et $A = [0,1[$ ou $[0,1]$?

Exercice E.32 *Soient X et Y deux espaces topologiques munis de relations d'équivalence $\mathscr{R}_X$ et $\mathscr{R}_Y$ respectivement.*

(1) On note $\pi_X : X \to X/\mathscr{R}_X$ et $\pi_Y : Y \to Y/\mathscr{R}_Y$ les projections canoniques. Soit $\mathscr{R}$ la relation d'équivalence sur $X \times Y$ définie par $(x,y) \,\mathscr{R}\, (x',y')$ si et seulement si $x \,\mathscr{R}_X\, x'$ et $y \,\mathscr{R}_Y\, y'$. Montrer que l'application de $X \times Y$ dans $(X/\mathscr{R}_X) \times (Y/\mathscr{R}_Y)$ définie par $(x,y) \mapsto (\pi_X(x), \pi_Y(y))$ induit par passage au quotient une application

$$\varphi : (X \times Y)/\mathscr{R} \longrightarrow (X/\mathscr{R}_X) \times (Y/\mathscr{R}_Y)$$

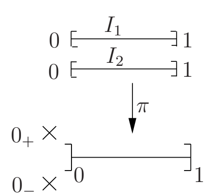
qui est une bijection continue. Montrer que si π_X et π_Y sont ouvertes, alors φ est un homéomorphisme.

(2) Montrer que si π_X est ouverte, si $\mathscr{R}'$ est la relation sur l'ensemble produit $X \times Y$ définie par $(x,y) \,\mathscr{R}'\, (x',y')$ si et seulement si $x \,\mathscr{R}_X\, x'$ et $y = y'$, alors $\mathscr{R}'$ est une relation d'équivalence sur $X \times Y$ telle que les espaces topologiques $(X \times Y)/\mathscr{R}'$ et $(X/\mathscr{R}_X) \times Y$ soient homéomorphes (voir [Bou1, page 35]).

Soient E un ensemble et $\sim\, \subset E \times E$ une relation sur E (on note souvent $x \sim y$ au lieu de $(x,y) \in \sim$). On appelle *relation d'équivalence engendrée par* $\sim$ l'intersection de toutes les relations d'équivalence contenant $\sim$. C'est la plus petite (pour l'inclusion) relation d'équivalence contenant $\sim$. On montre facilement que c'est la relation d'équivalence $\mathscr{R}$ définie par $x \,\mathscr{R}\, y$ si et seulement s'il existe $n \in \mathbb{N}$ et $x_0, x_1, \dots, x_n$ dans E tels que $x_0 = x, x_n = y$ et pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$

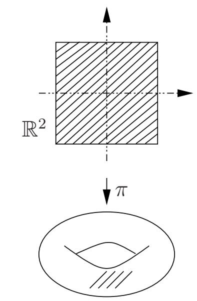
$$x_{i-1} \sim x_i \quad \text{ou} \quad x_i \sim x_{i-1} \quad \text{ou} \quad x_i = x_{i-1}.$$

Exemple. Soient I_1 et I_2 deux copies de l'intervalle $[0,1]$. Soit $\mathscr{R}$ la relation d'équivalence sur la somme disjointe $I_1 \coprod I_2$ engendrée par la relation $t \in I_1 \sim t \in I_2$ pour tout $t > 0$. Alors $(I_1 \coprod I_2)/\mathscr{R}$ (muni de la topologie quotient de la topologie somme disjointe) n'est pas séparé (et est homéomorphe à l'espace de l'exercice E.11).



Exercice E.33 *Soient $\pi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ la projection canonique, et $\alpha \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.*

1. *Soit D une droite de pente α dans $\mathbb{R}^2$. Montrer que si $\alpha \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$, alors $\pi(D)$ est homéomorphe à un cercle. Montrer que si $\alpha \notin \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$, alors $\pi(D)$ est dense dans $\mathbb{T}^2$ et $\pi_{|D} : D \to \pi(D)$ est une bijection continue. Est-ce que $\pi_{|D}$ est un homéomorphisme sur son image ?*
2. *Soit $\sim$ la relation sur $\mathbb{T}^2$ définie par $x' \sim y'$ si et seulement s'il existe une droite D de pente α dans $\mathbb{R}^2$ et x, y dans D tels que $\pi(x) = x', \pi(y) = y'$. Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence, et que l'espace quotient $\mathbb{T}^2/\sim$ est séparé si et seulement si $\alpha \in \mathbb{Q}$. Si $\alpha \in \mathbb{Q}$, montrer que l'espace quotient $\mathbb{T}^2/\sim$ est homéomorphe à un cercle. Si $\alpha \notin \mathbb{Q}$, montrer que la topologie (quotient) de $\mathbb{T}^2/\sim$ est la topologie grossière.*



Distance quotient d'une pseudo-distance.

Soit E un ensemble, muni d'une pseudo-distance d. Comme vu dans l'exemple du paragraphe 1.3, celle-ci induit une topologie sur E, de la même manière que pour distances, les (pseudo-)boules ouvertes $B(x,\epsilon) = \{y \in E \ : \ d(x,y) < \epsilon\}$ pour $x \in E$ $\epsilon > 0$ formant une base d'ouverts de la topologie.

Considérons la relation d'équivalence $\mathscr{R}$ sur E définie par $x \sim y$ si et seulem si $d(x,y) = 0$ (qui est bien une relation d'équivalence, par les propriétés des pseu distances). Remarquons que si $x \sim x'$ et si $y \sim y'$, alors $d(x,y) = d(x',y')$. L'ensem quotient $E' = E/\mathscr{R}$, muni de l'application $d' : E' \times E' \to [0,+\infty[$ (bien) définie $d'(x',y') = d(x,y)$ pour tous $x \in x', y \in y'$, est clairement un espace métrique, app l'*espace métrique quotient* de l'espace pseudo-métrique (E,d).

Comme les (pseudo-)boules ouvertes pour d sont des ouverts saturés, il est imméd que la topologie induite par d' sur E' est la topologie quotient de la topologie sur E indu par d. L'espace topologique E' est le *"plus grand" quotient séparé* de E, au sens que si est un espace topologique séparé et si $f : E \to F$ est une application continue, alors existe une application (continue) $f' : E' \to F$ telle que le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} E & & \\ {\scriptstyle\pi}\downarrow & \searrow^{f} & \\ E' & \xrightarrow{f'} & F\,. \end{array}$$

En effet, si $d(x,y) = 0$, alors $f(x) = f(y)$, sinon x et y auraient des voisinages ouve disjoints, ce qui n'est pas possible.

Plus généralement, tout espace uniforme admet un « plus grand » espace topologi quotient séparé, voir par exemple [Bou1, TG II.23].

Par exemple, si E est un espace vectoriel muni d'une semi-norme, alors il existe « plus grand » espace vectoriel normé quotient (nous y reviendrons à la fin du paragra 2.9). Pour tout $p \in [0,+\infty[$, pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, pour tout ouvert Ω non v de $\mathbb{R}^r$, où $r \in \mathbb{N} - \{0\}$, il sera vu en cours d'Intégration et probabilité que, sur l'esp vectoriel $\mathscr{L}_p(\Omega, \mathbb{K})$ des applications mesurables de Ω dans $\mathbb{K}$ de puissance p-ème intégra l'application

$$||\cdot||_p : f \mapsto \Big(\int_{x \in \Omega} |f(x)|^p \, dx \Big)^{1/p}$$

est une semi-norme, et l'espace vectoriel normé quotient est noté $\mathbb{L}_p(\Omega, \mathbb{K})$: la relation d'équivalence identifie deux fonctions si elles diffèrent d'une fonction presque partout nulle.

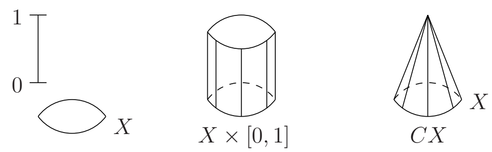
Constructions topologiques par quotients.

La topologie quotient est l'une des plus utile en mathématiques (parfois tellement naturelle que l'on n'y pense même pas). Elle permet en particulier de donner un sens précis à de nombreuses notions de recollements, pincements et autres modifications topologiques, pour construire de nouveaux espaces topologiques à partir d'espaces topologiques donnés. Nous indiquons ci-dessous quelques exemples.

Exemple (1) : les cônes. Soit X un espace topologique. Le *cône sur* X est l'espace topologique quotient

$$CX = (X \times [0,1])/\mathscr{R}$$

où $\mathscr{R}$ est la relation d'équivalence engendrée par $(x,1) \sim (x',1)$ pour tous x, x' dans X.

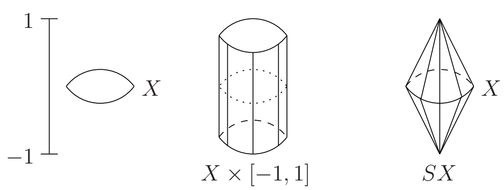


On vérifie que $x \mapsto [(x,0)]$ est un homéomorphisme sur son image, permettant d'identifier X avec une partie de CX, et que si $f : X \to Y$ est une application continue, alors l'application $Cf : CX \to CY$ définie par $[(x,t)] \mapsto [(f(x),t)]$ est continue. L'image de $X \times \{1\}$ dans CX est réduite à un point, appelé *sommet* du cône. Si $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$ sont des applications continues, alors $C(g \circ f) = (Cg) \circ (Cf)$ et $C(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{CX}$.

Exemple (2) : les suspensions. Soit X un espace topologique. La *suspension de* X est l'espace topologique quotient

$$SX = (X \times [-1,1])/\mathscr{R}$$

où $\mathscr{R}$ est la relation d'équivalence engendrée par $(x,1) \sim (x',1)$ et $(x,-1) \sim (x',-1)$ pour tous x, x' dans X.



On vérifie que $x \mapsto [(x,0)]$ est un homéomorphisme sur son image, permettant d'identifier X avec une partie de SX, et que si $f : X \to Y$ est une application continue, alors l'application $Sf : SX \to SY$ définie par $[(x,t)] \mapsto [(f(x),t)]$ est continue. Si $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$ sont des applications continues, alors $S(g \circ f) = (Sg) \circ (Sf)$ et $S(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{SX}$.

Exemple (3) : les écrasements. Soient X un espace topologique et A une partie de X. L'*écrasement de* A *dans* X, noté $X/\langle A\rangle$, est l'espace topologique quotient $X/\mathscr{R}$ où $\mathscr{R}$ est la relation d'équivalence engendrée par $x \sim x'$ pour tous x, x' dans A.

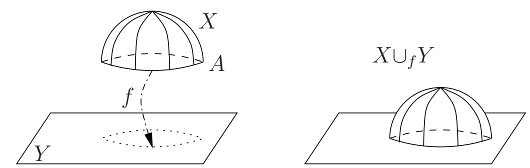
On vérifie que si A est ouvert ou fermé, alors la restriction à $X - A$ de la project canonique $\pi : X \to X/\langle A\rangle$ est un homéomorphisme sur son image. Par exemple, $CX/\langle$ et SX sont homéomorphes.

Exercice E.34 *Pour tout n dans $\mathbb{N}$, soit $\mathbb{S}_n = \{(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \;:\; x_0^2 + \dots + x_n^2 =$ la sphère unité usuelle de $\mathbb{R}^{n+1}$. Montrer que les espaces topologiques $S(\mathbb{S}_n)$ et $\mathbb{S}_{n+1}$ s homéomorphes.*

Exemple (4) : les recollements. Soient X, Y deux espaces topologiques, A une pa de X et $f : A \to Y$ une application continue. Le *recollement de X sur Y par f* est l'esp topologique quotient

$$X \cup_f Y = (X \textstyle\coprod Y)/\mathscr{R}$$

où $\mathscr{R}$ est la relation d'équivalence engendrée par $x \sim f(x)$ pour tout x dans A.



On vérifie que si A est fermé (resp. ouvert), et si $\pi : X \coprod Y \to X \cup_f Y$ est la project canonique, alors $\pi_{|Y} : Y \to X \cup_f Y$ est un homéomorphisme sur son image, qui est fer (resp. ouverte). On vérifie que si A est non vide, et si X, Y sont connexes (resp. conne par arcs), alors $X \cup_f Y$ est connexe (resp. connexe par arcs). Si $u : X \to Z$ et $v : Y -$ sont deux applications continues, telles que $u(x) = v(f(x))$ pour tout x dans A, alor existe une unique application continue $w : X \cup_f Y \to Z$ telle que $w \circ \pi_{|X} = u$ et $w \circ \pi_{|Y} =$ Si Y est réduit à un point $*$, alors f est l'application constante de A dans Y si A est vide, et l'inclusion de X dans $X \coprod \{*\}$ induit un homéomorphisme

$$X/\langle A\rangle \simeq X \cup_f \{*\}\,.$$

Exercice E.35 *Vérifier les affirmations des exemples ci-dessus.*

Exercice E.36 *Pour tout $i \in \mathbb{S}_1$, soit R_i une copie de $[0, +\infty[$. Sur la somme disjo $X = \coprod_{i \in \mathbb{S}_1} R_i$, on note $\mathscr{R}$ la relation d'équivalence engendrée par $0 \in R_i \sim 0 \in$ pour tous i, j dans $\mathbb{S}_1$. Montrer que l'espace topologique quotient $X/\mathscr{R}$ est homéomor à l'ensemble $\mathbb{R}^2$ muni de la topologie faible définie par la famille des rayons vectoriels $\mathbb{R}^2$.*

Topologie limite inductive.

Soit I un ensemble muni d'un ordre $\preceq$ filtrant croissant (rappelons que cela sign que pour tous i, j dans I, il existe k tel que $i \preceq k$ et $j \preceq k$) ; pour tout $i \in I$, soit X_i

espace topologique ; pour tous $i, j \in I$ tels sur $i \preceq j$, soit $f_{ji} : X_i \to X_j$ une application continue ; supposons que $f_{ii} = \mathrm{id}$ si $i \in I$ et que

$$f_{kj} \circ f_{ji} = f_{ki}$$

si $i \preceq j \preceq k$. Une telle donnée $((X_i), (f_{ij}))$ est appelée un *système inductif d'espaces topologiques*.

On note $\varinjlim X_i$ l'ensemble quotient de l'ensemble somme disjointe $\coprod_{i \in I} X_i$ par la relation d'équivalence $\sim$ définie par, pour $i, j \in I$ et $x_i \in X_i, x_j \in X_j$,

$$x_i \sim x_j \iff \exists k \in I,\ i \preceq k,\ j \preceq k,\ f_{ki}(x_i) = f_{kj}(x_j)$$

(on vérifie facilement que $\sim$ est bien une relation d'équivalence). Pour tout i dans I, on note $f_i : X_i \to \varinjlim X_i$ la composition de l'inclusion canonique $X_i \to \coprod_{i \in I} X_i$ avec la projection canonique $\coprod_{i \in I} X_i \to \varinjlim X_i$, qui vérifie

$$f_j \circ f_{ji} = f_i$$

si $i \preceq j$. La topologie finale sur $\varinjlim X_i$ définie par $(f_i)_{i \in I}$ est appelée la *topologie limite inductive*. Sauf mention contraire, l'ensemble $\varinjlim X_i$ sera muni de cette topologie.

Les propriétés des topologies finales, et celles des espaces topologiques sommes disjointes et des espaces topologiques quotients, donnent des propriétés des espaces topologiques limites inductives. En particulier,

- la topologie limite projective est la topologie la plus fine fine rendant continue les applications $f_i : X_i \to \varinjlim X_i$; elle coïncide avec la topologie quotient sur $\varinjlim X_i$ de la topologie somme disjointe sur $\coprod_{i \in I} X_i$;
- une partie A de $\varinjlim X_i$ est ouverte (respectivement fermée) si et seulement si $f_i^{-1}(A)$ est un ouvert (respectivement fermé) de X_i pour tout $i \in I$;
- si Z est un espace topologique et $g : \varinjlim X_i \to Z$ est une application, alors g est continue si et seulement si, pour tout i dans I, l'application $g \circ f_i : X_i \to Z$ est continue.

Exemples. (1) Soit X un ensemble, union croissante d'une famille $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de parties de X, munies chacune d'une topologie, telle que la topologie induite sur X_n par la topologie de X_{n+1} soit la topologie de X_n. Si $n \leq m$, notons $f_{mn} : X_n \to X_m$ l'inclusion. Ainsi, $((X_n), (f_{m,n}))$ est un système inductif d'espaces topologiques, et on note $f_n : X_n \to \varinjlim X_n$ l'application associée comme ci-dessus. On identife X avec $\varinjlim X_n$ par la bijection (qui en est bien une) de X dans $\varinjlim X_i$ définie par $x \mapsto f_n(x)$ si $x \in X_n$. Alors la topologie limite inductive sur X coïncide avec la topologie faible définie par la famille de parties $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$, car pour toute partie A dans X et tout n dans $\mathbb{N}$, on a $f_n^{-1}(A) = A \cap X_n$. C'est l'exemple le plus fréquent de topologie limite inductive que l'on rencontre.

(2) Les ouverts convexes de la topologie de Schwartz sur $\mathscr{D}(\Omega)$ sont exactement les ouverts convexes de la topologie limite inductive, lorsque K varie sur les compacts de Ω, des topologies des $\mathscr{D}_K(\Omega)$ (muni de la topologie définie par la famille de semi-norme $||f||_m$ de l'exemple 3.2 du paragraphe 2.2), par la proposition 2.13. Si $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite exhaustive de compacts de Ω, alors les topologies limites inductives sur $\varinjlim_{K} \mathscr{D}_K(\Omega)$ et $\varinjlim_{n} \mathscr{D}_{K_n}(\Omega)$ coïncident (une fois ces deux ensembles identifiés à $\mathscr{D}(\Omega)$ comme ci-dessus).

2.7 Groupes et corps topologiques

Groupes topologiques.

Un *groupe topologique* est un ensemble G muni d'une structure de groupe et d'u structure d'espace topologique compatibles, i.e. telles que l'application

$$\begin{array}{ccc} G \times G & \longrightarrow & G \\ (x, y) & \mapsto & xy^{-1} \end{array}$$

soit continue. (L'ensemble produit $G \times G$ est bien sûr muni de la topologie produit.) I composition d'applications continues, il revient au même de demander que les applicati d'inverse $x \mapsto x^{-1}$ (composée de $x \mapsto (e, x)$, où e est l'élément neutre, et de $(x, y) \mapsto xy$ et de multiplication $(x, y) \mapsto xy$ (composée de $(x, y) \mapsto (x, y^{-1})$ et de $(x, y) \mapsto xy^{-1}$) soi continues.

Un *morphisme de groupes topologiques* entre deux groupes topologiques est un m phisme de groupes qui est continu. Un *isomorphisme de groupes topologiques* est un i morphisme de groupes qui est un homéomorphisme. Deux groupes topologiques sont *i morphes* s'il existe un isomorphisme de groupes topologiques de l'un sur l'autre.

La *composante neutre* d'un groupe topologique est la composante connexe de s élément neutre.

Soit G un groupe topologique, d'élément neutre e. Définissons la *translation à gau* $L_g : G \to G$ et la *translation à droite* $R_g : G \to G$, respectivement par $x \mapsto gx$ et x xg^{-1}. Ces applications sont des homéomorphismes, car continues et bijectives d'inver $L_{g^{-1}}$ et $R_{g^{-1}}$ respectivement. Il est à remarquer que ces applications commutent : po tous g, h dans G,

$$R_g \circ L_h = L_h \circ R_g \ .$$

Si $f : G \to G'$ est un morphisme de groupes, avec G' un groupe topologique, alors, po tout g dans G,

$$f \circ L_g = L_{f(g)} \circ f \ .$$

Donc un morphisme de groupes entre deux groupes topologiques est continu si et seu ment s'il est continu en l'élément neutre.

Si Homéo(G) désigne le groupe des homéomorphismes de G, alors les applications G dans Homéo(G) définies par $g \mapsto L_g$ et $g \mapsto R_g$ sont des morphismes de groupes :

$$L_{gh} = L_g \circ L_h, \quad R_{gh} = R_g \circ R_h \ .$$

(C'est pour cette dernière propriété que l'on définit de la manière ci-dessus la translat à droite. Certains ouvrages notent à tort R_g l'application $x \mapsto xg$.) En particulier, L_e $\mathrm{id}, (L_g)^{-1} = L_{g^{-1}}, R_e = \mathrm{id}, (R_g)^{-1} = R_{g^{-1}}$.

Exemples.

(1) Soit G un groupe. Muni de la topologie discrète, G est un groupe topologique. groupe topologique, dont la topologie est discrète, est appelé un *groupe discret*.

(2) Les groupes $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{R}^*, \times)$, $(\mathbb{C}, +)$, $(\mathbb{C}^*, \times)$, munis de leur topologie usuelle, s des groupes topologiques (abéliens).

(3) Un sous-groupe d'un groupe topologique, muni de la structure de groupe induite de la topologie induite, est un groupe topologique. Par exemple, si $\mathbb{S}_1 = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| =$ alors $(\mathbb{S}_1, \times)$ est un groupe topologique.

(4) Il découle immédiatement de la définition de la topologie produit que si $(G_i)_{i\in I}$ est une famille de groupes topologiques alors l'ensemble produit $G=\prod_{i\in I} G_i$, muni de la structure de groupe produit (de loi terme à terme $((x_i)_{i\in I},(y_i)_{i\in I})\mapsto(x_iy_i)_{i\in I}$) et de la topologie produit, est un groupe topologique, appelé *groupe topologique produit*.

(5) Soit $((G_i),(f_{ij}))$ un *système projectif de groupes topologiques*, i.e. $(I,\preceq)$ est un ensemble ordonné ; G_i est un groupe topologique pour tout $i\in I$; $f_{ij}: G_j\to G_i$ est un morphisme de groupes topologiques pour tous $i,j\in I$ tels que $i\preceq j$; et ces données vérifient que $f_{ii}=\mathrm{id}$ si $i\in I$ et $f_{ij}\circ f_{jk}=f_{ik}$ si $i\preceq j\preceq k$. Alors, muni de la topologie limite projective et de la structure de groupe limite projective (sous-groupe du groupe produit $\prod_{i\in I} G_i$), l'ensemble limite projective $\varprojlim G_i$ est un groupe topologique.

Nous renvoyons au paragraphe 2.9 suivant pour la notion de groupe topologique quotient.

(6) Par continuité de l'application $(x,y)\mapsto xy^{-1}$, l'adhérence d'un sous-groupe d'un groupe topologique est encore un sous-groupe.

(7) La multiplication de deux matrices carrées réelles (resp. complexes) est polynomiale en les coefficients, donc continue. Par la formule $M^{-1}=\frac{1}{\det M}\,{}^t\mathrm{Comatrice}(M)$ exprimant l'inverse d'une matrice inversible, l'inverse d'une matrice carrée inversible réelle (resp. complexe) est rationnelle (de dénominateur ne s'annulant pas) en les coefficients, donc continue. Donc, pour $K=\mathbb{R}$ ou $K=\mathbb{C}$, le groupe $\mathrm{GL}_n(K)$, muni de sa structure de sous-espace topologique de l'espace vectoriel normé $\mathscr{M}_n(K)=K^{n^2}$, est un groupe topologique.

(8) Les applications exponentielles $x\mapsto e^x$ de $(\mathbb{R},+)$ dans $(\mathbb{R}_+^*,\times)$ et de $(\mathbb{C},+)$ dans $(\mathbb{C}^*,\times)$ sont des morphismes de groupes topologiques. Les applications déterminants $x\mapsto \det x$ de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ dans $(\mathbb{R}^*,\times)$ et de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ dans $(\mathbb{C}^*,\times)$ (qui sont polynomiales en les coefficients) sont des morphismes de groupes topologiques.

(9) Pour tout g dans un groupe topologique G, la *conjugaison* $i_g: G\to G$ définie par $x\mapsto gxg^{-1}$ est un isomorphisme de groupes topologiques (d'inverse $i_{g^{-1}}$).

Proposition 2.16 *Si G_0 est la composante neutre d'un groupe topologique G, alors*

- *G_0 est un sous-groupe distingué de G,*
- *les composantes connexes de G sont les classes à gauche (ainsi que les classes à droite) de G modulo G_0,*
- *si G_0 est ouverte, alors le groupe topologique quotient (i.e. l'ensemble quotient muni des structures de groupe quotient et d'espace topologique quotient – qui est un groupe topologique, voir le paragraphe 2.9 –) G/G_0 est discret.*

Preuve. L'application de $G_0\times G_0$ dans G définie par $(x,y)\mapsto xy^{-1}$ est continue, donc son image est contenue dans G_0 par connexité, donc G_0 est un sous-groupe. Pour tout g dans G, l'application de G_0 dans G définie par $x\mapsto gxg^{-1}$ est continue, donc son image est contenue dans G_0 par connexité, donc G_0 est distingué. En particulier classes à gauche et classes à droite coïncident.

Les translations à gauche étant des homéomorphismes, pour tout g dans G, la classe à gauche gG_0 est le plus grand connexe contenant g, donc est égal à la composante connexe de g.

Les images réciproques des singletons par la projection canonique $G\to G/G_0$ sont les classes à gauche de G_0. Comme une composante connexe est fermée (voir le paragraphe 2.3), si G_0 est ouverte, alors les classes à gauches sont ouvertes et fermées, donc les singletons de G/G_0 sont ouverts et fermés, et G/G_0 est discret. □

Exercice E.37 *Montrer que tout groupe topologique connexe est engendré par tout v[oi]sinage de son élément neutre.*

Montrer qu'un groupe topologique est séparé si et seulement si $\{e\}$ est fermé.

Si X est un espace topologique et G un groupe topologique, si $f,g: X\to G$ sont de[s] applications continues, alors l'application produit $fg: X\to G$ définie par $x\mapsto f(x)g$[...] est continue, par composition d'applications continues (l'application $x\mapsto(f(x),g(x))$ [...] continue de X dans $G\times G$). De même, l'application $x\mapsto f(x)^{-1}$ est continue (on f[...] attention à ne pas confondre les applications réciproques et les inverses des éléments).

Les groupes classiques.

Nous renvoyons à [MT] pour tout complément sur ce paragraphe.

Soit $n\in\mathbb{N}-\{0\}$. On note $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ le *groupe linéaire complexe* des matrices comple[xes] n-n inversibles et $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ son sous-groupe des matrices à coefficients réels, appelé le *gro[upe] linéaire réel*, muni de leur structure de groupe topologique vue dans l'exemple (7) ci-des[sus] (ce sont des ouverts de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})=\mathbb{C}^{n^2}$ et $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})=\mathbb{R}^{n^2}$). Une matrice A de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ [est] dite *hermitienne* si $A^*=A$ où $A^*={}^t\overline{A}$ est la matrice adjointe de A

Soient

$$\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})=\{x\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})\ :\ \det x=1\}$$

le *groupe spécial linéaire* complexe,

$$\mathrm{U}(n)=\{x\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})\ :\ x^{-1}=x^*\}$$

le *groupe unitaire*, et $\mathrm{SU}(n)=\mathrm{U}(n)\cap\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ le *groupe spécial unitaire*. Soient

$$\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})=\{x\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})\ :\ \det x=1\}$$

le *groupe spécial linéaire* réel,

$$\mathrm{O}(n)=\{x\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})\ :\ x^{-1}={}^tx\}$$

le *groupe orthogonal*, et $\mathrm{SO}(n)=\mathrm{O}(n)\cap\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ le *groupe spécial orthogonal*.

Exercice E.38

1. *Montrer que* $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C}),\mathrm{U}(n),\mathrm{SU}(n),\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}),\mathrm{SL}_n(\mathbb{R}),\mathrm{O}(n)$ *ainsi* [...] $\mathrm{SO}(n)$ *sont des sous-groupes fermés de* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.
2. *Montrer que les groupes topologiques* $\mathrm{SO}(2)$ *et* $\mathrm{U}(1)$ *sont isomorphes au groupe* [to]*pologique* $(\mathbb{S}_1,\times)$.
3. *Montrer que* $\mathrm{U}(n),\mathrm{SU}(n),\mathrm{SO}(n)$ *sont connexes par arcs, et que* $\mathrm{O}(n)$ *possède d*[...] *composantes connexes, donc deux composantes connexes par arcs.*
4. *Soit $\mathscr{H}$ (respectivement $\mathscr{H}^+$) le sous-espace topologique de l'espace vectoriel nor*[mé] *usuel $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})=\mathbb{C}^{n^2}$ formé des matrices hermitiennes (respectivement hermitien*[nes] *définies positives). Montrer que l'application exponentielle est un homéomorphis*[me] *de $\mathscr{H}$ sur $\mathscr{H}^+$. Montrer qu'il existe un homéomorphisme $x\mapsto\sqrt{x}$ et un seul de* [...] *dans lui-même tel que $(\sqrt{x}\,)^2=x$ pour tout x dans $\mathscr{H}^+$. Montrer que l'applicat*[ion] *$\mathscr{H}^+\times\mathrm{U}(n)\to\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ définie par $(x,y)\mapsto xy$ est un homéomorphisme (app*[...] décomposition polaire *de* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$*), d'inverse $x\mapsto(\sqrt{x^*x},\sqrt{x^*x}^{\,-1}x)$. En dédu*[ire] *que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est homéomorphe à $\mathrm{U}(n)\times\mathbb{R}^{n^2}$, que $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ est homéomorphe à* $\mathrm{SU}(n$[...] $\mathbb{R}^{n^2-1}$, *que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est homéomorphe à $\mathrm{O}(n)\times\mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$, que $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ est homéomor*[phe] *à $\mathrm{SO}(n)\times\mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}-1}$. En particulier, en déduire que $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ est homéomorphe* [à] $\mathbb{S}_1\times\mathbb{R}^2$.

Anneaux et corps topologiques.

Un *anneau topologique* est un ensemble A muni d'une structure d'anneau et d'une structure d'espace topologique compatibles, i.e. telles que les applications

$$\begin{array}{rcl} A\times A & \longrightarrow & A \\ (x,y) & \mapsto & x-y \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{rcl} A\times A & \longrightarrow & A \\ (x,y) & \mapsto & xy \end{array}$$

soient continues. En particulier, le groupe additif $(A,+)$ est un groupe topologique. Un *morphisme (d'anneaux topologiques)* entre deux anneaux topologiques est un morphisme d'anneaux qui est continu. Un *isomorphisme d'anneaux topologiques* est un isomorphisme d'anneaux qui est un homéomorphisme. Deux anneaux topologiques sont *isomorphes* s'il existe un isomorphisme d'anneaux topologiques de l'un sur l'autre.

Tout sous-anneau d'un anneau topologique, muni de la topologie induite, est un anneau topologique. Le produit d'une famille d'anneaux topologiques, muni des structures d'anneau produit et d'espace topologique produit, est un anneau topologique. Par continuité des opérations, l'adhérence d'un sous-anneau d'un anneau topologique est encore un sous-anneau.

Exemple. Muni de la topologie discrète, tout anneau, et en particulier l'anneau $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$, est un anneau topologique. Muni de la structure de sous-anneau de l'anneau produit $\prod_{n\in\mathbb{N}}\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$, l'espace topologique limite projective $\mathbb{Z}_p = \underleftarrow{\lim}\ \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$, défini à la fin du paragraphe 2.4, est un anneau topologique.

Un *corps topologique* est un ensemble K muni d'une structure de corps (commutatif) et d'une structure d'espace topologique compatibles, i.e. telles que les applications

$$\begin{array}{rcl} K\times K & \longrightarrow & K \\ (x,y) & \mapsto & x-y \end{array}, \quad \begin{array}{rcl} K\times K & \longrightarrow & K \\ (x,y) & \mapsto & xy \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{rcl} K^* & \longrightarrow & K^* \\ x & \mapsto & x^{-1} \end{array}$$

soient continues, où $K^* = K-\{0\}$. En particulier, le groupe additif sous-jacent $(K,+)$ est un groupe topologique, l'anneau sous-jacent est un anneau topologique, et le groupe multiplicatif $(K^*,\times)$ est un groupe topologique. Toute application polynomiale $P : K^n \to K$ est continue.

Un *morphisme (de corps topologiques)* entre deux corps topologiques est un morphisme de corps qui est continu. Un *isomorphisme de corps topologiques* est un isomorphisme de corps qui est un homéomorphisme. Deux corps topologiques sont *isomorphes* s'il existe un isomorphisme de corps topologiques de l'un sur l'autre.

Exemples.

- Le corps $\mathbb{C}$, muni de sa topologie usuelle, est un corps topologique.
- Tout sous-corps d'un corps topologique, muni de la topologie induite, est un corps topologique (par exemple $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$!). Par continuité des opérations, l'adhérence d'un sous-corps d'un corps topologique est encore un sous-corps.
- Si K est un corps topologique séparé, alors la topologie produit sur K^n est plus fine que la topologie de Zariski sur $\mathbb{A}_n(K) = K^n$, pour la même raison que lorsque $K=\mathbb{R}$: les polynômes sont continus et le singleton $\{0\}$ est un fermé de K (voir le paragraphe 2.1).
- Si K est un corps topologique, alors l'anneau des matrices carrées n-n sur K, muni de la topologie produit de $\mathscr{M}_n(K) = K^{n^2}$, est un anneau topologique. Le groupe $\mathrm{GL}_n(K)$, muni de la topologie induite par celle de $\mathscr{M}_n(K)$, est un groupe topologique.

L'application déterminant $x\mapsto \det x$ de $\mathrm{GL}_n(K)$ dans $(K^*,\times)$ est un morphisme groupes topologiques. (Tout ceci pour les mêmes raisons que lorsque $K=\mathbb{R}$.)

Corps valués.

Soit K un corps. Une *valeur absolue* sur K est une application $|\cdot|$ de K dans $[0,+$ telle que, pour tous x,y dans K,

(i) $|x|=0$ si et seulement si $x=0$,

(ii) $|xy| = |x||y|$,

(iii) $|x+y|\le |x|+|y|$.

Par (ii), on a $|x| = |1||x|$, et comme K contient un élément non nul, (i) implique $|1|=1$. Donc $|-1|^2 = 1$ et $|-1|=1$.

Par (ii) encore, on en déduit que $|-x|=|x|$.

Toujours par (ii), nous avons $|x^{-1}| = \frac{1}{|x|}$.

On montre comme pour les distances que $\big||x|-|y|\big| \le |x-y|$.

Une valeur absolue est dite *ultramétrique* si la troisième condition est remplacé par condition (qui implique (iii) bien sûr)

$$|x+y| \le \max\{|x|,|y|\} .$$

Une valeur absolue est dite *triviale* si elle est constante égale à 1 en dehors de l'élém neutre.

Un *corps valué* est un corps muni d'une valeur absolue. Il est dit *non discret* si valeur absolue n'est pas triviale. Un *isomorphisme de corps valués* d'un corps valué dans un corps valué K' est un isomorphisme de corps $f : K\to K'$ tel que $|f(x)| =$ pour tout x dans K.

Par exemple, les valeurs absolues usuelles sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ sont des valeurs absolues, et et $\mathbb{C}$ (qui seront munis, sauf mention contraire, de leur valeur absolue usuelle) sont corps valués.

L'application $d : K\times K \to [0,+\infty[$ définie par $d(x,y) = |x-y|$ est une distance K, qui est ultramétrique si la valeur absolue l'est. La topologie induite par cette distan munit K d'une structure de corps topologique (la preuve est la même que celle pour Un corps valué sera muni de la topologie induite par la distance associée à sa val absolue. Ainsi, un corps valué est un corps topologique.

Exercice E.39 *Montrer que la topologie d'un corps valué K est la topologie discrète et seulement si la valeur absolue de K est triviale.*

Exemples.

(1) Soit p un entier naturel premier. Tout rationnel non nul r s'écrit de manière uni $p^n a/b$ avec $n\in\mathbb{Z}$, $a\in\mathbb{Z}-\{0\}$, $b\in\mathbb{N}-\{0\}$ tels que a et b soient premiers entre eux ne soient pas divisibles par p. Posons alors $\nu_p(r) = n$, et par convention $\nu_p(0) = +\infty$ n'est pas difficile de montrer que l'application $\nu_p : \mathbb{Q}\to(\mathbb{Z}\cup\{+\infty\})$ vérifie, pour t x,y dans $\mathbb{Q}$,

(i) $\nu_p(x) = +\infty$ si et seulement si $x=0$,

(ii) $\nu_p(xy) = \nu_p(x)+\nu_p(y)$,

(iii) $\nu_p(x+y)\ge\min\{\nu_p(x),\nu_p(y)\}$.

On appelle *valeur absolue p-adique* l'application $|\cdot|_p$ de $\mathbb{Q}$ dans $[0,+\infty[$ définie par

$$|r|_p = p^{-\nu_p(r)}$$

(avec la convention usuelle $p^{-\infty} = 0$). Par les propriétés de ν_p, l'application $|\cdot|_p$ est une valeur absolue ultramétrique. Remarquons que $|p^n|_p = \frac{1}{p^n}$ pour tout n dans $\mathbb{N}$, donc $(p^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 dans $\mathbb{Q}$ pour la valeur absolue p-adique (alors qu'elle converge vers $+\infty$ pour la valeur absolue usuelle de $\mathbb{Q}$!).

(2) Soient K un corps et $K(X)$ le corps des fractions rationnelles à coefficients dans K à une indéterminée X. Pour $x = \frac{P}{Q}$ dans $K(X)$, avec P et Q des polynômes en X, posons

$$\nu_\infty(x) = \deg Q - \deg P\ .$$

Il n'est pas difficile de montrer que l'application $\nu_\infty : K(X) \to (\mathbb{Z}\cup\{+\infty\})$ vérifie, pour tous x, y dans $K(X)$,

(i) $\nu_\infty(x) = +\infty$ si et seulement si $x = 0$,

(ii) $\nu_\infty(xy) = \nu_\infty(x) + \nu_\infty(y)$,

(iii) $\nu_\infty(x+y) \geq \min\{\nu_\infty(x), \nu_\infty(y)\}$.

L'application $|\cdot|_\infty$ de $K(X)$ dans $[0,+\infty[$ définie par

$$|x|_\infty = e^{-\nu_\infty(x)}$$

pour tout x dans $K(X)$ (avec la convention usuelle $e^{-\infty} = 0$) est une valeur absolue ultramétrique sur $K(X)$.

Exercice E.40 *Montrer que la restriction au sous-corps K des fractions rationnelles constantes de $K(X)$ est la valeur absolue triviale de K, donc que le sous-espace K est discret.*

(3) Soient K un corps et $\widehat{K} = K((X^{-1}))$ le corps des *séries formelles de Laurent*, i.e. des expressions formelles

$$\sum_{i=n}^{+\infty} a_i X^{-i}$$

où $n \in \mathbb{Z}$ et $a_i \in K$ pour $n \leq i < \infty$, muni de l'addition et de la multiplication des séries. Pour $x = \sum_{i=n}^{+\infty} a_i X^{-i}$ dans $\widehat{K} - \{0\}$, posons $\nu_\infty(x)$ la borne inférieure des $i \in \mathbb{Z}$ tels que $a_i \neq 0$, et par convention $\nu_\infty(0) = +\infty$. Il n'est pas difficile de montrer que l'application $\nu_\infty : \widehat{K} \to (\mathbb{Z}\cup\{+\infty\})$ vérifie, pour tous x, y dans $\widehat{K}$,

(i) $\nu_\infty(x) = +\infty$ si et seulement si $x = 0$,

(ii) $\nu_\infty(xy) = \nu_\infty(x) + \nu_\infty(y)$,

(iii) $\nu_\infty(x+y) \geq \min\{\nu_\infty(x), \nu_\infty(y)\}$.

L'application $|\cdot|_\infty$ de $\widehat{K}$ dans $[0,+\infty[$ définie par

$$|x|_\infty = e^{-\nu_\infty(x)}$$

pour tout x dans $\widehat{K}$ (avec la convention usuelle $e^{-\infty} = 0$) est une valeur absolue ultramétrique sur $\widehat{K}$.

Nous construirons d'autres exemples dans le paragraphe 5.3.

2.8 Espaces vectoriels topologiques

Soit K un corps topologique. Un *espace vectoriel topologique* sur K est un ensem
E muni d'une structure d'espace vectoriel sur le corps K et d'une structure d'espa
topologique compatibles, i.e. telles que les applications

$$\begin{array}{ccc} E\times E & \longrightarrow & E \\ (x,y) & \mapsto & x-y \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} K\times E & \longrightarrow & E \\ (\lambda,y) & \mapsto & \lambda y \end{array}$$

soient continues. En particulier, le groupe additif $(E,+)$ est un groupe topologique.
translations $t_x : y \mapsto y + x$, où $x \in E$, sont des homéomorphismes. Les *homothé*
$h_\lambda : y \mapsto \lambda y$, où $\lambda \in K^*$, sont des homéomorphismes. Sauf quelques exemples, tous
espaces vectoriels topologiques de ce cours seront réels ou complexes.

Un *morphisme d'espaces vectoriels topologiques* entre deux espaces vectoriels topo
giques est une application linéaire qui est continue. Un *isomorphisme d'espaces vec*
riels topologiques est un isomorphisme linéaire qui est un homéomorphisme. Deux espa
vectoriels topologiques sont *isomorphes* s'il existe un isomorphisme d'espaces vectori
topologiques de l'un sur l'autre.

Exemples.

• Un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel topologique, muni de la structure
sous-espace topologique, est un espace vectoriel topologique.

• Si $(E_i)_{i\in I}$ est une famille d'espaces vectoriels topologiques sur un corps topologi
K, alors l'ensemble produit $E = \prod_{i\in I} E_i$, muni de la structure d'espace vectoriel prod
sur K (de lois terme à terme $((x_i)_{i\in I}, (y_i)_{i\in I}) \mapsto (x_i + y_i)_{i\in I}$ et $(\lambda, (x_i)_{i\in I}) \mapsto (\lambda x_i)_{i\in I}$)
de la topologie produit, est un espace vectoriel topologique.

• Soit $((E_i), (f_{ij}))$ un *système projectif d'espaces vectoriels topologiques*, i.e. $(I, \preceq)$
un ensemble ordonné ; E_i est un espace vectoriel topologique pour tout $i \in I$; $f_{ij} : E_j \to$
est un morphisme d'espaces vectoriels topologiques pour tous $i, j \in I$ tels que $i \preceq j$;
ces données vérifient $f_{ii} = \mathrm{id}$ si $i \in I$ et $f_{ij} \circ f_{jk} = f_{ik}$ si $i \preceq j \preceq k$. Alors, muni
la topologie limite projective et de la structure d'espace vectoriel limite projective (so
espace vectoriel de l'espace vectoriel produit $\prod_{i\in I} E_i$), l'ensemble limite projective $\varprojlim$
est un espace vectoriel topologique.

Nous renvoyons au paragraphe 2.9 suivant pour la notion d'espace vectoriel topolo
que quotient.

Soit K un corps topologique. Une *algèbre topologique* sur K est un ensemble E m
d'une structure d'algèbre sur le corps K et d'une structure d'espace topologique com
tibles, i.e. telles que les applications

$$\begin{array}{ccc} E\times E & \longrightarrow & E \\ (x,y) & \mapsto & x-y \end{array}, \quad \begin{array}{ccc} E\times E & \longrightarrow & E \\ (x,y) & \mapsto & xy \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} K\times E & \longrightarrow & E \\ (\lambda,y) & \mapsto & \lambda y \end{array}$$

soient continues. En particulier, l'anneau sous-jacent est un anneau topologique, et l'
pace vectoriel sous-jacent est un espace vectoriel topologique. Par exemple, si K est
corps topologique, alors l'algèbre des matrices carrées n-n sur K, muni de la topolo
produit de $\mathscr{M}_n(K) = K^{n^2}$, est une algèbre topologique. Nous verrons d'autres exemp
aux paragraphes 5.1 et 5.2.

Remarques. (1) Si X est un espace topologique et E un espace vectoriel topologiq
si $f, g : X \to E$ et $h : X \to K$ sont des applications continues, alors les applicatio

$f+g : X \to E$ et $hf : X \to E$ définies par $x \mapsto f(x)+g(x)$ et $x \mapsto h(x)f(x)$ sont continues, par composition d'applications continues.

(2) Par continuité des applications de différence et de multiplication externe, l'adhérence d'un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel topologique est un sous-espace vectoriel. De même, l'adhérence d'une sous-algèbre d'une algèbre topologique est une sous-algèbre.

(3) Rappelons qu'un *convexe* dans un espace vectoriel réel ou complexe E est une partie P de E telle que, pour tous x, y dans P et pour tout $t \in [0,1]$, le point $tx+(1-t)y$ appartienne encore à P.

Tout convexe d'un espace vectoriel topologique (réel ou complexe) E est connexe par arcs, donc connexe : pour tous x, y dans E, l'application $t \mapsto tx+(1-t)y$ est continue.

L'adhérence d'un convexe d'un espace vectoriel topologique est convexe : pour tout $t \in [0,1]$, l'application f de $E \times E$ dans E définie par $(x,y) \mapsto tx+(1-t)y$ est continue, et donc $f(\overline{C}\times\overline{C}) = f(\overline{C\times C}) \subset \overline{f(C\times C)} \subset \overline{C}$.

L'intérieur d'un convexe C d'un espace vectoriel topologique est convexe : si x et y appartiennent à l'intérieur de C, alors pour tout $t>0$, l'ensemble des $(1-t)x+tz$, pour z dans un voisinage ouvert de y contenu dans C, est un voisinage ouvert de $(1-t)x+ty$ contenu dans C, par continuité de l'application $w \mapsto \frac{1}{t}(w-(1-t)x)$.

(4) Une application linéaire $f : E \to F$ entre espaces vectoriels topologiques est continue si et seulement si elle est continue en 0 (c'est une propriété des groupes topologiques sous-jacent).

En particulier, deux structures d'espaces vectoriels topologiques sur un même espace vectoriel coïncident si et seulement si tout voisinage de 0 pour l'une contient un voisinage de 0 pour l'autre, et réciproquement.

Espaces vectoriels normés sur un corps valué.

La classe la plus importante d'espaces vectoriels topologiques est bien sûr fournie par celle des espaces vectoriels normés. Ce paragraphe généralise à un corps valué quelconque l'exemple (iii) du paragraphe 1.3.

Soit K un corps muni d'une valeur absolue $|\cdot|$.

Soit E un espace vectoriel sur K. Une *norme* sur E est une application $||\cdot||$ de E dans $[0,+\infty[$ telle que, pour tous x, y dans E et tout λ dans K,

(i) $||x|| = 0$ si et seulement si $x = 0$,

(ii) $||\lambda x|| = |\lambda|\,||x||$,

(iii) $||x+y|| \le ||x|| + ||y||$.

Cette norme est *ultramétrique* si la troisième condition est remplacée par

$$||x+y|| \le \max\{||x||, ||y||\}$$

(qui implique (iii) bien sûr).

Exemples de normes.

- La valeur absolue de K est une norme sur l'espace vectoriel (de dimension 1) K sur K, qui est ultramétrique si et seulement si la valeur absolue l'est.
- La restriction d'une norme à un sous-espace vectoriel F de E est une norme sur F. Sauf mention contraire, lorsque E est muni d'une norme, nous munirons tout sous-espace vectoriel de la norme restreinte.

- Pour tout $n \in \mathbb{N} - \{0\}$, et pour tout p dans $[1,+\infty]$, la formule

$$||(x_1,\dots,x_n)||_p = \Big(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\Big)^{1/p}$$

pour $p \ne +\infty$, et $||(x_1,\dots,x_n)||_\infty = \sup_{1\le i\le n}|x_i|$, définit une norme sur l'espace vecto
K^n (pour les mêmes raisons que lorsque $K=\mathbb{C}$).

- Pour pour tout p dans $[1,+\infty]$, la formule

$$||(x_i)_{i\in\mathbb{N}}||_p = \Big(\sum_{i=0}^{+\infty} |x_i|^p\Big)^{1/p}$$

pour $p \ne +\infty$, et $||(x_i)_{i\in\mathbb{N}}||_\infty = \sup_{i\in\mathbb{N}}|x_i|$, définit une norme sur l'espace vectoriel $\ell_p($
des suites à coefficients dans K, dont la somme des puissances p-èmes des termes
convergente si $p \ne +\infty$ et qui sont bornées si $p = +\infty$ (pour les mêmes raisons
lorsque $K=\mathbb{C}$).

La *distance définie par la norme* $||\cdot||$ est l'application $d : E\times E \to [0,+\infty[$ définie

$$d(x,y) = ||x-y|| ,$$

qui est bien une distance sur l'ensemble E (ultramétrique si la norme l'est).

Une *semi-norme* sur E est une application $||\cdot||$ de E dans $[0,+\infty[$ vérifiant les p
priétés ci-dessus des normes, où l'on remplace la propriété (i) par celle, plus faible,

(i') si $x=0$ alors $||x||=0$.

La topologie définie par une famille de semi-normes $(||\cdot||_\alpha)_{\alpha\in\mathscr{A}}$ sur E est la topolo
initiale définie par la famille d'applications $\big(x\mapsto ||x-x_0||_{x_0,\alpha}\big)_{x_0\in E,\,\alpha\in\mathscr{A}}$ de E dans $[0,+$
qui vérifie les mêmes propriétés que celles qui ont été énoncées, lorsque $K=\mathbb{R}$, da
l'exemple (2) du paragraphe 2.2

Un *espace vectoriel normé* sur K est un espace vectoriel sur K muni d'une nor
Lorsque K est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ avec leurs valeurs absolues usuelles, cette définition est celle d
vue. Sauf quelques exemples, tous les espaces vectoriels normés de ce cours seront ré
ou complexes. Sauf mention contraire, nous munirons tout espace vectoriel normé sur
de la distance définie par sa norme, et de la topologie définie par cette distance.

Remarques.

- Un espace vectoriel normé, muni donc de la topologie induite par sa norme, est
espace vectoriel topologique (la preuve est la même que celle pour l'espace vectoriel $\mathbb{C}$
le corps $\mathbb{C}$, et est un cas particulier de celle qui suit).
- Un espace vectoriel E, muni de la topologie définie par une famille de semi-norm
$(||\cdot||_\alpha)_{\alpha\in\mathscr{A}}$ (et en particulier un espace vectoriel normé, ainsi qu'un espace vectoriel m
d'une topologie normable, voir l'exercice E.7), est un espace vectoriel topologique.

En effet, par continuité des translations pour une topologie définie par une famille
semi-normes et les propriétés des topologies initiales, il suffit de montrer que pour t
$\alpha\in\mathscr{A}$, les application $(x,y)\mapsto ||x-y||_\alpha$ et $(t,x)\mapsto ||tx||_\alpha$ sont continues en $(0,0)$ et
$(t_0,0)$ respectivement. Ceci découle des inégalités

$$||x-y||_\alpha \le ||x||_\alpha + ||y||_\alpha$$

et
$$||tx||_\alpha = |t|\ ||x||_\alpha \leq (|t_0| + |t - t_0|)||x||_\alpha\ .$$

• En particulier, l'espace de Schwartz $\mathscr{S}(\mathbb{R}^r)$ des applications réelles lisses à décroissance rapide dans $\mathbb{R}^r$, où $r \in \mathbb{N} - \{0\}$, est un espace vectoriel topologique (voir l'exemple 3.1 du paragraphe 2.2). Sa topologie n'est pas induite par une norme (voir l'exercice E.7).

• Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, pour tout ouvert Ω non vide de $\mathbb{R}^r$, où $r \in \mathbb{N} - \{0\}$, pour tout compact non vide K dans Ω, l'espace vectoriel $\mathscr{D}_K(\Omega)$ des applications C^∞ de Ω dans $\mathbb{K}$ dont le support est contenu dans K, muni de la topologie définie dans l'exemple 3.2 du paragraphe 2.2, est un espace vectoriel topologique sur $\mathbb{K}$.

• Avec $\mathbb{K}$ et Ω comme ci-dessus, l'espace vectoriel $\mathscr{D}(\Omega)$ des applications lisses de Ω dans $\mathbb{K}$, à support compact dans Ω, muni ou bien de la topologie de Whitney ou bien de la topologie de Schwartz (voir l'exemple (2) du paragraphe 1.4), est un espace vectoriel topologique (ces topologies sont définies par des familles de semi-normes, voir l'exemple 3.3 du paragraphe 2.2). Mais ces topologies ne sont pas métrisables (voir l'exercice E.9), donc elles ne peuvent pas être induite par une norme.

Espaces vectoriels topologiques localement convexes.

Voici une classe d'espaces vectoriels qui joue un rôle important en analyse fonctionelle.

Un espace vectoriel topologique réel ou complexe E est dit *localement convexe* si le vecteur nul admet un système fondamental de voisinages convexes.

Bien sûr, par continuité des translations et puisque l'intérieur d'un convexe est convexe, tout point admet alors un système fondamental de voisinages convexes ouverts.

Lemme 2.17 *Soient E un espace vectoriel topologique sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, et C un voisinage convexe de 0. Appelons* jauge *de C l'application $||\cdot||_C : E \to [0, +\infty[$ définie par*
$$||x||_C = \inf\ \big\{t > 0\ :\ \frac{1}{t}x \in C\big\}\ .$$
Elle vérifie les propriétés suivantes.

(1) $\forall\ x, y \in E,\ \ \forall\ \lambda > 0,\ \ ||\lambda x||_C = \lambda ||x||_C$ et $||x + y||_C \leq ||x||_C + ||y||_C$.

(2) L'application $||\cdot||_C$ est continue. En particulier, si E est un espace vectoriel normé, alors il existe $M \geq 0$ tel que
$$\forall\ x \in E,\quad ||x||_C \leq M||x||\ .$$

(3) Si C est ouvert, alors
$$C = \{x \in E\ :\ ||x||_C < 1\}\ .$$

(4) Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et si C est symétrique *i.e. si $-x$ appartient à C pour tout x dans C, alors la jauge de C est une semi-norme sur E.*

(5) Si C' est un voisinage convexe de 0 tel que $C' \subset C$, alors $||\cdot||_C \leq ||\cdot||_{C'}$.

(6) Si $(C_\alpha)_{\alpha \in \mathscr{A}}$ est une famille de convexes de E telle que $\bigcap_{\alpha \in \mathscr{A}} C_\alpha$ soit un voisinage de 0, alors
$$||\cdot||_{\bigcap_{\alpha\in\mathscr{A}} C_\alpha} = \sup_{\alpha \in \mathscr{A}} ||\cdot||_{C_\alpha}\ .$$

(7) Pour tous $\lambda > 0$ et $x \in E$,
$$||x||_{\lambda C} = \frac{1}{\lambda}\ ||x||_C\ .$$

Preuve. Montrons les assertions (1) et (4). Comme C est un voisinage de 0, pour to
x dans E, pour t assez grand, $\frac{1}{t}x$ appartient à C, donc $||x||_C$ est bien défini. La jauge
C est nulle sur le vecteur nul (ainsi que sur tout éventuel vecteur non nul x tel que
rayon $\mathbb{R}_+x$ soit contenu dans C), et vérifie par construction la propriété d'homogéné
$||\lambda x||_C = |\lambda|\ ||x||_C$ pour tout réel $\lambda > 0$ (et elle vérifie aussi cette formule pour $\lambda <$
C est symétrique car alors $||-x||_C = ||x||_C$).

Montrons que $||\cdot||_C$ est sous-additive. Soient x et y dans E. Pour tous $s, t > 0$ t
que $\frac{1}{s}x, \frac{1}{t}y \in C$, soit $u = \frac{s}{s+t} \in [0, 1]$. Par convexité de C, on a
$$\frac{1}{s+t}(x+y) = \frac{u}{s}x + \frac{1-u}{t}y \in C\ .$$
Donc $||x+y||_C \leq s+t$. En prenant la borne inférieure sur s et sur t, on a donc $||x+y||_C$
$||x||_C + ||y||_C$.

(2) Comme pour les normes, on déduit de la sous-additivité de $||\cdot||_C$ que
$$\forall\ x, y \in E,\quad \big|\ ||x||_C - ||y||_C\big| \leq ||x - y||_C\ .$$
Donc la continuité de $||\cdot||_C$ en un point quelconque de E découle de sa continuité en

Montrons la continuité de $||\cdot||_C$ en 0. Soit $\epsilon > 0$. Comme C est un voisinage de 0
puisque $\frac{1}{\epsilon}x$ tend vers 0 quand x tend vers 0, il existe un voisinage V de 0 tel que, po
tout $x \in V$, on ait $\frac{1}{\epsilon}x \in C$. Par définition de la jauge, on a alors $||x||_C \leq \epsilon$ pour to
x dans V, ce qu'il fallait démontrer. L'assertion concernant le cas particulier des espa
vectoriels normés s'en déduit par homogénéité de $||\cdot||_C$. (On peut aussi dire que si E
un espace vectoriel normé, alors comme C est un voisinage de 0, il existe $\epsilon > 0$ tel
$B(0, \epsilon) \subset C$. En posant $M = \frac{1}{\epsilon}$, on a donc par construction $||x||_C \leq M||x||$ pour tou
dans E.)

(3) Pour tout x dans C, comme C est ouvert, si ϵ est assez petit, alors $(1+\epsilon)x \in$
donc $||x||_C \leq \frac{1}{1+\epsilon} < 1$. Réciproquement, si $x \in E$ et $||x||_C < 1$, alors il existe $t \in]0, 1[$
que $\frac{1}{t}x \in C$, et donc par convexité $x = t(\frac{1}{t}x) + (1-t)0 \in C$.

L'assertion (5) est évidente, par définition de la jauge d'un convexe.

(6) Notons $C = \bigcap_{\alpha \in \mathscr{A}} C_\alpha$, qui est un voisinage convexe de 0. Par (5), nous avo
$\sup_{\alpha \in \mathscr{A}} ||\cdot||_{C_\alpha} \leq ||\cdot||_C$. Réciproquement, soient x dans E, $\epsilon > 0$ et $t = \sup_{\alpha \in \mathscr{A}} ||x||_{C_\alpha}$
Alors pour tout $\alpha \in \mathscr{A}$, nous avons $t > ||x||_{C_\alpha}$, donc $\frac{1}{t}x \in C_\alpha$. Par conséquent, $\frac{1}{t}x \in$
et $||x||_C \leq t = \sup_{\alpha \in \mathscr{A}} ||x||_{C_\alpha} + \epsilon$. Le résultat en découle en faisant tendre ϵ vers 0.

L'assertion (7) est évidente, par définition de la jauge d'un convexe.

Théorème 2.18 *Un espace vectoriel topologique réel ou complexe est localement conv
si et seulement si sa topologie est définie par une famille de semi-normes.*

*Un espace vectoriel topologique réel ou complexe admet un système fondamental
nombrable de voisinages convexes de 0 si et seulement si sa topologie est définie par
famille dénombrable de semi-normes.*

Preuve. Si $(||\cdot||_\alpha)_{\alpha \in \mathscr{A}}$ est une famille de semi-normes sur un espace vectoriel réel
complexe E, alors d'après le paragraphe 2.2, l'ensemble des parties
$$\{x \in E\ :\ \forall \alpha \in F,\ ||x||_\alpha < \epsilon\}\ ,$$
où F est une partie finie de $\mathscr{A}$ et $\epsilon > 0$, est un système fondamental de voisina
(dénombrable si la famille de semi-normes l'est et en ne prenant que les ϵ rationnels) d

pour la topologie définie par cette famille de semi-normes. Comme toute semi-norme $||\cdot||$ vérifie $||tx+(1-t)y|| \leq t||x||+(1-t)||y||$ pour tout $t\in[0,1]$, ces parties sont convexes, et E, muni de la topologie définie par $(||\cdot||_\alpha)_{\alpha\in\mathscr{A}}$, est localement convexe.

Réciproquement, soit E un espace vectoriel topologique localement convexe réel. Si C est un voisinage ouvert convexe de 0, alors $C\cap(-C)$ est encore un voisinage ouvert convexe de 0, qui est symétrique et contenu dans C. L'ensemble des voisinages ouverts convexes symétriques de 0 est donc un système fondamental de voisinages de 0 dans E.

Soit $\mathscr{V}$ un système fondamental de voisinages ouverts convexes symétriques de 0. Montrons que la topologie définie par la famille de semi-normes $\big(||\cdot||_C\big)_{C\in\mathscr{V}}$ (qui est dénombrable si $\mathscr{V}$ l'est) coïncide avec la topologie originelle de E. Ces deux topologies faisant de E un espace vectoriel topologique, il suffit de montrer que tout voisinage de 0 pour l'une est un voisinage de 0 pour l'autre, et réciproquement.

Pour tout $C\in\mathscr{V}$, on a $C=\{x\in E\ :\ ||x||_C<1\}$ par le lemme 2.17 (3), donc tout voisinage de 0 pour la topologie originelle est un voisinage de 0 pour la topologie définie par $\big(||\cdot||_C\big)_{C\in\mathscr{V}}$.

Réciproquement, pour tout $C\in\mathscr{V}$ et tout $\epsilon>0$, nous avons $\{x\in E\ :\ ||x||_C<\epsilon\}=\frac{1}{\epsilon}C$ et les homothéties sont des homéomorphismes fixant le vecteur nul. Donc tout voisinage de 0 pour la topologie définie par $\big(||\cdot||_C\big)_{C\in\mathscr{V}}$ est un voisinage de 0 pour la topologie originelle.

Supposons finalement que E soit un espace vectoriel topologique localement convexe complexe. La preuve ci-dessous utilise des notions de compacité et d'uniforme continuité, qui seront étudiées dans les chapitres 4 et 5. Le lecteur se convaincra facilement qu'il n'y a pas de boucle logique ! Soit $\mathscr{V}$ un système fondamental de voisinages ouverts convexes de 0. Notons $\mathbb{S}_1=\{\lambda\in\mathbb{C}\ :\ |\lambda|=1\}$. Pour tous $C\in\mathscr{V}$ et $x\in E$, définissons

$$||x||'_C=\sup_{\lambda\in\mathbb{S}_1}||\lambda x||_C\ .$$

L'application $\lambda\mapsto||\lambda x||_C$ de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{R}$ est continue, par composition d'applications continues (voir le lemme 2.17 (2)). Par compacité de $\mathbb{S}_1$ (voir le corollaire 4.15), la borne supérieure définissant $||x||'_C$ est atteinte, et en particulier, $||x||'_C$ est fini. Il est alors immédiat, par construction et par le lemme 2.17 (1), que l'application $||\cdot||'_C:E\to[0,+\infty[$ est une semi-norme.

Montrons que la topologie définie par la famille de semi-normes $\big(||\cdot||'_C\big)_{C\in\mathscr{V}}$ (qui est dénombrable si $\mathscr{V}$ l'est) coïncide avec la topologie originelle de E.

Pour tout x dans E, si $||x||'_C<1$, alors $||x||_C<1$, donc $x\in C$ par le lemme 2.17 (3). Donc tout voisinage de 0 pour la topologie originelle contient un voisinage de 0 pour la topologie définie par $\big(||\cdot||'_C\big)_{C\in\mathscr{V}}$.

Réciproquement, comme l'application de $\mathbb{S}_1\times E\to E$ définie par $(\lambda,x)\mapsto\lambda x$ est continue et puisque $\mathbb{S}_1$ est compact, il découle de la proposition 5.5 (2) que l'application $x\mapsto\lambda x$ est continue uniformément en λ. Donc pour tout $C\in\mathscr{V}$, et tout $\epsilon>0$, il existe $C'\in\mathscr{V}$ tel que pour tout $x\in C'$ et pour tout $\lambda\in\mathbb{S}_1$, nous avons $\lambda x\in\frac{2}{\epsilon}C$, c'est-à-dire $||\lambda x||_C<\frac{\epsilon}{2}$. Ceci implique que C' est contenu dans $\{x\in E\ :\ ||x||'_C<\epsilon\}$. Donc (en passant aux intersections finies), tout voisinage de 0 pour la topologie définie par $\big(||\cdot||'_C\big)_{C\in\mathscr{V}}$ contient un voisinage de 0 pour la topologie originelle. □

Exemples. Les exemples suivants sont des cas particuliers d'espaces vectoriels réels ou complexes, munis de topologies définies par une famille de semi-normes, pour lesquels on applique le théorème 2.18.

- Les espaces vectoriels normés réels ou complexes sont localement convexes.
- L'espace de Schwartz $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ des fonctions lisses à décroissance rapide sur $\mathbb{R}^n$ localement convexe.
- Pour tout ouvert Ω non vide de $\mathbb{R}^r$, où $r\in\mathbb{N}-\{0\}$, pour tout compact non vide dans Ω, les espaces vectoriels réels ou complexes $\mathscr{D}(\Omega)$ et $\mathscr{D}_K(\Omega)$ sont localement convex

Remarque. Il découle de la proposition 2.13 (voir aussi le tout dernier exemple paragraphe 2.6) que si E est un espace vectoriel topologique localement convexe, et $\mathscr{D}(\Omega)\to E$ est une application linéaire, alors f est continue pour la topologie de Schwa sur $\mathscr{D}(\Omega)$ si et seulement si, pour tout compact non vide K de Ω, la restriction $f_{|\mathscr{D}_K(}$ $\mathscr{D}_K(\Omega)\to E$ est continue pour la topologie de $\mathscr{D}_K(\Omega)$ (définie par la famille de se normes $(||\cdot||_m)_{m\in\mathbb{R}^r}$). Le corollaire 2.14 est un cas particulier de cette remarque.

Continuité des applications linéaires et multilinéaires.

Soit $\mathbb{K}$ un corps muni d'une valeur absolue non triviale $|\cdot|$. Soient E,F deux espa vectoriels normés sur $\mathbb{K}$. Pour toute application linéaire $f:E\to F$, on pose

$$||f||=\sup_{x\in E-\{0\}}\frac{||f(x)||}{||x||}\ .$$

Lorsque $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{K}=\mathbb{C}$, on a aussi

$$||f||=\sup_{x\in E,\ ||x||=1}||f(x)||=\sup_{x\in E,\ ||x||\leq 1}||f(x)||\ .$$

Si $F=\mathbb{K}=\mathbb{R}$, c'est-à-dire lorsque f est une forme linéaire réelle, on a aussi, par invaria de la sphère unité et de la boule unité par passage à l'opposé,

$$||f||=\sup_{x\in E,\ ||x||=1}f(x)=\sup_{x\in E,\ ||x||\leq 1}f(x)\ .$$

Proposition 2.19 *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(1) f est continue en 0 ;

(2) f est continue ;

(3) $||f||$ est fini.

C'est à cause de l'équivalence entre (1) et (3) que les termes « *application liné bornée* » et « application linéaire continue » sont parfois employés comme synonymes

La preuve a déjà été vue dans le cas $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{K}=\mathbb{C}$. L'équivalence des de premières assertions est une propriété des espaces vectoriels topologiques.

Preuve. Supposons que (3) soit vérifié, et montrons (2). Nous pouvons supposer $||f||\neq 0$, car sinon f est l'application nulle, qui est continue. Si $||x-x_0||<\frac{\epsilon}{||f||}$, al $||f(x)-f(x_0)||<\epsilon$, donc (2) est vérifié. Il est immédiat que (2) implique (1).

Montrons que (1) implique (3). Comme la valeur absolue de $\mathbb{K}$ est non triviale (et considérant les inverses), il existe t dans $\mathbb{K}$ tel que $|t|>1$. Soit $\epsilon>0$ tel que si $||x||\leq$ alors $||f(x)||\leq 1$. Pour tout y dans E, soit $n\in\mathbb{Z}$ tel que $\epsilon|t|^{n-1}\leq||y||\leq\epsilon|t|^n$. Alors

$$\frac{||f(y)||}{||y||}=\frac{||f(t^{-n}y)||}{||t^{-n}y||}\leq\frac{|t|}{\epsilon}\ .\quad\square$$

Exercice E.41 *Soient E et F deux espaces vectoriels topologiques réels ou complexes dont les topologies sont définies par les familles de semi-normes $(||\cdot||_i)_{i\in I}$ et $(||\cdot||_j)_{j\in J}$ respectivement, et soit $f : E \to F$ une application linéaire. Montrer que f est continue si et seulement si*

$$\forall\, j \in J,\ \exists\, i_1, \dots, i_k \in I,\ \exists\, c \geq 0,\ \forall\, x \in E, \quad ||f(x)||_j \leq c\,(||x||_{i_1} + \dots + ||x||_{i_k})\ .$$

Notons $\mathscr{L}(E,F)$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ des applications linéaires continues de E dans F. La proposition suivante est immédiate (et sa preuve est la même que celle pour $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{K}=\mathbb{C}$, déjà vue l'année dernière).

Proposition 2.20 *(i) L'application $f \mapsto ||f||$ est une norme sur $\mathscr{L}(E,F)$, appelée* norme d'opérateur.

(ii) Si $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $g \in \mathscr{L}(F,G)$, alors

$$||g \circ f|| \leq ||g||\,||f||\ .$$

(iii) Si $E \neq \{0\}$, alors $||\mathrm{id}|| = 1$. □

En particulier, si V est un espace vectoriel normé, alors l'espace vectoriel $\mathscr{E}nd(V)$ des endomorphismes continus de V est un espace vectoriel normé pour la norme définie ci-dessus.

Il découle de la proposition 2.20 (ii) que si $f \in \mathscr{L}(E,E)$, alors

$$||f^n|| \leq ||f||^n\ .$$

Pour tout f dans $\mathscr{L}(E,F)$, la composition à droite par f, c'est-à-dire l'application linéaire de $\mathscr{L}(F,G)$ dans $\mathscr{L}(E,G)$ définie par

$$g \mapsto g \circ f\ ,$$

est continue, de norme inférieure ou égale à $||f||$. De même, pour tout g dans $\mathscr{L}(F,G)$, la composition à gauche par g, c'est-à-dire l'application linéaire de $\mathscr{L}(E,F)$ dans $\mathscr{L}(E,G)$ définie par

$$f \mapsto g \circ f$$

est continue, de norme inférieure ou égale à $||g||$.

Remarque. Si E est un espace vectoriel normé sur $\mathbb{K}$, alors l'application de E dans $\mathscr{L}(\mathbb{K},E)$ définie par $x \mapsto \{\varphi_x : t \mapsto tx\}$ est un isomorphisme linéaire isométrique (la norme d'opérateur de φ_x est égale à la norme de x).

Soient $E_1, \dots, E_n, F, G$ des espaces vectoriels normés sur $\mathbb{K}$. Comme ci-dessus, une application multilinéaire u de $E_1 \times \dots \times E_n$ dans F est continue si et seulement si elle est continue en $(0,\dots,0)$, et si et seulement s'il existe $c \geq 0$ tel que

$$\forall\, x_1 \in E_1,\ \dots,\ \forall\, x_n \in E_n, \quad ||u(x_1,\dots,x_n)|| \leq c\,||x_1||\dots||x_n||\ .$$

Notons

$$\mathscr{L}(E_1,\dots,E_n;F)$$

l'espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ des applications multilinéaires continues de $E_1 \times \dots \times E_n$ da
F. Muni de la norme

$$||u|| = \sup_{x_1\in E_1-\{0\},\,\dots,\,x_n\in E_n-\{0\},} \frac{||u(x_1,\dots,x_n)||}{||x_1||\dots||x_n||}\ ,$$

c'est un espace vectoriel normé sur $\mathbb{K}$. Lorsque $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{K}=\mathbb{C}$, on a aussi

$$||u|| = \sup_{||x_1||=1,\,\dots,\,||x_n||=1} ||u(x_1,\dots,x_n)|| = \sup_{||x_1||\leq 1,\,\dots,\,||x_n||\leq 1} ||u(x_1,\dots,x_n)||\ .$$

Si $F=\mathbb{K}=\mathbb{R}$, c'est-à-dire lorsque u est une forme multilinéaire réelle, on a aussi, p
invariance de la sphère unité et de la boule unité par passage à l'opposé,

$$||u|| = \sup_{||x_1||=1,\,\dots,\,||x_n||=1} u(x_1,\dots,x_n) = \sup_{||x_1||\leq 1,\,\dots,\,||x_n||\leq 1} u(x_1,\dots,x_n)\ .$$

Comme dans la proposition 2.20 (ii), si $f \in \mathscr{L}(E_1,\dots,E_n;F)$ et si $g \in \mathscr{L}(F,G)$, al
$g \circ f \in \mathscr{L}(E_1,\dots,E_n;G)$ et

$$||g \circ f|| \leq ||g||\,||f||\ .$$

En particulier, l'application de $\mathscr{L}(E_1,\dots,E_n;F) \times \mathscr{L}(F,G)$ dans $\mathscr{L}(E_1,\dots,E_n;G)$
finie par

$$(f,g) \mapsto g \circ f$$

est bilinéaire, continue, de norme inférieure ou égale à 1.

Proposition 2.21 *Soient E,F,G trois espaces vectoriels normés sur $\mathbb{K}$. Alors l'appli
tion de $\mathscr{L}(E,F;G)$ dans $\mathscr{L}(E,\mathscr{L}(F,G))$ définie par*

$$u \mapsto \big\{x \mapsto (u_x : y \mapsto u(x,y))\big\}$$

est un isomorphisme linéaire qui est une isométrie pour les normes.

Par récurrence, il existe donc une isométrie linéaire entre les espaces vectoriels norm
$\mathscr{L}(E_1,\dots,E_n;F)$ et $\mathscr{L}(E_1,\mathscr{L}(E_2,\dots,\mathscr{L}(E_n,F))\dots)$.

Preuve. Comme

$$||u_x(y)|| = ||u(x,y)|| \leq ||u||\,||x||\,||y||\ ,$$

l'application linéaire $u_x : F \to G$ est continue, et $||u_x|| \leq ||u||\,||x||$. Donc l'applicat
linéaire $x \mapsto u_x$ est continue, de norme au plus $||u||$. Comme

$$\sup_{x\in E-\{0\}} \frac{||u_x||}{||x||} = \sup_{x\in E-\{0\}}\ \sup_{y\in F-\{0\}} \frac{||u_x(y)||}{||x||\,||y||} = ||u||\ ,$$

l'application considérée est bien une isométrie. Enfin, montrons qu'elle est surjective.
$v \in \mathscr{L}(E,\mathscr{L}(F,G))$, alors l'application $u : (x,y) \mapsto v(x)(y)$ est clairement bilinéaire,
comme

$$||v(x)(y)|| \leq ||v(x)||\,||y|| \leq ||v||\,||x||\,||y||\ ,$$

l'application u est continue, et $v(x) = u_x$, ce qui démontre le résultat.

Nous terminons ce paragraphe par deux constructions d'espaces vectoriels topolo
ques, qui sont très importantes en analyse.

Topologie faible.

Soit E un espace vectoriel topologique sur un corps topologique $\mathbb{K}$ (par exemple un espace vectoriel normé réel ou complexe). La topologie de E (par exemple celle induite par la distance induite par la norme, le cas échéant) est aussi appelée la *topologie forte*, et une application continue de E, muni de la topologie forte, dans un espace topologique est dite *fortement continue*. Le *dual topologique* E' (aussi noté E^*, voire $\check{E}$, le plus simple est de toujours préciser si l'on prend le dual algébrique ou topologique) de E est l'espace vectoriel des formes linéaires fortement continues sur E.

La topologie initiale sur E définie par la famille $(\ell)_{\ell\in E'}$ est appelée la *topologie faible* sur E, voire pour préciser la topologie faible $\sigma(E, E')$. Par définition, la topologie faible sur E est la topologie la moins fine rendant continues les formes linéaires fortement continues.

Remarque. Pour tout ℓ dans E', l'application de E dans $[0, +\infty[$ définie par $x \mapsto |\ell(x)|$ est clairement une semi-norme sur E, par linéarité de ℓ. La topologie faible sur E coïncide avec la topologie définie par la famille de semi-normes $\big(x \mapsto |\ell(x)|\big)_{\ell\in E'}$ (toujours par linéarité des $\ell \in E'$).

Les propriétés suivantes découlent de celles des topologies initiales, ou sont élémentaires :

- si $x_0 \in E$, alors l'ensemble des parties de la forme

$$V_{\epsilon,\ell_1,\dots,\ell_n}(x_0) = \{x \in E \ : \ |\ell_i(x) - \ell_i(x_0)| < \epsilon, \quad 1 \le i \le n\}$$

lorsque $\epsilon > 0$, $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ et $\ell_1, ..., \ell_n \in E'$, est un système fondamental de voisinages de x_0 dans E pour la topologie faible ;

- les ouverts pour la topologie faible sont les unions d'intersections finies de parties de la forme $\ell^{-1}(\mathscr{O})$ avec $\mathscr{O}$ ouvert de $\mathbb{K}$ et $\ell \in E'$;
- la topologie forte sur E est plus fine que la topologie faible (car la topologie forte rend continue les formes linéaires fortement continues, par définition) ;
- l'espace vectoriel E, muni de la topologie faible, est un espace vectoriel topologique (par la linéarité des applications définissant la topologie initiale) ; si $\mathbb{K}$ est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, alors comme les voisinages $V_{\epsilon,\ell_1,\dots,\ell_n}(0)$ sont convexes, par linéarité des ℓ_i, l'espace vectoriel topologique E est localement convexe ;
- si E est un espace vectoriel normé sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ de dimension finie n, alors la topologie forte et la topologie faible coïncident.

En effet, lorsque nous aurons montré (voir le corollaire 4.16) que deux espaces vectoriels normés sur $\mathbb{K}$ de même dimension finie sont homéomorphes, cela découlera du fait que sur $\mathbb{K}^n$ muni de la norme $||(x_1, \dots, x_n)||_\infty = \max_{1\le i\le n} |x_i|$, si $\ell_1, \dots, \ell_n$ sont les formes linéaires coordonnées (qui sont continues, car de norme 1), alors la boule ouverte de centre 0 et de rayon $\epsilon > 0$ est égale à $\bigcap_{i=1}^n \ell_i^{-1}(\{x \in \mathbb{K} \ : \ |x| < \epsilon\})$, donc est un ouvert faible, ce qui conclut par les deux points précédents.

Exercice E.42 *Soit E un espace vectoriel normé réel ou complexe.*

(1) Montrer que si E est de dimension infinie, alors la topologie forte et la topologie faible sont distinctes.

(2) Quel est l'intérieur, pour la topologie faible, de la boule unité ouverte de l'espace vectoriel normé E ? Quelle est l'adhérence, pour la topologie faible, de la sphère unité de E ?

Nous reviendrons sur cet exemple dans le chapitre 6, en montrant que bien que topologie faible d'un espace vectoriel normé soit séparée, elle n'est ni égale à la topolo forte ni métrisable en dimension infinie.

Topologie faible-étoile.

Soient E un espace vectoriel topologique sur un corps topologique $\mathbb{K}$, et E^* le d topologique de E. La *topologie faible-étoile* est la topologie initiale sur E^* définie par famille d'applications $(\varphi_x : E^* \to \mathbb{K})_{x\in E}$, où $\varphi_x : \ell \mapsto \ell(x)$. Attention, c'est une topolo sur E^*, pas sur E. C'est donc la topologie la moins fine sur E^* rendant continue applications d'évaluation en tout point de E des formes linéaires fortement continues E.

Remarque. Pour tout x dans E, l'application de E^* dans $[0, +\infty[$ définie par $\ell \mapsto |\ell($ est clairement une semi-norme sur E^*, par linéarité de φ_x. La topologie faible-étoile sur coïncide avec la topologie définie par la famille de semi-normes $\big(\ell \mapsto |\ell(x)|\big)_{x\in E}$ (toujo par linéarité des φ_x).

Si $\ell_0 \in E^*$, alors par les propriétés des topologies initiales, l'ensemble des parties la forme

$$V_{\epsilon,x_1,\dots,x_n}(\ell_0) = \{\ell \in E^* \ : \ \forall\, i = 1, ..., n, \ \ |\ell(x_i) - \ell_0(x_i)| < \epsilon\}$$

lorsque $\epsilon > 0$, $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ et $x_1, ..., x_n \in E$, est un système fondamental de voisinages ℓ_0 dans E^* pour la topologie faible-étoile.

L'espace vectoriel E^*, muni de la topologie faible-étoile, est un espace vectoriel pologique (par la linéarité des applications définissant la topologie initiale). Si $\mathbb{K}$ est ou $\mathbb{C}$, alors comme les voisinages $V_{\epsilon,x_1,\dots,x_n}(0)$ sont clairement convexes, l'espace vector topologique E^* est localement convexe.

Proposition 2.22 *La topologie faible-étoile sur E^* est séparée.*

La famille des semi-normes $\big(\ell \mapsto |\ell(x)|\big)_{x\in E}$ est clairement séparante, donc ceci est cas particulier de la proposition 2.1 (1).

Preuve. Si ℓ' et ℓ'' sont deux éléments distincts de E^*, alors il existe un élément x d E tel que $\epsilon = |\ell'(x) - \ell''(x)| > 0$. Par conséquent $\{\ell \in E^* \ : \ |\ell(x) - \ell'(x)| <$ et $\{\ell \in E^* \ : \ |\ell(x) - \ell''(x)| < \frac{\epsilon}{2}\}$ sont deux voisinages ouverts disjoints de ℓ' et respectivement, pour la topologie faible-étoile.

Soit E un espace vectoriel normé réel. Pour tout ℓ dans E^*, posons

$$||\ell|| = \sup_{x\in E\,,\,||x||\le 1} |\ell(x)| = \sup_{x\in E\,,\,||x||\le 1} \ell(x)\ .$$

Par la proposition 2.20, l'application $\ell \mapsto ||\ell||$ est une norme sur E^*, appelée la *nor duale*. Donc $(E^*, ||\ ||)$ un espace vectoriel réel normé. Il est facile de voir que toute appli tion φ_x, pour $x \in X$, est une forme linéaire fortement continue sur E^* pour cette norm $|\ell(x)| \le ||x||\,||\ell||$ pour tout ℓ dans E^*. La topologie faible-étoile de E^* est donc moins f que la topologie faible de E^* (qui elle-même est moins fine que la topologie forte de E Lorsque E est de dimension finie, il est facile de montrer que ces trois topologies sur coïncident. Nous y reviendrons ultérieurement.

Proposition 2.23 *Soit E un espace vectoriel normé réel, D une partie de E, et $\mathscr{O}_D$ la topologie initiale sur E^* définie par $(\varphi_x : E^* \to \mathbb{R})_{x \in D}$. Alors $\mathscr{O}_D$ est moins fine que la topologie faible-étoile sur E^*. De plus, si D est dense dans E, alors sur tout borné (pour la norme duale) de E^*, les restrictions des topologies $\mathscr{O}_D$ et faible-étoile coïncident.*

Preuve. La première assertion est immédiate.

Par les propriétés des topologies initiales, pour tout $\ell_0 \in E^*$, l'ensemble des parties de la forme

$$V_{\epsilon, x_1, \dots, x_n}(\ell_0) = \{\ell \in E^* \ : \ \forall\, i \in \{1, \dots, n\}, \ \ |\ell(x_i) - \ell_0(x_i)| < \epsilon\}$$

lorsque $\epsilon > 0$, $n \in \mathbb{N}$ et $x_1, \dots, x_n \in D$, est un système fondamental de voisinages de ℓ_0 pour $\mathscr{O}_D$.

Pour tous $\ell, \ell_0 \in E^*$ de normes duales au plus c, et pour tous $x, y \in E$, nous avons

$$\begin{aligned} |\ell(x) - \ell_0(x)| &\leq |\ell(x) - \ell(y)| + |\ell(y) - \ell_0(y)| + |\ell_0(y) - \ell_0(x)| \\ &\leq ||\ell||\, ||x - y|| + |\ell(y) - \ell_0(y)| + ||\ell_0||\, ||x - y|| \\ &\leq |\ell(y) - \ell_0(y)| + 2c\, ||x - y||\ . \end{aligned}$$

Le résultat en découle. □

Nous reviendrons plus longuement sur les propriétés topologiques des espaces vectoriels normés dans le chapitre 6.

En analyse, on considère fréquemment des espaces vectoriels topologiques d'applications à valeurs réelles ou complexes, que l'on appelle souvent *espaces fonctionnels*, ainsi que des applications linéaires entre espaces fonctionnels, que l'on appelle souvent *opérateurs*. Nous y reviendrons au chapitre 6.

2.9 Espace quotient d'une action de groupe

Un exemple important d'ensemble quotient est l'ensemble des orbites de l'action d'un groupe sur un ensemble. Il est important d'étudier les topologies quotients dans ce cadre.

Nous renvoyons au cours d'Algèbre I pour les notions d'actions de groupes sur des ensembles. Soient G un groupe topologique et X un espace topologique. Une *action continue (à gauche)* de G sur X est une action (à gauche) de G sur X qui est continue, i.e. c'est une application continue de l'espace topologique produit $G \times X$ dans X, notée $(g, x) \mapsto g \cdot x$ ou tout simplement $(g, x) \mapsto gx$ s'il y a pas de risque de confusion, telle que

$$\forall\, x \in X, \ \ \forall\, g, h \in G, \ \ e \cdot x = x, \quad \text{et} \quad (gh) \cdot x = g \cdot (h \cdot x)\ .$$

Dans toute la suite de ce texte et sauf mention contraire, toute action d'un groupe topologique sur un espace topologique sera une action continue (à gauche). Notons qu'alors, pour tout g dans G, l'application $x \mapsto g \cdot x$ est un homéomorphisme de X, d'inverse $x \mapsto g^{-1} \cdot x$, et que l'application du groupe G dans le groupe des homéomorphismes de X défini par $g \mapsto (x \mapsto g \cdot x)$ est un morphisme de groupes.

Par exemple, si G est un groupe topologique, si H est un sous-groupe de G, alors les actions de H sur G par translations à gauche $(h, g) \mapsto hg$ et par translations à droite $(h, g) \mapsto gh^{-1}$ sont clairement continues.

Soient G un groupe topologique et X un espace topologique muni d'une action (con
nue à gauche) de G. Notons $\mathscr{R}$ la relation d'équivalence définie par $x \mathscr{R} y$ si et seulem
si x et y sont dans la même orbite, i.e. s'il existe g dans G tel que $y = gx$. Note
$G \backslash X = X/\mathscr{R}$ l'ensemble quotient de cette action et $\pi : X \to G \backslash X$ la projection
nonique. Chaque orbite sera, sauf mention contraire, munie de la topologie induite,
l'ensemble quotient $G \backslash X$ sera muni de la topologie quotient.

La projection canonique π est alors continue par définition de la topologie quotie
mais elle est de plus ouverte, par la proposition 2.24 ci-dessous.

En particulier, si H est un sous-groupe de G, nous notons respectivement $H \backslash G$ et G
les espaces topologiques quotients des actions par translations à gauche et par translatio
à droite. Nous verrons dans le corollaire 2.26 ci-dessous que l'action de G par translatio
à gauche sur l'espace topologique quotient G/H, définie par

$$\begin{array}{ccc} G \times G/H & \to & G/H \\ (g, g'H) & \mapsto & gg'H\ , \end{array}$$

et l'action de G par translations à droite sur l'espace topologique quotient $H \backslash G$, défi
par

$$\begin{array}{ccc} G \times H \backslash G & \to & H \backslash G \\ (g, Hg') & \mapsto & Hg'g^{-1}\ , \end{array}$$

sont continues.

Proposition 2.24 *Pour toute action continue d'un groupe topologique G sur un esp
topologique X, la projection canonique $\pi : X \to G \backslash X$ est ouverte.*

Preuve. Pour tout ouvert U de X, son image $\pi(U)$ est un ouvert de $G \backslash X$, car $\pi^{-1}(\pi(U)$
$\bigcup_{g \in G} gU$, qui est une union d'ouverts, car G agit par homéomorphismes.

Voici un critère simple (cas particulier de l'exercice E.29) pour savoir quand l'espa
quotient d'une action est séparé.

Proposition 2.25 *L'espace topologique quotient $G \backslash X$ est séparé si et seulement si $\mathscr{R}$
un fermé de $X \times X$. Dans ce cas, toute orbite de G dans X est fermée.*

Preuve. Soient x et y deux points de X qui ne sont pas dans la même orbite.

Si $G \backslash X$ est séparé, alors il existe deux ouverts saturés disjoints U et V contena
respectivement x et y. Donc $U \times V$ est un voisinage de (x, y) dans $X \times X$ ne rencontra
pas $\mathscr{R}$, et $\mathscr{R}$ est fermé.

Réciproquement, si $\mathscr{R}$ est fermé, alors il existe des voisinages ouverts U de x et V
y tels que $(U \times V) \cap \mathscr{R} = \emptyset$. Comme π est ouverte, $\pi(U)$ et $\pi(V)$ sont deux voisina
ouverts de $\pi(x)$ et $\pi(y)$ respectivement, qui sont disjoints par construction. Donc $G \backslash$
est séparé.

Comme les singletons d'un espace séparé sont fermés, l'image réciproque d'un fer
par une application continue est un fermé, la dernière assertion est claire.

Porisme 2.26 *Soient G un groupe topologique, H un sous-groupe, et $\pi : G \to G/H$
projection canonique. Alors*

- *l'application π est continue et ouverte, et l'action de G sur G/H par translation
gauche est continue ;*

- *si H est distingué, alors le groupe quotient G/H (muni de la topologie quotient) est un groupe topologique ;*
- *l'espace topologique quotient G/H est séparé si et seulement si H est fermé.*

Ce résultat est bien sûr encore valable en remplaçant G/H par $H\backslash G$ et translations à gauche par translations à droite.

Preuve. Le résultat découle des propositions 2.24 et 2.25, par les trois remarques suivantes.

(1) Soit $\psi : G \times G/H \to G/H$ l'action de G sur G/H, définie par $(g, g'H) \mapsto gg'H$. Pour tout ouvert U de G/H, l'ensemble

$$V = \{(g, g') \in G \times G \ : \ gg' \in \pi^{-1}(U)\}$$

est ouvert, car la multiplication dans G et l'application π sont continues. Par l'exercice (corrigé) E.20, l'application $\pi' : (G \times G) \to (G \times H\backslash G)$ définie par $(g, g') \mapsto (g, g'H)$ est ouverte, car $g' \mapsto g'H$ l'est par la proposition 2.24. Donc $\psi^{-1}(U) = \pi'(V)$ est ouvert, et ψ est continue.

(2) Par ce qui précède et par composition, l'application de $G \times G/H$ dans G/H définie par $(g, g'H) \mapsto g^{-1}g'H$ est continue, donc, par passage au quotient si H est distingué, l'application de $G/H \times G/H$ dans G/H définie par $(x, y) \mapsto x^{-1}y$ est continue.

(3) Soient $\mathscr{R}$ la relation d'équivalence « être dans la même classe à droite par H » sur G, et $\phi : G \times G \to G$ l'application continue $(x, y) \mapsto x^{-1}y$. Alors $\mathscr{R} = \phi^{-1}(H)$. De plus, H est l'orbite de e pour l'action par translations à gauche de H sur G. □

Exemples.

(1) Pour tout n dans $\mathbb{N}$, pour tout corps topologique K, le groupe multiplicatif $K^\times = (K^*, \times)$ agit (continuement à gauche) sur l'espace topologique $K^{n+1} - \{0\}$ par la restriction de la multiplication scalaire $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$. La relation d'équivalence définie par cette action est formée des couples (x, y) de vecteurs non nuls colinéaires de K^{n+1}, donc ses classes d'équivalences sont les droites vectorielles (privées de 0). On note $\mathbb{P}_n(K)$ (ou parfois $K\mathbb{P}_n$) et on appelle *espace projectif* de K^{n+1} l'espace topologique quotient $K^\times\backslash(K^{n+1} - \{0\})$. On appelle $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ l'*espace projectif réel* de dimension n. On appelle $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ l'*espace projectif complexe* de dimension n.

(1') Pour tout n dans $\mathbb{N}$, le groupe (discret) multiplicatif $\{\pm 1\}$ agit (continuement à gauche) sur la sphère $\mathbb{S}_n$ par $x \mapsto \pm x$, et la relation d'équivalence définie par cette action, qui est formée des couples (x, y) avec $y = \pm x$, est fermée. Donc $\{\pm 1\}\backslash\mathbb{S}_n$ est un espace topologique séparé.

L'inclusion de $\mathbb{S}_n$ dans $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ est continue, et induit par passage aux quotients une bijection continue f de $\{\pm 1\}\backslash\mathbb{S}_n$ sur $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$. Son inverse, qui est l'application induite par passage aux quotients de l'application continue de $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ dans $\mathbb{S}_n$ définie par $x \mapsto x/||x||$, est encore continue. Donc f est un homéomorphisme (et on identifie souvent $\{\pm 1\}\backslash\mathbb{S}_n$ et $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ par cette application).

(2) Soient $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N} - \{0\}$. Le groupe (discret) $\mathscr{U}_p = \{\lambda \in \mathbb{C} \ : \ \lambda^p = 1\}$ des racines p-èmes de l'unité agit (continuement à gauche) sur la sphère de dimension impaire

$$\mathbb{S}_{2n+1} = \{(z_0, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^{n+1} \ : \ |z_0|^2 + \dots + |z_n|^2 = 1\}$$

par $(\lambda, (z_0, \dots, z_n)) \mapsto (\lambda z_0, \dots, \lambda z_n)$. Il est facile de vérifier que la relation d'équivalence définie par cette action est fermée. Donc l'espace quotient $L_{n,p} = \mathscr{U}_p\backslash\mathbb{S}_{2n+1}$ est un espace topologique séparé. Il est appelé un *espace lenticulaire*.

(3) Soit $n \in \mathbb{N}$. Le sous-groupe $\mathbb{Z}^n$ de $\mathbb{R}^n$ est fermé, donc l'espace quotient $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/$
est séparé (ce que nous avions déjà montré dans l'exemple E.29).

Étudions la topologie quotient de G/H dans le cas particulier où G est le grou
additif d'un espace vectoriel topologique, et où H est le sous-groupe additif d'un so
espace vectoriel. Notons qu'alors l'espace vectoriel quotient G/H, muni de la topolo
quotient, est un espace vectoriel topologique, par le second point du corollaire 2.26 et p
continuité du passage au quotient de la multiplication externe.

Soit E un espace vectoriel topologique réel ou complexe, dont la topologie est défi
par une famille de semi-normes $(n_i)_{i \in I}$, et F un sous-espace vectoriel. Pour tout $\overline{x} = x+$
dans l'espace vectoriel quotient E/F, notons

$$\overline{n}_i(\overline{x}) = \inf_{y \in F} \ n_i(x + y) \ .$$

qui ne dépend pas du choix d'un représentant. On appelle l'application $\overline{n}_i$ la *semi-nor*
quotient de n_i, qui est bien une semi-norme par le résultat suivant. En particulier,
$(E, ||\cdot||)$ est un espace vectoriel normé, alors on appelle *norme quotient* l'applicat
encore notée $||\cdot||$ de E/F dans $[0, +\infty[$ définie par

$$||\ \overline{x}\ || = \inf_{y \in F} \ ||x + y|| \ .$$

Sauf mention contraire, nous munirons E/F de la norme quotient, qui est bien une nor
lorsque F est fermé, par le résultat suivant.

Proposition 2.27 *Avec les notations ci-dessus, $\overline{n}_i$ est une semi-norme sur E/F.*
plus, la topologie sur E/F définie par la famille de semi-normes $(\overline{n}_i)_{i \in I}$ est moins fine
la topologie quotient, et coïncide avec elle si I ne contient qu'un élément.

Si E est un espace vectoriel normé, et si F est un sous-espace vectoriel fermé, al
la norme quotient est une norme.

Preuve. Il est immédiat que l'application $\overline{n}_i : E/F \to [0, +\infty[$ s'annule sur le vecteur
$\overline{0}$, et vérifie $\overline{n}_i(\lambda\overline{x}) = |\lambda|\overline{n}_i(\overline{x})$, par invariance par homothéties de F. Pour tous x, x' dans
pour tout $\epsilon > 0$, soient y, y' dans F tels que $n_i(x+y) \leq \overline{n}_i(\overline{x}) + \epsilon$ et $n_i(x'+y') \leq \overline{n}_i(\overline{x'})$
Alors, par inégalité triangulaire,

$$\begin{aligned}\overline{n}_i(\overline{x} + \overline{x'}) = \overline{n}_i(\,\overline{x + x'}\,) &\leq n_i((x + x') + (y + y')) \leq n_i(x + y) + n_i(x' + y') \\ &\leq \overline{n}_i(\overline{x}) + \overline{n}_i(\overline{x'}) + 2\epsilon \ ,\end{aligned}$$

d'où l'inégalité triangulaire de $\overline{n}_i$ en faisant tendre ϵ vers 0.

La topologie quotient sur l'espace vectoriel topologique E/F rend les applications
continues (car les $n_i : E \to [0, +\infty[$ le sont). Donc la topologie quotient est plus fine
la topologie définie par la famille de semi-normes $(\overline{n_i})_{i \in I}$.

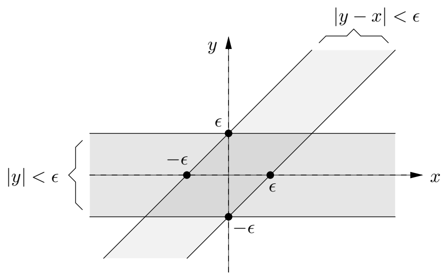
L'image par π de la (pseudo-)boule ouverte de centre x et de rayon ϵ pour la pseu
distance associée à n_i est égale à la (pseudo-)boule ouverte de centre $\pi(x)$ et de rayo
pour la pseudo-distance associée à $\overline{n_i}$. Donc lorsque $I = \{i\}$ est un singleton, si U est
ouvert de E/F pour la topologie quotient, alors $\pi^{-1}(U)$ est une union de (pseudo-)bou
ouverte pour n_i, donc $U = \pi(\pi^{-1}(U))$ est une union de (pseudo-)boules ouverte pour
Les deux topologies coïncident donc.

Enfin, si $||\cdot||$ est la norme quotient d'une norme sur E, il suffit par ce qui préc
de montrer qu'elle vérifie l'axiome de séparation pour montrer qu'elle est une norme.

$|| \overline{x} || = 0$, alors il existe une suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans F qui converge vers $-x$. Comme F est (stable par l'opposé et) fermé, le point x appartient à F, et donc $\overline{x} = 0$. $\square$

Exemples. (1) Soient E un espace vectoriel, $||\cdot||$ une semi-norme sur E, et $F = \{x \in E \ : \ ||x|| = 0\}$. Il est immédiat de vérifier que F est un sous-espace vectoriel fermé de E muni de la topologie (d'espace vectoriel topologique) définie par la semi-norme, et que la semi-norme quotient est une norme (qui induit la topologie quotient E/F, par la proposition précédente).

(2) Dans l'énoncé de la proposition 2.27, si I n'est pas un singleton, alors la topologie quotient ne coïncide pas forcément avec la topologie définie par la famille des semi-normes quotients.



Par exemple, dans $E = \mathbb{R}^2$, la topologie définie par les deux semi-normes $(x, y) \mapsto |y - x|$ et $(x, y) \mapsto |y|$ est la topologie usuelle (les parallélogrammes intersections des pseudo-boules de centre $(0, 0)$ et de rayon ϵ pour ces deux semi-normes forment un système fondamental de voisinage de $(0, 0)$ pour la topologie usuelle). Mais si F est le sous-espace vectoriel $\{0\}\times\mathbb{R}$ de E, alors les deux semi-normes quotients sur E/F sont les semi-normes nulles. Donc la topologie définie par la famille des semi-normes quotient est la topologie grossière. Elle est strictement moins fine que la topologie quotient, qui est la topologie usuelle sur $E/F \simeq \mathbb{R}$.

2.10 Indications pour la résolution des exercices

Schème E.15 L'application g est bien définie, car $f_{|A\cap A'} = f'_{|A\cap A'}$ et $X = A \cup A$. Soit F un fermé de Y, alors $f^{-1}(F)$ et $f'^{-1}(F)$ sont, par continuité, des fermés de A et de A' respectivement, donc de X, car A et A' sont fermés. Par conséquent, $g^{-1}(F) = f^{-1}(F) \cup f'^{-1}(F)$ est fermé, et g est continue.

Schème E.19 L'application ϕ_j est injective, et continue car $pr_i \circ \phi_j$ est continue pour tout i. Sa réciproque est la restriction à l'image de ϕ_j de la j-ème projection, donc est continue.

Schème E.20 Comme la réunion et l'image directe par une application commutent, il suffit de montrer que l'image d'un ouvert élémentaire par f est un ouvert élémentaire, ce qui est immédiat par construction de f, puisque les f_i sont ouvertes et surjectives. (NB : il n'y a pas besoin de la surjectivité si l'ensemble des indices I est fini.)

Schème E.23 Soit $X = \prod_{i\in I} X_i$ un espace topologique produit.

Supposons que X_i soit connexe pour tout $i \in I$, et soit $f : X \to \{0, 1\}$ une applicat continue (où $\{0, 1\}$ est muni de la topologie discrète). Soit x dans X, montrons $f(z) = f(x)$ pour tout z dans X, ce qui montre que X est connexe (par la caractérisat (5) du paragraphe 1.9).

Pour tout $y = (y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ dans X et pour tout $j \in I$, nous avons vu (dans la preu de la proposition 2.7 et l'exercice E.19) que l'application $\phi_{y,j}$ de X_j dans X définie $t \mapsto (x_i)_{i\in I}$ où $x_j = t$ et $x_i = y_i$ pour tout $i \neq j$, est continue (car $pr_i\circ\phi_{y,j}$ est continue p tout $i \in I$). Alors $f \circ \phi_{y,j} : X_j \to \{0, 1\}$ est continue, donc constante. Donc $f(y') = f$ si y' et y ne diffèrent qu'en une composante, et par récurrence, $f(y) = f(y')$ si y y' ne diffèrent qu'en un nombre fini de composantes. Comme f est continue, il existe voisinage V de x tel que $f(y) = f(x)$ pour tout y dans V. Or, par définition de la topolo produit, pour tout z dans X, il existe une partie finie J de I telle que si z' est obte en remplaçant la j-ème composante z_j de z par x_j pour tout $j \in J$, alors $z' \in V$. D $f(z) = f(z') = f(x)$, et f est constante.

Soit $x \in X$. Comme l'ensemble des $\prod_{i\in I} V_i$, où J est une partie finie de I, V_j un élément d'un système fondamental de voisinages de $pr_j(x)$ dans X_j pour tout $j \in$ et $V_i = X_i$ si $i \notin J$, est un système fondamental de voisinages de x, et comme produit d'ensembles connexes est connexe par ce qui précède, il en découle qu'un prod d'ensembles connexes et localement connexes est localement connexe.

Supposons que X_i soit connexe par arcs, pour tout i dans I. Soient $x = (x_i)_{i\in I}$ $y = (y_i)_{i\in I}$ deux points de X, et, pour tout i dans I, soit $\gamma_i : [0, 1] \to X_i$ un che (continu) de x_i à y_i. Alors l'application $\gamma : [0, 1] \to X$, définie par $t \mapsto (\gamma_i(t))_{i\in I}$, continue (car pour tout $i \in I$, l'application $pr_i \circ \gamma = \gamma_i$ l'est). Donc X est connexe arcs.

Le même argument que ci-dessus montre qu'un produit d'ensembles connexes par a et localement connexes par arcs est localement connexe par arcs.

La dernière assertion de l'exercice E.23 découle du fait que les projections canoniq d'un produit d'ensembles non vides sont surjectives, et que l'image d'un connexe (pectivement connexe par arcs) par une application continue est connexe (respectivem connexe par arcs).

Schème E.25 Soient $(X_i)_{i\in I}$ une famille d'espaces topologiques métrisables, et X l'esp topologique somme disjointe. Soit d_i une distance sur X_i induisant la topologie de alors $d'_i = \min\{1, d_i\}$ est une distance topologiquement équivalente à d_i, bornée pa sur X_i d'après l'exemple (v) du paragraphe 1.3. Pour tous x, y dans X, notons $d(x, y$ $d'_i(x, y)$ s'il existe i dans I tel que x et y appartiennent à X_i, et $d(x, y) = 1$ sinon. Il immédiat que d est positive ou nulle, nulle exactement sur la diagonale, et symétrique. distinguant des cas, il est facile de montrer qu'elle vérifie l'inégalité triangulaire. (C'es même preuve que pour montrer que la distance discrète (voir l'exemple (i) du paragra 1.3) sur un ensemble est bien une distance.)

Schème E.28 (iii) Pour toute partie U de Y, nous avons $\overline{f}(U) = f(\pi^{-1}(U))$.

Schème E.29 (1) Montrons que le complémentaire de $\mathscr{R}$ est ouvert. Soit $(x, y) \notin$ Alors $\pi(x) \neq \pi(y)$, donc il existe des voisinages ouverts disjoints U et V de $\pi(x)$ et π respectivement. Par conséquent $\pi^{-1}(U) \times \pi^{-1}(V)$ est un voisinage ouvert (élémenta de (x, y), disjoint de $\mathscr{R}$.

(2) Soient $x' \neq y'$ dans $X/\mathscr{R}$, et x, y dans X tels que $\pi(x) = x', \pi(y) = y'$. Al $(x, y) \notin \mathscr{R}$, donc il existe un voisinage ouvert U de x et un voisinage ouvert V de y

que $U \times V$ ne rencontre pas $\mathscr{R}$. Alors $\pi(U)$ et $\pi(V)$ sont des voisinages ouverts disjoints de x' et y' respectivement dans $X/\mathscr{R}$.

(3) Soient $x' \neq y'$ dans $X/\mathscr{R}$, et x, y dans X tels que $\pi(x) = x', \pi(y) = y'$. Alors $f(x) \neq f(y)$, donc il existe des voisinages ouverts disjoints U' et V' de $f(x)$ et $f(y)$ respectivement dans X'. Par conséquent, $f^{-1}(U')$ et $f^{-1}(V')$ sont des voisinages ouverts saturés disjoints de x et y respectivement. Le résultat en découle, par la proposition 2.15.

Schème E.30 S'il existe une classe d'équivalence dense, alors deux ouverts non vides saturés la rencontrent tous les deux, donc leurs images dans le quotient ne peuvent pas être disjointes.

Si toute classe d'équivalence est dense, alors un fermé saturé non vide est égal à tout l'ensemble.

On conclut par la bijection entre ouverts saturés/fermés saturés de l'ensemble et ouverts/fermés du quotient.

Schème E.32 Le fait que $\mathscr{R}$ soit bien une relation d'équivalence est immédiat. Le fait que l'application $\varphi' : (x, y) \mapsto (\pi_X(x), \pi_Y(y))$ passe au quotient en une bijection est immédiat par construction de $\mathscr{R}$. La continuité de φ découle de celle de φ' par les propriétés des topologies quotient.

Si π_X et π_Y sont ouvertes, alors φ' est ouverte, par l'exercice E.20. Ceci implique que φ est ouverte par l'exercice E.28 (iii) : si $\pi : (X \times Y) \to (X \times Y)/\mathscr{R}$ est la projection canonique, et si U est un ouvert de $(X \times Y)/\mathscr{R}$, alors $\varphi(U) = \varphi'(\pi^{-1}(U))$.

Donc φ est un homéomorphisme.

Schème E.37 Soit G un groupe topologique, d'élément neutre e. Soit H le sous-groupe de G engendré par un voisinage V de e. Alors H est ouvert, car si $h \in H$, alors Vh est un voisinage de h, contenu dans H. De plus, le complémentaire de H est ouvert, car si $g \in G$, et si $Vg \cap H$ est non vide, alors il existe $v \in V$ et $h \in H$ tel que $vg = h$, donc $g = v^{-1}h \in H$.

Si G est séparé, alors $\{e\}$, comme tout singleton de G, est fermé. Réciproquement, si $\{e\}$ est fermé, alors tout singleton est fermé, car les translations à gauche sont des homéomorphismes. Soient $g \neq g' \in G$. Alors $e \in {}^c\{g'g^{-1}\}$, donc il existe un voisinage ouvert V de e ne contenant pas $g'g^{-1}$. Soit U un voisinage de e tel que $U^{-1}U = \{x^{-1}y : x, y \in U\}$ soit contenu dans V (qui existe par continuité en (e, e) de l'application $(x, y) \mapsto x^{-1}y$). Alors Ug et Ug' sont des voisinages ouverts disjoints de g et g'.

Schème E.41 La seconde condition implique que l'application linéaire f est continue en 0, donc est continue.

Réciproquement, si f est continue, alors pour tout j dans J, l'application $x \mapsto ||f(x)||_j$ est une semi-norme continue. Une démonstration analogue à celle pour les espaces vectoriels normés conclut alors. En effet, par continuité en 0 de cette application, soit $\epsilon > 0$ et I' une partie finie de I telle que si $||x||_{I'} = \sum_{i \in I'} ||x||_i \leq \epsilon$, alors $||f(x)||_j \leq 1$. Pour tout x dans E, pour tout $\lambda > 0$ tel que $||\lambda x||_{I'} = \lambda ||x||_{I'} \leq \epsilon$, on a $||f(\lambda x)||_j \leq 1$, donc $||f(x)||_j \leq \frac{1}{\lambda}$. Si $||x||_{I'} = 0$, on peut prendre λ arbitrairement gand, et donc $||f(x)||_j = 0$. Sinon, on prend $\lambda = \frac{\epsilon}{||x||_{I'}}$, et $||f(x)||_j \leq \frac{1}{\epsilon}||x||_{I'}$. En posant dans les deux cas $c = \frac{1}{\epsilon}$, le résultat en découle.

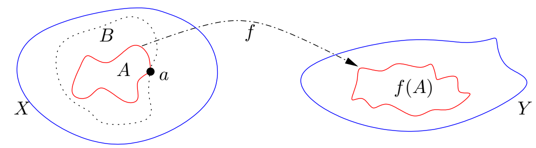
3 Limites et valeurs d'adhérence

La bonne notion de limite se construit à l'aide de filtres. Bien que pas spécialeme compliqués, les filtres (et les ultrafiltres, tellement pratiques), seraient une notion de p dans un cours déjà riche, et nous renvoyons donc à [Dix, Bou1] pour toute informati Nous nous contenterons d'un cas particulier de filtre, suffisant pour de nombreuses app cations.

Les références recommandées pour ce chapitre sont [Bou1, Dix, Dug, Die2].

3.1 Limites

Soient X, Y deux espaces topologiques, A une partie de X, $a \in \overline{A}$, $\ell \in Y$ et $f : B \to$ une application avec $A \subset B \subset X$ (en particulier, f n'est pas forcément définie en a).



On dit que $f(x)$ *converge vers* ℓ quand x tend vers a dans A (ou que ℓ est *une lim* de $f(x)$ quand x tend vers a dans A) si pour tout voisinage V de ℓ, il existe un voisina U de a tel que
$$f(U \cap A) \subset V .$$

On note alors $f(x) \underset{x \to a,\, x \in A}{\longrightarrow} \ell$ (ou $\lim\limits_{x \to a,\, x \in A} f(x) = \ell$ si un tel ℓ est unique).

Lorsque A est sous-entendu, par exemple quand A vaut le domaine de définition de on dit que f converge vers ℓ en a et que ℓ est une limite de f en a, et on note $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow}$ ou $\lim\limits_a f = \ell$ lorsque cette limite est unique.

Exemples.

• Une application $g : X \to Y$ est continue en un point x_0 de X si et seulement si g converge vers $g(x_0)$ quand x tend vers x_0 (par définition de la continuité en un point, v le paragraphe 1.8).

• Si $\mathscr{O}'$ est une topologie sur Y moins fine que la topologie originelle $\mathscr{O}$ de Y, si f converge vers ℓ quand x tend vers a dans A pour la topologie $\mathscr{O}$, alors $f(x)$ converge au vers ℓ quand x tend vers a dans A pour la topologie $\mathscr{O}'$ (car tout voisinage de ℓ pour est un voisinage de ℓ pour $\mathscr{O}$).

• Si $X = \mathbb{R}$, et $A = \left\{ \begin{array}{l} [a, a+\epsilon[\\ ]a, a+\epsilon[\\ [a-\epsilon, a[\\ ]a-\epsilon, a[\end{array} \right.$, on note alors $\ell = \left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x \to a,\, x \geq a} f(x) \\ \lim\limits_{x \to a^+} f(x) \text{ (limite à droite)} \\ \lim\limits_{x \to a,\, x \leq a} f(x) \\ \lim\limits_{x \to a^-} f(x) \text{ (limite à gauche)} \end{array} \right.$, ne dépend pas de la valeur de $\epsilon > 0$.

• Si $X = \overline{\mathbb{R}}$, si A est une partie non majorée de $\mathbb{R}$, et si $a = +\infty$, on note $\lim\limits_{x \to +\infty,\, x \in A} f$ (ou $\lim\limits_{+\infty} f$ si A est sous-entendu) une limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$ dans A.

même pour $-\infty$. Bien sûr,

$$\ell = \lim_{+\infty} f \iff \forall\, V \in \mathscr{V}(\ell),\ \exists\, R \in \mathbb{R},\ \forall\, x > R \quad (x \in A \Longrightarrow f(x) \in V)\ .$$

• Si $X = \overline{\mathbb{R}}$, si $A = \mathbb{N}$ et si $a = +\infty$, une application $f : A \to Y$ est une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans Y, et on note $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ (ou $\ell = \lim_{+\infty} x_n$, voire $\ell = \lim x_n$, si cette limite est unique) si f admet ℓ pour limite en $+\infty$. Quand nous dirons qu'une suite converge, il s'agira de la convergence en ce sens. Bien sûr,

$$x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \iff \forall\, V \in \mathscr{V}(\ell),\ \exists\, N \in \mathbb{N},\ \forall\, n \geq N, \quad x_n \in V\ .$$

La définition suivante dit que l'on ne change pas la définition d'une limite en demandant à U et V de rester dans des systèmes fondamentaux de voisinages prescrits de a et de ℓ.

Proposition 3.1 *Soient $\mathscr{U}$ et $\mathscr{W}$ un système fondamental de voisinages de a et ℓ dans X et Y respectivement. Alors*

$$f(x) \underset{x\to a,\, x\in A}{\longrightarrow} \ell \iff \forall\, V' \in \mathscr{W},\ \exists\, U' \in \mathscr{U},\quad f(U' \cap A) \subset V'\ .$$

Preuve. Si l'assertion de gauche est vérifiée, alors pour tout V' dans $\mathscr{W}$, il existe U dans $\mathscr{V}(a)$ tel que $f(U \cap A) \subset V'$. Soit U' dans $\mathscr{U}$ tel que $U' \subset U$. Alors $f(U' \cap A) \subset V'$, ce qui montre l'assertion de droite.

Réciproquement, si l'assertion de droite est vérifiée, pour tout V dans $\mathscr{V}(\ell)$, soit V' dans $\mathscr{W}$ tel que $V' \subset V$, et soit U' dans $\mathscr{U}$ tel que $f(U' \cap A) \subset V'$. Alors $U' \in \mathscr{V}(a)$ et $f(U' \cap A) \subset V$, ce qui montre l'assertion de gauche. □

Exemple. Si Y est un espace métrique, alors $f(x)$ converge vers ℓ quand x tend vers a dans A si et seulement si pour tout $\epsilon > 0$, il existe un voisinage U de a dans X tel que pour tout x dans $U \cap A$, on ait $d(f(x), \ell) < \epsilon$.

Si X et Y sont des espaces métriques, alors

$$f(x) \underset{x\to a,\, x\in A}{\longrightarrow} \ell \iff \forall\, \epsilon > 0,\ \exists\, \delta > 0,\ \forall\, x \in A \quad d_X(x, a) < \delta \Longrightarrow d_Y(f(x), \ell) < \epsilon\ .$$

Et on peut bien sûr demander à ϵ et à η d'être de la forme $1/n$ pour n dans $\mathbb{N} - \{0\}$, voire d'appartenir à n'importe quelle paire de suites convergeant vers 0 ; et remplacer inégalité stricte par inégalité large.

En particulier, une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans un espace métrique converge vers ℓ si et seulement si

$$\forall\, \epsilon > 0,\ \exists\, N \in \mathbb{N},\ \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad n \geq N \Longrightarrow d(x_n, \ell) < \epsilon\ .$$

Proposition 3.2 *Toute suite croissante majorée dans $\mathbb{R}$ est convergente. Toute suite décroissante minorée dans $\mathbb{R}$ est convergente. Donc toute suite monotone bornée dans $\mathbb{R}$ est convergente.*

Preuve. Ce résultat a déjà été vu en classe préparatoire, comme découlant du théorè
1.1 : une suite réelle croissante majorée $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers sa borne supérieure ℓ
$\sup_{n\in\mathbb{N}} x_n$, car pour tout $\epsilon > 0$, il existe N dans $\mathbb{N}$ tel que $\ell - \epsilon \leq x_N$ et donc pour to
$n \geq N$, on a $\ell - \epsilon \leq x_N \leq x_n \leq \ell$. De même, une suite réelle décroissante minorée (x_n)
converge vers sa borne inférieure $\ell = \inf_{n\in\mathbb{N}} x_n$.

Propriétés des limites

Tout au long de cette sous-partie, on conserve les notations X, Y, a, A, B, f du déb
du paragraphe.

Une limite n'est pas toujours unique. Si Y est l'espace topologique construit da
l'exercice E.11, alors la suite $x_n = \frac{1}{n+1}$ converge à la fois vers 0_+ et 0_-. Pour les espa
séparés (par exemple métrisables), ce problème n'arrive pas :

Proposition 3.3 *Si Y est séparé, si $f(x)$ admet une limite quand x tend vers a dans*
alors cette limite est unique.

Preuve. Si ℓ, ℓ' sont deux limites distinctes, alors soient V, V' deux voisinages disjoi
de ℓ, ℓ' respectivement. Par définition d'une limite, il existe U et U' deux voisinages d
tels que $f(U \cap A) \subset V$ et $f(U' \cap A) \subset V'$. Comme $U \cap U'$ est un voisinage de a et puisq
a est adhérent à A, l'ensemble $U \cap U' \cap A$ est non vide. Donc $f(U \cap U' \cap A)$ est non vi
Comme $f(U \cap U' \cap A) \subset V \cap V'$, l'ensemble $V \cap V'$ est non vide, contradiction.

Porisme 3.4 (Passage à la limite des égalités) *Si $\lim_{x\to a,\, x\in A} f(x) = \ell$, si $g : B' \to$*
est une application où $A \subset B' \subset X$, s'il existe un voisinage U de a dans X tel
$f(x) = g(x)$ pour tout x dans $U \cap A$, et si Y est séparé, alors $\lim_{x\to a,\, x\in A} g(x) = \ell$.

Preuve. Si f et g coïncident sur un voisinage de a dans A, alors (puisque l'ensem
des voisinages d'un point contenus dans un voisinage donné de ce point est un systè
fondamental de voisinages de ce point, et par la proposition 3.1) toute limite de f
quand x tend vers a dans A est une limite de $g(x)$ quand x tend vers a dans A.
unicité de la limite, le résultat en découle.

Proposition 3.5 *Si $f(x)$ converge vers ℓ quand x tend vers a dans A, alors $\ell \in \overline{f(A)}$*

Preuve. Pour tout voisinage V de ℓ, soit U un voisinage de a tel que $f(U \cap A) \subset$
Comme $a \in \overline{A}$, l'ensemble $U \cap A$ est non vide, donc $f(A) \cap V$, qui contient $f(U \cap A)$,
aussi non vide.

En particulier, si A est une partie d'un espace topologique X, s'il existe une su
$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans A qui converge vers $\ell \in X$, alors ℓ appartient à $\overline{A}$. La réciproque de ce
assertion est fausse dans les espaces topologiques généraux (et c'est l'une des raiso
d'utiliser plutôt des filtres pour définir la convergence), mais elle reste bien sûr vra
par les propriétés des adhérences, si ℓ admet un système fondamental dénombrable
voisinages, comme par exemple dans un espace topologique métrisable.

Comme l'adhérence de $]0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ est $[0, +\infty[$, le corollaire suivant découle i
médiatement de la proposition 3.5.

Porisme 3.6 (Passage à la limite des inégalités, 1) *Si $Y=\mathbb{R}$, si $\lim_{x\to a,\, x\in A} f(x)=\ell$, s'il existe un voisinage U de a dans X tel que $f(x)>0$ (resp. $f(x)\geq 0$) pour tout x dans $U\cap A$, alors $\ell \geq 0$.* □

On prendra donc bien garde que les inégalités strictes passent à la limite en des inégalités larges.

Proposition 3.7 (Composition des limites) *Soient Z un espace topologique, $A'\subset B'\subset Y$, $\ell'\in Z$, et $g : B'\to Z$ une application, tels que $f(A)\subset A'$. Si $f(x) \underset{x\to a,\, x\in A}{\longrightarrow} \ell$ et si $g(y) \underset{y\to \ell,\, y\in A'}{\longrightarrow} \ell'$, alors $g\circ f(x) \underset{x\to a,\, x\in A}{\longrightarrow} \ell'$.*

Preuve. On remarque d'abord, par la proposition 3.5, que $\ell \in \overline{f(A)} \subset \overline{A'}$. Soit W un voisinage de ℓ' dans Z. Il existe un voisinage V de ℓ dans Y tel que $g(V\cap A')\subset W$. Il existe un voisinage U de a tel que $f(U\cap A)\subset V$. Donc

$$g\circ f(U\cap A)\subset g(V\cap f(A))\subset g(V\cap A')\subset W\;.\ \square$$

Le résultat suivant en découle immédiatement (avec le premier exemple de limite donné en début de paragraphe 3.1).

Porisme 3.8 *Soient Z un espace topologique et $g : Y\to Z$ une application. Si nous avons $f(x) \underset{x\to a,\, x\in A}{\longrightarrow} \ell$ et si g est continue en ℓ, alors $g\circ f(x) \underset{x\to a,\, x\in A}{\longrightarrow} g(\ell)$.* □

En particulier, si G est un groupe topologique d'élement neutre e (par exemple le groupe additif $(E,+)$ d'un espace vectoriel topologique), et si f est à valeurs dans G, alors

$$f(x) \underset{x\to a,\, x\in A}{\longrightarrow} \ell \iff f(x)\ell^{-1} \underset{x\to a,\, x\in A}{\longrightarrow} e \iff \ell^{-1}f(x) \underset{x\to a,\, x\in A}{\longrightarrow} e\;.$$

Dans certains espaces topologiques, on peut définir la topologie (par l'ensemble de ses fermés), ainsi que les limites et la continuité, à l'aide de la convergence des suites, comme le montre la proposition suivante.

Proposition 3.9 *Soient Z et Z' deux espaces topologiques, x un élément de Z, ℓ un élément de Z' et C une partie de Z. Supposons que tout point de Z admette un système fondamental dénombrable de voisinages (ceci est le cas par exemple lorsque Z est métrisable).*

- *Le point x appartient à $\overline{C}$ si et seulement s'il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans C qui converge vers x.*
- *La partie C est fermée si et seulement si pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans C qui converge vers un élément x de Z, on a $x\in C$.*
- *Soit $f : B\to Z'$ une application, où $A\subset B\subset Z$ et $x\in\overline{A}$. Alors $f(t)$ converge vers ℓ quand t tend vers x dans A si et seulement si pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans A convergeant vers x, la suite $\big(f(x_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.*
- *Une application $f : Z\to Z'$ est continue en x si et seulement si pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers x, la suite $\big(f(x_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(x)$.*

Preuve. Soit $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un système fondamental dénombrable de voisinages de x dans que l'on peut supposer décroissant, quitte à remplacer V_n par $\bigcap_{k=0}^n V_k$.

Si $x\in\overline{C}$, alors, en prenant $x_n\in V_n\cap C$, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x. La réciproq du premier point a été vue (proposition 3.5).

Le second point découle du premier en utilisant qu'une partie est fermée si et seulem si elle est égale à son adhérence.

Si $f(t)$ ne converge pas vers ℓ quand t tend vers x dans A, alors il existe un voisin U de $f(x)$ tel que pour tout n dans $\mathbb{N}$, il existe x_n dans $V_n\cap A$ tel que $f(x_n)\notin U$. particulier, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans A converge vers x, et $\big(f(x_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas v ℓ. La réciproque découle du corollaire 3.8.

La dernière assertion découle de la précédente, par le premier exemple du paragra 3.1.

En général, deux topologies différentes sur un même ensemble peuvent avoir les mêm suites convergentes (vers les mêmes limites). C'est par exemple le cas des topologies Schwartz et de Whitney sur $\mathscr{D}(\Omega)$ (voir l'exercice E.44 ci-dessous). Par contre, de distances qui ont les mêmes suites convergentes (vers les mêmes limites) induisent même topologie, par le second point de la proposition précédente.

Proposition 3.10 *Soit $(Y_i)_{i\in I}$ une famille d'espaces topologiques, supposons que la to logie de Y soit la topologie initiale définie par une famille d'applications $(f_i : Y\to Y_i)$*

Alors $f(x) \underset{x\to a,\, x\in A}{\longrightarrow} \ell$ si et seulement si $f_i\circ f(x) \underset{x\to a,\, x\in A}{\longrightarrow} f_i(\ell)$ pour tout i dans I.

Preuve. Le sens direct découle de la continuité de f_i et du corollaire 3.8. Réciproqueme par la caractérisation des voisinages pour une topologie initiale, si V est un voisinage ℓ dans Y, alors il existe une partie finie J de I et des voisinages V_j de $f_j(\ell)$ pour tou dans J tels que V contienne $\bigcap_{j\in J} f_j^{-1}(V_j)$. Comme $f_j\circ f(x)$ converge vers $f_j(\ell)$, il exi un voisinage U_j de a dans X tel que $f_j\circ f(A\cap U_j)\subset V_j$. Mais alors $f(A\cap\bigcap_{j\in J} U_j)\subset$ ce qui montre le résultat, car $\bigcap_{j\in J} U_j$ est un voisinage de a.

Exemples.

- Si Y est un espace topologique produit $\prod_{i\in I} Y_i$, si les $pr_i : (x_i)_{i\in I}\mapsto x_i$ sont projections canoniques, et si $f_i = pr_i\circ f$ est l'application i-ème composante de f, al $f(x) \underset{x\to a,\, x\in A}{\longrightarrow} (\ell_i)_{i\in I}$ si et seulement si $f_i(x) \underset{x\to a,\, x\in A}{\longrightarrow} \ell_i$ pour tout i dans I.
- En utilisant cette caractérisation des limites à valeurs dans un produit et la compo tion d'une limite par une application continue (voir le corollaire 3.8), les résultats suiva en découlent. Supposons que $\lim_{x\to a,\, x\in A} f(x)=\ell$ et $\lim_{x\to a,\, x\in A} g(x)=\ell'$ où $g : B'\to Y$ une application telle que $A\subset B'\subset X$.

Si Y est un groupe topologique, alors

$$\lim_{x\to a,\, x\in A} f(x)g(x)=\ell\ell' \quad\text{et}\quad \lim_{x\to a,\, x\in A} f(x)^{-1}=\ell^{-1}\;.$$

Si Y est un espace vectoriel topologique sur un corps topologique K, si $\lim_{x\to a,\, x\in A} \lambda(x)=$ où $\lambda : B''\to K$ est une application telle que $A\subset B''\subset X$, alors

$$\lim_{x\to a,\, x\in A} f(x)-g(x)=\ell-\ell', \quad\text{et}\quad \lim_{x\to a,\, x\in A} \lambda(x)f(x)=\ell''\ell\;.$$

Si Y est un corps topologique, alors

$$\lim_{x\to a,\, x\in A} f(x)-g(x)=\ell-\ell', \quad \lim_{x\to a,\, x\in A} f(x)g(x)=\ell\ell' \quad \text{et} \quad \lim_{x\to a,\, x\in A} f(x)^{-1}=\ell^{-1}\,,$$

cette dernière assertion sous la condition que $\ell\neq 0$.

En appliquant ceci et le corollaire 3.6 à la fonction $f-g$, on en déduit le résultat suivant.

Porisme 3.11 (Passage à la limite des inégalités, 2) *Si $Y=\mathbb{R}$, si $\lim_{x\to a,\, x\in A} f(x)=\ell$, si $g: B'\to Y$ est une application où $A\subset B'\subset X$ telle que $\lim_{x\to a,\, x\in A} g(x)=\ell'$, et s'il existe un voisinage U de a dans X tel que $f(x)<g(x)$ (resp. $f(x)\leq g(x)$) pour tout x dans $U\cap A$, alors $\ell\leq\ell'$.* $\square$

On prendra donc bien garde que les inégalités strictes entre applications à valeurs réelles passent à la limite en des inégalités larges.

• Si Y est un espace topologique dont la topologie est définie par une famille de pseudo-distances $(d_i)_{i\in I}$, alors $f(x)\underset{x\to a,\, x\in A}{\longrightarrow}\ell$ si et seulement si $d_i(f(x),\ell)\underset{x\to a,\, x\in A}{\longrightarrow} 0$ pour tout i dans I. (La preuve est semblable à celle du critère de continuité des applications à valeurs dans un espace muni d'une topologie initiale, voir l'exemple 2 du paragraphe 2.2.)

• Comme cas particulier du précédent, si Y est un espace vectoriel topologique sur un corps valué dont la topologie est définie par une famille de semi-norme $(||\cdot||_i)_{i\in I}$, alors $f(x)\underset{x\to a,\, x\in A}{\longrightarrow}\ell$ si et seulement si $||f(x)-\ell||_i\underset{x\to a,\, x\in A}{\longrightarrow} 0$ pour tout i dans I.

En particulier, avec les notations de l'exemple (iii) du paragraphe 1.3, pour tout $r\in\mathbb{N}-\{0\}$, une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, dans l'espace de Schwartz $\mathscr{S}(\mathbb{R}^r)$ des applications lisses à décroissance rapide sur $\mathbb{R}^r$, converge vers une application f de $\mathscr{S}(\mathbb{R}^r)$ si et seulement si pour tout k dans $\mathbb{N}$ et tout m dans $\mathbb{N}^r$, on a

$$\lim_{n\to+\infty}\ \max_{x\in\mathbb{R}^r}\,(1+||x||^k)\,|\,\partial^m f_n(x)-\partial^m f(x)\,|\ =\ 0\,.$$

Avec les notations de l'exemple (2) du paragraphe 1.4, pour $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{K}=\mathbb{C}$, pour tout compact K d'un ouvert non vide Ω de $\mathbb{R}^r$, une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, dans l'espace $\mathscr{D}_K(\Omega)$ des applications lisses de Ω dans $\mathbb{K}$ à support contenu dans K, converge vers une application f de $\mathscr{D}_K(\Omega)$ si et seulement si pour tout k dans $\mathbb{N}$ et tout m dans $\mathbb{N}^d$, on a

$$\lim_{n\to+\infty}\ \max_{x\in K}\,|\,\partial^m f_n(x)-\partial^m f(x)\,|\ =\ 0\,.$$

De même, une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans l'espace $\mathscr{D}(\Omega)$ des applications lisses de Ω dans $\mathbb{K}$ à support compact contenu dans Ω, converge vers une application f de $\mathscr{D}(\Omega)$ si et seulement si pour tout $\varepsilon\in\mathscr{C}^0_{0,+}(\Omega)$, avec les notations de l'exemple 3.3 du paragraphe 2.2,

$$\lim_{n\to+\infty}\,||f_n-f||_\varepsilon\ =\ 0\,.$$

• Soient E un espace vectoriel topologique réel ou complexe, E^* son dual topologique, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans E et $x\in E$. On note

$$x_n \rightharpoonup x$$

la convergence de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers x pour la topologie faible, pour bien la disting
de la convergence pour la topologie forte. En dimension finie, elles sont identiques, car
topologies coïncident (voir le paragraphe 2.8).

Plus généralement, soient X un espace topologique, A et B deux parties de X te
que $A\subset B$, $a\in\overline{A}$, $b\in E$ et $f: B\to E$ une application. On note, le cas échéant,

$$f(x)\ \rightharpoonup_{x\to a, x\in A}\ b$$

la convergence de $f(x)$ vers b quand x tend vers a dans A pour la topologie faible. Com
les suites sont fréquemment utilisées, nous donnons les propriétés de la convergence fai
pour les suites, mais le lecteur n'aura aucun mal à les étendre aux limites générales
fonctions.

(i) On a $x_n\rightharpoonup x$ (pour la topologie faible, donc) si et seulement si $\ell(x_n)\longrightarrow \ell$
(dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) pour tout ℓ dans E^*.

(ii) Si $x_n\to x$ fortement alors $x_n\rightharpoonup x$ faiblement.

• Soient E un espace vectoriel topologique, E^* son dual topologique, $(\ell_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une su
dans E^* et $\ell\in E^*$. On note

$$\ell_n \overset{*}{\rightharpoonup} \ell$$

la convergence de la suite $(\ell_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers ℓ pour la topologie faible-étoile, pour bien
distinguer de la convergence pour les topologies forte et faible sur E^* lorsque E^*
munie de la norme duale d'une norme sur E.

Plus généralement, soient X un espace topologique, A et B deux parties de X te
que $A\subset B$, $a\in\overline{A}$, $\ell\in E^*$ et $f: B\to E^*$ une application. On note, le cas échéant,

$$f(x)\ \overset{*}{\rightharpoonup}_{x\to a, x\in A}\ \ell$$

la convergence de $f(x)$ vers ℓ quand x tend vers a dans A pour la topologie faib
étoile. Comme les suites sont fréquemment utilisées, nous donnons les propriétés de
convergence faible-étoile pour les suites, mais le lecteur n'aura aucun mal à les étend
aux limites générales de fonctions.

(i) On a $\ell_n\overset{*}{\rightharpoonup}\ell$ si et seulement si $\ell_n(x)\longrightarrow\ell(x)$(dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) pour tout x dans

(ii) Si E est un espace vectoriel normé, et si $\ell_n\rightharpoonup\ell$ faiblement (i.e. pour la topolo
faible $\sigma(E^*,E^{**})$), alors $\ell_n\overset{*}{\rightharpoonup}\ell$.

(iii) Si E est un espace vectoriel normé et si $\ell_n\longrightarrow\ell$ pour la norme duale, alors ℓ_n
(Ceci découle bien sûr de (ii) juste ci-dessus et du (ii) dans le point précédent.)

Exercice E.43 *Soient X un espace topologique, $\mathscr{R}$ une relation d'équivalence sur
$X/\mathscr{R}$ l'espace topologique quotient, π la projection canonique, $B\subset X/\mathscr{R}$, $b\in\overline{B}$ et $a\in$
tel que $\pi(a)=b$. On suppose que π est ouverte. Montrer que $a\in\overline{\pi^{-1}(B)}$. Montrer de p
que $f(y)\underset{y\to b,\, y\in B}{\longrightarrow}\ell$ si et seulement si $f\circ\pi(x)\underset{x\to a,\, x\in\pi^{-1}(B)}{\longrightarrow}\ell$.*

Exercice E.44 *Montrer, pour les topologies de Schwartz et de Whitney sur $\mathscr{D}(\Omega)$ (
l'exemple (2) du paragraphe 1.4), qu'une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathscr{D}(\Omega)$ converge pour l'
vers un élément g de $\mathscr{D}(\Omega)$ si et seulement si elle converge pour l'autre vers g, et si
seulement s'il existe un compact K de Ω tel que g et les f_n soient nulles en dehors de
et que les $\partial^m f_n$ convergent uniformément sur K vers $\partial^m g$ pour tout m dans $\mathbb{N}^d$.*

3.2 Comparaison asymptotique : notation de Landau

Soient X un espace topologique, A une partie de X et $a \in \overline{A}$. Soient $\mathbb{K}$ le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ (ou plus généralement un corps valué), E, F deux espaces vectoriels normés sur $\mathbb{K}$ et $f : B \to E, g : B \to F$ deux applications, où $A \subset B \subset X$.

On dit que f est *asymptotiquement dominée* par g au voisinage de a dans A (ou au voisinage de a tout court si A est sous-entendu, par exemple quand $A = B$) s'il existe $c \geq 0$ et U un voisinage de a dans X tels que

$$\forall\, x \in U \cap A, \quad ||f(x)|| \leq c\,||g(x)||\ .$$

On note alors

$$f = O(g)$$

ou parfois par abus $f(x) = O(g(x))$ (en précisant au voisinage de a dans A si ce n'est pas clair dans le contexte). Si $F = \mathbb{K}$ et s'il existe un voisinage U_0 de a tel que $g(x)$ soit non nul pour tout x dans $U_0 \cap A$, alors f est asymptotiquement dominée par g si et seulement s'il existe un voisinage U de a contenu dans U_0 tel que l'application de $U \cap A$ dans $\mathbb{R}$ définie par $x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}$ soit bornée.

On dit que f est *asymptotiquement négligeable* devant g au voisinage de a dans A si pour tout $\epsilon > 0$, il existe un voisinage U de a dans X tel que

$$\forall\, x \in U \cap A, \quad ||f(x)|| \leq \epsilon\,||g(x)||\ .$$

On note alors

$$f = o(g)$$

ou parfois par abus $f(x) = o(g(x))$ (en précisant au voisinage de a dans A si ce n'est pas clair dans le contexte). On fera bien attention à ne pas confondre O « grand o » et o « petit o ». Si $F = \mathbb{K}$, et s'il existe un voisinage U_0 de a tel que $g(x)$ soit non nul pour tout x dans $U_0 \cap A$, alors f est asymptotiquement négligeable devant g si et seulement

$$\lim_{x \to a,\ x \in A} \frac{f(x)}{g(x)} = 0\ .$$

Notons que $f = O(g)$ si et seulement si $f = O(||g||)$, si et seulement si $||f|| = O(||g||)$, et de même en remplaçant O par o, la première notation étant plus courte.

Remarquons que si $f = O(g)$ et $f' = O(g)$, alors pour tous λ, μ dans $\mathbb{K}$, on a $\lambda f + \mu f' = O(g)$ par l'inégalité triangulaire de la norme (et puisque l'intersection de deux voisinages de a est encore un voisinage de a). De même, si $f = o(g)$ et $f' = o(g)$, alors pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, on a $\lambda f + \mu f' = o(g)$. Si E et F valent $\mathbb{K}$, alors si $f = O(g)$ et $f' = O(g)$ (resp. $f = o(g)$ et $f' = O(g')$), alors $ff' = O(gg')$ (resp. $ff' = o(gg')$), par multiplicativité de la valeur absolue et puisque l'intersection de deux voisinages de a est encore un voisinage de a.

Il est immédiat que les relations « être asymptotiquement dominé par » et « être asymptotiquement négligeable devant » sont transitives. De plus, si $f = O(g)$ et $g = o(h)$, alors $f = o(h)$; si $f = o(g)$ et $g = O(h)$, alors $f = o(h)$.

Si $E = F$, on dit que f est *asymptotiquement équivalent* (ou équivalent tout court) à g au voisinage de a dans A si $f - g = o(g)$. On note alors

$$f \sim g$$

(en précisant au voisinage de a dans A si ce n'est pas clair dans le contexte). Com $||g(x)|| \leq ||g(x) - f(x)|| + ||f(x)||$, si $||f(x) - g(x)|| \leq \epsilon||g(x)||$ et $\epsilon < 1$, alors $||g(x$ $f(x)|| \leq \frac{\epsilon}{1-\epsilon}||f(x)||$. On en déduit facilement que la relation d'équivalence asymptotic au voisinage de a dans A est une relation d'équivalence sur les applications de B dans Par l'inégalité triangulaire inverse, si $f \sim g$, alors $||f|| \sim ||g||$.

Si $E = F = \mathbb{K}$, s'il existe un voisinage U_0 de a tel que $g(x)$ soit non nul pour tou dans $U_0 \cap A$, alors f est asymptotiquement équivalent à g si et seulement si

$$\lim_{x \to a,\ x \in A} \frac{f(x)}{g(x)} = 1\ .$$

Ceci entraîne qu'il existe aussi un voisinage U de a dans X tel que f ne s'annule pas $U \cap A$.

Les équivalents ne se comportent pas bien additivement, par exemple $f(x) = x^2$ $x \sin x$ est équivalente à $g(x) = x^2$ au voisinage de $+\infty$, mais $f(x) - g(x)$ n'a pas de lim quand x tend vers $+\infty$ (en fait, l'ensemble des valeurs d'adhérence (voir le paragrap 3.3 suivant) de $f(x) - g(x)$ quand x tend vers $+\infty$ est égal à $\overline{\mathbb{R}}$ tout entier).

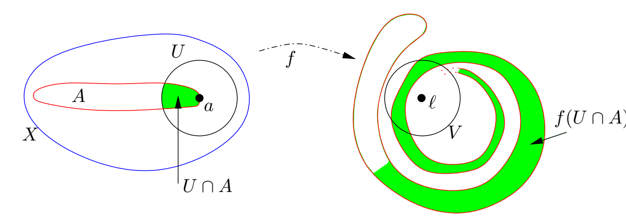
Si $E = F = \mathbb{K}$, si $f \sim g$ et $f' \sim g'$, s'il existe un voisinage U_0 de a tel que $g(x)$ $g'(x)$ soient non nuls pour tout x dans $U_0 \cap A$, alors il découle des propriétés des limi que $ff' \sim gg'$.

Pour les exemples et les pièges de ces notations, nous renvoyons au cours de l'an précédente pour les applications d'une partie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

3.3 Valeurs d'adhérence

Soient X et Y deux espaces topologiques, A et B deux parties de X telles que $A \subset$ $a \in \overline{A}$, $\ell \in Y$ et $f : B \to Y$ une application (en particulier, f n'est pas forcément défi en a).

On dit que ℓ est une *valeur d'adhérence* de $f(x)$ quand x tend vers a dans A (ou f en a si A est sous-entendu) si pour tout voisinage V de ℓ, pour tout voisinage U de l'ensemble $f(U \cap A) \cap V$ est non vide.



Remarque. Si $\mathscr{U}$ et $\mathscr{V}$ sont deux systèmes fondamentaux de voisinages de a et ℓ da X et Y respectivement, alors il est immédiat que $\ell \in Y$ est une valeur d'adhérence $f(x)$ quand x tend vers a dans A si et seulement si pour tout $V \in \mathscr{V}$, pour tout $U \in$ l'ensemble $f(U \cap A) \cap V$ est non vide.

Par exemple, si X et Y sont deux espaces métriques, alors ℓ est une valeur d'adhére de f en a si et seulement si

$$\forall\, \epsilon > 0, \ \ \forall\, \delta > 0, \ \ \exists\, x \in A, \quad d(a,x) < \delta \quad \text{et} \quad d(f(x), \ell) < \epsilon\ .$$

(et il suffit en fait de vérifier que $\forall\, \epsilon > 0,\ \ \exists\, x \in A,\quad d(a,x) < \epsilon \quad \text{et} \quad d(f(x),\ell) < \epsilon$.)

Exemples. (1) Si $\mathscr{O}'$ est une topologie sur Y moins fine que la topologie originelle $\mathscr{O}$ de Y, si ℓ est une valeur d'adhérence de $f(x)$ quand x tend vers a dans A pour la topologie $\mathscr{O}$, alors ℓ est une valeur d'adhérence de $f(x)$ quand x tend vers a dans A pour la topologie $\mathscr{O}'$ (car tout voisinage de ℓ pour $\mathscr{O}'$ est un voisinage de ℓ pour $\mathscr{O}$).

(2) Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite dans Y, si $x \in Y$, si $\mathscr{V}$ est un système fondamental de voisinages de x (par exemple l'ensemble $\mathscr{V}(x)$ de tous les voisinages de x ou $\mathscr{O}(x)$ de tous les voisinages ouverts de x) alors x est une valeur d'adhérence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si et seulement si

$$\forall\, V \in \mathscr{V},\ \ \forall\, N \in \mathbb{N},\ \ \exists\, n \geq N \quad x_n \in V\ .$$

En particulier, toute limite d'une sous-suite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une valeur d'adhérence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. La réciproque est fausse en général. Si x admet un système fondamental dénombrable de voisinages dans X (par exemple si X est métrisable), alors il est immédiat que x est une valeur d'adhérence de la suite si et seulement si x est limite d'une sous-suite.

Proposition 3.12 *(1) Pour tout système fondamental $\mathscr{U}$ de voisinages de a dans X, l'ensemble des valeurs d'adhérence de $f(x)$ quand x tend vers a dans A est*

$$\bigcap_{U\in\mathscr{U}} \overline{f(U\cap A)}\ .$$

(2) Si $f(x)$ admet pour limite ℓ quand x tend vers a dans A, alors ℓ est une valeur d'adhérence de $f(x)$ quand x tend vers a dans A. Si de plus Y est séparé, alors ℓ est l'unique valeur d'adhérence de $f(x)$ quand x tend vers a dans A.

Preuve. (1) Soit $\ell \in Y$. Alors, en rappelant que $\mathscr{V}(\ell)$ est l'ensemble des voisinages de ℓ dans Y,

$$\ell \in \bigcap_{U\in\mathscr{U}} \overline{f(U\cap A)} \iff \forall\, U \in \mathscr{U},\ \ \ell \in \overline{f(U\cap A)} \iff$$

$$\forall\, U \in \mathscr{U},\ \ \forall\, V \in \mathscr{V}(\ell) \quad f(U\cap A)\cap V \neq \emptyset \iff \ell \text{ est valeur d'adhérence de } f \text{ en } a.$$

(2) On suppose que $f(x) \underset{x\to a,\ x\in A}{\longrightarrow} \ell$. Soient V un voisinage de ℓ et U un voisinage de a. Alors il existe un voisinage U' de a tel que $f(U'\cap A) \subset V$. Comme $U\cap U'$ est un voisinage de $a \in \overline{A}$, l'ensemble $U \cap U' \cap A$ est non vide. Donc

$$f(U\cap A)\cap V \supset f(U\cap U'\cap A)\cap V = f(U\cap U'\cap A) \neq \emptyset\ .$$

Par l'absurde, si ℓ' est une valeur d'adhérence de f en a, distincte de ℓ, soient V et V' deux voisinages disjoints de ℓ et ℓ' respectivement. Soit U un voisinage de a tel que $f(U\cap A) \subset V$. Alors $f(U\cap A)\cap V'$ est vide, ce qui contredit le fait que ℓ' est une valeur d'adhérence de f en a. □

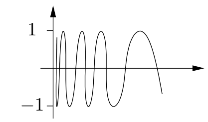
Exemples.

(1) Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite dans Y, alors l'ensemble des valeurs d'adhérence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est

$$\bigcap_{N\in\mathbb{N}} \overline{\{x_n\ :\ n \geq N\}}\ .$$

Si Y est séparé et si $\lim x_n = x$, alors x est l'unique valeur d'adhérence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

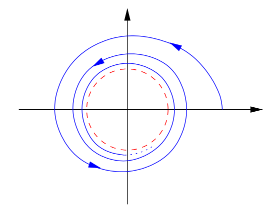
(2) Si $X = \mathbb{R}$, $A =]0,+\infty[$, $a = 0 \in \overline{A}$ et $f : A \to \mathbb{R}$ est l'application $x \mapsto \sin\frac{1}{x}$, alors l'ensemble des valeurs d'adhérence de f en 0 est $[-1,1]$.



En particulier, ceci permet de montrer que l'adhérence F du graphe de f n'est p
connexe par arcs. En effet, supposons par l'absurde qu'il existe un chemin $\gamma : [0,1] \to$
entre le point $(\frac{1}{2\pi},0)$ et $(0,0)$. Comme tout point du graphe de f sépare le graphe
deux composantes connexes quand on l'enlève, l'image de γ doit contenir le graphe
$f_{|\,]0,\frac{1}{2\pi}]}$. Mais si t est la borne supérieure des $s \in [0,1]$ tels que $\gamma(s)$ appartienne au grap
de $f_{|\,]0,\frac{1}{2\pi}]}$, alors $\gamma(s)$ admet une infinité de valeurs d'adhérence quand s tend vers t p
valeurs strictement inférieures, ce qui contredit la continuité de γ en t.

(3) Soit $f : [0,+\infty[\, \to \mathbb{C}$ l'application

$$\theta \mapsto e^{\frac{1}{\theta+1}+2i\pi\theta}$$



(dont l'image est la courbe spiralante vers le cercle ci-contre). Alors l'ensemble des valeurs d'adhérence de f en $+\infty$ est exactement le cercle unité de $\mathbb{C}$.

3.4 Complétude

Suites de Cauchy

La notion de complétude n'est pas une propriété des espaces topologiques généra
Le bon cadre est celui des espaces uniformes, mais vu le programme à couvrir, nous n
restreindrons ici au cas des espaces métriques et des groupes topologiques (qui ont t
deux une structure d'espace uniforme), en renvoyant à l'excellent [Bou1] pour la not
de structure uniforme.

Soit (X,d) un espace métrique. Une *suite de Cauchy* dans X est une suite (x_n)
dans X telle que

$$\forall\, \epsilon > 0,\ \ \exists\, N \in \mathbb{N},\ \ \forall\, m,n \geq N, \quad d(x_n,x_m) < \epsilon\ .$$

On peut remplacer inégalité stricte par inégalité large, et demander à ϵ de prendre
valeurs dans une partie fixée de $]0,+\infty[$ contenant 0 dans son adhérence.

Soient X et Y deux espaces métriques. Les propriétés suivantes sont faciles, et
déjà été vues dans le cas des espaces vectoriels normés réels ou complexes.

• L'image par une application isométrique $f : X \to Y$ d'une suite de Cauchy de X
une suite de Cauchy de Y. (Nous reviendrons dans le paragraphe 5.3 sur la bonne not
d'application préservant les suites de Cauchy)

• Si d et d' sont deux distances équivalentes sur un ensemble E, alors toute suite
Cauchy pour l'une est une suite de Cauchy pour l'autre. En particulier, (les distan
induites par) deux normes sur un espace vectoriel de dimension finie ont les mêmes sui
de Cauchy (voir le corollaire 4.16 (2)).

Si d est une distance sur un ensemble E, et si d' est la distance $\min\{1,d\}$ sur E, al
toute suite de Cauchy pour d est encore de Cauchy pour d', et réciproquement.

• Toute suite de Cauchy dans X est bornée.

• Toute suite convergente dans X est de Cauchy, par inégalité triangulaire (soit x la limite d'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans X ; pour tout $\epsilon > 0$, soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $d(x_n, x) < \frac{\epsilon}{2}$ pour tout $n \geq N$; alors pour $m, n \geq N$, nous avons $d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x, x_m) < \epsilon$).

• Si une suite de Cauchy $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans X admet une valeur d'adhérence ℓ, alors elle converge vers ℓ. En effet, pour tout $\epsilon > 0$, soit N dans $\mathbb{N}$ tel que $d(x_n, x_m) < \frac{\epsilon}{2}$ si $n, m \geq N$, et soit $n_0 \geq N$ dans $\mathbb{N}$ tel que $d(x_{n_0}, \ell) < \frac{\epsilon}{2}$. Alors pour tout $n \geq N$, on a $d(x_n, \ell) \leq d(x_n, x_{n_0}) + d(x_{n_0}, \ell) < \epsilon$.

Soit G un groupe topologique, d'élément neutre e (par exemple le groupe additif d'un corps topologique, ou le groupe additif d'un espace vectoriel topologique). Une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans G est *de Cauchy* (à gauche (resp. à droite)) si pour tout voisinage V de l'élément neutre e dans G (ou, de manière équivalente, pour tout élément V d'un système fondamental de voisinages de e dans G fixé), il existe N dans $\mathbb{N}$ tel que pour tous $m, n \geq N$, on ait $(x_m)^{-1}x_n \in V$ (resp. $x_m(x_n)^{-1} \in V$). Nous ne considèrerons que les suites de Cauchy à gauche. Lorsque G est commutatif, par exemple si G est le groupe additif d'un espace vectoriel topologique, les suites de Cauchy à gauche et à droite coïncident bien sûr. Mais en général, elles diffèrent, voir par exemple [Bou1, TG III.73, exerc. 4].

Exemples. (1) Si E est un espace vectoriel topologique sur un corp valué dont la topologie est définie par une famille de semi-normes $\big(||\cdot||_\alpha\big)_{\alpha\in\mathscr{A}}$, alors une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans E est de Cauchy si et seulement si

$$\forall\, \alpha \in \mathscr{A},\;\; \forall\, \epsilon > 0,\;\; \exists\, N \in \mathbb{N},\;\; \forall\, m, n \geq N, \quad ||x_n - x_m||_\alpha < \epsilon\ .$$

(2) L'image par un morphisme de groupes topologiques $f : G \to G'$ d'une suite de Cauchy de G est une suite de Cauchy de G'. En particulier, si G est un sous-groupe topologique de G', alors toute suite de Cauchy de G est une suite de Cauchy de G'.

En effet, pour tout voisinage V de e dans G', le sous-ensemble $f^{-1}(V)$ est un voisinage de e dans G par continuité de f. Donc si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans G, alors il existe N dans $\mathbb{N}$ tel que pour tous $m, n \geq N$, on ait $(x_m)^{-1}x_n \in f^{-1}(V)$. Comme f est un morphisme de groupes, ceci implique que $(f(x_m))^{-1}f(x_n) \in V$. Donc la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans G.

Proposition 3.13 *Soit G un groupe topologique. Toute suite convergente dans G est de Cauchy. Si une suite de Cauchy dans G admet une valeur d'adhérence ℓ dans G, alors elle converge vers ℓ.*

Preuve. Pour tout voisinage ouvert V de l'élément neutre e dans G, soit U un voisinage ouvert de e tel que $U^{-1}U = \{x^{-1}y \ :\ x, y \in U\}$ soit contenu dans V (qui existe par continuité en (e, e) de l'application $(x, y) \mapsto x^{-1}y$). Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergeant vers ℓ dans G. Puisque ℓU est un voisinage ouvert de ℓ, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\ell^{-1}x_n \in U$ pour tout $n \geq N$. Alors pour $m, n \geq N$, on a $x_n^{-1}x_m = (\ell^{-1}x_n)^{-1}(\ell^{-1}x_m) \in V$.

La preuve de la seconde assertion est similaire. □

Remarques. (1) Plus généralement, soit X un espace topologique dont la topologie est définie par une famille de pseudo-distances $(d_\alpha)_{\alpha\in\mathscr{A}}$. Une *suite de Cauchy* dans X est une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans X telle que

$$\forall\, \alpha \in \mathscr{A},\;\; \forall\, \epsilon > 0,\;\; \exists\, N \in \mathbb{N},\;\; \forall\, m, n \geq N, \quad d_\alpha(x_n, x_m) < \epsilon\ .$$

Remarquons que si la famille est séparante et si $\mathscr{A} = \mathbb{N}$, alors une suite est de Cauc
dans X si et seulement si elle est de Cauchy pour la distance $d = \sum_{i\in\mathbb{N}} 2^{-i}\max\{1, d_i\}$

Les deux dernières propriétés des suites de Cauchy dans les espaces métriques so
vraies (avec preuve tout à fait analogue) pour les espaces topologiques dont la topolo
est définie par une famille de pseudo-distances.

(2) Une pseudo-distance $d : G \times G \to \mathbb{R}$ sur un groupe G est dite *invariante (
translations) à gauche* si pour tous $x, y, g \in G$, nous avons

$$d(gx, gy) = d(x, y)\ .$$

Par exemple, la (pseudo-)distance induite par une (semi-)norme sur un espace vector
sur un corps valué est invariante par translations. Si G est un groupe topologique d
la topologie est définie par une famille de pseudo-distances invariantes par translatio
à gauche $(d_\alpha)_{\alpha\in\mathscr{A}}$ (par exemple si G est le groupe additif d'un corps valué, ou le grou
additif d'un espace vectoriel sur un corps valué muni de la topologie définie par une fam
de semi-normes), alors le groupe topologique G et l'ensemble G muni de la topologie défi
par $(d_\alpha)_{\alpha\in\mathscr{A}}$ ont les mêmes suites de Cauchy. En particulier, pour les espaces vectori
normés (qui sont à la fois des espaces métriques et des groupes topologiques), les de
définitions précédentes coïncident.

Espaces complets, de Banach, de Fréchet

Un espace métrique est dit *complet* si toute suite de Cauchy dans cet espace
convergente. Un espace topologique est dit *métrisable complet* si sa topologie est indu
par une distance complète.

L'un des intérêts principaux de cette notion est que dans un espace métrique co
pour être complet, pour montrer qu'une suite est convergente, il n'y a pas besoin d'exhi
a priori la limite, il suffit de montrer que la suite est de Cauchy.

Exemples. (1) Un ensemble muni de la distance discrète (voir l'exemple (i) du pa
graphe 1.3) est complet (les suites de Cauchy, comme les suites convergentes, sont
suites constantes à partir d'un certain rang). Mais l'ensemble $X = \{\frac{1}{n+1}\ :\ n \in \mathbb{N}\}$ (m
de la distance induite par celle de $\mathbb{R}$) est un espace métrique discret, qui n'est pas compl
la suite $(\frac{1}{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ de X étant de Cauchy, mais non convergente dans X.

(2) Le lecteur sait depuis sa plus tendre enfance que $\mathbb{R}$ (pour sa valeur absolue usue
est complet (et en fait, c'est l'une des manières de construire le corps $\mathbb{R}$, voir [Bou1, T
III.3] ou la fin du paragraphe 5.3) : une suite de Cauchy réelle étant bornée admet u
sous-suite monotone bornée, qui converge par la proposition 3.2, donc la suite de Cauc
dans $\mathbb{R}$ est convergente (par le dernier point ci-dessus).

(3) Le sous-espace $\mathbb{R} - \{0\}$ n'est pas complet (la suite $\big(\frac{1}{n+1}\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy, m
non convergente). Il existe un moyen canonique de rendre complet un espace métriq
voir la fin du paragraphe 5.3.

(4) Les espaces métriques $\mathbb{R}$ et $]0, 1[$ sont homéomorphes, mais le premier est compl
et le second ne l'est pas.

Un groupe topologique (par exemple un corps topologique ou un espace vecto
topologique) est dit *séquentiellement complet* si chacune de ses suites de Cauchy
convergente.

La bonne notion de complétude sur les espaces uniformes nécessite, outre la not
d'espace uniforme, la notion de filtre. Mais dans le cas des espaces uniformes dont t

point admet un système fondamental dénombrable de voisinages, la notion de complétude (que nous ne définissons pas) et de séquentielle complétude sont équivalentes. Nous renvoyons à l'excellent [Bou1] pour un complément d'information.

Par exemple, un groupe topologique discret est séquentiellement complet.

Remarque 3.14 Si la topologie d'un groupe topologique G est définie par une famille dénombrable séparante $(d_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de distances invariantes par translations à gauche, alors le groupe topologique G est séquentiellement complet si et seulement si l'espace métrique (G,d), où d est la distance $\sum_{i\in\mathbb{N}} 2^{-i}\max\{1,d_i\}$, est complet, car par la remarque précédente, toute suite de Cauchy pour d est de Cauchy dans le groupe topologique G.

Un espace vectoriel normé E sur un corps valué non discret K est un *espace de Banach* s'il est complet. Nous reviendrons au paragraphe 6.1 sur les espaces de Banach.

Remarquons que comme l'application $\lambda\mapsto\lambda v$ est un isomorphisme de groupes topologiques du groupe additif de K sur son image dans E pour tout vecteur v de E de norme 1, qui est une isométrie, si E est un espace de Banach de dimension au moins 1 sur K, alors K est aussi complet.

Exemple. Pour $p\in[1,+\infty[$ et $\mathbb{K}$ un corps valué complet non discret, l'espace $\ell^p(\mathbb{K})$ des suites à valeurs dans $\mathbb{K}$, de puissance p-ème sommables, muni de la norme

$$||(x_n)_{n\in\mathbb{N}}||_p=\Big(\sum_{n\in\mathbb{N}}|x_n|^p\Big)^{1/p},$$

est un espace de Banach. En effet, si $\big((x_{n,k})_{n\in\mathbb{N}}\big)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $\ell^p(\mathbb{K})$, alors comme les projections canoniques sont 1-lipschitiziennes (voir la définition dans le paragraphe 5.3), pour tout n fixé dans $\mathbb{N}$, la suite $(x_{n,k})_{k\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $\mathbb{K}$, donc converge vers $x_n\in\mathbb{K}$. Un argument d'inégalité triangulaire et de passage à la limite dans la formule exprimant que $\big((x_{n,k})_{n\in\mathbb{N}}\big)_{k\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy permet alors de montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à $\ell^p(\mathbb{K})$, et que $\big((x_{n,k})_{n\in\mathbb{N}}\big)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\ell^p(\mathbb{K})$.

Définition 3.15 *Soit E un espace vectoriel topologique réel ou complexe. On dit que E est un* espace de Fréchet *s'il vérifie l'une des trois conditions équivalentes suivantes.*

(1) E est séparé, séquentiellement complet et le vecteur nul admet un système fondamental dénombrable de voisinages convexes ;

(2) E est séquentiellement complet, et sa topologie est définie par une famille dénombrable séparante de semi-normes ;

(3) E est localement convexe, et sa topologie est définie par une distance complète invariante par translations.

Preuve. Montrons que (1) implique (2). Par le théorème 2.18, puisque le vecteur nul de E admet un système fondamental dénombrable de voisinages convexes, la topologie de E est définie par une famille dénombrable de semi-normes. Celle-ci est séparante par la proposition 2.1 (1), car E est séparé.

Montrons que (2) implique (3). Soit $(||\cdot||_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille dénombrable séparante de semi-normes, définissant la topologie de E. Par le théorème 2.18, l'espace vectoriel topologique E est localement convexe. Par la preuve de la proposition 2.1 (2), l'application $d:E\times E\to\mathbb{R}$ définie par $d(x,y)=\sum_{n\in\mathbb{N}}\min\{1,||x-y||_n\}$ est une distance induisant la

topologie de E. Elle est clairement invariante par translations. La remarque 3.14 entra
que d est complète, car E est séquentiellement complet.

Montrons que (3) implique (1). Tout espace métrisable est séparé. La remarque 3
entraîne que E est séquentiellement complet. Enfin, soit $(C_\alpha)_{\alpha\in\mathscr{A}}$ un système fondamen
de voisinages convexes de 0, et (puisque tout point d'un espace métrisable admet
système fondamental dénombrable de voisinages), soit $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un système fondamen
dénombrable de voisinages de 0. Pour tout n dans $\mathbb{N}$, soit $\alpha_n\in\mathscr{A}$ tel que C_{α_n} soit conte
dans V_n. Alors $(C_{\alpha_n})_{n\in\mathbb{N}}$ est un système fondamental dénombrable de voisinages conve
de 0.

Tout espace de Banach est un espace de Fréchet, en utilisant l'une quelconque de
définitions. Mais nous verrons plus tard que, par exemple, l'espace de Schwartz $\mathscr{S}$(
des fonctions à décroissance rapide sur $\mathbb{R}^r$ pour tout $r\in\mathbb{N}-\{0\}$ est un espace de Fréch
qui n'est pas un espace de Banach par l'exercice E.7.

Par contre, la topologie d'un espace de Fréchet E n'est pas forcément, comme dans
cas des espaces de Banach, définie par une distance à la fois invariante par translatio
(rappelons que cela signifie que $d(x+z,y+z)=d(x,y)$ pour tous $x,y,z\in E$) et *homog*
(i.e. vérifiant $d(\lambda x,\lambda y)=|\lambda|d(x,y)$ pour tout réel ou complexe λ et tous $x,y\in E$), v
l'exercice E.7.

Voici quelques propriétés des espaces complets.

Proposition 3.16 *(1) Un sous-espace fermé F d'un espace métrique complet X est co
plet.*

*Un sous-groupe fermé d'un groupe topologique séquentiellement complet est séquent
lement complet.*

(2) Un sous-espace complet F d'un espace métrique X est fermé.

*Un sous-groupe séquentiellement complet d'un groupe topologique séparé, dont l'é
ment neutre admet un système fondamental dénombrable de voisinages, est fermé.*

(3) Tout sous-espace vectoriel fermé d'un espace de Banach est un espace de Bana

Tout sous-espace vectoriel fermé d'un espace de Fréchet est un espace de Fréchet.

Preuve. (1) Une suite de Cauchy dans F est encore de Cauchy dans X, donc conve
dans X, mais la limite appartient à F car F est fermé. La preuve de la seconde assert
est analogue.

(2) On utilise la caractérisation séquentielle des fermés. Une suite dans F qui conve
vers un élément x dans X est de Cauchy, donc converge dans F vers un élément de
qui est x par unicité des limites dans X. La preuve de la seconde assertion est analog

(3) La première affirmation découle de la première affirmation de (1).

La restriction à un sous-espace vectoriel d'une distance invariante par translations
encore une distance invariante par translations sur ce sous-espace. Comme l'intersect
de deux convexes est encore convexe, la topologie induite sur un sous-espace vecto
d'un espace vectoriel topologique localement convexe est encore localement convexe.
utilisant la définition 3.15 (3) d'un espace de Fréchet, la seconde affirmation découle d
aussi de la première affirmation de (1).

Proposition 3.17 *(i) Le produit d'une famille dénombrable d'espaces métriques co
plets, muni de la distance produit définie dans la preuve de la proposition 2.9 du pa
graphe 2.4 dans le cas d'un produit infini, ou de l'une des distances produits de l'exem
(iv) du paragraphe 1.3 dans le cas d'un produit fini, est un espace métrique complet.*

(ii) Le produit d'une famille de groupes topologiques séquentiellement complets est un groupe topologique séquentiellement complet.

(iii) Le produit d'une famille dénombrable d'espaces de Fréchet est un espace de Fréchet.

(iv) Si le produit d'une famille dénombrable d'espaces métriques non vides est complet, alors chaque espace de cette famille est complet.

(v) La limite projective d'un système projectif de groupes topologiques séparés et séquentiellement complets est un groupe topologique séparé et séquentiellement complet.

En particulier, $\mathbb{R}^n$ est complet pour tout n dans $\mathbb{N}$. En particulier, $\mathbb{C}$ est un corps topologique complet.

Par exemple, l'anneau topologique $\mathbb{Z}_p = \varprojlim \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ est séparé complet.

Preuve. (i) et (ii). L'idée clef est que les projections sont (localement) lipschitziennes (voir le paragraphe 5.3) pour ces distances. Pour tous $x = (x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ et $y = (y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ dans le produit d'une suite d'espaces métriques, pour la distance produit

$$d(x,y) = \sum_{i\in\mathbb{N}} 2^{-i}\min\{1, d(x_i,y_i)\} ,$$

nous avons $\min\{1, d(x_i,y_i)\} \leq 2^i d(x,y)$, et donc $d(x_i,y_i) \leq 2^i d(x,y)$ si $d(x,y) < 2^{-i}$. Par conséquent, l'image d'une suite de Cauchy par chacune des projections canoniques est une suite de Cauchy, donc converge. Il en est de même pour le produit d'un nombre fini d'espaces métriques, pour l'une des distances produits (équivalentes) d_p pour $p \in [1, +\infty]$.

De même, comme les projections canoniques d'un produit de groupes topologiques sont des morphismes de groupes topologiques, l'image d'une suite de Cauchy par chacune des projections canoniques est une suite de Cauchy, donc converge.

On conclut alors par la caractérisation des suites convergentes à valeurs dans un produit (voir le premier exemple suivant la proposition 3.10).

(iii) En utilisant la définition 3.15 (2) d'un espace de Fréchet, cette assertion découle de (ii) et du fait que si $(E_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une famille dénombrable d'espaces vectoriels topologiques, telle que, pour tout $i \in \mathbb{N}$, la topologie de E_i soit définie par la famille dénombrable de semi-normes $(||\cdot||_{i,j})_{j\in\mathbb{N}}$, alors la topologie de l'espace vectoriel topologique produit $\prod_{i\in\mathbb{N}} E_i$ est définie par la famille des semi-normes $\big(x \mapsto ||\operatorname{pr}_i(x)||_{i,j}\big)_{i,j\in\mathbb{N}}$.

(Nous pouvions aussi utiliser le fait qu'un produit d'espaces vectoriels topologiques localement convexes est encore un espace vectoriel topologique localement convexe (car les ouverts élementaires construits à partir des ouverts convexes de chaque facteur forment un système fondamental de voisinages convexes), et que la distance produit usuelle de distances complètes invariantes par translations dans chaque facteur est complète et invariante par translations dans le produit.)

(iv) Cette assertion vient du fait que si $(X_i)_{i\in I}$ est une famille dénombrable d'espaces métriques non vides, et si x_i est un point de X_i, alors pour tout j dans I, l'application $\phi_j : X_j \to \prod_{i\in I} X_i$ qui à x dans X_j associe la famille $(y_i)_{i\in I}$, où $y_i = x_i$ si $i \neq j$ et $y_j = x$, est une isométrie de X_j (quitte à multiplier sa distance d_j par une constante strictement positive et la remplacer par la distance tronquée $\min\{1, d_j\}$, ce qui ne change pas les suites de Cauchy) sur son image dans l'espace topologique produit $\prod_{i\in I} X_i$ (pour les distances ci-dessus).

(v) Par la proposition 2.10, ceci découle de l'assertion (ii) et la proposition 3.17 (1). □

Proposition 3.18 *Si E est un espace de Banach et si F est un sous-espace vector fermé, alors l'espace vectoriel normé quotient E/F (voir la proposition 2.27) est au complet.*

Preuve. Notons $\pi : E \to E/F$ la projection canonique. Soit $(\pi(x_i))_{i\in\mathbb{N}}$ une suite Cauchy pour la norme quotient $||\pi(x)|| = \inf_{f\in F} ||x+f||$ dans E/F. Pour tout n dans il existe i_n dans $\mathbb{N}$ tel que pour tous $j \geq i_n$, on ait $||\pi(x_{i_n}) - \pi(x_j)|| < \frac{1}{2^n}$, ce qui implic qu'il existe $y_{n,j}$ dans F tel que $||x_{i_n} - x_j - y_{n,j}|| \leq \frac{1}{2^n}$. On peut supposer que la su $(i_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante. Posons

$$x'_n = x_{i_n} + \sum_{k=0}^{n-1} y_{k,i_{k+1}} ,$$

qui vérifie $\pi(x'_n) = \pi(x_{i_n})$. Alors

$$||x'_{n+1} - x'_n|| \leq ||x_{i_{n+1}} - x_{i_n} + y_{n,i_{n+1}}|| \leq \frac{1}{2^n} .$$

Donc par inégalité triangulaire,

$$||x'_{n+p} - x'_n|| = \Big|\Big| \sum_{k=n}^{n+p-1} (x'_{k+1} - x'_k) \Big|\Big| \leq \sum_{k=n}^{n+p-1} \frac{1}{2^k} \leq \frac{1}{2^{n-1}} .$$

En particulier, la suite $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans E, donc converge vers x. La project canonique π est continue (nous avons vu que la topologie induite par la norme quotient E/F est la topologie quotient, mais on peut aussi remarquer que π est 1-lipschitzier (donc continue, nous reviendrons là-dessus dans le paragraphe 5.3) : $||\pi(x) - \pi(y)||$ $||\pi(x-y)|| \leq ||x-y||$ par définition de la norme quotient). Donc la suite $(\pi(x_{i_n}))$ converge vers $\pi(x)$. Comme toute suite de Cauchy, dont une suite extraite converge, convergente, le résultat s'en déduit.

Exercice E.45 *(i) Montrer que l'espace quotient E/F d'un espace de Fréchet E par sous-espace vectoriel fermé F est un espace de Fréchet.*

(ii) Montrer qu'un espace vectoriel topologique est un espace de Fréchet si et seulem s'il est isomorphe à un sous-espace vectoriel fermé d'un produit dénombrable d'espaces Banach.

Nous donnerons de nombreux exemples d'espaces complets dans les paragraphes 5 5.3 et 6.1.

Théorème du point fixe des applications contractantes

Théorème 3.19 (Théorème du point fixe de Banach) *Soit X un espace topologi non vide, tel que la topologie de X soit définie par une famille séparante de pseu distances $(d_\alpha)_{\alpha\in\mathscr{A}}$, qui est séquentiellement complet. Soit $f : X \to X$ une application t que*

$$\forall\, \alpha \in \mathscr{A}\,, \exists\, k_\alpha \in [0,1[\,,\ \ \forall\, x,y \in X, \quad d_\alpha(f(x), f(y)) \leq k_\alpha\, d_\alpha(x,y) .$$

Alors f admet un unique point fixe dans X.

De plus, pour tous $\alpha \in \mathscr{A}$ et $x_0 \in X$, si $f(x) = x$, alors

$$d_\alpha(x_0, x) \leq \frac{1}{1-k} d_\alpha(x_0, f(x_0)) .$$

Preuve. L'unicité est immédiate : si x et y sont des points fixes distincts, soit $\alpha \in \mathscr{A}$ tel que $d_\alpha(x,y) \neq 0$. Alors $d_\alpha(x,y) = d_\alpha(f(x), f(y)) \leq k_\alpha\, d_\alpha(x,y)$, contredit le fait que $0 \leq k_\alpha < 1$.

L'existence utilise une méthode itérative, dite *de Picard*. Soit x_0 un point de X, on considère la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par x_0 et la relation de récurrence $x_{n+1} = f(x_n)$. Montrons que cette suite converge vers un point fixe de f.

Soit $\alpha \in \mathscr{A}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, puisque $d_\alpha(f(x_{n+1}), f(x_n)) \leq k_\alpha\, d_\alpha(x_{n+1}, x_n)$, on a par récurrence

$$d_\alpha(x_{n+1}, x_n) \leq k_\alpha^n\, d_\alpha(x_1, x_0)\ .$$

Donc par inégalité triangulaire, pour tous $n, p \in \mathbb{N}$,

$$d_\alpha(x_{n+p}, x_n) \leq \sum_{k=0}^{p-1} d_\alpha(x_{n+k+1}, x_{n+k}) \leq \frac{k_\alpha^n}{1-k_\alpha} d_\alpha(x_1, x_0)\ . \tag{1}$$

Par conséquent, comme $0 \leq k_\alpha < 1$, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans X, donc converge vers un point x de X. L'application f étant continue, par passage à la limite dans l'équation $x_{n+1} = f(x_n)$, on a (par unicité des limites, l'espace X étant séparé) $x = f(x)$, ce qui montre le résultat.

En prenant $n = 0$ dans la formule (1), et en faisant tendre p vers $+\infty$, la dernière assertion en découle. $\square$

Bien sûr, la version la plus connue de ce théorème est le cas particulier suivant, déjà vu l'année précédente.

Porisme 3.20 *Soient X un espace métrique complet non vide, et $f : X \to X$ une application* strictement contractante, *i.e.*

$$\exists\, k \in [0, 1[\,,\quad \forall\, x, y \in X, \quad d(f(x), f(y)) \leq k\, d(x,y)\ .$$

Alors f admet un unique point fixe dans X.

De plus, pour tout $x_0 \in X$, si $f(x) = x$, alors

$$d(x_0, x) \leq \frac{1}{1-k} d(x_0, f(x_0))\ . \quad \square$$

Le résultat suivant est un corollaire du théorème de point fixe pour des espaces vectoriels topologiques, en particulier vrai pour les espaces de Fréchet.

Porisme 3.21 *Soit E un espace vectoriel topologique dont la topologie est définie par une famille séparante de semi-normes $(||\cdot||_\alpha)_{\alpha\in\mathscr{A}}$, qui est séquentiellement complet. Soient $k \in [0, 1[$ et $f : E \to E$ une application telle que*

$$\forall\, \alpha \in \mathscr{A}\,,\quad \forall\, x, y \in E, \quad ||f(x) - f(y)||_\alpha \leq k\, ||x - y||_\alpha\ .$$

Alors f admet un unique point fixe dans E. $\square$

Les applications en analyse fonctionnelle du théorème de point fixe de Banach sont nombreuses, nous n'en citons qu'une.

Porisme 3.22 *Soit E un espace de Banach sur un corps $\mathbb{K}$ muni d'une valeur abso non triviale, et $f : E \to E$ une application linéaire continue. Alors il existe $K \geq 0$ que, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $|\lambda| > K$, pour tout a dans E, l'équation*

$$f(x) - \lambda x = a$$

(d'inconnue $x \in E$) admet une unique solution $J(a)$, et $a \mapsto J(a)$ est continue.

Preuve. Puisque f est continue et linéaire, il existe K tel que $||f(x) - f(y)|| \leq K||x -$ pour tous x, y dans E. Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $|\lambda| > K$, l'application $g_a : E \to E$ défi par $g_a(x) = \frac{a - f(x)}{\lambda}$ est strictement contractante, car pour tous x, y dans E,

$$||g_a(x) - g_a(y)|| = \left|\left|\frac{f(x) - f(y)}{\lambda}\right|\right| \leq \frac{K}{|\lambda|}\, ||x - y||\ .$$

Par le théorème du point fixe des applications contractantes, soit $J(a)$ l'unique point f de g_a. Nous avons, pour tous a, b dans E,

$$\begin{aligned} |\lambda|\ ||J(a) - J(b)|| &= ||\lambda\, g_a(J(a)) - \lambda\, g_b(J(b))|| = ||a - b - f(J(a)) + f(J(b))|| \\ &\leq ||a - b|| + ||f(J(a)) - f(J(b))|| \leq ||a - b|| + K||J(a) - J(b)||\ . \end{aligned}$$

Donc $||J(a) - J(b)|| \leq \frac{1}{|\lambda| - K}||a - b||$, ce qui montre le résultat.

Cette preuve montre que J est en fait lipschitzienne (voir le paragraphe 5.3), que le résultat est encore vrai si l'on suppose seulement que f est une application lipschitzienne.

Exercice E.46 (Opérateurs intégraux sur $\mathbb{L}^1$) *Soit Ω un ouvert non vide de $\mathbb{R}^r$, $r \in \mathbb{N} - \{0\}$. Soit E l'espace de Banach réel (ou complexe) $\mathbb{L}^1(\Omega)$ (voir le paragraphe 6. Soit $K \in \mathbb{L}^1(\Omega \times \Omega)$ tel que $\sup_{y\in\Omega} \int_{x\in\Omega} |K(x,y)|\, dx$ soit fini. Soit $f : E \to E$ l'applicat linéaire définie par*

$$\forall\, u \in E, \ \ \forall\, y \in \Omega, \quad f(u)(y) = \int_{x\in\Omega} K(x,y) u(x)\, dx$$

Montrer que f est continue, et que pour tout réel (ou complexe) λ de valeur absolue as grande, pour tout u_0 dans E, l'équation

$$f(u) + \lambda u = u_0$$

(d'inconnue $u \in E$) admet une et une seule solution.

3.5 Indications pour la résolution des exercices

Schème E.43 Si U est un voisinage ouvert de a, alors $\pi(U)$ est un voisinage ouvert b, donc $\pi(U) \cap B \neq \emptyset$, donc $U \cap \pi^{-1}(B) \neq \emptyset$, ce qui montre la première affirmation.

Le sens direct découle de la continuité de π et de la composition de limites (voi corollaire 3.8).

Réciproquement, pour tout voisinage V de ℓ, soit U un voisinage ouvert de a tel $f \circ \pi(U \cap \pi^{-1}(B)) \subset V$. Alors $f(\pi(U) \cap B) \subset V$, puisque π est surjective. Comme $\pi($ est un voisinage ouvert de b, le fait que $f(y) \underset{y\to b,\ y\in B}{\longrightarrow} \ell$ en découle.

Schème E.44 Il suffit de s'intéresser aux suites qui convergent vers la fonction nulle 0.

Il est facile de voir que la topologie de Whitney (comme nous l'avons vu pour celle de Schwartz au paragraphe 2.3) induit sur $\mathscr{D}_K(\Omega)$ la topologie de $\mathscr{D}_K(\Omega)$. Donc si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite dans $\mathscr{D}_K(\Omega)$ convergeant vers 0 dans $\mathscr{D}_K(\Omega)$, alors elle converge vers 0 dans $\mathscr{D}(\Omega)$ à la fois pour la topologie de Schwartz et celle de Whitney

Réciproquement, comme la topologie de Schwartz est plus fine que celle de Whitney, une suite convergeant vers 0 pour la topologie de Schwartz converge aussi vers 0 pour la topologie de Whitney. Soit $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite exhaustive de compacts dans Ω. Il suffit de montrer que si une suite $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dans $\mathscr{D}(\Omega)$ converge vers 0 pour la topologie de Whitney, alors il existe N dans $\mathbb{N}$ tel que le support de f_k soit contenu dans K_N pour tout k. Sinon, quitte à extraire, il existe x_n dans ${}^cK_n$ tel que $\epsilon_n = |f_n(x_n)| > 0$. On construit facilement (en s'inspirant par exemple de l'exercice E.9) un élement ε dans $\mathscr{C}^0_{0,+}(\Omega)$ tel que $\varepsilon(x_n) < \frac{\epsilon_n}{2}$ pour tout n. Mais alors le voisinage ouvert $B'_{0,\varepsilon,0}$ de 0 pour la topologie de Whitney ne contient aucun élément de la suite $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$, ce qui contredit sa convergence vers 0.

Schème E.45 (i) Notons $\pi : E \to E/F$ la projection canonique. Montrons que E/F vérifie toutes les propriétés de la définition 3.15 (1). Comme F est fermé, l'espace quotient E/F est séparé (voir le corollaire 2.26).

Soit $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un système fondamental dénombrable de voisinages convexes de 0, que nous pouvons supposer ouverts, puisque l'intérieur d'un convexe est convexe. Puisque π est ouverte (voir le corollaire 2.26 (1)) et linéaire, les $\pi(C_n)$ sont ouverts et convexes. Puisque π est continue, $\big(\pi(C_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est un système fondamental dénombrable de voisinages convexes de 0 dans E/F.

Le fait que E/F soit séquentiellement complet se démontre de manière très semblable dans l'esprit à la proposition 3.18. Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, on construit une application strictement croissante $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que

$$C_{\varphi(n+1)} \;\subset\; C_{n+1} \cap \frac{1}{2}\, C_{\varphi(n)}\ .$$

En particulier, comme les homothéties sont des homéomorphismes, pour tout $t > 0$, la famille $(tC_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est encore un système fondamental de voisinages de 0.

Soit $\big(\pi(x_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans l'espace vectoriel topologique E/F. Pour tout n dans $\mathbb{N}$, il existe i_n dans $\mathbb{N}$ tel que pour tous $j \geq i_n$, on ait $\pi(x_{i_n}) - \pi(x_j) \in \pi(C_{\varphi(n)})$, ce qui implique qu'il existe $y_{n,j}$ dans F tel que $x_{i_n} - x_j - y_{n,j} \in C_{\varphi(n)}$. On peut supposer que la suite $(i_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante. Posons

$$x'_n = x_{i_n} + \sum_{k=0}^{n-1} y_{k,i_{k+1}}\ ,$$

qui vérifie $\pi(x'_n) = \pi(x_{i_n})$. Notons $||\cdot||_n$ la jauge du convexe ouvert C_n (voir le lemme 2.17). Comme $C_{\varphi(n+p)} \subset \frac{1}{2^p} C_{\varphi(n)}$, nous avons $||\cdot||_{\varphi(n)} \leq \frac{1}{2^p}||\cdot||_{\varphi(n+p)}$ par les assertions (5) et (7) du lemme 2.17. Alors

$$||x'_{n+1} - x'_n||_{\varphi(n)} = ||x_{i_{n+1}} - x_{i_n} + y_{n,i_{n+1}}||_{\varphi(n)} < 1\ ,$$

par l'assertion (3) du lemme 2.17. Donc par l'inégalité triangulaire des jauges (voir l'assertion (1) du lemme 2.17), pour tout $p \in \mathbb{N}$, nous avons

$$||x'_{n+p} - x'_n||_{\varphi(n)} \leq \sum_{k=0}^{p-1} ||x'_{n+k+1} - x'_{n+k}||_{\varphi(n)} \leq \sum_{k=0}^{p-1} \frac{1}{2^k} ||x'_{n+k+1} - x'_{n+k}||_{\varphi(n+k)} < \sum_{k=0}^{p-1} \frac{1}{2^k} \leq 2\ .$$

Par l'assertion (3) du lemme 2.17, nous avons donc $x'_{n+p} - x'_n \in 2C_{\varphi(n)}$ pour tous $n, p \in$
En particulier, la suite $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans E, donc converge vers x. Puisque
est continue, la suite $(\pi(x_{i_n}))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\pi(x)$. Comme toute suite de Cauchy, do
une suite extraite converge, est convergente, le résultat s'en déduit.

(ii) Par les propositions 3.17 (iii) et 3.16 (3), tout sous-espace vectoriel fermé d'
produit dénombrable d'espaces de Banach est un espace de Fréchet.

Réciproquement, soit E un espace de Fréchet. Par la définition 3.15 (2), soit $\big(||\cdot||_i\big)$
une famille dénombrable séparante de semi-normes sur E, et $F_i = \{x \in E\ :\ ||x||_i =$
Alors F_i est un sous-espace vectoriel fermé de E, et l'espace vectoriel topologique quoti
E/F_i est séquentiellement complet par (i). Donc, muni de la norme quotient de la ser
norme $||\cdot||_i$, qui induit la topologie quotient (voir l'exemple (1) suivant la proposit
2.27), E/F_i est un espace de Banach.

Considérons l'application θ de E dans l'espace vectoriel topologique produit $\prod_{i\in\mathbb{N}}\ E$
définie par $x \mapsto (x + F_i)_{i\in\mathbb{N}}$. Cette application θ est clairement linéaire, continue, et
jective (car la famille de semi-normes est séparante). Soit $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite dans E te
que $\big(\theta(x_k)\big)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers y dans $\prod_{i\in\mathbb{N}}\ E/F_i$. En particulier, la suite $\big(\theta(x_k)\big)_{k\in\mathbb{N}}$ est
Cauchy dans $\prod_{i\in\mathbb{N}}\ E/F_i$. Par la définition des normes quotients et des suites de Cauc
dans un espace vectoriel dont la topologie est définie par une famille de semi-normes,
suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est alors de Cauchy dans E, donc converge dans $x \in E$. Par continuité
θ, ceci montre que $\theta(x) = y$, donc que θ est un homéomorphisme sur son image, qui
fermée.

4 Compacité

Les références recommandées pour ce chapitre sont [Bou1, Dix, Dug].

4.1 Espace compact

Soient X un ensemble et B une partie de X. Une famille $(A_i)_{i\in I}$ de parties de X est un *recouvrement* de B (ou *recouvre* B) si $B \subset \bigcup_{i\in I} A_i$ (et donc $\bigcup_{i\in I} A_i = X$ si $B = X$). Un *sous-recouvrement* d'un recouvrement $(A_i)_{i\in I}$ est une sous-famille $(A_j)_{j\in J}$ (avec $J \subset I$) qui recouvre encore B. Si X est un espace topologique, un recouvrement $(A_i)_{i\in I}$ de B est dit *ouvert* (resp. *fermé*) si tous les A_i sont ouverts (resp. fermés).

Définition 4.1 *Un espace topologique X est dit* compact *s'il est séparé et si tout recouvrement ouvert de X admet un sous-recouvrement fini.*

Certains ouvrages, en particulier anglo-saxons, omettent (à tort !) la condition de séparation. Nous verrons plus loin que la compacité peut s'exprimer en termes de suites pour les espaces métrisables.

Par passage au complémentaire, le résultat suivant est immédiat.

Proposition 4.2 *Un espace topologique séparé X est compact si et seulement si toute famille de fermés de X d'intersection vide admet une sous-famille finie d'intersection vide.* □

En particulier, dans un espace topologique compact, toute intersection décroissante de fermés non vides est non vide.

La propriété « être compact » est invariante par homéomorphismes (au sens du paragraphe 1.2).

Exemple. Un espace discret est compact si et seulement s'il est fini, car la famille de ses singletons est un recouvrement ouvert.

Exercice E.47 *Montrer que l'ensemble ordonné des ordinaux inférieurs ou égaux à un ordinal donné, muni de la topologie de l'ordre (voir l'exemple (3) du paragraphe 1.4), est compact.*

Soient X un espace topologique et A une partie de X. Comme les ouverts du sous-espace topologique A sont les traces sur A des ouverts de X, les assertions suivantes sont équivalentes :
– le sous-espace topologique A est compact ;
– le sous-espace topologique A est séparé, et tout recouvrement de A par des ouverts de X admet un sous-recouvrement fini ;
– le sous-espace topologique A est séparé, et toute famille de fermés de X dont l'intersectin ne rencontre pas A admet une sous-famille finie dont l'intersection ne rencontre pas A.

On dit alors que A est une *partie compacte* de X, ou tout simplement un *compact* de X. Si Y est un sous-espace topologique de X, et si A est contenu dans Y, alors la topologie induite sur A par la topologie de Y est la topologie sur A induite par la topologie de X, donc tout compact de Y est un compact de X (il n'y a pas besoin d'hypothèse supplémentaire sur Y : la propriété d'être compact est dite intrinsèque, au sens qu'elle ne dépend pas de l'espace ambiant dans lequel on plonge l'espace considéré comme sous-espace).

Proposition 4.3 *(1) Si X est un espace topologique séparé, si A est une partie co pacte de X, alors A est fermée dans X.*

(2) Un sous-espace fermé d'un espace compact est compact.

(3) Si X est un espace topologique séparé, alors une union finie de compacts de X compacte.

Preuve. (1) On montre que $X - A$ est ouvert. Soit $x \in X - A$. Comme X est sépa pour tout y dans A, il existe U_y, V_y deux ouverts disjoints tels que $x \in U_y$ et $y \in V_y$. particulier, $(V_y)_{y\in A}$ est un recouvrement de A par des ouverts de X. Par compacité de il existe $y_1, ..., y_n$ dans A tels que $A \subset V_{y_1} \cup ... \cup V_{y_n}$. Alors $U = \bigcap_{i=1}^n U_{y_i}$ est un ouvert X, tel que $U \cap A = \emptyset$ et $x \in U$. Donc $X - A$ est ouvert.

(2) On a déjà démontré qu'un sous-espace d'un espace séparé est séparé. Soit A fermé d'un espace compact X. Soit $(F_i)_{i\in I}$ une famille de fermés de A, d'intersection vi Puisque A est fermé, F_i est aussi fermé dans X, donc par compacité de X, il existe u sous-famille finie $(F_i)_{i\in I}$ dont l'intersection est vide.

(3) Une union finie d'ensembles finis est finie.

Remarquons que la séparation est une hypothèse nécessaire dans (1), car si X est l' pace non séparé $\{0_-, 0_+\} \cup]0,1]$ de l'exercice E.11, alors le sous-espace $A = \{0_+\} \cup]0$ est compact (car homéomorphe à l'intervalle réel $[0,1]$, que nous montrerons être comp dans le paragraphe suivant), mais n'est pas fermé (par exemple parce que tout voisin de 0_-, qui n'appartient pas à A, rencontre A, ou parce que la suite $\left(\frac{1}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ dans converge vers $0_- \notin A$, bref parce que A est dense mais pas égal à l'espace tout entier)

De même, l'hypothèse de séparation dans (3) est nécessaire, car toujours dans même espace non séparé $X = \{0_-, 0_+\} \cup]0,1]$ de l'exercice E.11, les deux parties A_- $\{0_-\} \cup]0,1]$ et $A_+ = \{0_+\} \cup]0,1]$ sont compactes (homéomorphes à l'intervalle réel $[0,$ mais leur réunion est tout X, qui n'est pas séparé.

Exercice E.48 *Soit X un espace topologique séparé. Montrer que deux compacts disjo de X ont des voisinages disjoints.*

En déduire qu'un espace topologique compact est normal (voir la définition dans paragraphe 1.8).

En déduire que si X est un espace compact et si F et F' sont des fermés disjoints X, alors il existe une application continue $f : X \to [0,1]$ telle que $f(x) = 0$ pour tou dans F et $f(x') = 1$ pour tout x' dans F'.

4.2 Compacité et valeurs d'adhérence

Nous donnons ci-dessous une caractérisation séquentielle de la compacité dans le des espaces métriques. Pour les espaces topologiques généraux, une caractérisation a logue (et bien pratique) existe en utilisant les filtres (et surtout les ultrafiltres), mais n renvoyons par exemple à [Bou1, Dug] pour cela.

Soient X, Y deux espaces topologiques, A une partie de X, $a \in \overline{A}$ et $f : B \to Y$ application, où $A \subset B \subset X$.

Proposition 4.4 *Supposons que Y soit compact.*

• *L'application $x \mapsto f(x)$ admet au moins une valeur d'adhérence quand x tend v a dans A.*

• *L'ensemble de ces valeurs d'adhérence est compact.*

• *Pour tout ouvert V de Y contenant l'ensemble des valeurs d'adhérences, il existe un voisinage U de a dans X tel que $f(U \cap A) \subset V$.*

• *De plus, si f admet une unique valeur d'adhérence ℓ en a, alors $f(x)$ admet ℓ pour limite quand x tend vers a dans A.*

Preuve. Par la proposition 3.12 (1), l'ensemble des valeurs d'adhérence est $\bigcap_{U \in \mathscr{V}(a)} \overline{f(U \cap A)}$, qui est fermé, donc compact par la proposition 4.3 (2). Si cet ensemble est vide, par compacité de Y, comme les $\overline{f(U \cap A)}$ sont fermés, il existe des voisinages $U_1, ..., U_n$ de a tels que $\overline{f(U_1 \cap A)} \cap ... \cap \overline{f(U_n \cap A)} = \emptyset$. Comme

$$f(U_1 \cap ... \cap U_n \cap A) \subset f(U_1 \cap A) \cap ... \cap f(U_n \cap A) \subset \overline{f(U_1 \cap A)} \cap ... \cap \overline{f(U_n \cap A)}\ ,$$

on a donc $U_1 \cap ... \cap U_n \cap A = \emptyset$. Comme $U_1 \cap ... \cap U_n$ est un voisinage de a, ceci contredit le fait que $a \in \overline{A}$.

Soit V un voisinage ouvert de l'ensemble des valeurs d'adhérence. Alors $(Y - V) \cap \bigcap_{U \in \mathscr{V}(a)} \overline{f(U \cap A)}$ est vide, et les $Y - V$, $\overline{f(U \cap A)}$ sont fermés. Par compacité, il existe donc des voisinages $U_1, ..., U_n$ de a tels que $(Y - V) \cap \overline{f(U_1 \cap A)} \cap ... \cap \overline{f(U_n \cap A)} = \emptyset$. Si $U = U_1 \cap ... \cap U_n$, qui est un voisinage de a, alors

$$f(U \cap A) \subset \overline{f(U_1 \cap A)} \cap ... \cap \overline{f(U_n \cap A)} \subset V\ .$$

Si l'ensemble des valeurs d'adhérence est réduit à un singleton $\{\ell\}$, ceci montre que f admet ℓ pour limite en a. □

Porisme 4.5 *Dans un espace topologique compact, toute suite admet au moins une valeur d'adhérence. Si elle est unique, alors la suite converge vers elle.* □

Théorème 4.6 (Théorème de Bolzano-Weierstrass) *Soit X un espace métrique. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(1) X est compact ;

(2) toute suite dans X admet une sous-suite convergente ;

(3) X est complet et pour tout $\epsilon > 0$, il existe un recouvrement fini de X par des boules de rayon ϵ.

Pour tout $\epsilon > 0$, une partie A d'un espace métrique X est dite *ϵ-dense* si $V_\epsilon(A) = X$, autrement dit si les boules de rayons ϵ centrées aux points de A recouvrent X. La troisième condition s'énonce aussi :

(3)' X est complet et pour tout $\epsilon > 0$, il existe une partie finie ϵ-dense.

Preuve. L'affirmation que (1) implique (2) découle du corollaire 4.5 précédent (avec bien sûr la caractérisation des valeurs d'adhérence des suites dans un espace métrique comme les limites des sous-suites, voir le paragraphe 3.3).

Montrons que (2) implique (3). La complétude découle du fait que si une suite de Cauchy admet une valeur d'adhérence, alors elle converge (voir le paragraphe 3.4).

Soit $\epsilon > 0$. Par l'absurde, supposons que X n'admette pas de recouvrement fini par des boules de rayon ϵ. Montrons par récurrence sur n qu'il existe une suite de points $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tels que pour $n \geq 1$, $x_n \notin \bigcup_{i=0}^{n-1} B(x_i, \epsilon)$. Par l'hypothèse, X est non vide, soit

x_0 dans X. Soit $n \geq 1$, supposons construits $x_0, \dots, x_{n-1}$. Par l'hypothèse, les bou
ouvertes de centre $x_0, \dots, x_{n-1}$ et de rayon ϵ ne recouvrent pas X. Il suffit de prendre
n'appartenant à aucune de ces boules. Mais alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite dans X dont de
éléments (d'indice distincts) sont à distance au moins ϵ, et donc ne peut admettre u
sous-suite convergente, contradiction.

Montrons que (2) implique (1). Un espace métrique est séparé. Soit $(U_i)_{i\in I}$ un rec
vrement ouvert de X.

Montrons qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que pour tout x dans X, il existe i dans I tel que
boule $B(x, \epsilon)$ soit contenue dans U_i. Sinon, pour tout n dans $\mathbb{N}$, il existe x_n dans X tel q
la boule $B(x_n, \frac{1}{n+1})$ ne soit contenue dans aucun U_i. Par (2), soit x une valeur d'adhéren
de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et i_0 dans I tel que $x \in U_{i_0}$. Alors pour n assez grand, $B(x_n, \frac{1}{n+1})$
contenue dans l'ouvert U_{i_0}, contradiction.

Il suffit donc de montrer que X peut être recouvert par un nombre fini de boules
rayon ϵ, ce qui découle de la preuve que (2) implique (3).

Montrons enfin que (3) implique (2). Soit $S = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans X. Pour tout
il existe une famille finie de boules de rayon $\frac{1}{k+1}$ recouvrant X. Donc par récurrence, po
tout $k \in \mathbb{N}$, il existe une sous-suite $(x_{n,k})_{n\in\mathbb{N}}$ de S, qui est une sous-suite de $(x_{n,k-1})$,
si $k \geq 1$, et qui est contenue dans une boule de rayon $\frac{1}{k+1}$. Par extraction diagonale,
sous-suite $(y_n = x_{n,n})_{n\in\mathbb{N}}$ de S est telle que $d(y_n, y_m) \leq \frac{2}{m}$ si $m \leq n$. Par complétude,
suite de Cauchy $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, ce qui montre le résultat.

Remarque. (1) Comme vu les années précédentes, les compacts de $\mathbb{R}$ sont donc les ferm
bornés. Ceci se montre en utilisant l'assertion (3) du théorème précédent, car les part
complètes de l'espace $\mathbb{R}$ sont les fermés, et les parties bornées sont celles contenues da
un intervalle de longueur bornée, donc sont celles que l'on peut recouvrir, pour tout $\epsilon >$
par un nombre fini d'intervalles ouverts de longueur $\epsilon/2$.

(2) Il découle de l'assertion (3) par exemple qu'un espace métrique compact est bo
(i.e. de diamètre fini).

Exercice E.49 *Soit X un espace métrique compact. Soit $\mathscr{P}_c(X)$ l'ensemble des ferm
non vides de X, muni de la distance de Hausdorff d_H définie dans l'exemple (viii)
paragraphe 1.3. Montrer que l'espace métrique $(\mathscr{P}_c(X), d_H)$ est compact.*

Porisme 4.7 *Tout espace métrique compact X est séparable.*

Preuve. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit F_n une partie finie de X telle que les boules de rayon
centrées aux points de F_n recouvrent X. Alors $F = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$ est une partie dénombra
dense de X.

4.3 Compacité et produits

Soit E un ensemble muni d'une relation d'ordre (partielle) $\preceq$. Un élément x de E
dit *maximal* s'il n'y a pas d'élément de E strictement plus grand que x, c'est-à-dire si

$$\forall\, y \in E \quad x \preceq y \ \Rightarrow\ y = x\ .$$

Soit F une partie de E, un élément x de E est un *majorant* de F si

$$\forall\, y \in F \quad y \preceq x\ .$$

Une partie F de E est *totalement ordonnée* si l'ordre restriction à F de l'ordre de E est total, c'est-à-dire si

$$\forall\, x, y \in F \quad x \preceq y \quad \text{ou} \quad y \preceq x\,.$$

Par récurrence, pour toute partie finie P de F admet alors un majorant appartenant à P. L'ensemble ordonné $(E, \preceq)$ est dit *inductif* si toute partie totalement ordonnée admet un majorant.

Théorème 4.8 (Théorème de Zorn) *Tout ensemble ordonné inductif non vide possède un élément maximal.* □

Ce théorème est admis (voir par exemple [Kri]), il est équivalent à l'axiome du choix.

Lemme 4.9 *Soit X un espace topologique. Un* mauvais *recouvrement de X est un recouvrement n'admettant pas de sous-recouvrement fini. Soit $\mathscr{P}$ une prébase d'ouverts de X. Si X admet un mauvais recouvrement ouvert, alors il admet un mauvais recouvrement par des éléments de $\mathscr{P}$.*

Preuve. Soit $\mathscr{M}$ l'ensemble supposé non vide des mauvais recouvrements ouverts de X, partiellement ordonné par l'inclusion. Montrons qu'il est inductif. Soit $(\mathscr{U}_\alpha)_{\alpha\in\mathscr{A}}$ une famille totalement ordonnée d'éléments de $\mathscr{M}$. Soit $\mathscr{U} = \bigcup_{\alpha\in\mathscr{A}} \mathscr{U}_\alpha$. Alors $\mathscr{U}$ est un majorant des $\mathscr{U}_\alpha$. C'est un mauvais recouvrement ouvert de X, sinon il contiendrait un sous-recouvrement fini $\{V_1, ..., V_n\}$; si $V_i \in \mathscr{U}_{\alpha_i}$ et si $\beta \in \mathscr{A}$ vérifie $\mathscr{U}_{\alpha_i} \subset \mathscr{U}_\beta$ pour tout i, alors $\mathscr{U}_\beta$ aurait un sous-recouvrement ouvert fini, contradiction. Nous avons bien montré que $\mathscr{M}$ est inductif.

Par le théorème de Zorn, soit $\mathscr{U}^*$ un élément maximal de $\mathscr{M}$. En particulier, pour tout ouvert $V \notin \mathscr{U}^*$, le recouvrement $\mathscr{U}^* \cup \{V\}$ n'est pas mauvais, donc il existe $U_1, ..., U_n$ dans $\mathscr{U}^*$ tels que $\{V, U_1, ..., U_n\}$ recouvre X.

Lemme 4.10 *Pour tous les ouverts V, V' de X, si $V \notin \mathscr{U}^*$ et $V' \notin \mathscr{U}^*$, alors $V \cap V' \notin \mathscr{U}^*$.*

Preuve. Soient $U_1, ..., U_n, U'_1, ..., U'_{n'}$ dans $\mathscr{U}^*$ tels que $\{V, U_1, ..., U_n\}$ et $\{V', U'_1, ..., U'_{n'}\}$ recouvrent X. Alors $\{V\cap V', U_1, ..., U_n, U'_1, ..., U'_{n'}\}$ recouvre X, et comme $\mathscr{U}^*$ est mauvais, $V \cap V' \notin \mathscr{U}^*$. □

Lemme 4.11 *Pour tous les ouverts V, V' de X, si $V \notin \mathscr{U}^*$ et $V \subset V'$, alors $V' \notin \mathscr{U}^*$.*

Preuve. Si $\{V, U_1, ..., U_n\}$ recouvre X, alors $\{V', U_1, ..., U_n\}$ recouvre X aussi. □

Montrons maintenant que $\mathscr{P} \cap \mathscr{U}^*$ recouvre X. Soit x_0 dans X. Comme $\mathscr{U}^*$ recouvre X, il existe $U \in \mathscr{U}^*$ tel que $x_0 \in U$. Comme $\mathscr{P}$ est une prébase, il existe $V_1, ..., V_n$ dans $\mathscr{P}$ tels que $x_0 \in V_1 \cap ... \cap V_n \subset U$. Par les lemmes précédents, il existe i tel que $V_i \in \mathscr{U}^*$. Donc $x_0 \in V_i \in \mathscr{P} \cap \mathscr{U}^*$.

Enfin, comme $\mathscr{U}^*$ est mauvais, $\mathscr{P} \cap \mathscr{U}^*$ l'est aussi. □

Théorème 4.12 (Théorème de Tychonov) *Tout produit d'espaces compacts est compact.*

Preuve. Nous savons déjà qu'un produit d'espaces séparés est séparé (voir la proposit
2.7). Soit $X = \prod_{i\in I} X_i$ un produit d'espaces compacts. Par les propriétés de la topolo
produit, l'ensemble $\mathscr{P}$ des $\mathrm{pr}_j^{-1}(V)$, où $j \in I$ et V est un ouvert de X_j, est une préb
d'ouverts de X. Si X n'est pas compact, alors par le lemme technique 4.9, il existe
mauvais recouvrement $\mathscr{U}$ de X par des éléments de $\mathscr{P}$. Pour $j \in I$, soit $\mathscr{P}_j$ l'ensemble
ouverts V de X_j tels que $pr_j^{-1}(V) \in \mathscr{U}$. Si $\mathscr{P}_j$ recouvre X_j, par compacité de X_j, il exi
$V_1, ..., V_n$ dans $\mathscr{P}_j$ recouvrant X_j. Mais alors $pr_j^{-1}(V_1) \cup ... \cup pr_j^{-1}(V_n) = pr_j^{-1}(X_j) =$
ce qui contredit le fait que $\mathscr{U}$ est mauvais. Soit donc x_j dans X_j tel que $x_j \notin \bigcup$
Posons $x = (x_j)_{j\in I}$. Comme $\mathscr{U}$ recouvre X, il existe $j \in I$ et V ouvert de X_j tel
$x \in pr_j^{-1}(V) \in \mathscr{U}$. Ceci contredit le fait que $x_j \notin \bigcup \mathscr{P}_j$.

Exemples. (1) Soit X un espace topologique compact, et I un ensemble. Alors l'ensem
produit X^I des familles indexées par I d'éléments de X, muni bien sûr de la topolo
produit, est compact, par le théorème de Tychonov 4.12. En particulier, si F est
ensemble fini discret, alors F^I est compact.

L'espace X^I est métrisable par la proposition 2.9 (donc séparable par le corollaire 4
si I est dénombrable et X métrisable. Mais X^I n'est pas métrisable si X contient
moins deux points et si I est non dénombrable, voir [Dug, page 189].

On peut montrer (voir [Dug, page 175]) que si $(X_i)_{i\in I}$ est une famille d'espaces
pologiques ayant au moins deux points, alors l'espace topologique produit $\prod_{i\in I} X_i$
séparable si et seulement si $\mathrm{Card}\, I \le 2^{\aleph_0}$ et X_i est séparable pour tout i dans I.

Par exemple, si $\{0,1\}$ est muni de la topologie discrète, alors $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ est compa
métrisable, séparable. Par contre $\{0,1\}^{\mathbb{R}}$ est compact, séparable, mais pas métrisable.
$\{0,1\}^{\{0,1\}^{\mathbb{R}}}$ est compact, mais ni séparable, ni à base dénombrable d'ouverts (il serait al
séparable, par la proposition 1.6), ni métrisable (par le corollaire 4.7).

(2) L'anneau topologique $\mathbb{Z}_p = \varprojlim \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ est compact, car il est fermé (voir la p
position 2.10) dans l'espace topologique produit $\prod_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$, qui est compact car $\mathbb{Z}/p$
est discret et fini, en appliquant la proposition 4.3 (2).

(3) Si $(G_i)_{i\in I}$ est une famille de groupes topologiques compacts, alors le groupe
pologique produit $\prod_{i\in I} G_i$ est un groupe topologique compact. En particulier, pour to
ensemble I, si G est un groupe topologique compact (par exemple un groupe discret fini,
un sous-groupe fermé d'un groupe orthogonal $\mathrm{SO}(n)$), alors G^I est un groupe topologi
compact (pas forcément métrisable, ni séparable, même si G l'est, si I est assez gros).

4.4 Compacité et continuité

Théorème 4.13 *Soient X un espace compact, Y un espace séparé et $f : X \to Y$*
application continue. Alors

(1) l'espace $f(X)$ est compact ;

(2) si f est bijective, alors f est un homéomorphisme.

Preuve. (1) D'abord, $f(X)$ est séparé car Y l'est. Pour tout recouvrement ouvert (U_i)
de $f(X)$, la famille $(f^{-1}(U_i))_{i\in I}$ est un recouvrement ouvert de X, donc admet un so
recouvrement fini $(f^{-1}(U_j))_{j\in J}$. D'où $f(X) \subset \bigcup_{j\in J} U_j$. Par conséquent, $f(X)$ est compa

(2) Il suffit de montrer que f^{-1} est continue, c'est-à-dire que f est fermée. Si F est
fermé de X, alors F est compact dans X, donc $f(F)$ est compact dans Y par (1), do
fermé dans Y car Y est séparé, par la proposition 4.3 (1).

Remarque. Les hypothèses que X est compact et Y séparé sont nécessaires pour (2). D'une part, la restriction à $[0,1[$ (qui n'est pas compact) de la projection canonique $\pi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ dans le cercle (qui est compact, donc séparé) est une bijection continue qui n'est pas un homéomorphisme.

D'autre part, si X est l'ensemble $\{0,1\}$ muni de la topologie discrète (qui est compact), et si Y est l'ensemble $\{0,1\}$ muni de la topologie grossière (qui n'est pas séparée), alors l'identité de X dans Y est une bijection continue qui n'est pas un homéomorphisme.

Porisme 4.14 *Soient X un espace topologique compact, Y un espace topologique séparé, et $f : X \to Y$ une application injective continue. Alors f est un homéomorphisme sur son image.*

Preuve. Comme tout sous-espace d'un espace séparé est séparé, le résultat découle du théorème 4.13 (2), en considérant l'image de f. □

Voici une conséquence de la partie (1) du théorème 4.13, et du fait que les compacts de $\mathbb{R}$ sont les fermés bornés de $\mathbb{R}$ (voir la remarque (1) suivant le théorème de Bolzano-Weiertrass 4.6).

Porisme 4.15 *Toute application continue définie sur un compact, à valeurs dans $\mathbb{R}$, est d'image un fermé borné de $\mathbb{R}$, donc admet un maximum et un minimum.* □

Porisme 4.16 *Soit E un espace vectoriel, réel ou complexe, normé, de dimension finie.*
(1) Les parties compactes de E sont les fermés bornés de E.
(2) Deux normes sur E sont équivalentes.
(3) E est complet.

Ainsi un tel espace vectoriel est muni d'une topologie, dite *usuelle*, définie par n'importe quelle norme. Tout isomorphisme linéaire entre deux tels espaces est un homéomorphisme (pour les topologies usuelles). En particulier, deux espaces vectoriels normés (réels ou complexes) de dimension finie sont homéomorphes si et seulement s'ils ont même dimension.

Il découle de la proposition 3.16 (2) que tout sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace vectoriel normé (réel ou complexe) est fermé.

Preuve. Il suffit de considérer le cas des espaces vectoriels réels, en considérant l'espace vectoriel réel sous-jacent à un espace vectoriel complexe. Comme tout espace vectoriel réel normé de dimension finie est isométrique (par un isomorphisme linéaire) à l'espace vectoriel réel $\mathbb{R}^n$ muni d'une certaine norme (la norme image par l'isomorphisme linéaire), nous pouvons supposer que l'espace vectoriel E est $\mathbb{R}^n$.

Rappelons la définition de la norme $||(x_1,\dots,x_n)||_\infty = \max_{1\le i\le n} |x_i|$ sur $\mathbb{R}^n$, qui induit la topologie produit.

(1) Montrons d'abord (1) pour cette norme $||\cdot||_\infty$. Soit A un fermé borné pour cette norme. Alors A est contenu dans un produit de fermés bornés, donc compacts, de $\mathbb{R}$ (par la remarque (1) suivant le théorème de Bolzano-Weiertrass 4.6). Donc A est contenu dans un compact, par le théorème de Tychonov 4.12. Comme tout fermé d'un compact est compact, A est compact. Réciproquement, un compact dans un espace séparé est fermé, et la norme est continue (par l'inégalité triangulaire inverse), donc reste bornée sur tout compact de E.

(2) Si $||\cdot||$ est une autre norme sur $\mathbb{R}^n$, en notant $(e_1,\dots,e_n)$ la base canonique de
et $c = ||e_1|| + \dots + ||e_n||$, on a

$$||(x_1,\dots,x_n)|| \le |x_1|\,||e_1|| + \dots + |x_n|\,||e_n|| \le c\,||(x_1,\dots,x_n)||_\infty\,.$$

En particulier, la norme $||\cdot||$ est continue sur $\mathbb{R}^n$ munie de la topologie induite par $||\cdot|$
Elle atteint donc son maximum et son minimum (strictement positifs) sur la sphère un
de $||\cdot||_\infty$, qui est compacte par ce qui précède. Par homogénéité, on en déduit que $||$
et $||\cdot||_\infty$ sont équivalentes, ce qui montre (2). L'assertion (1) pour une norme quelconc
sur $\mathbb{R}^n$ en découle, deux distances équivalentes étant topologiquement équivalentes.

(3) Nous avons déjà vu que $\mathbb{R}^n$ muni de la norme $||\cdot||_\infty$ est complet (voir la proposit
3.17). Le résultat général découle alors de (2).

Exemples.

(1) Les groupes orthogonaux, spéciaux orthogonaux, unitaires, spéciaux unitaires (
finis au paragraphe 2.7) sont des fermés bornés d'un espace vectoriel normé
dimension finie, donc sont des groupes topologiques compacts.

(2) Pour tout n dans $\mathbb{N}$, l'espace projectif réel $\mathbb{P}_n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^\times\backslash(\mathbb{R}^{n+1} - \{0\})$ est sép
(car l'ensemble des couples de vecteurs non nuls colinéaires dans $(\mathbb{R}^{n+1} - \{0\})^2$
fermé, voir la proposition 2.25), et image du (fermé borné donc) compact $\mathbb{S}_n$, do
est compact. De même, l'espace projectif complexe $\mathbb{P}_n(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^\times\backslash(\mathbb{C}^{n+1} - \{0\})$
séparé, et image du compact $\mathbb{S}_{2n+1}$, donc est compact.

(3) Pour tout n dans $\mathbb{N}$, l'espace quotient $\{\pm 1\}\backslash\mathbb{S}_n$ est compact, car séparé par l'exem
(1') du paragraphe 2.9, et image du compact $\mathbb{S}_n$ par la projection canonique, con
nue. (On retrouve l'exemple précédent, voir aussi l'exemple (1') du paragraphe 2.

(4) Pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N} - \{0\}$, l'espace lenticulaire $L_{n,p} = \mathscr{U}_p\backslash\mathbb{S}_{2n+1}$ est compa
car séparé par l'exemple (2) du paragraphe 2.9, et image du compact $\mathbb{S}_{2n+1}$ par
projection canonique, continue.

(5) Pour tout n dans $\mathbb{N}$, identifions le groupe spécial orthogonal $\mathrm{SO}(n)$ avec son ima
dans $\mathrm{SO}(n+1)$ par l'application diagonale $x \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}$ (qui est un isomorphis
de groupes topologiques sur son image). Alors $\mathrm{SO}(n)$ est un sous-groupe fermé
$\mathrm{SO}(n+1)$, donc l'espace topologique quotient $\mathrm{SO}(n+1)/\mathrm{SO}(n)$ est séparé (voir
corollaire 2.26), donc compact car $\mathrm{SO}(n+1)$ est compact par (1). L'application
$\mathrm{SO}(n+1)$ dans $\mathbb{S}_n$, définie par $g \mapsto g(1,\dots,0,\dots,0)$ (restriction de l'action linéa
des rotations sur $\mathbb{R}^{n+1}$), est continue, et induit par passage au quotient une bijecti
continue $\mathrm{SO}(n+1)/\mathrm{SO}(n) \to \mathbb{S}_n$. Comme la source est compacte et le but sépa
cette bijection continue est un homéomorphisme.

(6) L'application $\overline{\phi} : \mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n \to (\mathbb{S}_1)^n$, avec $[(t_1,...,t_n)] \mapsto (e^{2\pi i t_1},...,e^{2\pi i t_n})$, qui
continue, bijective, de but séparé, de source compacte (car séparée par l'exem
(3) du paragraphe 2.9 (ou par l'exercice E.29), et image du compact $[0,1]^n$ par
projection canonique $\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ qui est continue), est un homéomorphism

Voici un résultat généralisant l'exemple (4), et qui sera généralisé encore par le th
rème 5.51 (car l'image d'un compact par une application continue à valeurs dans un espa
séparé est compact).

Théorème 4.17 *Soit G un groupe topologique compact, et X un espace topologique séparé, muni d'une action à gauche (resp. droite) continue de G. Soit G_x le sous-groupe des élements $g \in G$ tels que $gx = x$ (resp. $xg = x$). Pour tout x dans X, l'application de G dans X définie par $g \mapsto gx$ (resp. $g \mapsto xg$) induit un homéomorphisme $\Theta_x : G/G_x \to Gx$ (resp. $\Theta_x : G_x \backslash G \to xG$).*

Preuve. Supposons l'action à gauche, l'autre cas se traitant de même.

Les applications $g \mapsto gx$ et $g \mapsto x$ de G dans X sont continues, et comme X est séparé, G_x est un sous-groupe fermé (voir l'exercice E.77 dans le chapitre 8). Donc l'espace topologique quotient G/G_x est séparé par le corollaire 2.26, donc compact par le théorème 4.13 (1) car G est compact, et la projection canonique $G \to G/G_x$ est continue.

Par les propriétés des actions de groupes, l'application $g \mapsto gx$ induit par passage au quotient une bijection Θ_x de G/G_x dans Gx. Celle-ci est continue, par passage au quotient d'une application continue. Comme la source est compacte et le but séparé (car X l'est), Θ_x est un homéomorphisme par le théorème 4.13 (2). $\square$

4.5 Espaces localement compacts

Un espace topologique est *localement compact* s'il est séparé et si tout point admet un voisinage compact. Certains ouvrages, en particulier anglo-saxons, omettent (bien sûr à tort !) la condition de séparation, pourtant fort utile comme nous le verrons.

Exemples.

(1) Tout espace discret est localement compact.

(2) Tout espace compact est localement compact.

(3) L'espace $\mathbb{R}$ est localement compact (mais pas compact) : pour tout x_0 dans $\mathbb{R}$, l'intervalle $[x_0 - 1, x_0 + 1]$ est un voisinage compact de x_0.

(4) Un sous-espace fermé F d'un espace localement compact est localement compact (pour tout x_0 dans F, si K est un voisinage compact de x_0 dans X, alors $F \cap K$ est un voisinage compact (par définition de la topologie induite et la proposition 4.3 (2)) de x_0 dans F).

(5) Un produit fini d'espaces localement compacts est localement compact (car le produit de voisinages compacts de chaque composante d'un point x est un voisinage élémentaire de x (puisque le produit est fini), qui est compact par le théorème de Tychonov).

(6) L'espace $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ n'est pas localement compact, car si V est un voisinage compact de $x = (x_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, alors V contient un voisinage élémentaire
$$]x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon[\, \times \ldots \times \,]x_n - \epsilon, x_n + \epsilon[\times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \ \ldots\ .$$
Alors $pr_{n+1}(V) = \mathbb{R}$ est non compact, ce qui contredit la continuité de pr_{n+1}.

(7) Un groupe topologique (par exemple le groupe additif d'un espace vectoriel topologique) est localement compact si et seulement si son élément neutre admet un voisinage compact.

Théorème 4.18 (Théorème de Riesz) *Soit E un espace vectoriel normé réel ou complexe. Les conditions suivantes sont équivalentes.*

(1) E est localement compact ;

(2) la boule unité fermée de E est compacte ;

(3) E est de dimension finie.

Preuve. Il suffit de considérer le cas réel, en considérant l'espace vectoriel normé r sous-jacent. Si E est de dimension finie, les assertions (1) et (2) découlent des exemp (3) et (5) ci-dessus et du corollaire 4.16 (1).

Réciproquement, si E est localement compact, alors la boule unité fermée
$$B = \{x \in E \ :\ ||x|| \leq 1\}$$
est compacte (car les homothéties sont des homéomorphismes). Par le théorème de Bolza Weierstrass, soient $x_1, \ldots, x_n$ dans B telles que les boules de rayon $1/2$ et de cen x_i recouvrent B. Notons F le sous-espace vectoriel de E engendré par $x_1, \ldots, x_n$, est fermé (car complet par la proposition 4.16 (3), et en appliquant la proposition 3 (2)). Montrons que $E = F$, ce qui montrera que E est de dimension finie. Sinon, soi $x \in E - F$ et $\epsilon = d(x, F) > 0$ (car F est fermé). Soit $y \in F$ tel que $\epsilon \leq d(x, y) <$ Soit $z = (x - y)/||x - y||$, qui appartient à B. Soit i tel que $d(z, x_i) \leq \frac{1}{2}$. Com $y + ||x - y|| x_i \in F$, on a $d(x, y + ||x - y|| x_i) \geq \epsilon$, donc
$$2\,\epsilon > ||x - y|| \geq 2\,||z - x_i||\ ||x - y|| = 2\,||x - y - ||x - y||\,x_i|| \geq 2\,\epsilon\,,$$
contradiction.

Proposition 4.19 *Dans un espace localement compact X, tout point admet un systè fondamental de voisinages compacts.*

Preuve. Soient $x \in X$ et F un voisinage compact de x. Pour tout ouvert U tel q $x \in U \subset F$, il suffit de montrer qu'il existe un voisinage fermé W de x, contenu dans donc dans F, ce qui implique que W est compact.

Comme X est séparé, si $y \in X - \{x\}$, alors il existe des voisinages V et V' de x e respectivement tels que $V \cap V' = \emptyset$. Alors $y \notin \overline{V}$. Donc $\bigcap_{V \in \mathscr{V}(x)} \overline{V} = \{x\}$. Par conséque $(X - U) \cap \bigcap_{V \in \mathscr{V}(x)} \overline{V} = \emptyset$. Par compacité de F, il existe des voisinages $V_1, \ldots, V_n$ de x t que $(X - U) \cap \overline{V_1} \cap \ldots \cap \overline{V_n} \cap F = \emptyset$. Alors $W = \overline{V_1} \cap \ldots \cap \overline{V_n} \cap F$ est un voisinage fer de x contenu dans U.

Exercice E.50 *Montrer que tout compact K d'un espace localement compact X adr un système fondamental de voisinages compacts.*

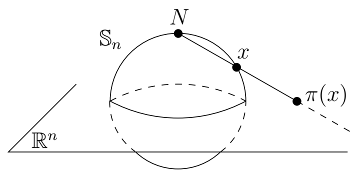
Porisme 4.20 *Tout ouvert d'un espace localement compact est localement compact. particulier, si X est compact et $x \in X$, alors $X - \{x\}$ est un espace localement compa*
$\square$

Exercice E.51 (Compactifié d'Alexandrov) *Soit X un espace localement compa ∞ un ensemble n'appartenant pas à X et $\widehat{X} = X \cup \{\infty\}$.*

1. *Montrer que l'ensemble des parties de $\widehat{X}$ de la forme U, avec U ouvert de X, $(X - K) \cup \{\infty\}$, avec K compact de X, est une topologie sur $\widehat{X}$. (L'espace $\widehat{X}$, m de cette topologie, est appelé le* compactifié d'Alexandrov *de X et ∞ son poin l'infini.)*

2. *Montrer que la topologie induite sur X par celle de $\widehat{X}$ est la topologie usuelle X. En particulier, montrer que X est ouvert dans $\widehat{X}$. Montrer que si X n'est compact, alors X est dense dans $\widehat{X}$.*

3. *Montrer que $\widehat{X}$ est compact.*
4. *(Unicité) Soient Y un espace topologique compact et $\phi : X \to Y$ un homéomorphisme sur son image, tel que $\phi(X) = Y - \{y\}$. Montrer que l'application $\widehat{\phi} : \widehat{X} \to Y$ définie par $x \mapsto \phi(x)$ si $x \in X$ et $\infty \mapsto y$, est un homéomorphisme.*
5. *(Fonctorialité) Montrer que si Y est un espace localement compact, et si $f : X \to Y$ est un homéomorphisme, alors l'application $\widehat{f} : \widehat{X} \to \widehat{Y}$, où $\widehat{f}\,|_X = f$ et $\widehat{f}(\infty) = \infty$, est un homéomorphisme.*
6. *(Extension) Montrer que si Y est un espace localement compact, et si $f : X \to Y$ est une application continue propre (voir le paragraphe 4.4 ci-dessous), alors l'application $\widehat{f} : \widehat{X} \to \widehat{Y}$, où $\widehat{f}\,|_X = f$ et $\widehat{f}(\infty) = \infty$, est continue.*
7. *Montrer que si X est compact, alors $\widehat{X}$ est homéomorphe à l'espace topologique somme disjointe $X \coprod \{\infty\}$.*
8. *Montrer que le compactifié d'Alexandrov de $\mathbb{R}^n$ est homéomorphe à la sphère $\mathbb{S}_n$. (On regarde $\mathbb{R}^n$ contenu dans $\mathbb{R}^{n+1}$ comme l'hyperplan des n premières coordonnées. Si N est le pôle nord de $\mathbb{S}_n$, on utilisera la propriété 4 d'unicité, en montrant que la projection stéréographique $\pi : \mathbb{S}_n - \{N\} \to \mathbb{R}^n$, qui à x associe le point d'intersection avec $\mathbb{R}^n$ de la droite passant par N et x, est un homéomorphisme.)*



Applications propres

Soient X, Y deux espaces topologiques séparés, et $f : X \to Y$ une application. On dit que f est *propre* si f est fermée et si l'image réciproque par f de tout point de Y est un compact de X. La condition que f est fermée est, dans la pratique, difficile à vérifier. Lorsque les espaces sont localement compacts, on utilisera presque exclusivement la caractérisation qui découle de la proposition suivante : une application entre espaces topologiques localement compacts est propre si et seulement si l'image réciproque de tout compact est compact.

Proposition 4.21 *Si f est propre, alors l'image réciproque par f de tout compact de Y est un compact de X. Si Y est localement compact, et si l'image réciproque par f de tout compact de Y est un compact de X, alors f est propre.*

Preuve. Si f est propre, soient K un compact de Y et $(F_i)_{i\in I}$ une famille de fermés de $f^{-1}(K)$, d'intersection vide. On suppose par l'absurde que $C_J = \bigcap_{j\in J} F_j \neq \emptyset$ pour toute partie finie J de I. Alors $f(C_J)$ est un fermé de Y, donc de K. Pour toute famille finie (J_α) de parties finies de I, on a

$$\bigcap_\alpha f(C_{J_\alpha}) \supset f(\bigcap_{j\in\bigcup J_\alpha} F_j) \neq \emptyset\,.$$

Comme K est compact, il existe au moins un point y dans l'intersection des ensemb
$f(C_J)$ pour toutes les parties finies J dans I. Pour toute partie finie J dans I, on a do

$$f^{-1}(y) \cap \bigcap_{j\in J} F_j = f^{-1}(y) \cap C_J \neq \emptyset\,.$$

Puisque $f^{-1}(y)$ est compact, on a donc $f^{-1}(y) \cap \bigcap_{i\in I} F_i \neq \emptyset$, ce qui contredit le fait q
la famille $(F_i)_{i\in I}$ est d'intersection vide.

Réciproquement, on suppose que Y est localement compact, et que l'image réciproq
par f de tout compact de Y est un compact de X. Alors le singleton $\{y\}$ est comp
dans Y, donc $f^{-1}(y)$ est compact. Soit F un fermé de X et $y \in \overline{f(F)}$. Soit W un voisina
compact de y. Soit $(V_i)_{i\in I}$ un système fondamental de voisinages compacts (donc ferm
car Y est séparé) de y contenus dans W. Le fermé $F_i = f^{-1}(V_i) \cap F$ de X est conte
dans le compact $f^{-1}(W) \cap F$. L'intersection $\bigcap_{j\in J} F_j$ est non vide pour toute partie fi
J de I, car $\bigcap_{j\in J} V_j$ est un voisinage de y. Par compacité de $f^{-1}(W) \cap F$, il existe do
un point x dans $\bigcap_{i\in I} F_i$. Donc $f(x) \in \bigcap_{i\in I} V_i = \{y\}$. D'où $f(x) = y$ et f est fermée.

Exemple. Soient E, F deux espaces vectoriels normés de dimension finie, X un fer
de E et $f : X \to F$ une application continue. Alors f est propre si et seulement si po
toute suite $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ dans X telle que $||x_i|| \underset{i\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, on a $||f(x_i)|| \underset{i\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. C
découle du fait que les compacts de E, F sont leurs fermés bornés, et du fait que l'ima
réciproque d'un fermé de F par f est un fermé de X, donc de E.

Proposition 4.22 *Soient X, Y deux espaces topologiques séparés, et $f : X \to Y$ u
application continue. Si f est bijective et propre, alors f est un homéomorphisme.*

Remarquons que la réciproque est vraie.

Preuve. Si f est propre, alors elle est fermée, donc f^{-1} est continue. (Voici aussi, lorsq
X, Y sont localement compacts, ce qui est le cas dans la plupart des applications, u
preuve utilisant la caractérisation des applications propres entre espaces topologiq
localement compacts. Il suffit de montrer que f^{-1} est continue en tout point y de Y. S
V un voisinage compact de y. Alors $U = f^{-1}(V)$ est un voisinage de $x = f^{-1}(y)$ car f
continue, qui est compact car f est propre. Donc $f\,|_U : U \to V$ est une bijection contin
entre espaces compacts, donc un homéomorphisme par le théorème 4.13 (2). Comme
et V sont des voisinages de x et y respectivement, ceci implique que f^{-1} est continue
y.)

L'espace des bouts d'un espace localement compact

Une partie d'un espace topologique est dite *relativement compacte* si son adhérence
compacte. Par exemple, dans un espace vectoriel normé (réel ou complexe) de dimens
finie, les parties relativement compactes sont les parties bornées.

Un espace topologique est dit *σ-compact* s'il est séparé et réunion d'une famille d
nombrable de parties compactes.

Un espace topologique X est dit *dénombrable à l'infini* s'il est séparé et s'il existe u
suite exhaustive de compacts, i.e. une suite de compacts $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ recouvrant X telle q
$K_n \subset \overset{\circ}{K}_{n+1}$ pour tout n dans $\mathbb{N}$. Par exemple, dans un espace vectoriel normé (réel
complexe) de dimension finie, la suite des boules fermées centrées au vecteur nul et
rayon n est une suite exhaustive de compacts.

Plus généralement, un espace métrique est dit *propre* si ses boules fermées sont compactes. Par exemple, tout fermé d'un espace vectoriel normé de dimension fini est propre. Un espace métrique propre X est dénombrable à l'infini, il suffit de prendre pour une suite exhaustive de compacts, si X est non vide, la suite des boules fermées de rayon n centrées en un point x_0 fixé de X.

Proposition 4.23 *Soit X un espace topologique. Alors X est dénombrable à l'infini si et seulement s'il est localement compact et σ-compact.*

Preuve. Soit $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite exhaustive de compacts. Alors K_{n+1} est un voisinage compact de tout point de K_n. Donc si X est dénombrable à l'infini, alors X est localement compact et réunion dénombrable de compacts.

Réciproquement, supposons X localement compact. Tout compact K de X admet un voisinage compact : il suffit de prendre la réunion d'un nombre fini de voisinages compacts de points de K qui recouvrent K. Si de plus X est réunion d'une suite $(K'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de compacts, alors on construit une suite exhaustive de compacts $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en prenant par récurrence pour K_n un voisinage compact de $K'_n \cup K_{n-1}$ (en posant $K_{-1} = \emptyset$). $\square$

Soit X un espace localement compact. Pour tout compact K de X, notons $\pi'_0(X-K)$, l'ensemble des composantes connexes non relativement compactes du complémentaire de K dans X, muni de la topologie discrète. Si K et K' sont deux compacts de X, avec $K \subset K'$, alors notons $f_{K,K'} : \pi'_0(X-K') \to \pi'_0(X-K)$ l'application qui à une composante connexe non relativement compacte de $X - K'$ associe l'unique composante connexe de $X - K$ qui la contient (elle n'est pas relativement compacte). Il est immédiat que

$$\big(\,(\pi'_0(X-K))_K, (f_{K,K'})_{K,K'}\,\big)$$

est un système projectif d'espaces topologiques.

L'*espace des bouts* de X est l'espace topologique limite projective (voir la fin du paragraphe 2.4) de ce système projectif, noté

$$\mathrm{Bout}(X) = \varprojlim\ \pi'_0(X-K')\ .$$

Par exemple, si X est compact, alors $\mathrm{Bout}(X)$ est vide. On appelle *nombre de bouts* de X le cardinal de $\mathrm{Bout}(X)$ (qui peut être infini).

Un produit d'espaces discrets (comme $\prod \pi'_0(X-K)$, où le produit est pris sur tous les compacts de X) est totalement discontinu (voir la fin du paragraphe 2.3 pour une définition, ainsi que l'exercice E.91 du paragraphe 8.1), et tout sous-espace d'un espace totalement discontinu est totalement discontinu. Donc $\mathrm{Bout}(X)$ est totalement discontinu.

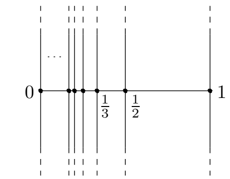
Si K est un compact de X, l'ensemble $\pi'_0(X-K)$ n'est pas toujours fini.

Proposition 4.24 *Soit X un espace topologique localement compact, connexe par arcs, localement connexe. Alors pour tout compact K de X, l'ensemble $\pi'_0(X-K)$ est fini. En particulier,* $\mathrm{Bout}(X)$ *est compact.*

Les conditions sont nécessaires. Si X est l'ensemble $\mathbb{R}^2$ muni de la distance SNCF (définie dans l'exemple (vi) du paragraphe 1.3, qui n'est pas localement compact) et $K = \{0\}$, alors $\pi'_0(X-K)$ est l'ensemble des rayons ouverts de $\mathbb{R}^2$, qui est non dénombrable. Si $X = \mathbb{Z}\times\mathbb{R}$ et $K = \emptyset$, alors X est localement compact (comme produit de deux

espaces localement compacts), localement connexe (par arcs), mais admet une infinité composantes connexes non relativement compactes. Le sous-espace topologique

$$X = ([0,1]\times\{0\}) \cup (\{0\}\times\mathbb{R}) \cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Big(\big\{\tfrac{1}{n+1}\big\}\times\mathbb{R}\Big)$$



de l'espace usuel $\mathbb{R}^2$ est localement compact (car fermé dans l'espace localement comp $\mathbb{R}^2$), connexe par arcs, mais pas localement connexe, et si $K = [0,1]\times\{0\}$, alors K compact, et $\pi'_0(X-K)$ est infini.

Preuve. Supposons par l'absurde que $\pi'_0(X-K)$ soit infini. Soient $x_* \in K$, V un voisina compact de K, et W un voisinage compact de V. Soient $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de composan connexes non relativement compactes deux à deux distinctes de $X-K$, et x_n un po de $C_n - W$. Par connexité par arcs de X, il existe un point y_n dans $C_n \cap \big(\overset{\circ}{W}\ -$ Par compacité de W, quitte à extraire, la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $y \in W - \overset{\circ}{V}$, n'appartient pas à K, car V est un voisinage de K. Pour tout voisinage ouvert U d disjoint de K, les composantes connexes de U contenant y_n sont deux à deux distinct ce qui contredit le fait que X est localement connexe.

La dernière assertion découle (par la proposition 2.10) du fait qu'un fermé d'un prod de compacts, qui est compact par le théorème de Tychonov, est compact.

Si X est dénombrable à l'infini, et si $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite exhaustive de compacts d X, alors tout compact de X est contenu dans un compact K_n (car les $\overset{\circ}{K}_n$ recouvrent Donc l'application naturelle de $\mathrm{Bout}(X)$ dans $\varprojlim \pi'_0(X-K_n)$, restriction de la project canonique

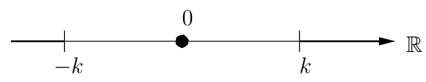
$$\prod_K \pi'_0(X-K) \to \prod_{n\in\mathbb{N}} \pi'_0(X-K_n)\ ,$$

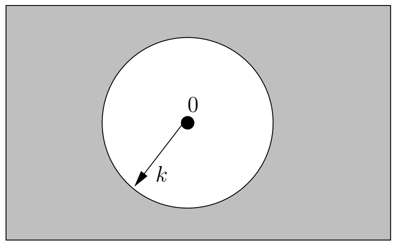
(définie par $(x_K)_K \mapsto (x_{K_n})_{n\in\mathbb{N}}$) est un homéomorphisme, par lequel $\mathrm{Bout}(X)$ est ident à l'ensemble des suites $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$, où U_n est une composante connexe non relativem compacte de $X-K_n$ et $U_{n+1}\subset U_n$, muni de la topologie dont un système fondame de voisinages de $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est l'ensemble des

$$V_N\big((U_n)_{n\in\mathbb{N}}\big) = \{(U'_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathrm{Bout}(X)\ :\ \ U'_n = U_n,\ \ 1\le n\le N\}\ .$$

pour $N \in \mathbb{N}$. Comme tout sous-espace d'un espace métrisable est métrisable, et t produit dénombrable d'espaces métrisables est métrisable, si X est dénombrable à l' fini, connexe par arcs et localement connexe, alors $\mathrm{Bout}(X)$ est un espace métrisa totalement discontinu, et compact par la proposition précédente.

Par exemple, $\mathrm{Bout}(\mathbb{R}) = \{-\infty, +\infty\}$ est un ensemble à deux points, munis de topologie discrète. Donc $\mathbb{R}$ a deux bouts. Si $n\ge 2$, alors $\mathrm{Bout}(\mathbb{R}^n)$ est un singleton, $\mathbb{R}^n - \overline{B}(0,k)$ n'a qu'une seule composante connexe pour tout $k\in\mathbb{N}$, qui est non bor Donc $\mathbb{R}^n$ a un seul bout, si $n\ge 2$.





Soit V l'ensemble des suites finies de 0 et 1, notées

$$\emptyset, 0, 1, 00, 01, 10, 11, 000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111, \dots .$$

On note $\ell(x)$ la longueur de ce mot. On munit V de la topologie discrète. On construit un arbre d'ensemble des sommets V en recollant à V un intervalle $[0,1]$ entre chaque élément x de V et chacun de ses deux enfants $x0$ et $x1$.

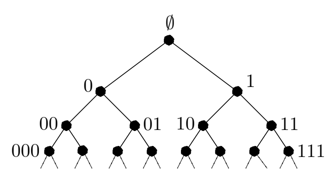
Plus précisément, pour tout x dans V, notons I_x une copie de l'intervalle $[0,1]$, et soit $f_x : \{0,1\} \subset I_x \to V$ l'application $0 \mapsto x0$ et $1 \mapsto x1$. On note

$$\mathbf{T}_2 = \Big(\coprod_{x\in V} I_x\Big) \cup_{(\coprod_{x\in V} f_x)} V$$

l'espace topologique obtenu par recollement de l'espace somme disjointe $\coprod_{x\in V} I_x$ sur V par les applications f_x.

On appelle $\mathbf{T}_2$ l'*arbre binaire*. On identifie V avec son image dans $\mathbf{T}_2$ par la projection canonique. L'arbre binaire est métrisable par l'unique distance de longueur (voir l'exemple (vii) du paragraphe 1.3) d, telle que l'application canonique $I_x \to \mathbf{T}_2$ soit une isométrie sur son image pour tout x dans V. En particulier, si $x, x' \in V$ et si $x \wedge x'$ est le sous-mot initial maximal commun à x et à x', alors

$$d(x,x') = \ell(x) + \ell(x') - \ell(x \wedge x') .$$



L'exercice suivant montre en particulier que l'arbre binaire a une infinité (non dénombrable) de bouts.

Exercice E.52 *Montrer que $\mathbf{T}_2$ est un espace topologique localement compact, dénombrable à l'infini, connexe par arcs, localement connexe par arcs. Montrer que* $\mathrm{Bout}(\mathbf{T}_2)$ *est homéomorphe à l'espace triadique de Cantor (i.e. à l'espace produit $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ où $\{0,1\}$ est muni de la topologie discrète).*

Exercice E.53 *Montrer que pour tout espace métrique compact totalement discont K, il existe un espace topologique dénombrable à l'infini X tel que* $\mathrm{Bout}(X)$ *et K soi homéomorphes.*

4.6 Théorèmes de point fixe.

Nous donnons ci-dessous une liste de théorèmes de point fixe, sans démonstration m avec références, faisant intervenir de manière plus ou moins essentielle des arguments compacité.

Pour tout $n \geq 0$, notons $\mathbb{B}_n$ la boule unité fermé de l'espace euclidien usuel $\mathbb{R}^n$.

Théorème 4.25 (Théorème du point fixe de Brouwer) *Toute application conti de $\mathbb{B}_n$ dans $\mathbb{B}_n$ admet un point fixe.*

Preuve. Voir [Godb, page 182], [Hat, page 114], [Spa, page 194].

Théorème 4.26 (Théorème du point fixe de Tychonov) *Soient E un espace ve riel topologique localement convexe, et C un convexe compact de E. Alors toute applicat continue de C dans C admet un point fixe.*

Preuve. Voir [Dug, page 182] pour une preuve, qui utilise le théorème de Brouwer p cédent.

En analyse, il est souvent plus pratique d'utiliser le corollaire suivant du théorème point fixe de Tychonov, qui ne nécessite pas la compacité de la source.

Théorème 4.27 (Théorème du point fixe de Schauder) *Soient C un convexe fer non vide d'un espace de Banach E, et $f : C \to C$ une application continue. Si $\overline{f(C)}$ compact, alors f admet un point fixe.*

Preuve. Pour toute partie A de E, notons $\mathrm{Conv}\, A$ *l'enveloppe convexe fermée de* i.e. l'intersection de tous les convexes fermés contenant A, qui est le plus petit conv fermé contenant A. Cette enveloppe convexe fermée est croissante pour l'inclusion $A \subset B$, alors $\mathrm{Conv}\, A \subset \mathrm{Conv}\, B$. De plus, $\mathrm{Conv}\, A = A$ si et seulement si A est conv fermé.

Exercice E.54 *Montrer que l'enveloppe convexe fermée d'un compact de E est enc un compact de E.*

Puisque $\overline{f(C)}$ est compact, $\mathrm{Conv}\, f(C) = \mathrm{Conv}\, \overline{f(C)}$ l'est encore, par cet exerci Puisque $\mathrm{Conv}\, f(C) \subset \mathrm{Conv}\, C = C$, la restriction de f à $\mathrm{Conv}\, f(C)$ envoie $\mathrm{Conv}\, f($ dans $\mathrm{Conv}\, f(C)$. Donc le résultat découle du théorème 4.26 du point fixe de Tychonov.

4.7 Indications pour la résolution des exercices

Schème E.48 Soient K et K' deux compacts disjoints de X. Pour tous les x dans et x' dans K', soient $U_{x,x'}$ et $V_{x,x'}$ des voisinages ouverts disjoints de x et x', qui exist par séparation de X. Par compacité de K', pour tout $x \in K$, il existe $x'_1, \dots, x'_{k'}$ dans tels que $K' \subset V_x = \bigcup_{i=1}^{k'} V_{x,x'_i}$. Soit $U_x = \bigcap_{i=1}^{k'} U_{x,x'_i}$, qui est un voisinage ouvert de

Par compacité de K, il existe $x_1, \dots, x_k$ dans K tels que $K \subset U = \bigcup_{j=1}^{k} U_{x_j}$. Alors U et $V = \bigcap_{j=1}^{k} V_{x_j}$ sont des voisinages ouverts disjoints de K et K'.

Les deux dernières conclusions découlent alors de la proposition 4.3 (2) par la définition d'un espace normal (voir l'alinéa précédant la proposition 1.12), et du lemme d'Urysohn (théorème 1.13) respectivement.

Schème E.49 Nous utilisons le théorème de Bolzano-Weierstrass 4.6, en vérifiant sa troisième assertion.

Montrons tout d'abord que la distance de Hausdorff est complète. Soit $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy pour d_H. Notons K l'ensemble des valeurs d'adhérences des suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans X telles que $x_n \in K_n$ pour tout n dans $\mathbb{N}$. Par compacité, K est non vide car les K_n le sont. Il est fermé (en utilisant les suites, et un procédé diagonal). Montrons que $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers K. Pour tout $\epsilon > 0$, soit $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tous $n, m \geq N$, $K_n \subset V_\epsilon(K_m)$ et $K_m \subset V_\epsilon(K_n)$. Soit $n \geq N$. Comme $\bigcup_{m\geq n} K_m \subset V_\epsilon(K_n)$, on a $K \subset \overline{V}_\epsilon(K_n)$. Réciproquement, si $x \in K_n$, pour tout $m \geq N$, soit $x_m \in K_m$ tel que $d(x_m, x) \leq \epsilon$. Soit $y \in K$ une valeur d'adhérence de la suite $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ (complétée arbitrairement par le choix d'un $x_m \in K_m$ si $0 \leq m < N$). Alors par passage à la limite $d(x, y) \leq \epsilon$. Par conséquent $K_n \subset \overline{V}_\epsilon(K)$. Nous avons bien montré que $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers K.

Soit $\epsilon > 0$. Montrons maintenant qu'il existe une partie finie ϵ-dense pour la distance de Hausdorff dans $\mathscr{P}_c(X)$. Comme X est métrique compact, il existe un ensemble fini ϵ-dense F dans X. Notons E l'ensemble des parties non vides de F (qui sont fermées, car X est séparé). Montrons que E est ϵ-dense pour la distance de Hausdorff. Soit K un fermé non vide de X. Pour tout x dans K, soit $a_x \in F$ tel que $d(x, a_x) < \epsilon$, et $F_K = \{a_x : x \in K\}$. Alors F_K est un élément de E, et par construction, $K \subset V_\epsilon(F_K)$ et $F_K \subset V_\epsilon(K)$, donc $d_H(K, F_K) < \epsilon$, ce qui prouve le résultat.

Schème E.50 Pour tout x dans K et tout voisinage ouvert U de K, par la proposition 4.19, soient U_x un voisinage ouvert de x et V_x un voisinage compact de x tels que $U_x \subset V_x \subset U$. Comme $K \subset \bigcup_{x\in K} U_x$ et par compacité, il existe $x_1, \dots, x_n$ dans K tels que $K \subset U_{x_1} \cup \dots \cup U_{x_n}$. Alors $V_{x_1} \cup \dots \cup V_{x_n}$ est un voisinage compact de K (par la proposition 4.3 (3)) contenu dans U.

5 Topologie fonctionnelle

Les objets d'étude préférés de l'analyse sont les fonctions (et les suites sont des fo
tions particulières, et les séries des suites particulières ...), qu'elles soient à valeurs réel
ou à valeurs dans des espaces plus gros que $\mathbb{R}$, et qu'elles viennent toutes seules, ou da
des espaces de fonctions très gros.

D'un autre côté, une manière souvent fructueuse d'étudier une fonction individuelle
d'étudier l'espace de fonctions naturel dans lequel elle vit, et en particulier les proprié
globales de cet espace peuvent nous renseigner sur les comportements individuels.

Le chapitre qui suit est donc l'un des plus importants de ce cours d'analyse. Com
l'analyse ne se contente souvent pas d'une notion qualitative de la proximité, nous t
vaillerons plus souvent avec des espaces métriques que d'habitude, pour établir quanti
tivement la proximité relative d'objets.

Soient X et Y deux ensembles, on note $\mathscr{F}(X,Y)$ ou Y^X l'ensemble des applicati
de X dans Y.

Soient X et Y deux espaces topologiques, on note $\mathscr{C}(X,Y)$ l'ensemble des applicati
continues de X dans Y.

5.1 Topologie de la convergence uniforme

Le cadre naturel pour la notion de convergence uniforme est celui des espaces uniforn
(voir par exemple [Bou1]). Nous nous contenterons ici du cas particulier des espa
métriques.

Soient X un ensemble et Y un espace métrique. Pour $f, g \in \mathscr{F}(X,Y)$, posons

$$d(f,g) = \min\left\{1, \sup_{x\in X} d(f(x), g(x))\right\}.$$

Alors d est clairement une distance sur $\mathscr{F}(X,Y)$, appelée la *distance de la converge
uniforme* (ou *distance uniforme*) sur $\mathscr{F}(X,Y)$. La topologie sur $\mathscr{F}(X,Y)$ induite par ce
distance est appelée la *topologie de la convergence uniforme* (ou *topologie uniforme*)
$\mathscr{F}(X,Y)$.

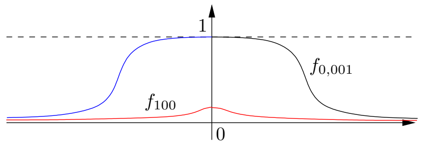
Remarque 5.1 *Si X' est une partie de X, alors l'application de restriction de $\mathscr{F}(X,$
*dans $\mathscr{F}(X',Y)$, qui à $f : X \to Y$ associe $f_{|X'} : X' \to Y$, est continue pour les topolog
uniformes (car 1*-lipschitzienne au sens du paragraphe 5.3 pour les distances uniform
$d(f_{|X'}, g_{|X'}) \leq d(f,g)$*).*

Si X est un espace topologique, alors la topologie sur $\mathscr{C}(X,Y)$ induite par la topolo
uniforme sur $\mathscr{F}(X,Y)$ est encore appelée la *topologie de la convergence uniforme*
topologie uniforme) sur $\mathscr{C}(X,Y)$, et la restriction à $\mathscr{C}(X,Y)$ de la distance uniforme
encore appelée la *distance de la convergence uniforme* (ou *distance uniforme*) sur $\mathscr{C}(X,$

Si Z est un espace topologique, si $A \subset B$ sont des parties de Z, si $a \in \overline{A}$ et
$\varphi : B \to \mathscr{F}(X,Y)$ est une application, alors une limite ℓ, pour cette topologie, de φ
quand x tend vers a dans A est appelée une *limite uniforme* de $\varphi(x)$ quand x tend ver
dans A, et on dit alors que $\varphi(x)$ *converge uniformément* vers ℓ quand x tend vers a da
A.

Par exemple, une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathscr{F}(X,Y)$ converge uniformément vers un élément $f \in \mathscr{F}(X,Y)$ si et seulement si la suite des $\sup_{x\in X} d(f_n(x), f(x))$ converge vers 0, c'est-à-dire

$$\forall\, \epsilon > 0,\ \ \exists\, N \in \mathbb{N},\ \ \forall\, n \geq N,\ \ \forall\, x \in X,\ \ d(f_n(x), f(x)) < \epsilon\ .$$



Pour un exemple concret, si pour tout $\epsilon > 0$, on considère l'application $f_\epsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $x \mapsto e^{-\epsilon(x^2+1)}$. Alors f_ϵ converge uniformément vers l'application nulle quand ϵ tend vers $+\infty$ (car $e^{-\epsilon(x^2+1)} \leq e^{-\epsilon}$, qui tend vers 0 quand $\epsilon \to +\infty$), mais f_ϵ ne converge pas uniformément vers l'application constante 1 quand ϵ tend vers 0^+ (car $f_\epsilon(1/\epsilon)$ tend vers 0 quand $\epsilon \to 0^+$). Nous verrons comment contourner le problème lié à ce second phénomène dans le paragraphe 5.2.

Proposition 5.2 *(1) Pour tout x dans X, l'application $f \mapsto f(x)$ de $\mathscr{F}(X,Y)$ dans Y est continue (pour la topologie uniforme sur $\mathscr{F}(X,Y)$).*

(2) Si Y est complet, alors $\mathscr{F}(X,Y)$, muni de la distance uniforme, est complet.

Preuve. (1) L'application d'évaluation en un point x est en fait localement 1-lipschitzienne au sens du paragraphe 5.3 (car $d(f(x), g(x)) \leq \sup_{y\in X} d(f(y), g(y))$ si $d(f,g) < 1$) donc continue.

(2) Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $\mathscr{F}(X,Y)$. Comme les applications d'évaluation sont localement 1-lipschitziennes, pour tout x dans X, la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans l'espace métrique complet Y. Elle converge donc vers un élément $f(x)$ de Y. Pour tout $\epsilon > 0$, soit N dans $\mathbb{N}$ tel que pour $m, n \geq N$, on ait, pour tout x dans X, l'inégalité $d(f_m(x), f_n(x)) \leq \epsilon$. En fixant x et en faisant tendre m vers $+\infty$, on a par passage à la limite $d(f_n(x), f(x)) \leq \epsilon$. Donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f. $\square$

La seconde assertion du résultat suivant dit qu'une limite uniforme d'applications continues est continue.

Théorème 5.3 *Soient X un espace topologique et Y un espace métrique.*

(1) Si Z est un espace topologique, si A et B sont des parties de Z telles que $A \subset B$, si $a \in \overline{A}$ et si $z \mapsto f_z$ est une application de B dans $\mathscr{F}(X,Y)$, telle que f_z soit continue pour tout z dans B, et converge uniformément vers $f \in \mathscr{F}(X,Y)$ quand z tend vers a dans A, alors f est continue.

(2) Le sous-espace $\mathscr{C}(X,Y)$ de $\mathscr{F}(X,Y)$, muni de la topologie uniforme, est fermé.

(3) Si Y est complet, alors $\mathscr{C}(X,Y)$, muni de la distance uniforme, est complet.

Preuve. (1) Soit $x_0 \in X$, montrons que f est continue en x_0. Pour tout $\epsilon > 0$, soit U un voisinage de a dans Z tel que pour tout z dans $U \cap A$, on ait, pour tout x dans X, l'inégalité $d(f_z(x), f(x)) < \frac{\epsilon}{3}$. Soit $z_0 \in U \cap A$ (qui existe car $a \in \overline{A}$). Puisque f_{z_0} est continue en x_0, soit V un voisinage de x_0 dans X tel que, pour tout x dans V, on ait $d(f_{z_0}(x), f_{z_0}(x_0)) < \frac{\epsilon}{3}$. Alors, pour tout x dans V,

$$d(f(x), f(x_0)) \leq d(f(x), f_{z_0}(x)) + d(f_{z_0}(x), f_{z_0}(x_0)) + d(f_{z_0}(x_0), f(x_0)) < \epsilon\ .$$

Ceci montre la continuité de f en tout x_0, donc la continuité de f.

(2) La seconde assertion découle de la première par la caractérisation séquentielle
la fermeture dans un espace métrique (voir le paragraphe 1.6) : par la première asserti
si une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'applications continues de X dans Y converge uniformément v
une application f de X dans Y, alors f est continue.

(3) La troisième assertion découle de la seconde par la proposition 3.16 (1) et
proposition 5.2 (2).

Une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathscr{C}(X,Y)$ est dite *uniformément de Cauchy* si elle est de Cau
pour la distance uniforme, i.e. si

$$\forall\, \epsilon > 0,\ \exists\, N \in \mathbb{N},\ \forall\, n, m \geq N,\ \forall\, x \in X,\quad d(f_n(x), f_m(x)) < \epsilon\ .$$

Il découle du résultat précédent qu'une suite uniformément de Cauchy dans $\mathscr{C}(X,$
converge uniformément vers une application dans $\mathscr{C}(X,Y)$ (en particulier qui est co
nue). Ceci est parfois une manière bien pratique de montrer qu'une suite de foncti
converge, sans avoir à exhiber auparavant sa limite.

Théorème 5.4 (Théorème d'interversion des limites) *Soient X, Y des espaces
pologiques, $A \subset X$, $B \subset Y$, $a \in \overline{A}$, $b \in \overline{B}$, Z un espace métrique complet, et $f : A\times B$ —
une application. On suppose que*

*(1) pour tout x fixé dans A, alors $f(x,y)$ converge vers $g(x)$ quand y tend vers b d
B ;*

*(2) l'application $y \mapsto f(x,y)$ dans $\mathscr{F}(B,Z)$ converge uniformément, quand x tend v
a dans A, vers $h \in \mathscr{F}(B,Z)$.*

*Alors il existe $\ell \in Z$ tel que $g(x)$ converge vers ℓ quand x tend vers a dans A, tel
$h(y)$ converge vers ℓ quand y tend vers b dans B, et tel que $f(x,y)$ converge vers ℓ qu
(x,y) tend vers (a,b) dans $A \times B$.*

Autrement dit, les limites suivantes existent et sont égales

$$\lim_{x\to a}\lim_{y\to b} f(x,y) = \lim_{y\to b}\lim_{x\to a} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)\ .$$

En particulier, si $(x_{n,k})_{(n,k)\in\mathbb{N}^2}$ est une famille indexée par $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ dans un esp
métrique complet Z, telle que, d'une part pour tout n fixé, la suite $(x_{n,k})_{k\in\mathbb{N}}$ converge,
d'autre part la suite $(x_{n,k})_{n\in\mathbb{N}}$ converge **uniformément en** k, alors les limites suivan
existent et sont égales

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{k\to\infty} x_{n,k} = \lim_{k\to\infty}\lim_{n\to\infty} x_{n,k}\ .$$

Preuve. Nous ne ferons la preuve de ce résultat que si b admet un système fondame
dénombrable de voisinages, ce qui est le cas si Y est métrisable (voir par exemple [D
page 83] pour le cas général). Ceci nous permet d'utiliser le critère séquentiel du troisiè
point de la proposition 3.9 pour calculer les limites.

Notons $f_x : y \mapsto f(x,y)$. Soit $\epsilon \in\,]0,1[$. Par (2), soit U un voisinage de a dans X
que si $x \in U \cap A$, alors $d(f_x, h) \leq \epsilon/3$. Fixons $x_0 \in U \cap A$. En particulier, pour tou
dans B,

$$d(f_{x_0}(y), h(y)) \leq \epsilon/3\ . \qquad (*)$$

Par (1), soit V un voisinage de b dans Y tel que pour tous y, y' dans $V \cap B$, on ait

$$d(f_{x_0}(y), f_{x_0}(y')) \leq \epsilon/3\ .$$

Alors pour tous y, y' dans $V \cap B$,

$$\begin{aligned} d(h(y), h(y')) &\leq d(h(y), f_{x_0}(y)) + d(f_{x_0}(y), f_{x_0}(y')) + d(f_{x_0}(y'), h(y')) \\ &\leq \epsilon/3 + \epsilon/3 + \epsilon/3 = \epsilon \ . \qquad (**) \end{aligned}$$

Donc pour toute suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans B convergeant vers b, la suite $\big(h(y_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy, donc converge puisque Z est complet, et la limite ℓ ne dépend pas de $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par (**).

Pour tout x_0 dans $U \cap A$, quand y tend vers b dans B, le couple $(f_{x_0}(y), h(y))$ dans $Z \times Z$ converge donc vers $(g(x_0), \ell)$. Donc par passage à la limite dans l'inégalité (*), nous avons $d(g(x_0), \ell) \leq \epsilon/3$. Donc $g(x)$ converge vers ℓ quand x tend vers a dans A.

Enfin, notons que $(a, b) \in \overline{A} \times \overline{B} = \overline{A \times B}$, donc nous pouvons bien étudier l'existence de limites quand le couple (x, y) de l'espace topologique produit $X \times Y$ tend vers (a, b) dans la partie $A \times B$. Pour tout $x \in U \cap A$, pour tout y dans $V \cap B$, nous avons $d(f(x, y), h(y)) \leq \epsilon/3$ et $d(h(y), \ell) \leq \epsilon/3$. Donc pour tout $(x, y) \in (U \times V) \cap (A \times B)$, nous avons, par inégalité triangulaire, $d(f(x, y), \ell) \leq 2\epsilon/3$. Par conséquent, $f(x, y)$ converge aussi vers ℓ quand (x, y) tend vers (a, b) dans $A \times B$. $\square$

Voici une application du théorème d'interversion des limites 5.4 au problème de la continuité en deux variables.

Soient X et Y des espaces topologiques, Z un espace métrique et $f : X \times Y \to Z$ une application. Nous dirons que l'application $y \mapsto f(x, y)$ est *continue (en la seconde variable) en un point* $y_0 \in Y$ *uniformément en (la première variable)* $x \in X$ si l'application de Y dans $\mathscr{F}(X, Z)$ définie par $y \mapsto f(x, y)$ est continue en y_0 (pour la topologie uniforme sur $\mathscr{F}(X, Z)$), c'est-à-dire si

$$\forall\, \epsilon > 0,\ \exists\, V \in \mathscr{V}(y_0),\ \forall\, y \in V,\ \forall\, x \in X, \quad d(f(x, y), f(x, y_0)) < \epsilon \ .$$

Nous dirons que l'application $y \mapsto f(x, y)$ est *continue (en la seconde variable) uniformément en (la première variable)* $x \in X$ si, pour tout $y_0 \in Y$, elle est continue en y_0 uniformément en $x \in X$.

Une application de deux variables, séparément continue (i.e. continue en chacune des variables), n'est pas forcément continue. Voici un critère pour obtenir la continuité en le couple de variables : il suffit que la continuité en l'une des deux variables soit uniforme en l'autre variable. La réciproque est vraie, sous des hypothèses de compacité.

Proposition 5.5 *Soient X un espace topologique, Y et Z des espaces métriques, et $f : X \times Y \to Z$ une application.*

(1) Si $x \mapsto f(x, y)$ est continue pour tout y dans Y, et si $y \mapsto f(x, y)$ est continue uniformément en $x \in X$, alors $f : X \times Y \to Z$ est continue.

(2) Si X est compact, si $f : X \times Y \to Z$ est continue, alors $y \mapsto f(x, y)$ est continue uniformément en $x \in X$.

Preuve. (1) Par la caractérisation de la continuité par les limites, la première assertion est une application immédiate du théorème d'interversion des limites 5.4. Voici une autre preuve. Soient $(x_0, y_0) \in X \times Y$ et $\epsilon > 0$. Par les hypothèses de la première assertion, il existe $\eta > 0$ tel que si $d(y, y_0) < \eta$, alors

$$\forall x \in X, \quad d(f(x, y), f(x, y_0)) < \frac{\epsilon}{2} \ ,$$

et il existe un voisinage V de x_0 tel que si $x \in V$, alors

$$d(f(x, y_0), f(x_0, y_0)) \leq \frac{\epsilon}{2} \ .$$

Alors pour tout $(x, y) \in V \times B(y_0, \eta)$, on a par l'inégalité triangulaire

$$d(f(x, y), f(x_0, y_0)) \leq d(f(x, y), f(x, y_0)) + d(f(x, y_0), f(x_0, y_0)) < \epsilon \ .$$

Le résultat en découle.

(2) Soient $y_0 \in Y$ et $\epsilon > 0$. Si $f : X \times Y \to Z$ est continue, alors pour tout x dans il existe un voisinage V_x de x dans X et $\eta_x > 0$ tels que pour tout $(x', y) \in V_x \times B(y_0, \eta$ on ait

$$d(f(x', y), f(x, y_0)) < \frac{\epsilon}{2} \ .$$

Ceci implique par l'inégalité triangulaire (et comme $y_0 \in B(y_0, \eta_x)$),

$$d(f(x', y), f(x', y_0)) \leq d(f(x', y), f(x, y_0)) + d(f(x, y_0), f(x', y_0)) < \epsilon \ .$$

Par compacité de X, il existe $x_1, \dots, x_n$ dans X tels que $X = V_{x_1} \cup \dots \cup V_{x_n}$. Pos $\eta = \min\{\eta_{x_1}, \dots, \eta_{x_n}\} > 0$. Alors pour tout $y \in B(y_0, \eta)$, et pour tout x' dans X, n avons par ce qui précède

$$d(f(x', y), f(x', y_0)) < \epsilon \ .$$

Le résultat en découle.

Le résultat suivant est un critère pour savoir quand on peut permuter une limite une intégrale (ne pas oublier que le théorème de convergence monotone et le théor de convergence dominée sont souvent les plus pratiques, voir le cours d'Intégration probabilité ou [Coh]).

Théorème 5.6 *Soient X un espace topologique, A et B deux parties de X telles $A \subset B$, a un élément de $\overline{A}$, (Y, μ) un espace mesuré de masse totale finie, E un esp de Banach, et $f : B \times Y \to E$ une application. On suppose que pour tout x dans l'application $y \mapsto f(x, y)$ est intégrable, et converge uniformément vers une applicat intégrable $h : Y \to E$ quand x tend vers a dans A.*

Alors $\int_{y\in Y} f(x, y)\, d\mu$ converge vers $\int_{y\in Y} h(y)\, d\mu$ quand x tend vers a dans A.

En particulier (et ceci aussi découle du théorème de convergence dominée), si une su $(f_n : Y \to E)_{n\in\mathbb{N}}$ d'applications intégrables converge uniformément vers une applicat intégrable $f : Y \to E$, alors $\int f_n$ converge vers $\int f$.

Preuve. Notons $||\cdot||$ la norme de E. Pour tout $\epsilon > 0$, soit U un voisinage de a dans tel que $\sup_{y\in Y} ||f(x, y) - h(y)|| \leq \epsilon$ pour tout x dans U. Alors

$$\Big|\Big| \int_{y\in Y} f(x, y)\ d\mu(y) - \int_{y\in Y} h(y)\ d\mu(y) \Big|\Big| \leq \int_{y\in Y} ||f(x, y) - h(y)||\ d\mu(y) \leq \epsilon\, \mu(Y) \ ,$$

ce qui montre le résultat.

Nous renvoyons au paragraphe 7.1 pour un critère de permutation de limite et dérivation (théorème 7.4), dont nous énonçons juste un corollaire ici qui nous sera u pour les exemples suivants.

Porisme 5.7 *Soit I un intervalle ouvert borné de $\mathbb{R}$, et pour tout n dans $\mathbb{N}$, soit f_n une application dérivable de I dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On suppose qu'il existe t_0 dans I tel que la suite $(f_n(t_0))_{n\in\mathbb{N}}$ converge, et que la suite des applications $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de I dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ converge uniformément vers une application g de I dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.*

Alors pour tout t dans I, la suite $(f_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite $f(t)$, et l'application f de I dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est dérivable, de dérivée égale à g.

Preuve. Voir le théorème 7.4. □

Exemples d'espaces fonctionnels complets.

(1) Soient X un ensemble non vide et E un espace vectoriel normé sur un corps valué $\mathbb{K}$ (par exemple $E=\mathbb{R}$ sur $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $E=\mathbb{C}$ sur $\mathbb{K}=\mathbb{C}$), posons, pour tout $f\in\mathscr{F}(X,E)$,

$$||f||_\infty=\sup_{x\in X}\;||f(x)||\;.$$

Alors $||\cdot||_\infty$ est une norme sur l'espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, noté $\mathscr{F}_b(X,E)$, des applications bornées de X dans E, appelée la *norme uniforme*. La topologie induite par cette norme coïncide avec la topologie induite sur $\mathscr{F}_b(X,E)$ par la distance uniforme.

Proposition 5.8 *Soient X un espace topologique non vide et E un espace de Banach sur un corps valué non discret $\mathbb{K}$. Alors l'espace vectoriel $\mathscr{C}_b(X,E)$ sur $\mathbb{K}$ des fonctions continues bornées de X dans E, muni de la norme uniforme, est un espace de Banach.*

En particulier, pour tout ensemble $\mathscr{A}$ (par exemple $\mathscr{A}=\mathbb{N}$) et tout corps valué non discret $\mathbb{K}$ (par exemple $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{K}=\mathbb{C}$), alors $\ell_\infty(\mathscr{A},\mathbb{K})$ (ou ℓ_∞ lorsque $\mathscr{A}=\mathbb{N}$ et $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ sont sous-entendus) désigne l'espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ des familles $(x_i)_{i\in\mathscr{A}}$ bornées ($\sup_{i\in\mathscr{A}}\;|x_i|$ est fini) à valeurs dans $\mathbb{K}$, muni de la norme uniforme

$$||(x_i)_{i\in\mathscr{A}}||_\infty=\sup_{i\in\mathscr{A}}\;|x_i|\;.$$

En particulier (mais cela découle directement du théorème 5.3 (3)), si X est un espace topologique compact, alors toute fonction continue de X dans E est bornée, et donc $\mathscr{C}(X,E)$, muni de la norme uniforme, est un espace de Banach.

Si $E=\mathbb{K}$ est un corps valué non discret, alors $\mathscr{C}_b(X,E)$, muni en plus de la multiplication point par point de deux applications, est une algèbre de Banach.

Preuve. Il est immédiat que $||f||_\infty$ est une norme sur $\mathscr{C}_b(X,E)$, et que la topologie induite par cette norme coïncide avec la topologie induite sur $\mathscr{C}_b(X,E)$ par la distance uniforme (car si d est une distance, alors d et $\min\{1,d\}$ induisent la même topologie). Si une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'applications bornées de X dans E tend uniformément vers $f\in\mathscr{C}(X,E)$, alors f est aussi bornée (car toute application à distance uniforme au plus 1 d'une application bornée par C est bornée par $C+1$). Donc $\mathscr{C}_b(X,E)$ est fermé dans $\mathscr{C}(X,E)$, qui est complet par le théorème 5.3 (3). Ceci montre le résultat, par la proposition 3.16 (1). □

Porisme 5.9 *Soient X et Y deux espaces topologiques, tels que Y soit compact, et soit E un espace de Banach. Alors l'application Φ de l'espace de Banach $\mathscr{C}_b(X\times Y,E)$ dans l'espace de Banach $\mathscr{C}_b(X,\mathscr{C}(Y,E))$ définie par $f\mapsto\big(x\mapsto\{y\mapsto f(x,y)\}\big)$ est un isomorphisme linéaire isométrique.*

Preuve. Si $f\in\mathscr{C}_b(X\times Y,E)$, alors $f_x: y\mapsto f(x,y)$ est bien dans $\mathscr{C}(Y,E)$ (qui est
espace de Banach car Y est compact) par composition d'applications continues. Puis

$$||\,f_x-f_{x_0}\,||=\sup_{y\in Y}\;||\,f(x,y)-f(x_0,y)\,||\;,$$

l'application $x\mapsto f_x$ appartient à $\mathscr{C}_b(X,\mathscr{C}(Y,E))$, par continuité uniforme en y de l'app
cation $x\mapsto f(x,y)$. L'application Φ est donc bien définie, clairement linéaire. Pour to
$g\in\mathscr{C}_b(X,\mathscr{C}(Y,E))$, l'application $f:(x,y)\mapsto g(x)(y)$ est continue par la proposition
(1), car continue en y, et continue en x uniformément en y. Donc Φ est bijective, d'inve
$g\mapsto\big\{(x,y)\mapsto g(x)(y)\big\}$. De plus

$$\sup_{(x,y)\in X\times Y}\;||\,f(x,y)\,||=\sup_{x\in X}\;\sup_{y\in Y}\;||\,f(x,y)\,||\;,$$

donc Φ est isométrique.

Porisme 5.10 *Si $\mathbb{K}$ est un corps valué non discret, si E est un espace vectoriel nor
sur $\mathbb{K}$ et si F est un espace de Banach sur $\mathbb{K}$, alors l'espace vectoriel normé $\mathscr{L}(E,F)$
applications linéaires continues de E dans F est un espace de Banach.*

En particulier, $\mathscr{L}(E)$ est une algèbre de Banach si E est un espace de Banach sur
corps valué non discret.

Preuve. Soit B la boule unité fermée de E. Il résulte de la définition de la norme d'u
application linéaire continue de E dans F que l'application $f\mapsto f_{|B}$ de $\mathscr{L}(E,F)$ da
l'espace $\mathscr{C}_b(B,F)$ muni de la norme uniforme, est une application linéaire isométrique.
plus son image est fermée, car si $g\in\mathscr{C}_b(B,F)$ est dans l'adhérence de l'image, alors
posant $g'(x)=\lambda g(\frac{1}{\lambda}x)$ pour n'importe quel $\lambda\in K$ tel que $|\lambda|>||x||$, l'application g'
bien définie, linéaire et étend g. Le résultat découle donc de la proposition 5.8.

(2) L'espace de Schwartz $\mathscr{S}(\mathbb{R}^r)$ des fonctions lisses de $\mathbb{R}^r$ dans $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{K}=\mathbb{C}$
décroissance rapide (voir l'exemple (iii) du paragraphe 1.3 et l'exemple 3.1 du paragrap
2.2) est un espace de Fréchet.

Preuve. Nous avons vu que la topologie de $\mathscr{S}(\mathbb{R}^r)$ est définie par la famille dénombra
séparante de semi-normes $||f||_{k,m}=\sup_{x\in\mathbb{R}^r}\,(||x||^k+1)|\partial^m f(x)|$ pour $k\in\mathbb{N}$ et $m\in$
D'après la définition 3.15 (2), il suffit donc de montrer que $\mathscr{S}(\mathbb{R}^r)$ est (séquentielleme
complet.

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $\mathscr{S}(\mathbb{R}^r)$. Pour tous $k\in\mathbb{N}$ et $m\in\mathbb{N}^r$, la su
$\big(x\mapsto(||x||^k+1)\,\partial^m f_n(x)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $\mathscr{C}_b(\mathbb{R}^r,\mathbb{K})$ pour la norme uniforme, do
converge uniformément vers $g_{k,m}\in\mathscr{C}_b(\mathbb{R}^r,\mathbb{K})$. Posons $g=g_{0,0}$. Il découle par récurrence
corollaire 5.7 que g est lisse (car ses dérivées partielles existent et sont continues, voir au
le théorème 7.4), et que pour tout m dans $\mathbb{N}^r$, la suite $(\partial^m f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniforméme
vers $\partial^m g=g_{0,m}$. Puisque $\big(x\mapsto(||x||^k+1)\,\partial^m f_n(x)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers g
et puisque $\big((||x||^k+1)\,\partial^m f_n(x)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $(||x||^k+1)\,\partial^m g(x)$ pour tout x, on a do
$g_{k,m}(x)=(||x||^k+1)\,\partial^m g(x)$, et en particulier $g\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^r)$

Donc pour tous $k\in\mathbb{N}$ et $m\in\mathbb{N}^r$, la suite $\big(x\mapsto(||x||^k+1)\,\partial^m f_n(x)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ conver
uniformément vers $x\mapsto(||x||^k+1)\,\partial^m g(x)$, ce qui est exactement dire que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ conver
vers g dans $\mathscr{S}(\mathbb{R}^r)$.

(3) L'espace $\mathscr{D}_K(\Omega)$ (voir l'exemple (2) du paragraphe 1.4 et l'exemple 3.2 du pa
graphe 2.2), est un espace de Fréchet (par une preuve analogue à celle pour $\mathscr{S}(\mathbb{R}^r)$).

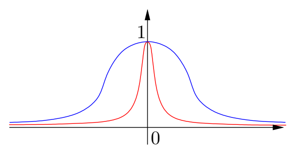
(4) L'espace $\mathscr{D}(\Omega)$, muni de la topologie de Schwartz (voir l'exemple (2) du paragraphe 1.4 et l'exemple 3.3 du paragraphe 2.2), est un espace vectoriel topologique localement convexe (car sa topologie est définissable par une famille de semi-normes, par l'exemple 3.3 du paragraphe 2.2), séparé (par la proposition 2.2), séquentiellement complet (par une preuve analogue à celle de la complétude de $\mathscr{S}(\mathbb{R}^r)$) (et même complet au sens approprié, voir [Sch]), mais n'est pas un espace de Fréchet (car non métrisable par l'exercice E.9).

Relation avec la convergence simple.

Soient X un ensemble et Y un espace topologique. Rappelons qu'une famille indexée par X d'éléments de Y n'est pas autre chose qu'une application de X dans Y, ce qui explique la notation Y^X pour l'ensemble des applications de X dans Y. La *topologie de la convergence simple* sur Y^X est la topologie produit de Y^X. On dit *convergence simple* et *limite simple* pour convergence et limite pour la topologie de la convergence simple.

On notera en général Y^X quand on considère la topologie de la convergence simple, et $\mathscr{F}(X,Y)$ quand on considère la topologie de la convergence uniforme, si Y est un espace métrique.

Si Y est un espace métrique, la topologie de la convergence simple est (strictement) moins fine que la topologie de la convergence uniforme. En particulier, toute suite d'applications convergeant uniformément converge aussi simplement. Mais par exemple, la suite d'applications $x \mapsto e^{-x^2/n}$ de $[-1,1]$ dans $\mathbb{R}$ converge simplement vers la fonction nulle en dehors de 0 et valant 1 en 0, mais ne converge pas uniformément (sinon la limite simple serait continue, ce qui n'est pas).



Les propriétés suivantes découlent du paragraphe 2.4 sur la topologie produit.

• Si Y est séparé, alors Y^X est séparé pour la topologie de la convergence simple.

• Si Z est un espace topologique, si A et B sont des parties de Z telles que $A \subset B$, si $a \in \overline{A}$ et si $z \mapsto f_z$ est une application de B dans Y^X, alors f_z converge simplement vers $f \in Y^X$ quand z tend vers a dans A si et seulement si pour tout x dans X, $f_z(x)$ converge vers $f(x)$ dans Y quand z tend vers a dans A. En particulier, une suite d'applications $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans Y^X converge simplement vers $f \in Y^X$ si et seulement si pour tout x dans X, la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(x)$ dans Y.

• Pour tout x dans X, l'application $f \mapsto f(x)$ de Y^X dans Y est continue pour la topologie de la convergence simple.

Exercice E.55 *Montrer que si X est non dénombrable, et si Y contient au moins deux points, alors la topologie de la convergence simple sur Y^X n'est pas métrisable.*

Théorème 5.11 (Théorème de Dini, 1) *Soit X un espace compact. Supposons qu'une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathscr{C}(X,\mathbb{R})$ soit monotone et converge simplement vers $f \in \mathscr{C}(X,\mathbb{R})$. Alors elle converge uniformément vers f.*

Preuve. Nous pouvons supposer la suite croissante, i.e. $f_{n+1} \geq f_n$ pour tout n dans $\mathbb{N}$. Posons $g_n = f - f_n$. Les g_n sont continues, positives ou nulles, et tendent simplement vers 0. Soit $\epsilon > 0$, et $F_n = \{x \in X \ : \ g_n(x) \geq \epsilon\}$. Alors $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante de

fermés, d'intersection vide par convergence simple de g vers 0. Donc par compacité de il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que F_n soit vide pour $n \geq N$. Donc pour $n \geq N$, et pour tout x da X,

$$|f_n(x) - f(x)| \leq g_n(x) \leq \epsilon ,$$

et le résultat en découle.

5.2 Topologie compacte-ouverte

Comme remarqué précédemment, la topologie de la convergence uniforme est parf trop restrictive sur $\mathscr{F}(X,Y)$, lorsque X est un espace topologique non compact. De pl elle nécessite une distance fixée sur l'espace but Y, ce qui n'est pas toujours disponi ou souhaitable. Dans ce paragraphe, nous indiquons brièvement comment contourner problèmes. Le point important est la notion de convergence uniforme sur les compacts

Soient X et Y deux espaces topologiques. On appelle *topologie compacte-ouverte* $\mathscr{F}(X,Y)$ la topologie engendrée par les parties de la forme

$$O(K,U) = \{f \in \mathscr{F}(X,Y) \ : \ f(K) \subset U\}$$

pour K compact de X et U ouvert de Y. Intuitivement, il s'agit de dire que si de applications sont "proches" pour cette topologie, alors sur tout compact, leurs valeurs s proches. On appelle aussi *topologie compacte-ouverte* sur $\mathscr{C}(X,Y)$ la topologie induite la topologie compacte-ouverte sur $\mathscr{F}(X,Y)$. Sauf mention contraire, l'ensemble $\mathscr{C}(X,$ sera muni de cette topologie. Cette définition sera surtout intéressante lorsque X localement compact (et en particulier séparé), car cette hypothèse implique qu'il suffisamment de compacts dans X pour que cette topologie soit utile (voir par exem la proposition 5.14 (1) et l'exercice E.57 (1)).

Remarque 5.12 *Si X' est une partie de X, alors l'application de restriction de $\mathscr{F}(X,$ dans $\mathscr{F}(X',Y)$, qui à $f : X \to Y$ associe $f_{|X'} : X' \to Y$, est continue pour les topolog compactes-ouvertes, car tout compact de X' est un compact de X (voir l'alinéa précéd la proposition 4.3).*

Proposition 5.13 *(1) Si Y est séparé, alors la topologie compacte-ouverte sur $\mathscr{C}(X,$ est aussi séparée.*

(2) Si Y est un espace métrique, alors la topologie compacte-ouverte sur $\mathscr{C}(X,Y)$ moins fine que la topologie de la convergence uniforme sur $\mathscr{C}(X,Y)$.

Si de plus X est compact, alors ces deux topologies coïncident.

(3) Si X est dénombrable à l'infini, si Y est métrisable, alors la topologie compac ouverte sur $\mathscr{C}(X,Y)$ est métrisable.

En particulier, si Ω est un ouvert non vide d'un espace vectoriel normé de dim sion finie, et si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, alors la topologie compacte-ouverte sur $\mathscr{C}(\Omega,\mathbb{K})$ métrisable.

Preuve. (1) Pour $f \neq g$ dans $\mathscr{C}(X,Y)$, il existe x dans X tel que $f(x) \neq g(x)$. séparation de Y, soient U et V des voisinages ouverts disjoints de $f(x)$ et $g(x)$ resp tivement. Alors $O(\{x\},U)$ et $O(\{x\},V)$ sont des voisinages ouverts disjoints de f e respectivement (les singletons sont compacts).

(2) Il suffit de montrer que pour tout f dans $\mathscr{C}(X,Y)$, tout voisinage de f pour la topologie compacte-ouverte contient un voisinage de f pour la topologie de la convergence uniforme, et réciproquement si X est compact.

Soient K un compact de X et U un ouvert de Y tels que $f \in O(K,U)$. Notons que K est compact, Y est séparé et f est continue. Donc $f(K)$ est un compact, disjoint du fermé $Y-U$. La fonction distance à $Y-U$, étant continue, atteint sa borne inférieure sur $f(K)$. Donc $\epsilon = d(f(K), Y-U) > 0$. Pour tout g dans $\mathscr{C}(X,Y)$, si $\sup_{x\in X} d(g(x), f(x)) < \epsilon$, alors $g \in O(K,U)$, ce qui montre le premier résultat.

Réciproquement, supposons X compact. Pour tout $\epsilon > 0$ et pour tout x dans X, par continuité de f, soit K_x un voisinage compact de x contenu dans $f^{-1}\big(B(f(x), \frac{\epsilon}{2})\big)$. Par compacité de X, soient $x_1, \dots, x_n$ dans X tels que les K_{x_i} pour $i \in \{1,\dots,n\}$ recouvrent K. Soit g appartenant à $\bigcap_{i=1}^n O\big(K_{x_i}, B(f(x_i), \frac{\epsilon}{2})\big)$. Pour tout x dans X, soit $i \in \{1,\dots,n\}$ tel que $x \in K_{x_i}$. Alors $g(x) \in B(f(x_i), \frac{\epsilon}{2})$ et $f(x) \in B(f(x_i), \frac{\epsilon}{2})$. Donc (par inégalité triangulaire et en prenant la borne supérieure sur $x \in X$) $\sup_{x\in X} d(g(x), f(x)) \leq \epsilon$. Le résultat en découle.

(3) Rappelons (voir la fin du paragraphe 4.5 et en particulier la proposition 4.23) que X est dit dénombrable à l'infini s'il est séparé et s'il existe une suite de compacts $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ recouvrant X telle que $K_n \subset \overset{\circ}{K}_{n+1}$ pour tout n dans $\mathbb{N}$. Notons d_n la distance uniforme sur $\mathscr{C}(K_n, Y)$, et pour f et g dans $\mathscr{C}(X,Y)$,

$$d_{\mathscr{C}(X,Y)}(f,g) = \sum_{n\in\mathbb{N}} 2^{-n} d_n(f_{|K_n}, g_{|K_n}) ,$$

qui est l'une des distances associées à la famille dénombrable séparante de pseudo-distances $\big((f,g) \mapsto d_n(f_{|K_n}, g_{|K_n})\big)_{n\in\mathbb{N}}$, voir l'exemple (v) du paragraphe 1.3.

Soient K un compact de X, U un ouvert de Y, et $f \in O(K,U) \cap \mathscr{C}(X,Y)$. Montrons que $O(K,U)$ contient un voisinage de f pour la distance $d_{\mathscr{C}(X,Y)}$. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $K \subset K_n$. Comme dans (2), soit $\epsilon = d(f(K), Y-U) > 0$. Si $d_{\mathscr{C}(X,Y)}(f,g) < 2^{-n}\min\{1, \epsilon\}$, alors $\sup_{x\in K_n} d(g(x), f(x)) < \epsilon$, donc $g \in O(K,U)$, ce qui montre le résultat.

Réciproquement, soient $\epsilon \in \,]0,1]$ et $f \in \mathscr{C}(X,Y)$, montrons que la boule $B(f,\epsilon)$ pour la distance $d_{\mathscr{C}(X,Y)}$ contient un voisinage de f pour la topologie compacte-ouverte. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\sum_{k=n}^{+\infty} 2^{-k} \leq \frac{\epsilon}{2}$. Par (2), puisque K_n est compact, il existe des compacts $K'_1, \dots, K'_m$ dans K_n donc dans X et des ouverts $U_1 \dots, U_m$ dans Y tels que $f \in \bigcap_{i=1}^m O(K'_i, U_i)$ et pour tout g dans $\bigcap_{i=1}^m O(K'_i, U_i)$, on ait $\sup_{x\in K_n} d(f(x), g(x)) \leq \frac{\epsilon}{2}$. Alors $B(f,\epsilon)$ contient $\bigcap_{i=1}^m O(K'_i, U_i)$, ce qui montre le résultat. □

Exercice E.56 *Si Y est un espace vectoriel normé sur un corps valué $\mathbb{K}$, montrer que l'espace vectoriel $\mathscr{C}(X,Y)$, muni de la topologie compacte-ouverte, est un espace vectoriel topologique, qui est un espace de Fréchet si X est dénombrable à l'infini, si Y est un espace de Banach et si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Montrer que si $Y = \mathbb{K}$, alors $\mathscr{C}(X,Y)$, muni de sa structure usuelle d'algèbre sur $\mathbb{K}$, est une algèbre topologique.*

Soient X un espace topologique et Y un espace métrique. Une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathscr{F}(X,Y)$ *converge uniformément sur les compacts* vers $f \in \mathscr{F}(X,Y)$ si pour tout compact K de X, la suite des restrictions $(f_{n|_K})_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur K vers $f_{|_K}$.

Le résultat suivant dit qu'une limite uniforme sur les compacts d'applications continues est encore continue, si l'espace de départ est localement compact, et que la convergence pour la topologie compacte-ouverte est exactement la convergence uniforme sur les compacts.

Proposition 5.14 *Soient X un espace topologique et Y un espace métrique.*

(1) Si X est localement compact, si une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathscr{C}(X,Y)$ converge unif- mément sur les compacts vers $f \in \mathscr{F}(X,Y)$, alors $f \in \mathscr{C}(X,Y)$.

(2) Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $\mathscr{C}(X,Y)$, elle converge uniformément sur les compa vers $f \in \mathscr{C}(X,Y)$ si et seulement si elle converge vers f pour la topologie compac ouverte.

(3) Si X est dénombrable à l'infini, si Y est complet, alors la topologie compac ouverte sur $\mathscr{C}(X,Y)$ est métrisable complète.

C'est à cause de l'assertion (2) que la topologie compacte-ouverte s'appelle aussi *topologie de la convergence uniforme sur les compacts.*

Preuve. (1) Pour tout x dans X, soit V un voisinage compact de x. Alors $(f_{n|_V})$ converge uniformément vers $f_{|_V}$, donc $f_{|_V}$ est continue en x par le théorème 5.3 (2), do f est continue en x, car V est un voisinage de x. D'où f est continue.

(2) Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers f pour la topologie compacte-ouverte, alors par continu des restrictions pour la topologie compacte-ouverte (voir la remarque 5.12), pour tout co pact K de X, la suite $(f_{n|K})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f_{|K}$ pour la topologie compacte-ouverte $\mathscr{C}(K,Y)$, donc par la proposition 5.13 (2), la suite $(f_{n|K})_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément v $f_{|K}$, pour tout K, ce qui veut exactement dire que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers f uniformém sur les compacts.

Réciproquement, supposons que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers f uniformément sur les co pacts. Soient K un compact de X et U un ouvert de Y tels que $f \in O(K,U)$. Com dans la preuve de la proposition 5.13 (2) ci-dessus, pour n assez grand, pour tout x da K, on a $d(f_n(x), f(x)) < d(f(K), Y-U)$, donc $f_n \in O(K,U)$.

(3) Reprenons la suite de compacts $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et la distance $d_{\mathscr{C}(X,Y)}$ introduites da la preuve de la proposition 5.13 (3). Soit $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $\mathscr{C}(X,$ pour la distance $d_{\mathscr{C}(X,Y)}$. Alors par la forme de cette distance, pour tout n dans $\mathbb{N}$, suite $(f_{k|K_n})_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite (uniformément) de Cauchy dans $\mathscr{C}(K_n,Y)$ pour la d tance uniforme d_n, donc converge uniformément vers $g_n \in \mathscr{C}(K_n,Y)$. Il est immédiat $g_{n+1|K_n} = g_n$ par unicité des limites et continuité de la restriction à K_n pour la distar uniforme (voir la remarque 5.1). Donc les applications g_n se recollent pour définir application g de X dans Y, qui est continue (car les intérieurs des K_n recouvrent De plus, la suite $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur les compacts vers g (car tout co pact de X est contenu dans l'un des K_n). Donc elle converge vers g pour la topolo compacte-ouverte, par (2).

Le résultat suivant, qui est une conséquence immédiate du théorème 5.11 et de définition de la convergence uniforme sur les compacts, donne un critère pour sav quand une suite, qui converge simplement, converge uniformément sur les compacts.

Théorème 5.15 (Théorème de Dini, 2) *Soit X un espace topologique. Suppos qu'une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathscr{C}(X,\mathbb{R})$ soit monotone et converge simplement vers un ment $f \in \mathscr{C}(X,\mathbb{R})$. Alors elle converge uniformément sur les compacts vers f.*

Les applications de composition à droite et de composition à gauche sont contin pour la topologie compacte-ouverte, si les espaces sont séparés. Plus précisément, on a résultat suivant.

Proposition 5.16 *(1) Soient X, Y, Z trois espaces topologiques et $g \in \mathscr{C}(X,Y)$. L'application $f \mapsto f \circ g$ de $\mathscr{C}(Y,Z)$ dans $\mathscr{C}(X,Z)$ est continue pour les topologies compactes-ouvertes si Y est séparé. L'application $f \mapsto g \circ f$ de $\mathscr{C}(Z,X)$ dans $\mathscr{C}(Z,Y)$ est continue pour les topologies compactes-ouvertes.*

(2) Pour tout x dans X, l'application $f \mapsto f(x)$ de $\mathscr{C}(X,Y)$ dans Y est continue pour la topologie compacte-ouverte.

En particulier, avec les hypothèses de la proposition, si Z est un espace métrique, si une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathscr{C}(Y,Z)$ converge uniformément sur les compacts vers $f \in \mathscr{C}(Y,Z)$, si Y est séparé, alors $(f_n \circ g)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur les compacts vers $f \circ g$ dans $\mathscr{C}(X,Z)$. Si X, Y sont des espaces métriques, si une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathscr{C}(Z,X)$ converge uniformément sur les compacts vers $f \in \mathscr{C}(Z,X)$, alors $(g\circ f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur les compacts vers $g \circ f$ dans $\mathscr{C}(Z,Y)$.

Preuve. (1) Pour tout compact K de X et tout ouvert U de Z, l'image $g(K)$ est compacte dans Y car Y est séparé et g continue ; si $f \in O(g(K),U)$ alors $f\circ g \in O(K,U)$. De même, pour tout compact K de Z et tout ouvert U de Y, l'image $g^{-1}(U)$ est ouverte dans X car g est continue ; si $f \in O(K, g^{-1}(U))$, alors $g \circ f \in O(K,U)$.

(2) Si X' est un singleton, l'application de Y dans $\mathscr{C}(X',Y)$, qui à un élément y de Y associe l'application de X' dans Y valant y, est un homéomorphisme, donc (2) découle de la première assertion de (1), par composition avec l'application (continue) de X dans $\{x\}$. □

Mais en général, l'application de composition n'est pas continue en les couples d'applications (voir [Dug, page 260]).

Exercice E.57 *Soient X et Y deux espaces topologiques, tels que X soit localement compact.*

1. *Montrer que l'application d'évaluation $\mathscr{C}(X,Y)\times X \to Y$ définie par $(f,x)\mapsto f(x)$ est continue, où $\mathscr{C}(X,Y)$ est muni de la topologie compacte-ouverte.*
2. *Soit Z un espace topologique, montrer que l'application*
$$\begin{array}{ccc}\mathscr{C}(Z\times X, Y) & \longrightarrow & \mathscr{C}(Z,\mathscr{C}(X,Y))\\ f & \mapsto & \{z\mapsto f_z : x\mapsto f(z,x)\}\end{array}$$
est une bijection, où $\mathscr{C}(X,Y)$ est muni de la topologie compacte-ouverte.
3. *Montrer que la topologie compacte-ouverte sur $\mathscr{C}(X,Y)$ est la seule topologie sur cet ensemble telle que pour tout espace topologique Z, l'application $\mathscr{C}(Z\times X,Y)\to \mathscr{C}(Z,\mathscr{C}(X,Y))$ ci-dessus soit une bijection.*

5.3 Continuité uniforme

Soient X et Y deux espaces métriques. Une application f de X dans Y est *uniformément continue* si

$$\forall\, \epsilon>0,\ \exists\, \eta>0,\ \forall\, x,y\in X,\quad d(x,y)<\eta \implies d(f(x),f(y))<\epsilon\,.$$

On peut remplacer toute inégalité stricte par une inégalité large, et demander à ϵ et à η d'être chacun dans une partie de $]0,+\infty[$ contenant 0 dans son adhérence.

Les propriétés suivantes sont immédiates.

•• Une application uniformément continue est continue.

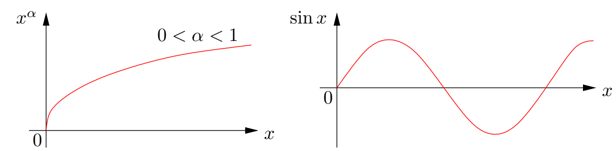
•• L'image d'une suite de Cauchy de X par une application uniformément contin
de X dans Y est une suite de Cauchy de Y.

•• Si $f : X \to Y$ est un homéomorphisme uniformément continu, et si Y est compl
alors X est complet (si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans X, alors $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est u
suite de Cauchy dans Y car f est uniformément continue, donc converge vers $y \in Y$
Y est complet, donc $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f^{-1}(y)$ car f^{-1} est continue).

Exemples. Les exemples suivants ont été vus l'année précédente. Si $\alpha \in\,]0,1]$, alors
applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies par

$$x\mapsto |x|^\alpha,\quad x\mapsto \sin x,\quad x\mapsto\cos x$$

sont uniformément continues.

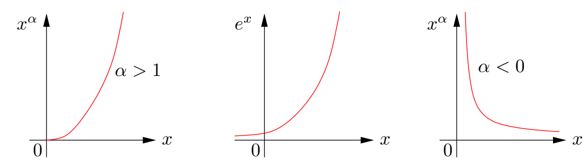


Exemples d'applications uniformément continues

Si $\alpha\in\,]1,+\infty]$, alors les applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies par

$$x\mapsto |x|^\alpha,\quad x\mapsto e^x$$

ainsi que les applications $x\mapsto \frac{1}{x^\beta}$ de $]0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ pour $\beta\in\,]0,+\infty[$, ne sont p
uniformément continues.



Exemples d'applications non uniformément continues

Encore une fois, la notion d'uniforme continuité n'est pas propre aux espaces métriqu
mais relève des espaces uniformes (voir [Bou1]). Nous donnons un autre exemple.

Soient G et G' deux groupes topologiques (par exemple les groupes additifs de de
espaces vectoriels topologiques). Une application f de G dans G' est *uniformément con*
nue si pour tout voisinage V' de l'identité dans G', il existe un voisinage V de l'ident
dans G tel que si $x^{-1}y\in V$, alors $f(x)^{-1}f(y)\in V'$.

Remarque. Si les topologies de G et G' sont définies par des distances invariantes p
translations à gauche, alors les deux définitions coïncident, en considérant les voisina
de l'élément neutre qui sont les boules ouvertes. (C'est par exemple le cas lorsque G
G' sont (les groupes additifs de) deux espaces vectoriels normés).

Les propriétés suivantes sont immédiates.

•• Une application uniformément continue est continue.

•• L'image d'une suite de Cauchy de G par une application uniformément continue de G dans G' est une suite de Cauchy de G'.

•• Si $f : G \to G'$ est un homéomorphisme uniformément continu, et si G' est séquentiellement complet, alors X est séquentiellement complet.

•• Pour un morphisme de groupes f de G dans G', les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) f est continu en l'élément neutre de G,

(ii) f est un morphisme de groupes topologiques,

(iii) f est uniformément continu.

(Chacune implique la précédente, et par la propriété de morphisme de groupes, la première implique la troisième.) Attention, $\exp : (\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{R}_+^*, \times)$ est un morphisme de groupes continu donc uniformément continu au sens des groupes topologiques, mais n'est pas une application uniformément continue pour les distances euclidiennes usuelles à la source et au but. (Il n'y a pas de contradiction avec la remarque précédente, car la distance euclidienne sur $\mathbb{R}_+^*$ n'est pas invariante par homothéties).

En particulier, si E et F sont des espaces vectoriels topologiques (en particulier normés, mais alors ce qui suit découle aussi de la proposition 2.19), les propriétés suivantes d'une application linéaire $f : E \to F$ sont équivalentes :

(i) f est continue en 0,

(ii) f est continue,

(iii) f est uniformément continue.

Soit $f : X \to Y$ une application, posons $\omega_f(0) = 0$ et, pour tout $h > 0$,

$$\omega_f(h) = \sup_{x,\, y\,\in\, X,\; d(x,y)<h} d(f(x), f(y)) \;.$$

L'application $\omega_f : [0, +\infty[\to [0, +\infty]$ est appelée le *module de continuité* de f. Par exemple, si f est une isométrie et si l'application d est surjective, alors $\omega_f = \mathrm{id}_{[0,+\infty[}$. Par définition, l'application f est uniformément continue si et seulement si son module de continuité est continu en 0.

Remarques. (1) L'application ω_f est croissante : si $h \leq h'$, alors l'ensemble sur lequel on prend la borne supérieure pour calculer $\omega_f(h)$ est contenu dans celui pour $\omega_f(h')$. De même, si X' est une partie de X, alors $\omega_{f_{|X'}} \leq \omega_f$.

(2) Si X est un espace de longueur (par exemple un convexe d'un espace vectoriel normé, voir l'exemple (vii) du paragraphe 1.3), alors ω_f est *sous-additive*, i.e.

$$\forall\, h, h' \geq 0, \quad \omega_f(h + h') \leq \omega_f(h) + \omega_f(h') \;.$$

En effet, si $x, y \in X$ et $d(x, y) < h + h'$, alors il existe un chemin de x à y de longueur au plus $h + h'$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un point z sur ce chemin tel que $d(x, z) < h$ et $d(z, y) < h'$ (si X est un convexe d'un espace vectoriel normé et si $x \neq y$, il suffit de prendre $z = tx + (1 - t)y$ où $t = \frac{||h'||}{||y-x||}$). Par inégalité triangulaire, on a

$$d(f(x), f(y)) \leq d(f(x), f(z)) + d(f(z), f(y)) \leq \omega_f(h) + \omega_f(h') \;,$$

et le résultat en découle par (2) en prenant une borne supérieure sur le membre de gauche.

(3) Toujours si X est un espace de longueur, pour tout $h \geq 0$, on a, si f est contin

$$\omega_f(h) = \sup_{x,\, y\,\in\, X,\; d(x,y)\leq h} d(f(x), f(y)) \;.$$

En effet, le membre de gauche est clairement inférieur ou égal au membre de droite. Soi $\epsilon > 0$ et $x, y \in X$ tels que $d(x, y) = h > 0$. Par continuité de f, soit $\eta \in\,]0, h[$ tel que $z \in B(y, \eta)$, alors $d(f(z), f(y)) \leq \epsilon$. En considérant un chemin de x à y de longueur plus $d(x, y) + \frac{\eta}{2}$, il existe, par le théorème des valeurs intermédiaires, un point z sur chemin tel que $d(x, z) < h$ et $d(z, y) < \eta$. Par inégalité triangulaire, on a

$$d(f(x), f(y)) \leq d(f(x), f(z)) + d(f(z), f(y)) \leq \omega_f(h) + \epsilon \;.$$

D'où $\sup_{x,\, y\,\in\, X,\; d(x,y)\leq h} d(f(x), f(y)) \leq \omega_f(h) + \epsilon$, et le résultat en découle en faisant tend ϵ vers 0.

Exemples. • Soit $\alpha > 0$. Une application $f : X \to Y$ est *α-höldérienne* s'il existe u constante $c \geq 0$ telle que

$$\forall\, x, y \in X, \;\; d(f(x), f(y)) \leq c\, d(x, y)^\alpha \;.$$

De manière équivalente, il est facile de vérifier, en utilisant le fait que $d(f(x), f(y))$ $\omega_f(d(x, y) + \epsilon)$ pour tout $\epsilon > 0$, que f est α-höldérienne si et seulement si son mod de continuité vérifie $\omega_f(h) = O(h^\alpha)$ (sous-entendu quand h tend vers 0). Une applicat $f : X \to Y$ est *höldérienne* s'il existe $\alpha > 0$ tel que f soit α-höldérienne.

• Soit $\lambda \geq 0$. Une application $f : X \to Y$ est *λ-lipschitzienne* si

$$\forall\, x, y \in X, \;\; d(f(x), f(y)) \leq \lambda\, d(x, y) \;.$$

Une application $f : X \to Y$ est *lipschitzienne* si elle est 1-höldérienne, i.e. s'il existe $\lambda \geq$ tel que f soit λ-lipschitzienne, ou, de manière équivalente si son module de continu vérifie $\omega_f(h) = O(h)$.

Par exemple, si E et F sont des espaces vectoriels normés et si $f : E \to F$ une application linéaire continue, alors f est λ-lipschitzienne où $\lambda = ||f||$ est la nor d'opérateur de f :

$$\forall\, x, y \in E, \quad ||f(x) - f(y)|| \leq ||f||\, ||x - y|| \;.$$

Théorème 5.17 (Théorème de Heine) *Soient X et Y deux espaces métriques, que X soit compact. Toute application continue de X dans Y est uniformément contin*

La démonstration de ce théorème dans le cas des espace métriques compacts qu conques est complètement analogue à celle pour les compacts des espaces vectoriels norm de dimension finie, vue l'année précédente.

Si X n'est pas supposé compact, la conclusion du théorème de Heine n'est plus vra Mais par continuité des restrictions d'applications continues, on en déduit immédiateme que si X et Y sont deux espaces métriques, alors toute application continue de X dans est uniformément continue sur tout compact de X.

Preuve. Supposons par l'absurde qu'il existe $\epsilon > 0$ et deux suites $(x_n)_{\in\mathbb{N}}, (y_n)_{\in\mathbb{N}}$ dans telles que $d(x_n, y_n) \leq \frac{1}{n}$ et $d(f(x_n), f(y_n)) \geq \epsilon$. Par compacité, quitte à extraire, les sui $(x_n)_{\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{\in\mathbb{N}}$ convergent vers x et y respectivement dans X. Par passage à la limi $x = y$ et, comme f est continue, $d(f(x), f(y)) \geq \epsilon > 0$, contradiction.

Exercice E.58 *Montrer que toute application continue f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$* périodique *(i.e. telle qu'il existe $T > 0$ tel que $f(t+T) = f(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$) est uniformément continue. Plus généralement, soit X un espace métrique localement compact, muni d'une action isométrique d'un groupe Γ telle qu'il existe un compact K de X tel que $X = \bigcup_{\gamma\in\Gamma} \gamma K$. Montrer que si $f : X \to \mathbb{R}$ est une application continue Γ-invariante (i.e. $f(\gamma x) = f(x)$ pour tous x dans X et γ dans Γ), alors f est uniformément continue.*

Théorème 5.18 (Théorème de prolongement) *Soient X et Y deux espaces métriques, tels que Y soit complet, et soit A une partie dense de X. Toute application uniformément continue f de A dans Y se prolonge, de manière unique, en une application continue g de X dans Y. De plus, g est uniformément continue sur X, avec même module de continuité que f.*

Pour mémoire, dire que g *prolonge* f signifie que $g(x) = f(x)$ pour tout x dans A. On note souvent encore f le prolongement obtenu. Par passage à la limite, si $f : A \to Y$ est une application isométrique, alors $g : X \to Y$ est aussi une application isométrique.

La fonction (continue, mais pas uniformément continue) $x \mapsto \sin\frac{1}{x}$ du sous-espace dense $]0,1]$ de $[0,1]$ dans l'espace complet $\mathbb{R}$ ne se prolonge pas continuement à $[0,1]$.

Preuve. Supposons que g_1 et g_2 soient deux prolongements continus de f. Pour tout x dans X, soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans A qui converge vers x. Alors la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $g_1(x)$ et vers $g_2(x)$ par continuité de g_1 et g_2, donc $g_1(x) = g_2(x)$ par unicité des limites. Ceci montre l'unicité de g.

Montrons l'existence d'un prolongement uniformément continu. Pour tout x dans X, fixons une suite $(a_{x,n})_{n\in\mathbb{N}}$ dans A qui converge vers x. La suite $(f(a_{x,n}))_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans Y, par uniforme continuité de f sur A. Elle converge donc vers un point $g(x)$ de Y, car Y est complet, avec $g(x) = f(x)$ si $x \in A$, par continuité de f sur A. Montrons que l'application g convient.

Soit $h > 0$. Nous avons $\omega_f(h) \le \omega_g(h)$ puisque g prolonge f. Pour tout $\epsilon > 0$, pour tous x, y dans X tels que $d(x,y) < h$, si n est assez grand, alors $d(a_{x,n}, a_{y,n}) < h$ et

$$d(g(x), g(y)) \le d(f(a_{x,n}), f(a_{y,n})) + \epsilon \le \omega_f(h) + \epsilon\ .$$

En prenant la borne supérieure, on a $\omega_g(h) \le \omega_f(h) + \epsilon$. En prenant la limite quand ϵ tend vers 0, on en déduit que $\omega_g(h) = \omega_f(h)$. Donc g a même module de continuité que f, et en particulier est uniformément continue. □

Ce résultat (sauf ce qui concerne le module de continuité) est encore vrai pour les applications uniformément continues entre espaces uniformes (voir [Bou1]). Nous ne montrons que le cas particulier ci-dessous.

Proposition 5.19 *Toute application linéaire continue f sur un sous-espace vectoriel dense A d'un espace vectoriel topologique réel ou complexe E, à valeurs dans un espace de Fréchet réel ou complexe F (comme $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), se prolonge, de manière unique, en une application linéaire continue de E dans F.*

Preuve. Si g_1 et g_2 sont deux prolongements continus de f, alors l'ensemble $\{x \in E\ :\ (g_1 - g_2)(x) = 0\}$ est fermé, par continuité de g_1, g_2 (et par séparation de F), et dense, car il contient A. Il est donc égal à E, et $g_1 = g_2$.

Soit d une distance complète sur F, invariante par translations, induisant la topolo de F. Par continuité de f en 0, pour tout n dans $\mathbb{N}$, soit V_n un voisinage ouvert de 0 da E tel que $d(f(y), 0) \le \frac{1}{n+1}$ pour tout y dans $V_n \cap A$. Pour tout n dans $\mathbb{N}$, soit W_n voisinage de 0 dans E tel que $\{x \pm y\ :\ x, y \in W_n\} \subset V_n$, et $W_n \subset W_{n-1}$ si $n \ge 1$.

Fixons x dans E. Pour tout n dans $\mathbb{N}$, puisque $x + W_n$ est un voisinage de x, il exi $x_n \in W_n$ tel que $x + x_n \in A$. Si $m \ge n$, alors $x_m - x_n = (x + x_n) - (x + x_m) \in V_n \cap$ donc par linéarité de f sur A et par invariance par translations de d,

$$d(f(x + x_n), f(x + x_m)) = d(f(x_n - x_m), 0) \le \frac{1}{n+1}\ .$$

La suite $(f(x+x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est donc une suite de Cauchy dans F. Elle converge par conséqu vers un élément de F, que nous notons $g(x)$. Cet élément ne dépend pas du choix d'u suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ comme ci-dessus, car si $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un autre choix, alors, comme ci-dess $d(f(x + x_n), f(x + x'_n)) \le \frac{1}{n+1}$. En particulier, si $x \in A$, alors la suite nulle est un ch possible pour x, et donc $g(x) = f(x)$.

Montrons que g est linéaire. Pour tous $x, y \in E$ et tout scalaire λ, nous pouvons cho des suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour x, y telles que $x_n + \lambda y_n \in W_n$. Donc $(x_n + \lambda y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est choix convenable pour $x + \lambda y$. Comme $f((x + \lambda y) + (x_n + \lambda y_n)) = f(x + x_n) + \lambda f(y + y$ par passage à la limite, nous avons donc $g(x + \lambda y) = g(x) + \lambda g(y)$.

Montrons que g est continue en 0, donc est continue. Si $x \in W_n$, alors pour tout $m \ge$ nous avons $x + x_m \in V_n \cap A$, donc $d(f(x + x_m), 0) \le \frac{1}{n+1}$. Par passage à la limite qua $m \to +\infty$, nous avons $d(g(x), 0) \le \frac{1}{n+1}$, ce qui montre le résultat.

Complété d'un espace métrique. Corps valués complets.

Le résultat suivant dit qu'il existe une manière naturelle de plonger isométriqueme un espace métrique donné dans un espace métrique complet. Rappelons qu'une *inject isométrique* d'un espace métrique dans un autre est une application $f : X \to Y$ en deux espaces métriques telle que

$$\forall\, x, y \in X, \quad d(f(x), f(y)) = d(x, y)\ ,$$

c'est-à-dire une application qui est une isométrie sur son image.

Théorème 5.20 *Soit X un espace métrique. Il existe un espace métrique complet $\widehat{X}$ une injection isométrique $i : X \to \widehat{X}$ d'image dense. Si $\widehat{X}'$ est un autre espace métri complet muni d'une injection isométrique $i' : X \to \widehat{X}'$ d'image dense, alors il existe u unique isométrie $j : \widehat{X} \to \widehat{X}'$ telle que $j \circ i = i'$, ou autrement dit telle que le diagram suivant soit commutatif*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "i'"'] & \widehat{X} \arrow[d, "j"] \\ & \widehat{X}'\ . \end{tikzcd}$$

Tout tel couple $(i, \widehat{X})$ (et par abus $\widehat{X}$) est appelé un *complété* de X. On identifie avec son image dans $\widehat{X}$ par i. La propriété d'unicité modulo unique isomorphisme complétés fait que l'on peut parler du complété au lieu d'un complété : on identifie de complétés de X par l'unique telle isométrie j.

Preuve. La propriété d'unicité est immédiate par le théorème de prolongement 5.1 l'application de $i(X)$ dans $i'(X)$ définie par $i(x) \mapsto i'(x)$ pour tout x dans X est isométrie, donc se prolonge de manière unique en une application continue j de $\widehat{X}$ dans $\widehat{X}'$, qui est une application isométrique par passage à la limite. En appliquant le même raisonnement en échangeant i et i', et comme la seule application continue de $\widehat{X}$ dans $\widehat{X}$ (resp. de $\widehat{X}'$ dans $\widehat{X}'$) étendant l'identité de $i(X)$ (resp. $i'(X)$) est l'identité de $\widehat{X}$ (resp. $\widehat{X}'$), on en déduit que j est bijective, donc une isométrie.

Pour montrer l'existence de $(i, \widehat{X})$, nous pouvons supposer que X est non vide. Notons d la distance de X. Munissons l'espace vectoriel $\mathscr{C}_b(X, \mathbb{R})$ de la norme uniforme, qui est complète par la proposition 5.8 (i). Soit x_0 dans X, et notons $\phi : X \to \mathscr{C}_b(X, \mathbb{R})$ l'application

$$x \mapsto \phi_x : z \mapsto d(z, x) - d(z, x_0) \ .$$

Remarquons que ϕ_x est continue, par continuité de la distance à un point, et bornée par $d(x, x_0)$, par l'inégalité triangulaire inverse. Pour tous x, y dans X, on a

$$||\phi_x - \phi_y||_\infty = \sup_{z \in X} |\phi_x(z) - \phi_y(z)| = \sup_{z \in X} |d(z, x) - d(z, y)| \leq d(x, y)$$

par l'inégalité triangulaire inverse. En prenant $z = x$, la dernière inégalité est en fait une égalité. Donc ϕ est une injection isométrique. Posons $\widehat{X} = \overline{\phi(X)}$, qui est complet, car fermé dans l'espace de Banach $\mathscr{C}_b(X, \mathbb{R})$. Avec $i : X \to \widehat{X}$ la restriction de ϕ, le résultat en découle. □

Par exemple, soient X un espace métrique complet, et A une partie de X (munie de la distance induite). Alors l'adhérence $\overline{A}$ de A dans X est le complété de A.

Proposition 5.21 *Si X et Y sont deux espaces métriques et si $f : X \to Y$ est une application uniformément continue, alors il existe une unique application continue $\widehat{f} : \widehat{X} \to \widehat{Y}$ prolongeant f.*

Preuve. Ceci découle du théorème de prolongement 5.18. □

Proposition 5.22 *Si $(X_\alpha)_{\alpha \in \mathscr{A}}$ est une famille dénombrable d'espaces métriques, et si $(i_\alpha, \widehat{X}_\alpha)$ est le complété de X_α, alors le complété de l'espace métrique produit $\prod_{\alpha \in \mathscr{A}} X_\alpha$ est l'espace produit $\prod_{\alpha \in \mathscr{A}} \widehat{X}_\alpha$ muni de l'injection isométrique $i : (x_\alpha)_{\alpha \in \mathscr{A}} \mapsto (i_\alpha(x_\alpha))_{\alpha \in \mathscr{A}}$.*

On utilise bien sûr la même formule de distance produit sur $\prod_{\alpha \in \mathscr{A}} X_\alpha$ et sur $\prod_{\alpha \in \mathscr{A}} \widehat{X}_\alpha$.

Preuve. L'espace métrique $\prod_{\alpha \in \mathscr{A}} \widehat{X}_\alpha$ est complet, par la proposition 3.17. Comme les i_α sont des injections isométriques, l'application i est une injection isométrique, par la formule des distances produits. Comme les i_α sont d'image dense, il découle de la formule $\overline{\prod_{\alpha \in \mathscr{A}} A_\alpha} = \prod_{\alpha \in \mathscr{A}} \overline{A_\alpha}$, où A_α est une partie d'un espace métrique Y_α, vue dans le paragraphe 2.4, que l'image de i est dense. □

Un corps valué est dit *complet* si son groupe topologique additif est complet, ou, de manière équivalente, si la distance définie par sa valeur absolue est complète.

Théorème 5.23 *Soit K un corps valué. Il existe un corps valué complet $\widehat{K}$ et un morphisme de corps isométrique $i : K \to \widehat{K}$ d'image dense. Si $\widehat{K}'$ est un autre corps valué complet muni d'un morphisme de corps isométrique $i' : K \to \widehat{K}'$ d'image dense, alors il existe un unique isomorphisme de corps valué $j : \widehat{K} \to \widehat{K}'$ tel que $j \circ i = i'$.*

Tout tel couple $(i, \widehat{K})$ (et par abus $\widehat{K}$) est appelé un *complété* de K. On identifie avec son image dans $\widehat{K}$ par i. En particulier, comme K est un sous-corps de $\widehat{K}$, les co K et $\widehat{K}$ ont la même caractéristique.

On identifie deux complétés de K par l'unique tel isomorphisme j, ce qui permet parler du complété de K. On note souvent par le même symbole la valeur absolue de et celle de son complété $\widehat{K}$.

Preuve. Soit $\widehat{K}$ un complété de K pour la distance définie par sa valeur absolue, avec une partie dense de $\widehat{K}$. Les applications $(x, y) \mapsto x + y$ de $K \times K$ dans K, $x \mapsto -x$ de dans K, et $x \mapsto |x|$ de K dans $\mathbb{R}$ sont uniformément continues (car 1-lipschitziennes) : effet, pour tous x, y, x', y' dans K, par les propriétés des valeurs absolues,

$$|(x + y) - (x' + y')| \leq |x - x'| + |y - y'|, \ |(-x) - (-x')| = |x - x'|, \ \big| |x| - |y| \big| \leq |x -$$

Donc par les propositions 5.21 et 5.22, ces applications se prolongent en des applicatio continues $+ : \widehat{K} \times \widehat{K} \to \widehat{K}$, $- : \widehat{K} \to \widehat{K}$ et $| \cdot | : \widehat{K} \to \mathbb{R}$, respectivement. Par passag la limite des identités, ceci munit $\widehat{K}$ d'une structure de groupe topologique abélien, et distance de $\widehat{K}$ est $(x, y) \mapsto |x - y|$.

De plus, l'application $(x, y) \mapsto xy$ de $K \times K$ dans K est uniformément continue tout borné de $K \times K$; l'application $x \mapsto x^{-1}$ de K dans K est uniformément continue dehors d'un voisinage de 0 ; en effet, pour tous x, y, z, x', y', z' dans K, tels que $z, z' \neq$ par les propriétés des valeurs absolues,

$$|xy - x'y'| \leq |x - x'||y| + |y - y'||x'|, \quad |z^{-1} - z'^{-1}| \leq |z - z'|/(|z||z'|) \ .$$

Donc en se restreignant à un produit de boules fermées pour la première, et au comp mentaire d'une boule ouverte pour la seconde, toujours par 5.21 et 5.22, ces applicatio se prolongent en des applications continues $\cdot : \widehat{K} \times \widehat{K} \to \widehat{K}$, ${}^{-1} : \widehat{K} \to \widehat{K}$. Par passag la limite des identités, ceci munit $\widehat{K}$ d'une structure de corps valué complet. Le résul en découle facilement.

Exemples. (1) Le corps valué $\mathbb{R}$ est le complété du corps valué $\mathbb{Q}$ pour la valeur abso usuelle sur $\mathbb{Q}$.

(2) Soit p un nombre premier. On note $(\mathbb{Q}_p, | \cdot |_p)$ le corps valué (de caractéristique complété du corps $\mathbb{Q}$ muni de la valeur absolue $| \cdot |_p$ définie dans le paragraphe 2.7.

Exercice E.59 *(i) On note $\mathbb{Z}_p$ l'adhérence de $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ dans $\mathbb{Q}_p$. Montrer que*

$$\mathbb{Z}_p = \{x \in \mathbb{Q}_p \ : \ |x|_p \leq 1\} \ ,$$

et que $\mathbb{Z}_p$ est un sous-anneau ouvert et compact dans $\mathbb{Q}_p$. En déduire que $\mathbb{Q}_p$ est localem compact.

(ii) Montrer que pour toute suite $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ dans $\{0, 1, 2, \ldots, p - 1\}$, la série $\sum_{i \in \mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{Z}_p$ pour la distance définie par la valeur absolue $| \cdot |_p$. Montrer que p tout x dans $\mathbb{Z}_p$, il existe une unique suite $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ dans $\{0, 1, 2, \ldots, p - 1\}$ telle que x $\sum_{i \in \mathbb{N}} a_i p^i$. Montrer que la bijection ainsi définie de $\{0, 1, 2, \ldots, p - 1\}^{\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{Z}_p$ est homéomorphisme (où $\{0, 1, 2, \ldots, p - 1\}$ est muni de la topologie discrète et le prod $\{0, 1, 2, \ldots, p - 1\}^{\mathbb{N}}$ de la topologie produit). Montrer qu'un élement x de $\mathbb{Z}_p$ est invers dans $\mathbb{Z}_p$ si et seulement si son coefficient a_0 est non nul, ou si et seulement si $|x|_p =$

(iii) Montrer que l'anneau topologique $\mathbb{Z}_p$ est isomorphe à l'anneau topologique lim projective $\varprojlim \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$, défini à la fin du paragraphe 2.4 (voir aussi le paragraphe 2.7).

(iv) Montrer que tout élément non nul x de $\mathbb{Q}_p$ s'écrit comme la somme d'une série convergente

$$\sum_{i\in\mathbb{Z},\, i\geq k} a_i p^i \ ,$$

où $k\in\mathbb{Z}$, $a_k\neq 0$ et $a_i\in\{0,1,2,\dots,p-1\}$ pour tout $i\geq k$.

(v) Soient A un anneau topologique (unitaire, commutatif) intègre, et $F(A)$ son corps des fractions. Rappelons que $F(A)=(A\times A-\{0\})/\mathscr{R}$ où $\mathscr{R}$ est la relation d'équivalence

$$(x,y)\ \mathscr{R}\ (x',y') \iff xy'=x'y\ ,$$

que l'on note x/y la classe d'équivalence de (x,y), et que $F(A)$ est un corps pour les lois d'addition $x/y+x'/y'=(xy'+x'y)/(yy')$ et de multiplication $(x/y)(x'/y')=(xx')/(yy')$ (voir par exemple [Per]).

Montrer que $F(A)$, muni de la topologie quotient, est un corps topologique. Montrer que le corps topologique $\mathbb{Q}_p$ est isomorphe au corps des fractions de l'anneau topologique $\mathbb{Z}_p$.

Exercice E.60 *Soit K un corps (commutatif). Montrer que le corps des séries formelles de Laurent $K((X^{-1}))$ (à coefficients dans K à une indéterminée X^{-1}), muni de la valeur absolue $|\cdot|_\infty$ définie au paragraphe 2.7, est isomorphe au complété du corps des fractions rationnelles $K(X)$ (à coefficients dans K à une indéterminée X) pour la valeur absolue $|\cdot|_\infty$ définie au paragraphe 2.7.*

Théorème 5.24 *Soit $\mathbb{K}$ un corps valué complet (par exemple $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Soit E un espace vectoriel normé sur $\mathbb{K}$. Il existe un espace de Banach $\widehat{E}$ sur $\mathbb{K}$ et une application linéaire isométrique $i:E\to\widehat{E}$ d'image dense. Si $\widehat{E}'$ est un autre espace de Banach sur $\mathbb{K}$ muni d'une application linéaire isométrique $i':E\to\widehat{E}'$ d'image dense, alors il existe un unique isomorphisme linéaire $j:\widehat{E}\to\widehat{E}'$ tel que $j\circ i=i'$.*

Tout tel couple $(i,\widehat{E})$ (et par abus $\widehat{E}$) est appelé un *complété* de E. On identifie E avec son image dans $\widehat{E}$ par i.

On identifie deux complétés de E par l'unique tel isomorphisme j, ce qui permet de parler du complété de E. On note souvent par le même symbole la norme de E et celle de son complété $\widehat{E}$.

Preuve. Soit $\widehat{E}$ un complété de E pour la distance définie par sa norme, avec E une partie dense de $\widehat{E}$. Les applications $(x,y)\mapsto x+y$ de $E\times E$ dans E, $x\mapsto -x$ de E dans E, $(\lambda,x)\mapsto\lambda x$ de $\mathbb{K}\times E$ dans E, et $x\mapsto ||x||$ de E dans $\mathbb{R}$ sont uniformément continues (car 1-lipschitziennes) sur tous bornés : en effet, pour tous x,y,x',y' dans E, par les propriétés des normes,

$$||(x+y)-(x'+y')||\leq||x-x'||+||y-y'||\ ,\quad ||(-x)-(-x')||=||x-x'||\ ,$$

$$||\lambda x-\lambda'x'||\leq|\lambda-\lambda'|\,||x||+|\lambda'|\,||x-x'||\ ,\quad \big|\,||x||-||y||\,\big|\leq||x-y||\ .$$

Donc par les propositions 5.21 et 5.22, ces applications se prolongent en des applications continues $+:\widehat{E}\times\widehat{E}\to\widehat{E}$, $-:\widehat{E}\to\widehat{E}$, $\cdot:\mathbb{K}\times\widehat{E}\to\widehat{E}$, et $||\cdot||:\widehat{E}\to\mathbb{R}$, respectivement. Par passage à la limite des identités, ceci munit $\widehat{E}$ d'une structure d'espace vectoriel normé, et la distance de $\widehat{E}$ est $(x,y)\mapsto||x-y||$. Le résultat en découle facilement. $\square$

5.4 Semi-continuité

Quand on considère des applications à valeurs réelles (et même à valeurs dans l'ordre de $\mathbb{R}$ (étendu à $\overline{\mathbb{R}}$) permet de définir des notions de limite inférieure et supérieu et de continuité inférieure et supérieure, ce qui est parfois très utile en analyse.

Limites inférieures et supérieures.

Soient X un espace topologique, A et B des parties de X avec A contenue dans $a\in\overline{A}$ et $f:B\to\overline{\mathbb{R}}$ une application. Soit K l'ensemble des valeurs d'adhérences de f quand x tend vers a dans A (voir le paragraphe 3.3), qui est compact et non vide da $\overline{\mathbb{R}}$ par la proposition 4.4. Le plus petit (respectivement grand) élément de K est app la *limite inférieure* (respectivement *supérieure*) de $f(x)$ quand x tend vers a dans A. sont notés

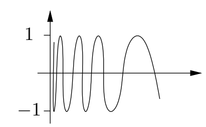
$$\liminf_{x\to a,\ x\in A}\ f(x) \quad\text{et}\quad \limsup_{x\to a,\ x\in A}\ f(x)$$

respectivement, avec les conventions analogues à celles des limites.

Exemples. (1) Si $f(x)$ converge vers ℓ quand x tend vers a dans A, alors

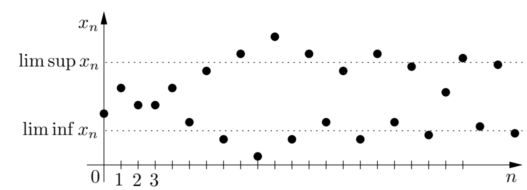
$$\liminf_{x\to a,\ x\in A}\ f(x)=\limsup_{x\to a,\ x\in A}\ f(x)=\lim_{x\to a,\ x\in A}\ f(x)\ .$$

(2) Par l'exemple de la fin du paragraphe 3.3, on a



$$\liminf_{x\to 0^+}\ \sin\frac{1}{x}\ =\ -1 \quad\text{et}\quad \limsup_{x\to 0^+}\ \sin\frac{1}{x}\ =\ +1\ .$$

(3) (Même cet exemple est explicitement marqué hors programme de classe prépa toire.)



Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle, alors ses plus petite et plus grande valeurs d'adhéren sont

$$\liminf_{n\to+\infty}\ x_n=\inf\{\epsilon\in\mathbb{R}\ :\ \forall\,N\in\mathbb{N},\ \ \exists\,n\geq N,\ \ x_n\leq\epsilon\}$$

$$\limsup_{n\to+\infty}\ x_n=\sup\{\epsilon\in\mathbb{R}\ :\ \forall\,N\in\mathbb{N},\ \ \exists\,n\geq N,\ \ x_n\geq\epsilon\}$$

avec les conventions usuelles $\sup_\emptyset=-\infty$ et $\inf_\emptyset=+\infty$. Comme les valeurs d'adhéren d'une suite dans un espace métrisable sont les limites de ses sous-suites, $\liminf_{n\to+\infty}$ est la plus petite limite d'une suite extraite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et $\limsup_{n\to+\infty}\ x_n$ est la p grande limite d'une suite extraite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Les limites inférieures et supérieures existent toujours, contrairement aux limites. Bien sûr,

$$\limsup_{x\to a,\ x\in A} f(x) \;=\; -\liminf_{x\to a,\ x\in A} -f(x)$$

et

$$\liminf_{x\to a,\ x\in A} f(x) \;\le\; \limsup_{x\to a,\ x\in A} f(x)$$

avec égalité si et seulement si f admet une limite quand x tend vers a dans A (par la dernière assertion de la proposition 4.4), et alors la limite est égale à la valeur commune des membres de droite et de gauche. Ceci est d'ailleurs une méthode parfois utile pour montrer qu'une fonction à valeurs réelles admet une limite : on montre que les limites inférieures et supérieures coïncident, et alors la limite est la valeur commune.

Proposition 5.25 *Soient X un espace topologique, A et B des parties de X avec A contenue dans B, $a \in \overline{A}$ et $f, g : B \to \overline{\mathbb{R}}$ deux applications.*

(i) Soit $\mathscr{V}$ un système fondamental de voisinages de a dans X. Alors

$$\liminf_{x\to a,\ x\in A} f(x) = \sup_{V\in\mathscr{V}}\ \inf_{x\in V\cap A} f(x)$$

$$\limsup_{x\to a,\ x\in A} f(x) = \inf_{V\in\mathscr{V}}\ \sup_{x\in V\cap A} f(x)\ .$$

(ii) Si $f(x) \le g(x)$ pour tout x dans B, alors

$$\liminf_{x\to a,\ x\in A} f(x) \le \liminf_{x\to a,\ x\in A} g(x) \quad\text{et}\quad \limsup_{x\to a,\ x\in A} f(x) \le \limsup_{x\to a,\ x\in A} g(x)\ .$$

(iii) Notons $\odot$ ou bien l'addition d'un couple d'éléments de $\overline{\mathbb{R}}$ qui n'est pas de la forme $(-\infty, +\infty)$ ou $(+\infty, -\infty)$, ou bien le produit de deux élements de $[0, +\infty]$ qui ne sont pas de la forme $(0, +\infty)$ ou $(+\infty, 0)$, ou bien le maximum de deux éléments de $\overline{\mathbb{R}}$, ou bien le minimum de deux éléments de $\overline{\mathbb{R}}$. Alors

$$\liminf_{x\to a,\ x\in A}\ f(x)\odot g(x) \;\ge\; \Big(\liminf_{x\to a,\ x\in A}\ f(x)\Big)\odot\Big(\liminf_{x\to a,\ x\in A}\ g(x)\Big)\ ,$$

$$\limsup_{x\to a,\ x\in A}\ f(x)\odot g(x) \;\le\; \Big(\limsup_{x\to a,\ x\in A}\ f(x)\Big)\odot\Big(\limsup_{x\to a,\ x\in A}\ g(x)\Big)\ ,$$

De plus, les inégalités de (iii) sont des égalités lorsque l'une des limites inférieures/supérieures du membre de droite est une limite.

Remarque. Si dans (i) nous prenons $\mathscr{V} = \{V_n\ : n \in \mathbb{N}\}$ avec $V_{n+1} \subset V_n$ pour tout n, alors la suite $\big(\inf_{x\in V_n\cap A} f(x)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante (car $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante), donc converge dans $\overline{\mathbb{R}}$ vers sa borne supérieure. D'où par (i)

$$\liminf_{x\to a,\ x\in A} f(x) = \lim_{n\to+\infty}\ \inf_{x\in V_n\cap A}\ f(x)\ .$$

De même, la suite $\big(\sup_{x\in V_n\cap A} f(x)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, et

$$\limsup_{x\to a,\ x\in A} f(x) = \lim_{n\to+\infty}\ \sup_{x\in V_n\cap A}\ f(x)\ .$$

En particulier, si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle, alors, le point $+\infty$ dans $\overline{\mathbb{R}}$ admettan
système fondamental dénombrable de voisinages $\big([N, +\infty]\big)_{N\in\mathbb{N}}$, et en prenant $A = B$
$\mathbb{N} \subset \overline{\mathbb{R}}$, on obtient

$$\liminf_{n\to+\infty}\ x_n = \sup_{N\in\mathbb{N}}\ \inf_{n\ge N} x_n = \lim_{N\to+\infty}\ \inf_{n\ge N} x_n\ ,$$

$$\limsup_{n\to+\infty}\ x_n = \inf_{N\in\mathbb{N}}\ \sup_{n\ge N} x_n = \lim_{N\to+\infty}\ \sup_{n\ge N} x_n\ .$$

Preuve. Quitte à changer f en $-f$, il suffit de vérifier ces propriétés pour la lim
inférieure, sauf quand $\odot$ est le produit dans (iii), mais cette situation se traite de mani
semblable.

(i) Soient

$$s = \liminf_{x\to a,\ x\in A} f(x) \quad\text{et}\quad t = \sup_{V\in\mathscr{V}}\ \inf_{x\in V\cap A} f(x)\ .$$

Puisque s est une valeur d'adhérence, pour tout V dans $\mathscr{V}$, on a $s \in \overline{f(V\cap A)}$ (voi
proposition 3.12). Donc

$$s \ge \inf\ \overline{f(V\cap A)} = \inf f(V\cap A)\ ,$$

et en prenant la borne supérieure sur les V dans $\mathscr{V}$, on a $s \ge t$. Supposons par l'absu
que $s > t$. Soit $u \in\,]t, s[$, ce qui entraîne que $]u, +\infty]$ est un voisinage de l'ensemble
valeurs d'adhérence de $f(x)$ quand x tend vers a dans A. Par la troisième assertion
la proposition 4.4, soit U un voisinage de a dans X tel que $f(U\cap A) \subset\,]u, +\infty]$. Al
$t \ge \inf f(U\cap A) \ge u$, contradiction.

(ii) Ceci découle de (i) par passage des inégalités à la borne inférieure et su
rieure. Pour faire les choses en détail, pour tout V dans $\mathscr{V}$ et tout y dans $V\cap A$,
a $\inf_{x\in V\cap A}\ f(x) \le f(y) \le g(y)$. Par conséquent en prenant la borne inférieure sur y, po
tout V dans $\mathscr{V}$

$$\inf_{x\in V\cap A} f(x) \le \inf_{y\in V\cap A} g(y)\ .$$

Donc, pour tout V dans $\mathscr{V}$,

$$\inf_{x\in V\cap A} f(x) \le \sup_{V'\in\mathscr{V}}\ \inf_{y\in V'\cap A}\ g(y)\ .$$

En prenant la borne supérieure sur V, et par (i), on a bien

$$\liminf_{x\to a,\ x\in A}\ f(x) \le \liminf_{x\to a,\ x\in A}\ g(x)\ .$$

(iii) Nous ne faisons la preuve de l'assertion (iii) que si a admet un système fondamen
dénombrable de voisinages, que l'on peut supposer décroissant, noté $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$, en renvoya
par exemple à [Dix, §7.3] pour le cas général. Il suffit de considérer le cas de la somm
les autres se traitent de manière analogue. Pour tout n dans $\mathbb{N}$, et tout y dans $V_n\cap A$,
a

$$f(y) + g(y) \;\ge \inf_{x\in V_n\cap A} f(x) + \inf_{x\in V_n\cap A} g(x)\ .$$

Donc, en prenant la borne inférieure sur y, pour tout n dans $\mathbb{N}$, on a

$$\inf_{y\in V_n\cap A}\ f(y) + g(y) \;\ge \inf_{x\in V_n\cap A} f(x) + \inf_{x\in V_n\cap A} g(x)\ .$$

Donc par un passage à la limite quand n tend vers $+\infty$ en utilisant la remarque suivant l'énoncé, on a

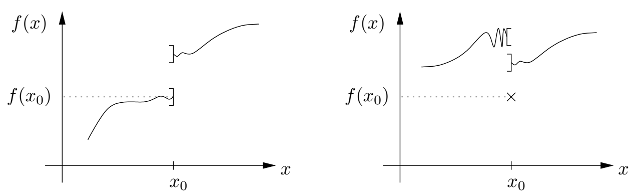
$$\liminf_{x\to a,\, x\in A} f(x)+g(x) \;\geq\; \liminf_{x\to a,\, x\in A} f(x) + \liminf_{x\to a,\, x\in A} g(x)\ . \quad \square$$

Remarque. On ne peut pas remplacer les inégalités dans l'assertion (iii) par des égalités. Par exemple, si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite réelle définie par $x_{3k}=0$, $x_{3k+1}=1$, $x_{3k+2}=1/4$ pour tout $k\in\mathbb{N}$, et si $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite réelle définie par $y_{3k}=1$, $y_{3k+1}=0$, $y_{3k+2}=1/4$ pour tout $k\in\mathbb{N}$, alors

$$\liminf_{n\to+\infty} x_n+y_n = 1/2 > 0 = \liminf_{n\to+\infty} x_n + \liminf_{n\to+\infty} y_n\ .$$

Semi-continuité inférieure et supérieure.

Soient X un espace topologique, $x_0\in X$ et f une application de X dans $\overline{\mathbb{R}}$. Notons $\mathscr{V}(x_0)$ l'ensemble des voisinages de x_0 dans X.



applications semi-continues inférieurement

L'application f est dite *semi-continue inférieurement* en x_0 si

$$\forall\, \lambda < f(x_0),\ \ \exists\, V\in\mathscr{V}(x_0),\ \ \forall\, x\in V,\quad f(x)\geq\lambda\ .$$

On peut comme d'habitude remplacer $\mathscr{V}(x_0)$ par n'importe quel système fondamental de voisinages de x_0 dans X. En particulier, si X est un espace métrique, alors f est semi-continue inférieurement en x_0 si et seulement si

$$\forall\, \lambda < f(x_0),\ \ \exists\, \epsilon>0,\ \ \forall\, x\in X,\quad d(x,x_0)<\epsilon \implies f(x)\geq\lambda\ .$$

Par définition d'une limite inférieure, f est semi-continue inférieurement en x_0 si et seulement si

$$\liminf_{x\to x_0,\, x\neq x_0} f(x)\geq f(x_0)\ .$$

De même, l'application f est dite *semi-continue supérieurement* en x_0 si

$$\forall\, \lambda > f(x_0),\ \ \exists\, V\in\mathscr{V}(x_0),\ \ \forall\, x\in V,\quad f(x)\leq\lambda\ .$$

On peut comme d'habitude remplacer $\mathscr{V}(x_0)$ par n'importe quel système fondamental de voisinages de x_0 dans X. En particulier, si X est un espace métrique, alors f est semi-continue supérieurement en x_0 si et seulement si

$$\forall\, \lambda > f(x_0),\ \ \exists\, \epsilon>0,\ \ \forall\, x\in X,\quad d(x,x_0)<\epsilon \implies f(x)\leq\lambda\ .$$

Par définition d'une limite supérieure, f est semi-continue supérieurement en x_0 si seulement si

$$\limsup_{x\to x_0,\, x\neq x_0} f(x)\leq f(x_0)\ .$$

Bien sûr, f est semi-continue inférieurement (resp. supérieurement) en un point de X et seulement si $-f$ est semi-continue supérieurement (resp. inférieurement) en ce poin

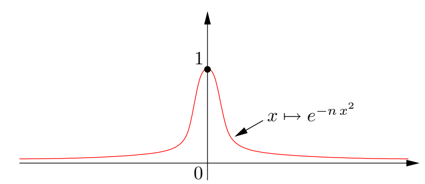
Pour éviter de confondre les notions, il est conseillé de retenir la définition d'u application semi-continue inférieurement, et de prendre pour définition d'une applicat semi-continue supérieurement f l'assertion « $-f$ est semi-continue inférieurement ». Da de nombreux exemples d'analyse (par exemple de minimisation de fonctionnelles), ce so de toutes façons les applications semi-continues inférieurement qui apparaissent le p fréquemment.

Remarque. Remarquons que f est continue en x_0 si et seulement si f est semi-contin inférieurement et supérieurement en x_0.

Cette remarque anodine fournit une méthode de démonstration de la continuité un point d'une application à valeurs réelles : bien souvent l'une des semi-continuités un point est immédiate pour des raisons générales (voir ci-dessous), et il suffit alors montrer l'autre.

Exemples. L'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ nulle en dehors de 0 et valant -1 en 0 est se continue inférieurement, mais pas supérieurement, en 0.

Pour tout n dans $\mathbb{N}$, soit $f_n : t\mapsto e^{-nt^2}$, qui est continue en 0, donc semi-contin inférieurement en 0. L'application $f=\inf_{n\in\mathbb{N}} f_n$, qui est nulle en dehors de 0 et vau en 0, n'est pas semi-continue inférieurement. En particulier, on ne peut pas remplacer borne supérieure par la borne inférieure dans la seconde assertion du résultat suivant.



Proposition 5.26 *Si $f,g : X\to\overline{\mathbb{R}}$ sont semi-continues inférieurement (resp. supéri rement) en x_0, alors les applications $\max\{f,g\}$, $\min\{f,g\}$, $f+g$, ainsi que fg si f g sont positives ou nulles, sont semi-continues inférieurement (resp. supérieurement) x_0.*

Si $(f_i)_{i\in I}$ est une famille d'applications de X dans $\overline{\mathbb{R}}$, semi-continues inférieurem en x_0, alors $f=\sup_{i\in I} f_i$ est semi-continue inférieurement en x_0.

Si $(f_i)_{i\in I}$ est une famille d'applications de X dans $\overline{\mathbb{R}}$, semi-continues supérieurem en x_0, alors $f=\inf_{i\in I} f_i$ est semi-continue supérieurement en x_0.

En particulier, la borne supérieure d'une famille d'applications continues est se continue inférieurement (mais elle n'est en général pas continue, par exemple en consi rant la suite des $f_n : t\mapsto -e^{-nt^2}$, dont la borne supérieure est l'application nulle en deh de 0 et valant -1 en 0, qui, si elle est semi-continue inférieurement, n'est pas continue

Preuve. Il suffit de considérer le cas des applications semi-continues inférieurement. première assertion découle de la proposition 5.25 (iii). Pour la seconde, soit $t<f(x_0)$

$\sup_{i\in I} f_i(x_0)$ et $i_0 \in I$ tel que $t < f_{i_0}(x_0)$. Puisque f_{i_0} est semi-continue inférieurement, il existe un voisinage V de x_0 tel que si $x \in V$, alors $f_{i_0}(x) \geq t$. Donc pour tout $x \in V$, on a $f(x) \geq f_{i_0}(x) \geq t$. D'où f est semi-continue inférieurement. □

L'application f est dite *semi-continue inférieurement* (resp. *supérieurement*) si elle est semi-continue inférieurement (resp. supérieurement) en tout point de X.

Proposition 5.27 *Les assertions suivantes sont équivalentes :*
- *L'application f est semi-continue inférieurement*
- *Pour tout t dans $\overline{\mathbb{R}}$, l'ensemble des x dans X tels que $f(x) > t$ est ouvert.*
- *Pour tout t dans $\overline{\mathbb{R}}$, l'ensemble des x dans X tels que $f(x) \leq t$ est fermé.*

Preuve. Les deux dernières assertions sont équivalentes par passage au complémentaire. Montrons que la première implique la seconde. Supposons f semi-continue inférieurement. Alors $f^{-1}(\,]t, +\infty])$ est voisinage de chacun de ses points, par définition de la semi-continuité inférieure, donc est ouvert. La réciproque est aussi claire. □

Nous laissons au lecteur le soin d'énoncer et de démontrer les affirmations analogues dans le cas semi-continu supérieurement.

Exercice E.61 *Soit X un espace topologique. Pour toute partie A de X, on note χ_A (ou parfois $\mathbb{I}_A$) la* fonction caractéristique *de A, définie par $\chi_A(x) = 1$ si $x \in A$, et $\chi_A(x) = 0$ sinon.*

Montrer que A est ouvert (respectivement fermé) si et seulement si χ_A est semi-continue inférieurement (respectivement supérieurement).

Nous avons vu qu'une application continue d'un compact dans $\mathbb{R}$ atteint à la fois sa borne inférieure et sa borne supérieure. Lorsque l'on s'intéresse uniquement à l'une de ces deux bornes, il suffit d'une propriété de semi-continuité, comme le montre le résultat suivant.

Théorème 5.28 *Soit X un espace topologique compact non vide, et $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ une application semi-continue inférieurement. Alors f atteint sa borne inférieure : il existe $x_0 \in X$ tel que $f(x_0) = \inf_{x\in X} f(x)$.*

Preuve. Soit $m = \inf_{x\in X} f(x)$. Si $m = +\infty$, alors f est l'application constante $+\infty$, et le résultat est clair. Sinon, soit $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement supérieurs à m et convergeant en décroissant vers m (par exemple $\lambda_n = m + 1/n$ si $m > -\infty$ et $\lambda_n = -n$ sinon). L'ensemble $K_n = f^{-1}([-\infty, \lambda_n])$ est fermé dans X, par la proposition 5.27, donc compact, et non vide, car $\lambda_n > m$. L'intersection décroissante de compacts $K = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n$ est donc non vide, et si x_0 est un point de K, alors $f(x_0) \leq \lambda_n$ pour tout n, donc $f(x_0) \leq m$, donc $f(x_0) = m$. □

5.5 Théorème d'Arzela-Ascoli

Le but de cette partie est d'essayer de décrire les compacts dans les espaces de fonctions continues entre deux espaces topologiques.

Soient X un espace topologique et Y un espace métrique. Une partie $\mathscr{A}$ de $\mathscr{C}(X,Y)$ est dite *équicontinue* en un point x_0 de X si pour tout $\epsilon > 0$, il existe un voisinage U de x_0 dans X tel que

$$\forall\, x \in U,\ \ \forall\, f \in \mathscr{A}, \quad d(f(x), f(x_0)) < \epsilon\ .$$

Une partie $\mathscr{A}$ de $\mathscr{C}(X,Y)$ est dite *équicontinue* si elle est équicontinue en tout point
X. Si X est un espace métrique, alors une partie $\mathscr{A}$ de $\mathscr{C}(X,Y)$ est dite *uniformém*
équicontinue si

$$\forall\, \epsilon > 0,\ \exists\, \eta > 0,\ \forall\, x, y \in X,\ \ \forall\, f \in \mathscr{A}, \quad d(x,y) < \eta \implies d(f(x), f(y)) < \epsilon\ .$$

Par exemple, une partie finie de $\mathscr{C}(X,Y)$ est équicontinue, et un ensemble fini d'appli
tions uniformément continues est uniformément équicontinu. Si $\mathscr{A}' \subset \mathscr{A} \subset \mathscr{C}(X,Y)$,
$\mathscr{A}$ est équicontinue (respectivement uniformément équicontinue), alors $\mathscr{A}'$ l'est aussi.

Si E et F sont des espaces vectoriels normés, alors l'espace vectoriel normé $\mathscr{L}(E,$
des applications linéaires continues de E dans F est un sous-ensemble de $\mathscr{C}(E,F)$. Com
pour les propriétés de continuité des applications linéaires (voir le paragraphe 2.8),
propriétés suivantes sur une partie $\mathscr{A}$ de $\mathscr{L}(E,F)$ sont équivalentes :
- $\mathscr{A}$ est équicontinue ;
- $\mathscr{A}$ est équicontinue en 0 ;
- il existe $c \geq 0$ tel que pour tout u dans $\mathscr{A}$, on ait $||u|| \leq c$.

Le théorème de Heine 5.17 s'étend aux familles équicontinues.

Théorème 5.29 *Soient X et Y deux espaces métriques, avec X compact. Toute fam*
équicontinue $\mathscr{A}$ d'applications de X dans Y est uniformément équicontinue.

Preuve. La preuve est semblable à celle du théorème de Heine. Supposons par l'absu
qu'il existe $\epsilon > 0$ et des suites $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathscr{A}$ et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans X telles
$d(x_n, y_n) \leq \frac{1}{n}$ et $d(f_n(x_n), f_n(y_n)) \geq \epsilon$. Par compacité, quitte à extraire, les suites (x_n)
et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers un même point x. L'équicontinuité de $\mathscr{A}$ au point x implic
que si n est assez grand, alors $d(f_n(x_n), f_n(x)) < \frac{\epsilon}{2}$ et $d(f_n(y_n), f_n(x)) < \frac{\epsilon}{2}$. Par inéga
triangulaire, on a donc, pour n assez grand,

$$d(f_n(x_n), f_n(y_n)) \leq d(f_n(x_n), f_n(x)) + d(f_n(x), f_n(y_n)) < \epsilon\ ,$$

contradiction.

L'intérêt de l'équicontinuité vient du fait que toute partie compacte de $\mathscr{C}(X,Y)$ p
la topologie de la convergence uniforme est équicontinue ; plus précisément, on a le résul
suivant. Pour comprendre la seconde condition, on peut considérer la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d
$\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ formée des translations $f_n : t \mapsto t+n$; l'ensemble des f_n est équicontinu (tous
élements sont des isométries) ; mais l'ensemble des images de 0 par les f_n, qui est $\mathbb{N} \subset$
n'est pas borné ; et la suite des f_n n'a pas de sous-suite convergente dans $\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Proposition 5.30 *Soient X un espace topologique, Y un espace métrique, et $\mathscr{A}$*
partie d'adhérence compacte de $\mathscr{C}(X,Y)$ pour la topologie de la convergence unifor
Alors

- *$\mathscr{A}$ est équicontinue*
- *pour tout x dans X, l'ensemble $\mathscr{A}(x) = \{f(x)\ :\ f \in \mathscr{A}\}$ est d'adhérence compa*
  dans Y.

Preuve. Nous pouvons supposer $\mathscr{A}$ compacte, quitte à la remplacer par son adhéren
puisque toute partie d'une famille équicontinue est équicontinue, et toute partie d

sous-espace d'adhérence compacte est d'adhérence compacte (tout fermé d'un compact est compact). Par continuité de l'application d'évaluation en x (voir la proposition 5.2 (1)) et puisque Y est séparé, la partie $\mathscr{A}(x)$ est alors compacte, ce qui montre le second point.

Montrons que $\mathscr{A}$ est équicontinue. Par compacité (et métrisabilité, pour la distance uniforme d) de $\mathscr{A}$, pour tout $\epsilon > 0$, il existe des éléments $f_1, \dots, f_n$ dans $\mathscr{A}$ tels que pour tout f dans $\mathscr{A}$, il existe $i = i_f \in \{1, \dots, n\}$ tel que $d(f, f_i) < \frac{\epsilon}{3}$. Soit $x \in X$. Comme f_i est continue en x, pour tout $\epsilon > 0$, il existe un voisinage V_i de x tel que pour tout y dans V_i, on ait $d(f_i(y), f_i(x)) < \frac{\epsilon}{3}$. Donc par inégalité triangulaire, pour tout $y \in V_1 \cap \dots \cap V_n$ (qui est un voisinage de x), pour tout $f \in \mathscr{A}$, si $i = i_f$, alors

$$d(f(y), f(x)) \leq d(f(y), f_i(y)) + d(f_i(y), f_i(x)) + d(f_i(x), f(x)) < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon\ ,$$

et $\mathscr{A}$ est équicontinu. □

Le théorème suivant donne une réciproque (partielle) à ce théorème.

Théorème 5.31 (Théorème d'Arzela-Ascoli) *Soient X un espace topologique séparé et Y un espace métrique. Soit $\mathscr{A}$ une partie de $\mathscr{C}(X, Y)$ telle que*

- *$\mathscr{A}$ est équicontinue,*
- *pour tout x dans X, l'ensemble $\mathscr{A}(x) = \{f(x) \ :\ f \in \mathscr{A}\}$ est d'adhérence compacte dans Y.*

Alors l'adhérence de $\mathscr{A}$ est compacte (et équicontinue) dans $\mathscr{C}(X, Y)$ pour la topologie compacte-ouverte.

On dit parfois *être relativement compact* pour «être d'adhérence compacte». Remarquons que si Y est compact, alors la seconde condition est automatiquement vérifiée. Si $Y = \mathbb{R}$ (ou si Y est un espace vectoriel normé de dimension finie), pour vérifier la seconde condition, il suffit de montrer que $\mathscr{A}(x)$ est borné.

Preuve. Nous ne montrerons ce résultat que dans le cas où X est un espace compact et où Y est complet (par exemple $Y = \mathbb{R}$), en renvoyant à [Dug, page 267] pour le cas général. Si X est compact, par la proposition 5.13 (2), la topologie compacte-ouverte sur $\mathscr{C}(X, Y)$ coïncide avec la topologie de la convergence uniforme, et nous utiliserons donc celle-ci. L'équicontinuité de $\overline{\mathscr{A}}$ découlera de la proposition 5.30. L'espace métrique uniforme $\mathscr{C}(X, Y)$ est complet (voir le théorème 5.3 (3)), donc le fermé $\overline{\mathscr{A}}$ de $\mathscr{C}(X, Y)$ est complet par la proposition 3.16 (1). Par le théorème de Bolzano-Weierstrass 4.6 (3), il suffit de trouver, pour tout $\epsilon > 0$, un recouvrement de $\mathscr{A}$ par un ensemble fini de parties de diamètres au plus ϵ.

Pour tout $\epsilon \in \,]0, 1]$ et tout $x \in X$, par équicontinuité de $\mathscr{A}$, soit U_x un voisinage de x dans X tel que pour tout $y \in U_x$ et tout $f \in \mathscr{A}$, on ait $d(f(y), f(x)) \leq \frac{\epsilon}{4}$. Par compacité de X, il existe $x_1, \dots, x_k$ dans X tels que X soit contenu dans $U_{x_1} \cup \dots \cup U_{x_k}$. Comme Y est séparé, la réunion des adhérences des $\mathscr{A}(x_i)$ est compacte. Elle est donc contenue dans une réunion finie de boules $B(y_j, \frac{\epsilon}{4})$, pour $y_1, \dots, y_m$ dans Y. Soit Φ l'ensemble (fini) des applications de $\{1, \dots, k\}$ dans $\{1, \dots, m\}$. Pour tout $\varphi \in \Phi$, soit B_φ l'ensemble des f dans $\mathscr{A}$ telles que $f(x_i) \in B(y_{\varphi(i)}, \frac{\epsilon}{4})$ pour tout i dans $\{1, \dots, k\}$. Alors les parties B_φ pour φ dans Φ recouvrent $\mathscr{A}$ par construction. De plus, si $f, g \in B_\varphi$, alors pour tout x

dans X, soit i tel que $x \in U_{x_i}$; alors

$$\begin{aligned} d(f(x), g(x)) &\leq d(f(x), f(x_i)) + d(f(x_i), y_{\varphi(i)}) + d(y_{\varphi(i)}, g(x_i)) + d(g(x_i), g(x)) \\ &\leq \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{4} = \epsilon\ . \end{aligned}$$

Donc $d(f, g) \leq \epsilon$ pour la distance unforme d sur $\mathscr{C}(X, Y)$, et le diamètre de B_φ est plus ϵ.

Les conséquences suivantes sont alors immédiates (voir la proposition 5.13).

Porisme 5.32 *Si X est un espace topologique compact, si Y est un espace métrique, al les parties de $\mathscr{C}(X, Y)$, qui sont d'adhérence compacte pour la topologie de la converge uniforme, sont exactement les parties $\mathscr{A}$ telles que*

- *$\mathscr{A}$ est équicontinue,*
- *pour tout x dans X, l'ensemble $\mathscr{A}(x) = \{f(x) \ :\ f \in \mathscr{A}\}$ est d'adhérence compa dans Y.*

Porisme 5.33 *Si X est un espace topologique compact, si Y est un espace métri compact, alors les parties de $\mathscr{C}(X, Y)$, qui sont d'adhérence compacte pour la topolo de la convergence uniforme, sont exactement les parties équicontinues.*

5.6 Approximation

Soient X un espace topologique et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Dans ce paragraphe, no minissons $\mathscr{C}(X, \mathbb{K})$ de la topologie compacte-ouverte (i.e. la topologie de la converger uniforme sur les compacts), qui, si X est compact, coïncide avec la topologie de la conv gence uniforme (voir la proposition 5.13).

Une partie $\mathscr{A}$ de $\mathscr{C}(X, \mathbb{K})$ est dite *séparante* si

$$\forall\, x, y \in X, \ \ \exists\, f \in \mathscr{A}, \quad x \neq y \implies f(x) \neq f(y)\ .$$

Rappelons que $\mathscr{C}(X, \mathbb{K})$ est une algèbre sur $\mathbb{K}$ pour les opérations d'addition point p point, de multiplication point par point et de multiplication par un scalaire point p point des fonctions. Une partie de $\mathscr{C}(X, \mathbb{K})$ est une *sous-algèbre unitaire* si elle est sta par ces opérations, et contient la fonction constante 1.

Théorème 5.34 (Théorème de Stone-Weierstrass) *Soit X un espace topologiq Toute sous-algèbre unitaire séparante $\mathscr{A}$ de $\mathscr{C}(X, \mathbb{R})$ est dense pour la topologie compac ouverte.*

On utilise parfois ce résultat sous la forme : étant donnée une partie séparante $\mathscr{C}(X, \mathbb{R})$, la sous-algèbre unitaire qu'elle engendre est dense dans $\mathscr{C}(X, \mathbb{R})$ pour la to logie convergence uniforme sur les compacts.

Ce résultat est faux si on remplace $\mathbb{R}$ par $\mathbb{C}$. Par exemple, si $X = \mathbb{D}$ est le disque un ouvert de $\mathbb{C}$, la sous-algèbre unitaire séparante des (restrictions à $\mathbb{D}$ des) polynômes co plexes n'est pas dense dans $\mathscr{C}(\mathbb{D}, \mathbb{C})$ pour la topologie compacte-ouverte, son adhére est l'ensemble de toutes les fonctions holomorphes de $\mathbb{D}$ dans $\mathbb{C}$, comme vous le verrez cours d'Analyse complexe au second semestre.

Il reste par contre vrai si on rajoute, à la sous-algèbre unitaire séparante, l'hypothèse "stable par conjugaison" (ou de manière équivalente, "stable par partie réelle et partie complexe", puisque $\mathrm{Re}\, z = (z+\overline{z})/2$, $\mathrm{Im}\, z = (z-\overline{z})/(2i)$ et $\overline{z} = \mathrm{Re}\, z - i\,\mathrm{Im}\, z$).

En effet, soit $\mathscr{A}$ une sous-algèbre unitaire séparante stable par partie réelle et partie complexe de $\mathscr{C}(X,\mathbb{C})$. Soit $\mathscr{A}'$ l'ensemble des éléments à valeurs réelles de $\mathscr{A}$. Alors $\mathscr{A}'$ est une sous-algèbre unitaire de $\mathscr{C}(X,\mathbb{R})$. Montrons que $\mathscr{A}'$ est séparante. Si $x \neq y \in X$, soit $f \in \mathscr{A}$ telle que $f(x) \neq f(y)$. Alors $\mathrm{Re}\, f(x) \neq \mathrm{Re}\, f(y)$ ou $\mathrm{Im}\, f(x) \neq \mathrm{Im}\, f(y)$. Comme $\mathrm{Re}\, f$ et $\mathrm{Im}\, f$ appartiennent à $\mathscr{A}'$, le résultat en découle. Maintenant, soit $g \in \mathscr{C}(X,\mathbb{C})$. Par le théorème de Stone-Weierstrass, $\mathrm{Re}\, g$ et $\mathrm{Im}\, g$ sont limites uniformes sur les compacts de suites d'éléments de $\mathscr{A}'$, donc $g = \mathrm{Re}\, g + i\,\mathrm{Im}\, g$ est limite uniforme sur les compacts d'applications de $\mathscr{A}$.

Remarquons que si $\mathscr{A}$ est l'algèbre unitaire engendrée par une partie stable par conjugaison, alors elle est stable par conjugaison.

Preuve. La preuve commence par une suite de lemmes.

Lemme 5.35 *Si $\mathscr{A}$ est une sous-algèbre unitaire séparante de $\mathscr{C}(X,\mathbb{R})$, alors pour tous points distincts x, y de X et pour tous a, b dans $\mathbb{R}$, il existe f dans $\mathscr{A}$ telle que $f(x) = a$ et $f(y) = b$.*

Preuve. Soit g dans $\mathscr{A}$ tel que $g(x) \neq g(y)$. Alors, puisque $\mathscr{A}$ est une sous-algèbre unitaire,

$$f = a + \frac{b-a}{g(y)-g(x)}(g - g(x))$$

convient. □

Lemme 5.36 *La fonction $\sqrt{t}$ sur $[0,1]$ est limite uniforme de polynômes réels en t.*

Preuve. Construisons par récurrence une suite de polynômes réels $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant $P_0(t) = 0$ et

$$P_{n+1}(t) = P_n(t) + \frac{1}{2}\Big(t - P_n(t)^2\Big)\ .$$

Par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$, montrons que $P_k \geq P_{k-1}$ sur $[0,1]$ si $k \geq 1$ et que $P_k(t) \leq \sqrt{t}$ sur $[0,1]$. En effet, le résultat est vrai pour $k = 0$. Soit $n \geq 1$, et supposons le résultat vrai au rang n. Montrons qu'il est vrai au rang $n+1$. On a $P_n(t)^2 \leq t$ et $P_{n+1}(t) = P_n(t) + \frac{1}{2}(t - P_n(t)^2) \geq P_n(t)$. De plus,

$$P_{n+1}(t) - \sqrt{t} = \Big(P_n(t) - \sqrt{t}\Big)\Big(1 - \frac{1}{2}(P_n(t) + \sqrt{t}\,)\Big)\ .$$

Le premier facteur du membre de droite de cette inégalité est négatif ou nul. Le second terme est au moins $1 - \sqrt{t}$, qui est positif sur $[0,1]$. Donc $P_{n+1} \leq \sqrt{t}$ sur $[0,1]$.

Pour tout $t \in [0,1]$, la suite croissante majorée $\big(P_n(t)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $[0,\sqrt{t}]$ converge vers $f(t) \geq 0$, qui vérifie par passage à la limite $f(t) = f(t) + \frac{1}{2}(t - f(t)^2)$. D'où $f(t) = \sqrt{t}$. Par le théorème de Dini 5.11, la convergence simple de P_n vers f est en fait uniforme. □

Lemme 5.37 *Soit $\mathscr{A}$ une sous-algèbre unitaire de $\mathscr{C}(K,\mathbb{R})$ pour K un espace compact.*

Si $f \in \mathscr{A}$, alors $|f| \in \overline{\mathscr{A}}$. De plus, pour tous $f_1, \dots, f_k$ dans $\mathscr{A}$, les applications $\min\{f_1, \dots, f_k\}$ et $\max\{f_1, \dots, f_k\}$ appartiennent à $\overline{\mathscr{A}}$.

Rappelons (voir le paragraphe 2.8) que l'adhérence $\overline{\mathscr{A}}$ de $\mathscr{A}$ dans l'algèbre topologi
$\mathscr{C}(K,\mathbb{R})$ (pour la topologie uniforme) est une sous-algèbre unitaire (par continuité
opérations).

Preuve. L'application f, continue sur le compact K, est bornée. Par invariance
multiplication externe, on peut donc se ramener au cas où $-1 \leq f \leq 1$. Alors 0
$f^2 \leq 1$, et en utilisant les polynômes P_n ci-dessus, les éléments $P_n(f^2)$ de $\mathscr{A}$ converg
uniformément sur K vers $\sqrt{f^2} = |f|$.

Le dernier résultat découle alors (par récurrence) du fait que $\min\{u,v\} = \frac{1}{2}(u+$
$|u-v|)$ et $\max\{u,v\} = \frac{1}{2}(u+v+|u-v|)$.

Revenons maintenant à la preuve du théorème de Stone-Weierstrass 5.34. Soient
$\mathscr{C}(X,\mathbb{R})$, K un compact de X et $\epsilon > 0$. Construisons $g \in \overline{\mathscr{A}}$ tel que $\max_{x\in K} |f(x) - g(x)|$
ϵ, en deux étapes. Si U est un ouvert de $\mathbb{R}$ tel que $f \in O(K,U)$, si ϵ est assez petit,
entraîne, comme dans la preuve de la proposition 5.13 (2), que $g \in O(K,U) \cap \overline{\mathscr{A}}$, d
que $\overline{\mathscr{A}}$ (et donc $\mathscr{A}$) est dense dans $\mathscr{C}(X,\mathbb{R})$ pour la topologie compacte-ouverte.

Montrons tout d'abord que pour tout x dans K, il existe $g_x \in \overline{\mathscr{A}}$ tel que $g_x(x) = f$
et $g_x(y) < f(y) + \epsilon$ pour tout y dans K.

En effet, par le lemme 5.35, pour tout y dans K, en prenant $h_y = f$ si $y = x$ et si
un élément h_y de $\mathscr{A}$ tel que $h_y(x) = f(x)$ et $h_y(y) = f(y)$, il existe h_y dans $\mathscr{A}$ tel
$h_y(x) = f(x)$ et $h_y(y) < f(y) + \frac{\epsilon}{2}$. Par continuité de $h_y - f$ en y, il existe un voisina
ouvert U_y de y tel que $h_y(z) < f(z) + \epsilon$ pour tout z dans U_y. Par compacité de K,
peut recouvrir K par $\{U_{y_1}, \dots, U_{y_k}\}$. Alors $g_x = \min\{h_{y_1}, \dots, h_{y_k}\}$, qui appartient à
par le lemme 5.37, convient.

Maintenant, pour tout x dans K, par continuité de $g_x - f$ en x, il existe un voisina
V_x de x tel que $g_x(y) > f(y) - \epsilon$ pour tout y dans V_x. Par compacité de K, on recou
K par $\{V_{x_1}, \dots, V_{x_m}\}$. Posons $g = \max\{g_{x_1}, \dots, g_{x_m}\}$, qui appartient à $\overline{\mathscr{A}}$ par le lem
5.37 et vérifie $g(y) < f(y) + \epsilon$ pour tout y dans K, par les propriétés des g_x construi
dans la première étape. Pour tout y dans K, soit $j \in \{1, \dots, n\}$ tel que $y \in V_{x_j}$. Al
$g(y) \geq g_{x_j}(y) > f(y) - \epsilon$. Donc $|g(y) - f(y)| < 0$ pour tout y dans K, ce qui montre
résultat.

Le résultat suivant découle immédiatement du théorème de Stone-Weierstrass, ca
X est compact, alors la topologie compacte-ouverte coïncide avec la topologie unifor
sur $\mathscr{C}(X,\mathbb{R})$ (voir la proposition 5.13 (2)).

Porisme 5.38 *Soit X un espace topologique compact.*

Toute sous-algèbre unitaire séparante de $\mathscr{C}(X,\mathbb{R})$ est dense pour la topologie unifor

Toute sous-algèbre unitaire séparante, stable par conjugaison, de $\mathscr{C}(X,\mathbb{C})$ est de
pour la topologie uniforme.

Notons que pour tout $n \in \mathbb{N} - \{0\}$, l'algèbre des applications polynomiales e
variables à coefficients réels (resp. complexes) est une sous-algèbre unitaire sépara
(resp. séparante et stable par conjugaison) de $\mathscr{C}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ (resp. $\mathscr{C}(\mathbb{R}^n,\mathbb{C})$), car si $x \neq$
alors, par exemple, il existe $i \in \{1, \dots, n\}$ tel que $x_i \neq y_i$, et l'application i-ème coordon
est une application polynomiale qui sépare x et y.

Le cas particulier suivant du théorème 5.34 avait été démontré par Weierstrass av
que Stone ne démontre le théorème 5.34.

Porisme 5.39 (Théorème de Weierstrass) *L'ensemble des (restrictions à* $[0,1]$ *des) applications polynomiales réelles est dense dans* $\mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$ *(pour la topologie de la convergence uniforme).* □

Plus généralement, on a le résultat suivant.

Porisme 5.40 *Soient* $n \in \mathbb{N} - \{0\}$*,* X *une partie compacte de* $\mathbb{R}^n$ *et* $f \in \mathscr{C}(X,\mathbb{R})$ *(resp.* $f \in \mathscr{C}(X,\mathbb{C})$*). Alors* f *est limite uniforme sur* X *d'une suite d'applications polynomiales en* n *variables à coefficients réels (resp. complexes).* □

Ce théorème n'est pas effectif, il ne donne pas de résultat de vitesse de convergence de polynômes vers une fonction arbitraire donnée. La théorie de l'approximation, en particulier avec ses fameux polynômes orthogonaux, permet d'affiner ce théorème. Mais nous n'aborderons ici aucun des points de la théorie de l'approximation, voir par exemple [DeL]. Attention, les polynômes d'interpolation de Lagrange ne fournissent pas des approximations uniformes des fonctions sur $[0,1]$ (voir le paragraphe 6.1).

Notons $\mathscr{C}_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ la sous-algèbre unitaire de $\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ formé des applications 2π-périodiques. Un *polynôme trigonométrique* est une application 2π-périodique continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ de la forme

$$x \mapsto \sum_{k=-n}^{n} a_k e^{ikx} ,$$

où $a_{-n},\dots,a_n$ sont des nombres complexes.

Porisme 5.41 *L'ensemble des polynômes trigonométriques est dense dans* $\mathscr{C}_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ *pour la topologie de la convergence uniforme.*

Preuve. Notons X l'espace topologique quotient $\mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$, qui est compact (voir le paragraphe 4.4, exemple (5)), et $p : \mathbb{R} \to X$ la projection canonique. L'application ϕ de $\mathscr{C}(X,\mathbb{C})$ dans $\mathscr{C}_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ définie par $f \mapsto f \circ p$ est un isomorphisme d'algèbres unitaires complexes (la surjectivité vient du fait qu'une application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, continue et 2π-périodique, induit par passage au quotient une application $\overline{f} : X \to \mathbb{C}$ qui est continue et vérifie $\overline{f} \circ p = f$). De plus, ϕ est une isométrie pour les normes uniformes.

L'ensemble des polynômes trigonométriques est une sous-algèbre unitaire, stable par conjugaison, de $\mathscr{C}_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R},\mathbb{C})$. Sa préimage par ϕ est une partie séparante de $\mathscr{C}(X,\mathbb{C})$, car si $x, y \in \mathbb{R}$ et $x \neq y \mod 2\pi$, alors $e^{ix} \neq e^{iy}$. En appliquant le théorème de Stone-Weierstrass (version complexe), le résultat en découle. □

Porisme 5.42 *Soit* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{K} = \mathbb{C}$*.*

Si X *est un espace métrique compact non vide, alors l'espace vectoriel normé* $\mathscr{C}(X,\mathbb{K})$ *est séparable (pour la norme uniforme).*

Si X *est un espace topologique métrisable, à base dénombrable d'ouverts, alors la topologie compacte-ouverte sur* $\mathscr{C}(X,\mathbb{K})$ *est séparable.*

Preuve. La seconde assertion implique la première, car un espace métrique compact est séparable par le corollaire 4.7, donc à base dénombrable par la proposition 1.6, et car la topologie compacte-ouverte coïncide avec la topologie uniforme sur un espace compact, par la proposition 5.13 (2). Montrons donc la seconde assertion.

Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base dénombrable d'ouverts de X. Pour tout n dans $\mathbb{N}$, l'applicat $g_n : X \to \mathbb{K}$ définie par $x \mapsto d(x, {}^cU_n)$ est continue. Pour tous les x et y distincts da $\mathbb{R}$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x \in U_n$ et $y \notin U_n$ (car X est séparé). Alors $g_n(x) \neq 0$ (${}^cU_n$ est fermé) et $g_n(y) = 0$. Par le théorème de Stone-Weierstrass 5.34, l'algèbre unita sur $\mathbb{K}$ engendrée par la partie séparante $\{g_n \;:\; n \in \mathbb{N}\}$ de $\mathscr{C}(X,\mathbb{K})$, qui est stable p conjugaison si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, est dense pour la topologie compacte-ouverte. Soit Q une par dénombrable dense de $\mathbb{K}$ (par exemple $Q = \mathbb{Q}$ si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $Q = \mathbb{Q}[i]$ si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$). Al l'ensemble des sommes finies d'applications de la forme

$$x \mapsto \lambda\, g_{i_1}^{\alpha_1}(x) \dots g_{i_k}^{\alpha_k}(x) ,$$

où $k \in \mathbb{N}$, $\lambda \in Q$, $\alpha_1,\dots,\alpha_k \in \mathbb{N}$, $i_1,\dots,i_k \in \mathbb{N}$, est une partie dénombrable dense da $\mathscr{C}(X,\mathbb{K})$.

Porisme 5.43 *Soient* X *un espace métrique dénombrable à l'infini non vide (par exem un ouvert non vide de* $\mathbb{R}^r$*, où* $r \in \mathbb{N} - \{0\}$*) et* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{K} = \mathbb{C}$*, alors l'espace vecto* $\mathscr{C}_c(X,\mathbb{K})$ *des fonctions continues à support compact, muni de la norme uniforme, séparable.*

Preuve. Soit $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de compacts non vides de X tels que $K_n \subset \overset{\circ}{K}_{n+1}$. Com K_n est séparable, l'espace métrique X est séparable, donc à base dénombrable d'ouve par la proposition 1.6. Par le corollaire 5.42 précédent, la topologie compacte-ouverte $\mathscr{C}(X,\mathbb{K})$ est séparable. Soit $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une partie dénombrable dense de $\mathscr{C}(X,\mathbb{K})$. Par théorème de prolongement d'Urysohn 1.11, il existe une application continue $\chi_n : X$ $[0,1]$ valant 1 sur K_n et nulle en dehors de $\overset{\circ}{K}_{n+1}$. Montrons que la famille dénombra $(g_k\chi_n)_{k,n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathscr{C}_c(X,\mathbb{K})$ est dense dans $\mathscr{C}_c(X,\mathbb{K})$ pour la norme uniforme.

Soit $f \in \mathscr{C}_c(X,\mathbb{K})$. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que le support de f, qui est compact et recouv par $\big(\overset{\circ}{K}_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$, soit contenu dans K_n. Par densité de $\{g_k \;:\; k \in \mathbb{N}\}$ pour la topolo compacte-ouverte sur $\mathscr{C}(X,\mathbb{K})$ (et la proposition 5.14 (2)), soit $k \in \mathbb{N}$ tel que

$$\sup_{x\in K_{n+1}} |f(x) - g_k(x)| \leq \epsilon .$$

Alors, en distinguant suivant que $y \in K_n$, $y \in K_{n+1} - K_n$ ou $y \in {}^cK_{n+1}$, nous avons

$$\sup_{y\in X} |f(y) - (g_k\chi_n)(y)| \leq \epsilon .$$

Le résultat en découle.

Donnons une dernière application du théorème de Stone-Weierstrass.

Porisme 5.44 *Soient* X *et* Y *deux espaces topologiques métrisables, et* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{K} =$ *L'ensemble des applications* à variables séparées*, i.e. de la forme*

$$(x,y) \mapsto \sum_{i=0}^{n} f_i(x) g_i(y)$$

où $n \in \mathbb{N}$*,* $f_i \in \mathscr{C}(X,\mathbb{K})$ *et* $g_i \in \mathscr{C}(Y,\mathbb{K})$ *est dense dans* $\mathscr{C}(X \times Y,\mathbb{K})$ *pour la topolo compacte-ouverte.*

En particulier, si X et Y sont des espaces métriques compacts, alors tout élément de $\mathscr{C}(X \times Y, \mathbb{K})$ est limite uniforme d'applications à variables séparées.

Preuve. L'ensemble $\mathscr{A}$ des applications à variables séparées est clairement une sous-algèbre unitaire, stable par conjugaison si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, de $\mathscr{C}(X \times Y, \mathbb{K})$.

Soient $(x, y), (x', y')$ deux éléments distincts de $X \times Y$. Supposons par exemple que $x \neq x'$. Par le théorème de prolongement d'Urysohn 1.10, il existe une application continue $f : X \to \mathbb{R}$ telle que $f(x) = 1$ et $f(x') = 0$. En posant $\varphi : (u, v) \mapsto f(u)$, on a $\varphi(x, y) \neq \varphi(x', y')$. La sous-algèbre $\mathscr{A}$ est donc séparante, et on peut bien appliquer le théorème de Stone-Weierstrass. □

5.7 Théorie de Baire

Dans tout espace topologique X, l'intersection d'une famille finie d'ouverts denses $(U_i)_{0 \leq i \leq n}$ est encore dense : si V est un ouvert non vide de X, alors $V \cap U_0$ est un ouvert non vide car U_0 est dense, donc $(V \cap U_0) \cap U_1$ est un ouvert non vide car U_1 est dense, et par récurrence, $V \cap U_0 \cap \cdots \cap U_n$ est un ouvert non vide.

Mais ceci ne se généralise pas au cas des familles infinies, même dénombrables. Par exemple, si X est un espace topologique séparé dénombrable sans point isolé (par exemple $X = \mathbb{Q}$ avec la topologie induite de la topologie usuelle de $\mathbb{R}$), alors $\big(X - \{x\}\big)_{x \in X}$ est une famille dénombrable d'ouverts denses, dont l'intersection est vide.

Théorème 5.45 (Théorème de Baire) *Soit X un espace topologique localement compact, ou un ouvert d'un espace métrique complet. L'intersection d'une famille dénombrable d'ouverts denses de X est dense dans X.*

Preuve. Soient $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille dénombrable d'ouverts denses, et O_{-1} un ouvert non vide de X. Montrons dans les deux cas que O_{-1} contient un point de l'intersection de cette famille, ce qui conclut.

Supposons X localement compact. Puisque U_0 est dense, l'ouvert $U_0 \cap O_{-1}$ est non vide. Soit O_0 un voisinage ouvert d'un point de $U_0 \cap O_{-1}$, d'adhérence compacte contenue dans $U_0 \cap O_{-1}$. Par récurrence, soit O_n un voisinage ouvert d'un point de $U_n \cap O_{n-1}$, d'adhérence compacte contenue dans $U_n \cap O_{n-1}$. L'intersection décroissante $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{O_n}$ de fermés non vides du compact $\overline{O_0}$ est non vide, et contenue dans $O_{-1} \cap \bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n$. Le résultat en découle.

Supposons X ouvert dans un espace métrique complet E. Soient $x_0 \in X$ et $r_0 \in \,]0, 1]$ tels que la boule fermée $\overline{B}(x_0, r_0)$ soit contenue dans l'ouvert $U_0 \cap O_{-1}$, qui est non vide par densité de U_0. Par récurrence, pour tout $n \geq 1$, soient $x_n \in X$ et $r_n \in \,]0, \frac{1}{n+1}[$ tels que la boule fermée $\overline{B}(x_n, r_n)$ soit contenue dans l'ouvert $U_n \cap B(x_{n-1}, r_{n-1})$, qui est non vide par densité de U_n. Alors $d(x_n, x_{n+p}) \leq r_n \leq \frac{1}{n+1}$. Donc la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy dans E qui est complet, donc elle converge vers un point de E. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce point appartient au fermé $\overline{B}(x_n, r_n)$, qui est contenu dans U_n, et dans O_{-1}. Donc il appartient à $O_{-1} \cap \bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n$. Le résultat en découle. □

Un *espace de Baire* est un espace topologique dans lequel l'intersection de toute famille dénombrable d'ouverts denses est encore dense. La propriété « être de Baire » est une propriété invariante par homéomorphismes.

Exemples. (1) Par le théorème de Baire 5.45, tout espace topologique localement compact, et tout ouvert d'un espace métrisable complet est de Baire. En particulier tout ouvert d'un espace de Fréchet est de Baire.

(2) L'espace topologique usuel $\mathbb{Q}$ n'est pas de Baire, comme vu ci-dessus.

(3) L'espace $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ est de Baire (mais il n'est pas localement compact, ni ouv dans son complété pour la distance usuelle). En effet, pour tout irrationnel x, noto $[n_0 : n_1, n_2, \dots]$ son *développement en fraction continue*, i.e. $n_0 \in \mathbb{Z}$, $n_k \in \mathbb{N} - \{0\}$ po tout k dans $\mathbb{N} - \{0\}$, et

$$x = \lim_{k \to +\infty} \quad n_0 + \cfrac{1}{n_1 + \cfrac{1}{n_2 + \ddots + \cfrac{1}{n_{k-1} + \cfrac{1}{n_k}}}} .$$

Si $[n_0 : n_1, n_2, \dots]$ et $[n'_0 : n'_1, n'_2, \dots]$ sont les développements en fraction continue deux irrationnels x, y, notons

$$d(x, y) = e^{-\sup\{k \in \mathbb{N} \,:\, \forall\, i < k,\ n_i = n'_i\}} ,$$

avec la convention usuelle $e^{-\infty} = 0$. Il est facile de vérifier que d est une distance $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$, qui induit la même topologie que la distance euclidienne usuelle, mais qui complète. Donc $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ est bien de Baire.

(4) Le produit d'une famille dénombrable d'espaces métrisables complets est mé sable complet (voir la proposition 3.17 (i)), donc de Baire. Par exemple, l'ensemble muni de la distance discrète est métrique complet, donc $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ est un espace de Baire. utilisant le développement en fractions continues, il est facile de voir que $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ et $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ s homéomorphes (ce qui découle du fait que l'application de $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ dans $\mathbb{Z} \times (\mathbb{N} - \{0\})^{\mathbb{N}}$, à $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ associe $(n_0, (n_i)_{i \in \mathbb{N} - \{0\}})$, où $[n_0 : n_1, n_2, \dots]$ est le développement en fract continue de x, est un homéomorphisme : deux irrationnels étant proches si et seulem si leurs développements en fraction continue coïncident sur un grand segment initial termes).

(5) Tout ouvert U d'un espace de Baire X est de Baire. En effet, soit $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une su d'ouverts denses de U. Puisque l'adhérence de U_n dans le sous-espace topologique U $U \cap \overline{U_n}$, nous avons $U \subset \overline{U_n}$, donc $\overline{U} \subset \overline{U_n}$, d'où $X = \overline{U_n} \cup (X - \overline{U}\,)$. Par conséquent, $(U$ $(X - \overline{U}\,)\big)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'ouverts denses de X. Puisque X est de Baire, l'intersect de cette suite, qui est $\big(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n\big) \cup (X - \overline{U}\,)$, est dense dans X. Donc son intersect avec l'ouvert U, qui est $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n$, est dense dans U.

Exercice E.62 *(i) Soient X un espace de Baire, Y un espace topologique et $f : X \to$ une application continue, ouverte, surjective. Montrer que Y est de Baire. En déduire l'espace topologique quotient d'une action continue d'un groupe topologique sur un esp de Baire est encore de Baire.*

(ii) Montrer que tout espace topologique, dont tout point admet un voisinage qui de Baire (par exemple si ce voisinage est homéomorphe à un ouvert d'un espace métri complet), est de Baire.

Par passage au complémentaire, on obtient immédiatement le résultat suivant.

Porisme 5.46 *Soit X un espace de Baire. Une réunion dénombrable de fermés d'intérieur vide de X est d'intérieur vide dans X.*

Preuve. Le complémentaire d'un fermé F d'intérieur vide est un ouvert dense (car $X-\overset{\circ}{F} = \overline{X-F}$). Le complémentaire d'une réunion dénombrable de fermés d'intérieur vide de X est donc dense, puisque X est de Baire. Le complémentaire d'une partie dense A est d'intérieur vide (car $\overset{\circ}{\widehat{X-A}} = X-\overline{A}$). □

On utilise souvent ce résultat sous la forme : si la réunion d'une famille dénombrable de fermés d'un espace de Baire est d'intérieur non vide, alors l'un de ces fermés est d'intérieur non vide.

En particulier, un espace de Baire (par exemple localement compact, ou ouvert dans un espace métrique complet) non vide n'est pas réunion d'une famille dénombrable de fermés d'intérieurs vides.

En particulier, comme un singleton non isolé est d'intérieur vide, un espace de Baire non vide sans point isolé est non dénombrable.

Une partie A d'un espace topologique X est dite *maigre* (ou négligeable au sens de Baire, et "first category" en anglais) si elle est contenue dans une réunion dénombrable de fermés d'intérieur vides. Un G_δ*-dense* dans X est une intersection dénombrable d'ouverts denses. Par exemple $\mathbb{R}-\mathbb{Q}$ est un G_δ-dense de $\mathbb{R}$, qui n'est pas un ouvert dense.

Une propriété portant sur les points de X est vraie *presque partout au sens de Baire* si elle est vraie en dehors d'un ensemble maigre (donc au moins sur un G_δ-dense). Attention, un ensemble maigre pour Baire dans $\mathbb{R}^n$ peut être gros pour Lebesgue (par exemple de complémentaire de mesure de Lebesgue nulle), et une propriété presque partout vraie au sens de Baire (resp. de la mesure de Lebesgue) peut être presque nulle part vraie au sens de la mesure de Lebesgue (resp. de Baire) (voir le cours d'Intégration et probabilité, et par exemple [KS]).

Les applications du théorème de Baire sont très nombreuses en analyse. Nous renvoyons au chapitre 6 pour des applications en analyse fonctionnelle. Nous concluons le chapitre par des exemples d'applications en analyse classique, ainsi que sur la structure des orbites d'actions continues de groupes topologiques.

Proposition 5.47 *Soient X un espace de Baire, et Y un espace métrique. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications continues de X dans Y, convergeant simplement vers une application f. Alors f est continue presque partout au sens de Baire.*

En particulier, une application de X dans Y nulle part continue n'est pas limite simple de fonctions continues.

Preuve. Si nous arrivions à montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur un G_δ-dense A de X, alors ceci montrerait que la restriction de f à A est continue, puisqu'une limite uniforme de fonctions continues est continue. Bien que cela ne conclue pas et puisse ne pas être le cas, cela donne une piste pour commencer la preuve.

Pour tous $p,q,n\in\mathbb{N}$, on considère les fermés

$$F_{n,p,q} = \Big\{x\in X\ :\ d(f_p(x),f_q(x))\le \frac{1}{n+1}\Big\}\quad\text{et}\quad F_{n,p} = \bigcap_{q=p}^{+\infty} F_{n,p,q}\ .$$

Par convergence simple de f_n vers f, pour tout $x\in X$, la suite $(f_k(x))_{k\in\mathbb{N}}$ est de Cauc
donc $X=\bigcup_{p\in\mathbb{N}} F_{n,p}$ pour tout n dans $\mathbb{N}$. Pour tout ouvert non vide U de X, puisq
U est un espace de Baire (voir l'exemple (5) ci-dessus) et comme $U=\bigcup_{p\in\mathbb{N}} F_{n,p}\cap U$
découle du corollaire 5.46 que, pour tout n fixé, l'intérieur dans U de l'un des $F_{n,p}\cap$
pour $p\in\mathbb{N}$, est non vide. Comme U est ouvert, cet intérieur est contenu dans l'intéri
de $F_{n,p}$. Par conséquent, la réunion A_n des intérieurs des $F_{n,p}$ dans X pour $p\in\mathbb{N}$ est
ouvert dense. Montrons que f est continue en tout point du G_δ-dense $A=\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$.

Remarquons que si y appartient à $F_{n,p}$, alors

$$d(f_p(y),f(y)) = \lim_{q\to+\infty} d(f_p(y),f_q(y))\le\frac{1}{n+1}\ .$$

Soit $x_0\in A$. Alors pour tout $n\in\mathbb{N}$, il existe $p\in\mathbb{N}$ tel que x_0 appartienne à l'intérieur
$F_{n,p}$. Si x est assez proche de x_0, alors x appartient aussi à $F_{n,p}$ et $d(f_p(x),f_p(x_0))\le$
par continuité de f_p en x_0. Donc par inégalité triangulaire,

$$d(f(x),f(x_0))\le d(f(x),f_p(x))+d(f_p(x),f_p(x_0))+d(f_p(x_0),f(x_0))\le\frac{3}{n+1}\ .$$

Donc f est continue en x_0.

Porisme 5.48 *Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, F un espace de Banach et $f:I\to$
une application continue et dérivable (voir le paragraphe 7.1). Alors f' est continue pres
partout au sens de Baire.*

Preuve. Il suffit d'appliquer la proposition précédente à $f_n : x\mapsto \frac{f(x+\frac{1}{n})-f(x)}{\frac{1}{n}}$.

Théorème 5.49 *Il existe (au moins) une application continue et nulle part dérivable
$\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.*

Il existe des constructions explicites de telles applications, mais ici, nous allons utili
un argument de théorie de Baire, qui montrera l'existence d'une multitude de telles app
cations. Quand on ne s'intéresse pas à des exemples effectifs, cette méthode est souve
fructueuse pour construire des applications de comportement prescrit.

Preuve. Soit X l'espace de Banach $\mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$ (pour la norme uniforme, voir le pa
graphe 5.1), qui est de Baire, car métrisable complet. Montrons que l'ensemble A
applications continues nulle part dérivables à droite de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ contient un G_δ-de
(donc est non vide). Ceci implique le résultat.

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, soit

$$F_n=\Big\{f\in\mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})\ :\ \exists\, x\in[0,1-\frac{1}{n+1}],\ \forall\, h\in\,]0,\frac{1}{n+1}],\quad \Big|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\Big|\le$$

Montrons que F_n est un fermé d'intérieur vide pour tout n, ce qui implique que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}$
est un G_δ-dense. Toute application continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, ayant une dérivée à dro
finie en un point de $[0,1[$, est contenue dans $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$. Donc l'ensemble A contient l'int
section $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} {}^cF_n$, ce qui concluera.

Étape 1 : Montrons que F_n est fermé.

L'application d'évaluation $(f,x) \mapsto f(x)$ de $\mathscr{C}([0,1],\mathbb{R}) \times [0,1]$ dans $\mathbb{R}$ est continue, car

$$|f(x) - f_0(x_0)| \leq ||f - f_0||_\infty + |f_0(x) - f_0(x_0)| \;.$$

Donc pour tout $h_0 \in\,]0, \frac{1}{n+1}]$, l'application $(f,x) \mapsto (f(x+h_0) - f(x))/h_0$ de $\mathscr{C}([0,1],\mathbb{R}) \times [0, 1 - \frac{1}{n+1}]$ dans $\mathbb{R}$ est continue. Par conséquent,

$$\Big\{(f,x) \;:\; \Big|\frac{f(x+h_0) - f(x)}{h_0}\Big| \leq n\Big\}$$

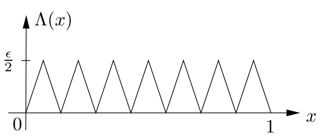
est fermé dans $\mathscr{C}([0,1],\mathbb{R}) \times [0, 1 - \frac{1}{n+1}]$. Comme une intersection de fermés est fermée, l'ensemble

$$\Big\{(f,x) \;:\; \forall\, h \in\,]0, \frac{1}{n+1}], \quad \Big|\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\Big| \leq n\Big\}$$

est fermé dans $\mathscr{C}([0,1],\mathbb{R}) \times [0, 1 - \frac{1}{n+1}]$. Comme $[0, 1 - \frac{1}{n+1}]$ est compact, l'ensemble F_n est donc fermé (utiliser des suites).

Étape 2 : Montrons que l'intérieur de F_n est vide.

Soient $f \in F_n$ et $\epsilon > 0$. Montrons que la boule de centre f et de rayon ϵ pour la norme uniforme contient un élément g n'appartenant pas à F_n (l'idée est d'essayer de l'obtenir en rajoutant à une petite pertubation lisse de f une petite fonction ayant de nombreux zigzags). Par le théorème de Weierstrass 5.39, soit P une application polynomiale de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ telle que $||f - P||_\infty < \frac{\epsilon}{2}$. Par continuité de P' sur le compact $[0,1]$, la norme uniforme $||P'||_\infty$ de P' est finie.



Soit $\Lambda : [0,1] \to [0, \frac{\epsilon}{2}]$ une fonction continue, affine par morceaux de pentes égales en valeur absolue à $||P'||_\infty + n + 1$, et posons $g = P + \Lambda$. Alors

$$||f - g||_\infty \leq ||f - P||_\infty + ||\Lambda||_\infty < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \;.$$

De plus, pour tout x dans $[0, 1 - \frac{1}{n+1}]$, il existe $h \in\,]0, \frac{1}{n+1}]$ tel que $\Big|\frac{P(x+h) - P(x)}{h}\Big| < |P'(x)| + 1$, et que x et $x + h$ soient dans le même sous-intervalle de $[0,1]$ sur lequel la pente de Λ est constante ; donc

$$\begin{aligned}\Big|\frac{g(x+h) - g(x)}{h}\Big| &\geq \Big|\frac{\Lambda(x+h) - \Lambda(x)}{h}\Big| - \Big|\frac{P(x+h) - P(x)}{h}\Big| \\ &> \big(||P'||_\infty + n + 1\big) - \big(||P'||_\infty + 1\big) = n \;.\end{aligned}$$

Le résultat en découle. □

De la même manière, on peut montrer le résultat suivant.

L'ensemble $\mathrm{C}^\infty([0,1],\mathbb{R})$ des applications de classe C^∞ de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ (en considéra
les dérivées à droites en 0 et à gauche en 1) est muni de la famille dénombrable sépara
de semi-normes $f \mapsto ||f^{(n)}||_\infty$, donc (voir la proposition 2.1) de la distance

$$d_{\mathrm{C}^\infty}(f,g) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^n} \min\{1, ||f^{(n)} - g^{(n)}||_\infty\} \;.$$

Il est facile de montrer que d_{C^∞} est complète (en utilisant la complétude de la nor
uniforme sur $\mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$ et le corollaire 5.7, comme dans la preuve de la complétu
de l'espace de Schwartz au paragraphe 5.1). En particulier, $\mathrm{C}^\infty([0,1],\mathbb{R})$ est un espa
de Fréchet, donc de Baire. Il est aussi facile de montrer que l'application de dérivat
$f \mapsto f'$ est continue, ainsi que l'application $f \mapsto f(t_0)$ d'évaluation en un point $t_0 \in [0,$

Une application $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ est dite *analytique réelle* en $t_0 \in [0,1]$ s'il existe une sé
à coefficients réels $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(t - t_0)$ qui converge vers $f(t)$ pour tout t dans un voisina
de t_0 dans $[0,1]$. Ceci implique alors (par le corollaire 5.7) que f est de classe C^∞, et q

$$a_n = \frac{f^{(n)}(t_0)}{n!} \;,$$

donc que cette série est nécessairement la série de Taylor de f en t_0. De plus, si f
analytique réelle en t_0, alors f est analytique réelle en tout point d'un voisinage de t_0, p
définition.

Théorème 5.50 *Il existe (au moins) une application de classe C^∞ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui n
analytique réelle en aucun point de $\mathbb{R}$.*

Nous allons montrer l'assertion beaucoup plus forte (parfois appelée *théorème de M
genstern*) que presque tout élément au sens de Baire dans $\mathrm{C}^\infty([0,1],\mathbb{R})$ est nulle p
analytique réel.

Preuve. Si $f \in \mathrm{C}^\infty([0,1],\mathbb{R})$ est analytique réelle en $t_0 \in [0,1]$, alors

$$\sup\Big\{\sqrt[k]{|f^{(k)}(t_0)|/k!} \;:\; k \in \mathbb{N}\Big\}$$

est fini. Pour $t_0 \in [0,1]$ et $m \in \mathbb{N}$, posons

$$F_{t_0,m} = \{f \in \mathrm{C}^\infty([0,1],\mathbb{R}) \;:\; \forall\, k \in \mathbb{N}, \;\; |f^{(k)}(t_0)| \leq k!\; m^k\} \;.$$

Donc si $f \in \mathrm{C}^\infty([0,1],\mathbb{R})$ est analytique réelle en t_0, alors il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $f \in F_{t_0}$
Comme une application qui est analytique réelle en un point est analytique réelle
tout point suffisamment voisin, et puisque $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ est dense dans $[0,1]$, l'ensemble d
éléments de $\mathrm{C}^\infty([0,1],\mathbb{R})$, qui sont nulle part analytiques réels, contient $\bigcap_{r\in\mathbb{Q},\, m\in\mathbb{N}}\, {}^cF_r$
Il contiendra donc un G_δ-dense si nous montrons que les $F_{t_0,m}$ sont des fermés d'intérie
vides.

Or $F_{t_0,m}$ est fermé, comme intersection de fermés (images réciproques de $[0, k!\, m^k]$ p
les applications continues $f \mapsto |f^{(k)}(t_0)|$ pour $k \in \mathbb{N}$).

De plus, l'intérieur de $F_{t_0,m}$ est vide. En effet, soient $f \in F_{t_0,m}$ et $\epsilon > 0$. Montrons que
boule de centre f et de rayon ϵ pour la distance d_{C^∞} contient un élément g n'apparten
pas à $F_{t_0,m}$, en ajoutant à f une petite pertubation qui oscille très rapidement. Soit n ∈
tel que $\sum_{i=n}^{+\infty} 2^{-i} < \frac{\epsilon}{2}$. Soit $\omega > 2$ tel que $\epsilon\,\omega^n > (2n)!\; m^{2n}$, et posons

$$g(t) = f(t) + \epsilon\,\omega^{-n}\cos(\omega(t - t_0)) \;.$$

Alors g est de classe C^∞, et $||g^{(k)} - f^{(k)}||_\infty \leq \epsilon\,\omega^{k-n} < \epsilon 2^{k-n}$ pour tout $k < n$. Donc

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k} \min\{1, ||g^{(k)} - f^{(k)}||_\infty\} \leq \frac{n}{2^n}\epsilon \leq \frac{\epsilon}{2}\ ,$$

et par conséquent $d_{\mathrm{C}^\infty}(g, f) < \epsilon$. Mais

$$|g^{(2n)}(t_0) - f^{(2n)}(t_0)| = \epsilon\omega^n > (2n)!\, m^{2n}\ ,$$

donc $g \notin F_{t_0,m}$. Le résultat en découle. $\square$

Soient X un ensemble muni d'une action à gauche (resp. droite) d'un groupe G. Rappelons que pour tout x dans X, l'*orbite* de x par G est l'ensemble

$$Gx = \{y \in X\ :\ \exists\, g \in G,\ y = gx\}\ \ (\text{resp. } \ xG = \{y \in X\ :\ \exists\, g \in G,\ y = xg\})$$

et le *stabilisateur* H de x (souvent noté G_x, et que l'on ne confondra pas avec l'orbite Gx) est le sous-groupe de G défini par

$$H = \{g \in G\ :\ gx = x\}\ \ (\text{resp. } \ H = \{g \in G\ :\ xg = x\})\ .$$

L'action est *transitive* si elle n'a qu'une orbite, i.e. si

$$\forall\, x, y \in X,\ \ \exists\, g \in G, \quad gx = y\ \ (\text{resp. } \ xg = y)\ .$$

L'*application orbitale* en un point x de X est l'application $G \to X$ définie par $g \mapsto gx$ (resp. $g \mapsto xg$). Soit H le stabilisateur de x. L'application orbitale induit par passage au quotient une bijection $\Theta_x : G/H \to Gx$ (resp. $\Theta_x : H\backslash G \to xG$), dite *canonique*, qui est G-équivariante, i.e. $\Theta_x(gy) = g\Theta_x(y)$ (resp. $\Theta_x(yg) = \Theta_x(y)g$) pour tout g dans G et y dans G/H (resp. $H\backslash G$).

Théorème 5.51 *Soient X un espace topologique muni d'une action continue à gauche (resp. droite) d'un groupe topologique localement compact séparable G, et $x \in X$. Supposons que l'orbite Gx (resp. xG) soit un espace de Baire séparé (par exemple un espace localement compact). Alors la bijection canonique $\Theta_x : G/G_x \to Gx$ (resp. $\Theta_x : G_x\backslash G \to xG$) est un homéomorphisme G-équivariant.*

Nous renvoyons à [Die1, 12.16.12] pour un énoncé plus général. L'hypothèse sur l'orbite Gx (resp. xG) est en particulier vérifiée si X est localement compact et si l'action de G est transitive (et nous aurions pu l'énoncer sous cette forme, mais la formulation précédente met plus en évidence l'hypothèse cruciale qu'il faudra vérifier dans les exemples). Si G est compact (pas forcément séparable), ce théorème a déjà été démontré (voir le théorème 4.17).

Notons qu'une hypothèse sur l'orbite est nécessaire, car si X est le cercle $\mathbb{S}_1$ (qui est un espace topologique compact), si G est le groupe discret $\mathbb{Z}$ (qui est un groupe topologique localement compact séparable), si l'action de G sur X est l'action par une rotation d'angle irrationnel θ (c'est-à-dire $(n, z) \mapsto e^{in\theta}z$, qui est continue, et *libre*, i.e. à stabilisateurs de points triviaux), alors pour tout x dans X, la bijection canonique $\Theta_1 : G \to Gx$ n'est pas un homéomorphisme, car G est discret et l'orbite Gx (qui est dense dans $\mathbb{S}^1$) n'a pas de point isolé.

Preuve. Quitte à utiliser un passage à l'inverse, il suffit de considérer les actions à gauc
L'application $\varphi_x : g \mapsto gx$ est continue, donc par passage au quotient, l'application Θ_x
une bijection continue. Si nous montrons que φ_x est ouverte, alors Θ_x sera ouverte (
si V est un ouvert de G/G_x, alors $\Theta_x(V) = \varphi_x(\pi^{-1}(V))$ est ouvert, par continuité de
projection canonique $\pi : G \to G/G_x$). Donc la bijection continue et ouverte Θ_x sera
homéomorphisme.

Soit U un voisinage de e dans G, montrons que Ux est un voisinage de x dans G
Ceci concluera, car $\varphi_x(Ug) = \varphi_{gx}(U)$ et $Ggx = Gx$, et puisque, pour tout g dans
l'application $h \mapsto hg$ est un homéomorphisme de G.

Soit V un voisinage compact de e dans G tel que $V^{-1}V \subset U$, qui existe par continu
en (e, e) de l'application $(x, y) \mapsto x^{-1}y$. Alors $Vx = \varphi_x(V)$ est compact (car φ_x
continue et Gx séparé), donc fermé dans Gx (car Gx est séparé). Comme G est séparab
il existe une suite $(g_i)_{i\in\mathbb{N}}$ dans G telle que $G = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} g_iV$. Donc $Gx = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} g_i(Vx)$. Si
était d'intérieur vide dans Gx, alors $g_i(Vx)$ serait d'intérieur vide dans Gx pour tou
dans $\mathbb{N}$ (l'application $y \mapsto g_iy$ étant un homéomorphisme de Gx) ; donc l'espace de Ba
non vide Gx serait une union dénombrable d'ensembles fermés d'intérieur vide, ce
contredit le (corollaire 5.46 du) théorème de Baire. Soit donc g dans V tel que gx soit
point intérieur de Vx. Alors $g^{-1}Vx$ est un voisinage de x, contenu dans Ux, ce qui mon
le résultat.

5.8 Indications pour la résolution des exercices

Schème E.61 Si χ_A est la fonction caractéristique d'une partie A de X, alors $\chi_A^{-1}(\,]t, +$
vaut X si $t < 0$, A si $t \in\,]0, 1[$ et $\emptyset$ si $t \geq 1$. De plus, $\chi_A^{-1}([-\infty, t[\,)$ vaut X si $t > 1$,
$t \in\,]0, 1[$ et $\emptyset$ si $t \geq 0$. Le résultat découle donc de la proposition 5.27 (et de son analog
pour la semi-continuité supérieure).

Schème E.62 (i) Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille dénombrable d'ouverts denses de Y. P
tout $n \in \mathbb{N}$, la préimage $f^{-1}(U_n)$ est un ouvert (car f est continue) dense (car l'ima
par f d'un ouvert non vide est un ouvert non vide). Donc $A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}(U_n)$ est de
dans l'espace de Baire X. Par la continuité de f, l'image $f(A) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$ est dense d
$f(X) = Y$.

6 Analyse fonctionnelle

Tous les espaces vectoriels de ce chapitre seront sur le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, et toutes les applications linéaires sont linéaires sur $\mathbb{K}$.

Les livres recommandés pour ce chapitre sont [Bre, Die2, Bou3], avec [Rud, Coh] pour ce qui concerne les rappels de théorie de la mesure et d'intégration.

6.1 Espaces de Banach

Commençons ce paragraphe par un résumé des propriétés des espaces de Banach montrées dans les paragraphes précédents, ainsi que la discussion d'une famille d'exemples.

Rappels et exemples.

Rappelons (voir le paragraphe 3.4) qu'un *espace de Banach* est un espace vectoriel réel ou complexe normé complet. Par exemple, l'espace vectoriel $\mathbb{K}$, de dimension 1 sur $\mathbb{K}$, est un espace de Banach.

Un *espace de Fréchet* (voir la définition 3.15) est un espace vectoriel topologique réel ou complexe, localement convexe, métrisable par une distance complète et invariante par translations.

Soient E, F, G trois espaces vectoriels normés sur $\mathbb{K}$ (on notera parfois $||\cdot||_E$ la norme de E lorsque l'on veut bien préciser de quel espace il s'agit). Nous avons vu aux paragraphes 2.8 et 3.4 les propriétés suivantes.

• Une application linéaire u de E dans F est continue si et seulement si $||u|| = \sup_{x\in E,\ ||x||\le 1} ||u(x)||$ est finie.

• L'application $u \mapsto ||u||$ est une norme sur l'espace vectoriel $\mathscr{L}(E,F)$ des applications linéaires continues de E dans F, appelée *norme d'opérateur*. Pour tous $u \in \mathscr{L}(F,G)$ et $v \in \mathscr{L}(E,F)$, nous avons $||u\circ v|| \le ||u||\,||v||$, donc les applications linéaires de composition à droite $u \mapsto u\circ v$ et de composition à gauche $v \mapsto u \circ v$, et l'application bilinéaire de composition $(u,v) \mapsto u\circ v$ sont continues.

• Si F est un espace de Banach, alors $\mathscr{L}(E,F)$ est un espace de Banach (voir le corollaire 5.10). En particulier, le *dual topologique* $E' = \mathscr{L}(E,\mathbb{K})$ de E, qui est souvent noté $E*$ (sauf par quelques irréductibles gaulois !), est un espace de Banach pour la *norme duale* $||f|| = \sup_{x\in E,\ ||x||\le 1} |f(x)|$. L'espace de Banach E'' s'appelle le *bidual (topologique)* de E.

Si $u \in \mathscr{L}(E,F)$, l'*adjoint* de u est l'application linéaire u' de F' dans E' définie par $\ell \mapsto \ell\circ u$. Comme

$$||u'|| = \sup_{||\ell||\le 1} ||u'(\ell)|| = \sup_{||\ell||\le 1} ||\ell\circ u|| \le ||u||\ ,$$

nous avons $u' \in \mathscr{L}(F',E')$. En particulier, l'application de $\mathscr{L}(E,F)$ dans $\mathscr{L}(F',E')$ définie par $u \mapsto u'$ est linéaire continue, de norme inférieure ou égale à 1. (Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, nous montrerons au corollaire 6.7 (4), conséquence du théorème d'Hahn-Banach, qu'en fait $||u'|| = ||u||$.)

• Tout sous-espace vectoriel fermé d'un espace de Banach est un espace de Banach (pour la norme induite). Tout produit fini d'espaces de Banach est un espace de Banach (pour l'une des normes produits $||(x_1,\dots,x_n)||_p = (||x_1||^p + \dots + ||x_n||^p)^{1/p}$ si

$p \in [1,+\infty[$ et $||(x_1,\dots,x_n)||_\infty = \max\{||x_1||,\dots,||x_n||\}$. Un produit dénombrable d' paces de Banach est un espace de Fréchet. Tout quotient d'un espace de Banach par un sous-espace vectoriel fermé F est un espace de Banach (pour la norme quotie $||x+F|| = \inf_{y\in F} ||x+y||$).

Voici une propriété qui n'a pas encore été démontrée, mais qui avait été démont l'année dernière (pour les espaces vectoriels normés de dimension finie, mais la pre n'utilise que la complétude).

Proposition 6.1 *(1) Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans un espace de Banach E sur $\mathbb{K}$. S série $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ est* normalement convergente *(i.e. si la suite réelle $\sum_{n\in\mathbb{N}} ||x_n||$ converg alors la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ converge dans E, et*

$$||\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n|| \le \sum_{n\in\mathbb{N}} ||x_n||\ .$$

(2) Soient E et F deux espaces de Banach, et $\mathscr{GL}(E,F)$ l'ensemble des isomorphisn linéaires, continus et d'inverses continus, de E dans F (mais pas nécessairement isomé ques). Alors $\mathscr{GL}(E,F)$ est un ouvert de $\mathscr{L}(E,F)$, et l'application $u\mapsto u^{-1}$ de $\mathscr{GL}(E,$ dans $\mathscr{GL}(F,E)$ est continue.

En particulier, si E est un espace de Banach, alors

$$\mathscr{GL}(E) = \mathscr{GL}(E,E)$$

est un groupe topologique, par l'alinéa précédent la proposition 2.21.

Preuve. (1) La convergence normale de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ implique que la suite $t_n = \sum_{k=0}^n ||x$ est convergente, donc de Cauchy dans $\mathbb{R}$. La suite $y_n = \sum_{k=0}^n x_n$ est donc de Cauchy da E, car $||y_{n+p} - y_n|| \le |t_{n+p} - t_n|$ par l'inégalité triangulaire, donc est convergente complétude de E.

(2) Commençons la preuve par un lemme.

Lemme 6.2 *Soient E un espace de Banach et $u \in \mathscr{L}(E,E)$. Si $||u|| < 1$, alors* $\mathrm{id} - u$ *un isomorphisme linéaire de E dans E, d'inverse $\sum_{n\in\mathbb{N}} u^n$ continu.*

Preuve. La série $\sum u^k$ dans l'espace de Banach $\mathscr{L}(E,E)$ est normalement convergen car $||u^k|| \le ||u||^k$, donc converge vers $v \in \mathscr{L}(E,E)$. Comme $uv = vu = v - \mathrm{id}$, l'élém v est l'inverse de $\mathrm{id} - u$.

Soient $u_0 \in \mathscr{GL}(E,F)$, et $u \in \mathscr{L}(E,F)$ tels que $||u - u_0|| < \frac{1}{||u_0^{-1}||}$. Posons v $\mathrm{id} - u_0^{-1}u$. Alors

$$||v|| \le ||u_0^{-1}||\ ||u - u_0|| < 1\ ,\quad (*)$$

donc $\mathrm{id} - v = u_0^{-1}u$ est inversible d'inverse continu par le lemme, donc u est inversible $u^{-1} = (\mathrm{id} - v)^{-1}\circ u_0^{-1}$ est continu, ce qui montre que $\mathscr{GL}(E,F)$ est voisinage de chac de ses points.

Cette expression de u^{-1} montre aussi que

$$||u^{-1} - u_0^{-1}|| \le ||(\mathrm{id} - v)^{-1} - \mathrm{id}\,||\ ||u_0^{-1}|| = \Big|\Big|\sum_{n=1}^{+\infty} v\Big|\Big|\ ||u_0^{-1}|| \le ||v||\ \frac{||u_0^{-1}||}{1 - ||v||}\ ,$$

qui tend vers 0 quand u tend vers u_0, car alors $||v||$ tend vers 0 par (*). La continuité en tout point de $\mathscr{GL}(E,F)$ de $u \mapsto u^{-1}$ en découle. $\square$

Une *algèbre normée* est une algèbre E sur $\mathbb{K}$ munie d'une norme telle que, pour tous u, v dans E, on ait
$$||uv|| \leq ||u||\,||v||\ .$$
Une *algèbre de Banach* est une algèbre normée complète. En particulier, si E est un espace de Banach, alors
$$\mathscr{L}(E) = \mathscr{L}(E,E)$$
est une algèbre de Banach. La preuve du lemme 6.2 s'étend pour montrer que si u est un élément d'une algèbre de Banach unitaire de norme strictement inférieure à 1, alors $1-u$ est inversible.

Exemples 1. L'une des familles les plus importantes d'exemples d'espaces de Banach en analyse est la suivante. Nous renvoyons au cours d'Intégration et probabilité ou à [Rud, Coh] pour les notions nécessaires de théorie de la mesure et d'intégration. En particulier, une mesure est *σ-finie* si l'espace est réunion dénombrable de parties mesurables de mesures finies.

Soient $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espace mesuré et $p \in [1, +\infty]$. On note q, et on appelle *exposant conjugué* de p, l'élément de $[1, +\infty]$ tel que
$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\ .$$
Notons que si $p = 1$, alors $q = +\infty$ et si $p = +\infty$, alors $q = 1$.

Si $p < +\infty$, notons $\mathbb{L}^p(X, \mathscr{A}, \mu)$ (ou $\mathbb{L}^p(\mu)$ si $(X, \mathscr{A})$ est sous-entendu) l'espace des classes d'équivalences d'applications f de X dans $\mathbb{K}$, mesurables pour $\mathscr{A}$, telles que $|f|^p$ soit intégrable, modulo la relation d'équivalence $f \sim g$ si $f - g$ est presque partout nulle. On pose alors, pour tout f dans $\mathbb{L}^p(X, \mathscr{A}, \mu)$,
$$||f||_p = \Big(\int_{x\in X} |f(x)|^p\ d\mu(x)\Big)^{1/p}\ .$$

Si $p = +\infty$, notons $\mathbb{L}^\infty(X, \mathscr{A}, \mu)$ (ou $\mathbb{L}^\infty(\mu)$ si $(X, \mathscr{A})$ est sous-entendu) l'espace des classes d'équivalences d'applications f de X dans $\mathbb{K}$, mesurables pour $\mathscr{A}$, *essentiellement finies* (i.e. s'il existe $M \geq 0$ tel que pour tout $A \in \mathscr{A}$ vérifiant $\mu(A) < +\infty$, on ait $\mu(\{x \in A\ :\ |f(x)| > M\}) = 0$), modulo la relation d'équivalence $f \sim g$ si f et g sont *essentiellement égales* (i.e. si pour tout $A \in \mathscr{A}$ tel que $\mu(A) < +\infty$, on a $\mu(\{x \in A\ :\ f(x) \neq g(x)\}) = 0$). On pose alors, pour tout f dans $\mathbb{L}^\infty(X, \mathscr{A}, \mu)$,
$$||f||_\infty = \inf\big\{M \geq 0\ :\ \forall\ A \in \mathscr{A},\ \ \mu(A) < +\infty\ \ \Rightarrow\ \ \mu(\{x \in A\ :\ |f(x)| > M\}) = 0\big\}\ .$$

Notons $T : \mathbb{L}^q(X, \mathscr{A}, \mu) \to \mathbb{L}^p(X, \mathscr{A}, \mu)'$ l'application définie par
$$f \mapsto \Big\{g \mapsto \int_{x\in X} f(x) g(x)\ d\mu(x)\Big\}\ .$$
Le fait que cette application soit bien définie est contenu dans le résultat suivant.

Théorème 6.3 *Soient $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espace mesuré et $p \in [1, +\infty]$.*

- *Alors $\mathbb{L}^p(X, \mathscr{A}, \mu)$ est un espace de Banach pour la norme $||\cdot||_p$.*

- *Si $p < +\infty$, en supposant que μ soit σ-finie si $p = 1$, alors $T : \mathbb{L}^q(X, \mathscr{A}, \mu)$ $\mathbb{L}^p(X, \mathscr{A}, \mu)'$ est un isomorphisme linéaire qui est une isométrie entre la nor $||\cdot||_q$ et la norme duale de la norme $||\cdot||_p$.*
- *L'application $T : \mathbb{L}^1(X, \mathscr{A}, \mu) \to \mathbb{L}^\infty(X, \mathscr{A}, \mu)'$ est une application linéaire isom trique, en général non surjective.*
- *Si $p < +\infty$, si μ est σ-finie, si la tribu (σ-algèbre) $\mathscr{A}$ est engendrée par une pa dénombrable, alors $\mathbb{L}^p(X, \mathscr{A}, \mu)$ est séparable.*

Dans la suite de ces notes, pour tout $p \in [1, +\infty[$, on identifiera $\mathbb{L}^p(X, \mathscr{A}, \mu)'$ a $\mathbb{L}^q(X, \mathscr{A}, \mu)$ par l'isométrie linéaire T^{-1}, où q est l'exposant conjugué de p, et en particul $\mathbb{L}^1(X, \mathscr{A}, \mu)'$ avec $\mathbb{L}^\infty(X, \mathscr{A}, \mu)$.

•• Par exemple, en prenant X un ensemble non vide, $\mathscr{A} = \mathscr{P}(X)$, μ la mesure comptage sur X (définie par $\mu(A) = \operatorname{Card} A$ pour tout $A \subset X$), et $p \in [1, +\infty]$, l'esp $\mathbb{L}^p(X, \mathscr{A}, \mu)$ est noté $\ell^p(X, \mathbb{K})$ (ou $\ell^p(\mathbb{K})$ si $X = \mathbb{N}$). Si $p < +\infty$, c'est l'espace vecto des familles indexées par X à valeurs dans $\mathbb{K}$, de puissance p-ème sommable, muni de norme
$$||(x_i)_{i\in X}||_p = \Big(\sum_{i\in X} |x_i|^p\Big)^{1/p}\ ,$$
qui est donc un espace de Banach. Si $p = +\infty$, alors $\ell^\infty(X, \mathbb{K})$ est l'espace de Bana $\mathscr{F}_b(X, \mathbb{R})$ muni de la norme uniforme.

Pour montrer que $\ell^p(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ est séparable si $p < +\infty$, il suffit de considérer l'ensem dénombrable des suites à valeurs rationnelles n'ayant qu'un nombre fini de termes n nuls, et d'utiliser un argument de coupage en deux de séries.

•• Par exemple, pour tout $r \in \mathbb{N} - \{0\}$ et tout $p \in [1, +\infty[$, en prenant pour X ouvert Ω de $\mathbb{R}^r$ et pour μ la restriction à Ω de la mesure de Lebesgue, l'espace vecto $\mathbb{L}^p(\Omega, \mathbb{K})$ (ou $\mathbb{L}^p(\Omega)$ si $\mathbb{K}$ est sous-entendu) des applications à valeurs dans $\mathbb{K}$ de puissa p-ème intégrable (modulo les applications presques nulles), muni de la norme (aussi no $||\cdot||_{\mathbb{L}^p(\Omega,\mathbb{K})}$)
$$||f||_p = \Big(\int_{x\in\Omega} |f(x)|^p\ dx\Big)^{1/p}\ ,$$
est un espace de Banach. Comme la mesure de Lebesgue sur tout ouvert de $\mathbb{R}^r$ est finie, pour tout p dans $[1, +\infty[$, le dual topologique de $\mathbb{L}^p(\Omega)$ est $\mathbb{L}^q(\Omega)$ pour q l'expos conjugué de p (et en particulier, le dual topologique de $\mathbb{L}^1(\Omega)$ est $\mathbb{L}^\infty(\Omega)$, qui est l'esp de Banach des applications de Ω dans $\mathbb{K}$, bornées en dehors d'un ensemble de mes nulle, modulo égalité presque partout). Si $p < +\infty$, alors l'espace de Banach $\mathbb{L}^p(\Omega)$ séparable. Mais si Ω est non vide, alors $\mathbb{L}^\infty(\Omega)$ n'est pas séparable (voir par exem [Bre]).

Une manière de voir que $\mathbb{L}^p(\Omega)$ est séparable est d'utiliser le théorème du cours d'In gration et probabilité (voir aussi [Coh]) disant que l'espace vectoriel $\mathscr{C}_c(\Omega, \mathbb{K})$, des app cations continues à support compact dans Ω, est dense dans $\mathbb{L}^p(\Omega)$ pour la norme $||\cdot$ et que $\mathscr{C}_c(\Omega, \mathbb{K})$ est séparable pour la norme uniforme, par le corollaire 5.43.

Exemples 2. Soient X un espace topologique localement compact non vide et $\mathbb{K} =$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Une application continue $f : X \to \mathbb{K}$ *s'annule à l'infini* si pour tout $\epsilon >$ il existe un compact K de X tel que $|f(x)| \leq \epsilon$ si $x \notin K$. De manière équivalente, si est le compactifié d'Alexandrov de X (voir l'exercice E.51), alors f s'annule à l'infini si seulement si l'application $\widehat{f} : \widehat{X} \to \mathbb{K}$ prolongeant f et telle que $\widehat{f}(\infty) = 0$ est contin

Une application continue nulle à l'infini est en particulier bornée. Notons que si X est compact, alors toute application continue s'annule à l'infini.

On note $\mathscr{C}_0(X, \mathbb{K})$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ des applications continues de X dans $\mathbb{K}$ qui s'annulent à l'infini, que l'on munit de la norme uniforme. En particulier, si X est compact, alors $\mathscr{C}_0(X, \mathbb{K}) = \mathscr{C}(X, \mathbb{K})$ muni de la norme uniforme.

Proposition 6.4 *L'espace vectoriel normé $\mathscr{C}_0(X, \mathbb{K})$ est un espace de Banach, et le sous-espace $\mathscr{C}_c(X, \mathbb{K})$ des applications continues à support compact est dense dans $\mathscr{C}_0(X, \mathbb{K})$.*

Preuve. Comme l'espace vectoriel $\mathscr{C}_b(X, \mathbb{K})$ des applications continues bornées est complet pour la norme uniforme (voir la proposition 5.8), et puisqu'un sous-espace vectoriel fermé d'un espace de Banach est un espace de Banach pour la norme induite (voir la proposition 3.16 (3)), il suffit de montrer que $\mathscr{C}_0(X, \mathbb{K})$ est fermé dans $\mathscr{C}_b(X, \mathbb{K})$ pour obtenir la première assertion.

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $\mathscr{C}_0(X, \mathbb{K})$ convergeant uniformément vers $f \in \mathscr{C}_b(X, \mathbb{K})$. Pour tout $\epsilon > 0$, soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\sup_{x\in X} |f(x) - f_n(x)| < \frac{\epsilon}{2}$ et soit K un compact de X tel que, pour tout $x \notin K$, on ait $|f_n(x)| < \frac{\epsilon}{2}$. Alors pour tout $x \notin K$,

$$|f(x)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon\ .$$

Le premier résultat s'en déduit.

Montrons que $\mathscr{C}_c(X, \mathbb{K})$ est dense dans $\mathscr{C}_0(X, \mathbb{K})$. Soient $f \in \mathscr{C}_0(X, \mathbb{K})$ et $\epsilon > 0$. Soit K un compact de X tel que, pour tout $x \notin K$, on ait $|f(x)| < \epsilon$. Puisque X est localement compact, soit K' un voisinage compact de K et V un voisinage ouvert de K contenu dans K'. Par l'exercice corrigé E.48 du paragraphe 4.1, il existe une application continue $\phi : K' \to [0, 1]$ telle que $\phi(x) = 0$ pour tout x dans le fermé $K' - V$ et $\phi(x') = 1$ pour tout x' dans le fermé K disjoint de $K' - V$. En prolongeant ϕ par 0 en dehors de K' (voir l'exercice corrigé E.15 du paragraphe 2.3), on obtient un élément $\phi \in \mathscr{C}_c(X, \mathbb{K})$ à valeurs dans $[0, 1]$ valant 1 sur K. Posons $g = \phi f$, qui est dans $\mathscr{C}_c(X, \mathbb{K})$. Pour tout x dans X, on a $|f(x) - g(x)| = 0$ si $x \in K$ et sinon

$$|f(x) - g(x)| \leq |1 - \phi(x)||f(x)| \leq |f(x)| < \epsilon\ .$$

Donc $||f - g||_\infty < \epsilon$, et le résultat en découle. □

Soit $\mathscr{M}_\mathbb{K}(X)$ l'ensemble des mesures signées (on dit parfois « réelle » au lieu de « signée ») si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, mesures complexes si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, boréliennes, régulières, muni de la norme

$$||\mu|| = |\mu|(X)$$

(voir le cours d'Intégration et probabilité ou [Coh, Rud] pour les définitions ; rappelons que si X est localement compact et à base dénombrable d'ouverts (par exemple si X est localement compact, métrisable et séparable, et en particulier si X est métrisable compact), alors toute mesure positive finie (en particulier toute mesure de probabilité) est régulière, voir [Coh, page 206]).

Le théorème suivant est une conséquence du théorème de représentation de Riesz (voir par exemple [Coh, page 220]).

Théorème 6.5 *L'espace vectoriel normé $\mathscr{M}_\mathbb{K}(X)$ est un espace de Banach, et l'appli-*
tion de $\mathscr{M}_\mathbb{K}(X)$ dans $\mathscr{C}_0(X, \mathbb{K})'$ définie par

$$\mu \mapsto \left\{f \mapsto \mu(f) = \int_{x\in X} f(x)\, d\mu(x)\right\}$$

est un isomorphisme linéaire isométrique pour la norme de la masse totale sur $\mathscr{M}_\mathbb{K}(X)$
la norme duale sur $\mathscr{C}_0(X, \mathbb{K})'$.

Nous identifierons le dual topologique de $\mathscr{C}_0(X, \mathbb{K})$ avec $\mathscr{M}_\mathbb{K}(X)$ par cette applicati
En particulier, si X est compact, alors le dual topologique de $\mathscr{C}(X, \mathbb{R})$ ou $\mathscr{C}(X, \mathbb{C})$ (m
de la norme uniforme) est l'espace des mesures réelles $\mathscr{M}_\mathbb{R}(X)$ ou complexes $\mathscr{M}_\mathbb{C}(X)$
X.

Théorèmes de Hahn-Banach.

Nous supposons que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ dans cette sous-partie. Le résultat suivant d'extension
formes linaires est une conséquence du théorème de Zorn.

Théorème 6.6 (Théorème de Hahn-Banach (forme analytique)) *Soient E*
espace vectoriel réel et $p : E \to \mathbb{R}$ une application telle que

$$\forall\ \lambda > 0,\ \ p(\lambda x) = \lambda p(x) \quad \text{et} \quad p(x + y) \leq p(x) + p(y)\ .$$

Soient F un sous-espace vectoriel de E et f une forme linéaire sur F, telle que, pour t
$y \in F$, on ait $f(y) \leq p(y)$. Alors il existe une forme linéaire g sur E prolongeant f t
que, pour tout $x \in E$, on ait $g(x) \leq p(x)$.

Preuve. Considérons l'ensemble $\mathscr{P}$ des applications linéaires $h : D(h) \to \mathbb{R}$, où D
est un sous-espace vectoriel de E contenant F, telles que h prolonge f et que, pour to
$y \in D(h)$, on ait $h(y) \leq p(y)$. On munit $\mathscr{P}$ de l'ordre $h \preceq h'$ si $D(h) \subset D(h')$
$h'(x) = h(x)$ pour tous $x \in D(h)$.

L'ensemble ordonné $\mathscr{P}$ est non vide (car il contient f), et il est inductif (voir
paragraphes 1.1 et 4.3 pour des rappels sur les ordres). En effet, si $\mathscr{P}'$ est une par
totalement ordonnée de $\mathscr{P}$, alors pour tout x dans $\bigcup_{h\in\mathscr{P}'} D(h)$, qui est un sous-espa
vectoriel car $\mathscr{P}'$ est totalement ordonné, posons $h'(x) = h(x)$ si $x \in D(h)$, ce qui ne dépe
pas des choix car $\mathscr{P}'$ est totalement ordonné. Il est facile de vérifier que h' appartien
$\mathscr{P}$, que $D(h') = \bigcup_{h\in\mathscr{P}'} D(h)$ et que h' est un majorant de $\mathscr{P}'$.

Par le théorème de Zorn 4.8, soit g un élément maximal de $\mathscr{P}$. Montrons que $D(g) =$
ce qui montrera le résultat. Par l'absurde, supposons qu'il existe $x_0 \in E - D(g)$.

Posons $\alpha = \sup_{y\in D(g)} \big(g(y) - p(y - x_0)\big)$. Pour tous x, y dans $D(g)$, nous avons

$$g(x) + g(y) = g(x + y) \leq p(x + y) \leq p(x + x_0) + p(y - x_0)$$

par sous-additivité de p, donc $g(y) - p(y - x_0) \leq -g(x) + p(x + x_0)$. D'où, en prenant
borne supérieure sur $y \in D(g)$, pour tous x, y dans $D(g)$,

$$g(y) - p(y - x_0) \leq \alpha \leq -g(x) + p(x + x_0)\ , \quad (*)$$

et en particulier, α est fini. Pour tous $\lambda \in \mathbb{R}$ et $y \in D(g)$, posons $h(y + \lambda x_0) = g(y) +$
Alors h est une forme linéaire prolongeant g, donc f, sur l'espace vectoriel $D(h) = D(g$

$\mathbb{R}x_0$, qui contient strictement $D(g)$. Si $\lambda > 0$, alors on obtient, en utilisant l'inégalité de droite de (*), et par l'homogénéité de p,

$$h(y+\lambda x_0) = \lambda\Big(g(\frac{1}{\lambda}y)+\alpha\Big) \leq \lambda\, p(\frac{1}{\lambda}y + x_0) = p(y+\lambda x_0)\ .$$

De même, par l'inégalité de gauche de (*), si $\lambda < 0$, alors

$$h(y+\lambda x_0) = (-\lambda)\Big(g(\frac{-1}{\lambda}y)-\alpha\Big) \leq (-\lambda)\, p(\frac{-1}{\lambda}y - x_0) = p(y+\lambda x_0)\ .$$

Ceci contredit la maximalité de g. $\square$

Porisme 6.7 *Soit E un espace vectoriel réel normé.*

(1) Soient F un sous-espace de E et f une forme linéaire continue sur F. Alors il existe une forme linéaire continue g sur E prolongeant f telle que $||g||_{E'} = ||f||_{F'}$.

(2) Pour tout x dans E, il existe g dans E' telle que $||g||_{E'} = ||x||_E$ et $g(x) = ||x||^2$.

(3) Pour tout x dans E,

$$||x|| = \sup_{f\in E',\ ||f||_{E'}\leq 1} |f(x)| = \max_{f\in E',\ ||f||_{E'}\leq 1} |f(x)|\ .$$

(4) Si F est un espace vectoriel réel normé, alors l'application de $\mathscr{L}(E,F)$ dans $\mathscr{L}(F',E')$, qui à u associe son adjoint u', est une isométrie.

Preuve. (1) Il suffit d'appliquer le théorème de Hahn-Banach 6.6 avec $p : x \mapsto ||f||\,||x||$, en remarquant que puisque $p(x) = p(-x)$, on a aussi $|g(x)| \leq p(x)$.

(2) Il suffit d'appliquer (1) avec $F = \mathbb{R}x$ et $f : tx \mapsto t||x||^2$.

(3) Nous pouvons supposer que $x \neq 0$. On a $\sup_{f\in E',\ ||f||_{E'}\leq 1} |f(x)| \leq ||x||$ par définition de la norme duale. Par (2), soit $f_0 \in E'$ telle que $||f_0|| = ||x||$ et $f_0(x) = ||x||^2$. Alors en considérant $f = ||x||^{-1} f_0$, l'inégalité précédente est une égalité et montre le résultat.

(4) Par (3), nous avons

$$\begin{aligned} ||u|| &= \sup_{||x||\leq 1} ||u(x)|| = \sup_{||x||\leq 1}\Big(\sup_{\ell\in F',\ ||\ell||\leq 1} |\ell\circ u(x)|\Big) \\ &= \sup_{\ell\in F',\ ||\ell||\leq 1}\Big(\sup_{||x||\leq 1} |u'(\ell)(x)|\Big) = \sup_{\ell\in F',\ ||\ell||\leq 1} ||u'(\ell)|| = ||u'|| \end{aligned}$$ $\square$

Exemple. Soit $(X,\mathscr{A},\mu)$ un espace mesuré. Pour tout p dans $]1,+\infty]$, soit $q \in [1,+\infty[$ l'exposant conjugué de p (i.e. $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$). Si μ est σ-finie quand $q = 1$, alors pour tout $f \in \mathbb{L}^p(X,\mathscr{A},\mu)$, puisque $\mathbb{L}^p(X,\mathscr{A},\mu)$ est le dual topologique de $\mathbb{L}^q(X,\mathscr{A},\mu)$ (voir le théorème 6.3),

$$||f||_p = \max_{g\in\mathbb{L}^q(\Omega),\ ||g||_q\leq 1} \int_{x\in X} f(x)g(x)\,d\mu(x)\ .$$

En particulier, pour tout $r \in \mathbb{N}-\{0\}$, pour tout ouvert Ω non vide de $\mathbb{R}^r$, comme $\mathscr{C}_c(\Omega,\mathbb{K})$ et $\mathscr{D}(\Omega,\mathbb{K})$ sont denses dans $\mathbb{L}^q(\Omega)$, on a pour tout $f \in \mathbb{L}^p(\Omega)$

$$\begin{aligned} ||f||_p &= \max_{g\in\mathbb{L}^q(\Omega),\ ||g||_q\leq 1} \int_{x\in\Omega} f(x)g(x)\,dx \\ &= \sup_{g\in\mathscr{C}_c(\Omega,\mathbb{K}),\ ||g||_q\leq 1} \int_{x\in\Omega} f(x)g(x)\,dx = \sup_{g\in\mathscr{D}(\Omega,\mathbb{K}),\ ||g||_q\leq 1} \int_{x\in\Omega} f(x)g(x)\,dx\ . \end{aligned}$$

Montrons maintenant des versions géométriques du théorème de Hahn-Banach (for analytique). Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. Rappelons qu'un *hyperplan affine* de E un sous-espace affine de codimension 1 de E, ou, de manière équivalente une partie de de la forme

$$H = \ell^{-1}(\alpha) = \{x \in E\ :\ \ell(x) = \alpha\}\ ,$$

où ℓ est une forme linéaire non nulle et $\alpha \in \mathbb{K}$. Nous dirons alors que $\ell = \alpha$ est u équation de H (toute autre équation étant alors de la forme $\lambda\ell = \lambda\alpha$ avec $\lambda \in \mathbb{K}^*$).

On dit qu'un hyperplan affine H d'équation $\ell = \alpha$ *sépare* deux parties A et B de si, quitte à échanger A et B, on a $A \subset \ell^{-1}(\,]-\infty,\alpha])$ et $B \subset \ell^{-1}([\alpha,+\infty[\,)$. On dit qu hyperplan affine H *sépare strictement* A et B de E s'il existe $\epsilon > 0$ tel que, quitte échanger A et B, on a $A \subset \ell^{-1}(\,]-\infty,\alpha-\epsilon])$ et $B \subset \ell^{-1}([\alpha+\epsilon,+\infty[\,)$.

Lemme 6.8 *Soit E un espace vectoriel topologique sur $\mathbb{K}$. Un hyperplan affine H de d'équation $\ell = \alpha$, est fermé si et seulement si ℓ est continue.*

Preuve. Si ℓ est continue, commes les singletons de $\mathbb{K}$ sont fermés, alors $H = \ell^{-1}(\alpha)$ fermé.

Réciproquement, supposons H fermé, et montrons que la forme linéaire (non nu donc surjective) ℓ est continue. Comme les translations sont des homéomorphismes, no pouvons supposer que $\alpha = 0$.

Le cas particulier où E est un espace vectoriel normé réel admet une preuve plus cour que nous donnons tout d'abord, même si elle n'est pas nécessaire pour le cas général suit. Comme le complémentaire de H est non vide et ouvert, soient $x_0 \in E$ et $\epsilon > 0$ t que $B(x_0,2\epsilon)\cap H$ soit vide. Nous pouvons supposer que $\ell(x_0) < 0$, quitte à remplace par $-\ell$. Alors pour tout x dans $B(x_0,2\epsilon)$, on a $\ell(x) < 0$ par convexité de $B(x_0,2\epsilon)$ (si p l'absurde $\ell(x) \geq 0$, posons $t = \frac{\ell(x)}{\ell(x)-\ell(x_0)}$, alors $t \in [0,1]$ et $tx_0 + (1-t)x \in B(x_0,2\epsilon)\cap$ contradiction). Donc pour tout x dans E tel que $||x|| \leq 1$, on a

$$\ell(x) = \frac{1}{\epsilon}\Big(\ell(x_0+\epsilon x) - \ell(x_0)\Big) \leq \frac{-\ell(x_0)}{\epsilon}\ .$$

Par conséquent, $||\ell|| < +\infty$, ce qui montre le résultat.

Considérons maintenant le cas général. L'espace vectoriel topologique quotient E est séparé car H est fermé (voir le corollaire 2.26), et de dimension 1 car H est hyperplan. La forme linéaire ℓ passe au quotient en une application linéaire $f : E/H \to$ Comme $\ell = f\circ\pi$ où $\pi : E \to E/H$ est la projection canonique (continue), il suffit montrer que f est continue en 0 (par linéarité). Fixons un élément non nul a de $E/$ Pour tout $\epsilon > 0$, par séparation de E/H, soit V un voisinage de 0 dans E/H ne contena pas $\epsilon a \neq 0$.

Montrons que

$$V' = \bigcap_{\mu\in\mathbb{K},\ |\mu|\geq 1} \mu V$$

est un voisinage de 0 contenu dans V. En effet, par continuité en $(0,0)$ de l'applicat de $\mathbb{K}\times E/H$ dans E/H définie par $(\lambda,x)\mapsto \lambda x$, il existe $\eta > 0$ et un voisinage W 0 dans E/H tel que pour tout x dans W, pour tout λ dans $\mathbb{K}$ tel que $|\lambda| \leq \eta$, on $\lambda x \in V$. Ceci implique que ηW, qui est un voisinage de 0 car les homothéties (non null sont des homéomorphismes, est contenu dans V' (si $x \in W$ et $|\mu| \geq 1$, alors $|\frac{\eta}{\mu}| \leq \eta$, do $\eta x \in \mu V$).

Par construction, pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que $|\alpha| \leq 1$, nous avons $\alpha V' \subset V'$. Si $\lambda a \in V'$, alors $|\lambda| < \epsilon$, car sinon

$$\epsilon a = \frac{\epsilon}{\lambda} \lambda a \in V' \subset V \ ,$$

ce qui contredit la définition de V. Ceci montre la continuité de $f : \lambda a \mapsto \lambda f(a)$ en 0, et conclut la preuve. □

Théorème 6.9 (Théorème de Hahn-Banach (forme géométrique)) *Soient E un espace vectoriel topologique réel, et A et B deux convexes non vides disjoints dans E.*

(1) Si A est ouvert, alors il existe un hyperplan affine fermé séparant A et B.

(2) Si E est localement convexe (par exemple normé), si A est compact et si B est fermé, alors il existe un hyperplan affine fermé séparant strictement A et B.

Preuve. (1) Montrons tout d'abord le lemme suivant.

Lemme 6.10 *Soit C un convexe ouvert non vide de E, et $x_0 \in E - C$. Alors il existe $\ell \in E'$ tel que, pour tout $x \in C$, on ait $\ell(x) < \ell(x_0)$.*

Preuve. Quitte à translater (ajouter à x et à x_0 un même élément de E ne change pas l'inégalité $\ell(x) < \ell(x_0)$, par linéarité de ℓ), on peut supposer que $0 \in C$. Soit $F = \mathbb{R}x_0$ et $p = ||\cdot||_C$ la jauge de C (voir le lemme 2.17), qui est positive ou nulle et vérifie

$$\forall\ \lambda > 0,\quad ||\lambda\, x||_C = \lambda\, ||x||_C, \quad ||x + y||_C \leq ||x||_C + ||y||_C \ ,$$

et pour tout $\epsilon > 0$, il existe un voisinage V_ϵ de 0 dans E tel que

$$\forall\ x \in V_\epsilon, \quad ||x||_C \leq \epsilon \ .$$

Notons f la forme linéaire sur le sous-espace vectoriel $\mathbb{R}x_0$ de E définie par $f(\lambda x_0) = \lambda$. Comme $x_0 \notin C = \{x \in E \ : \ ||x||_C < 1\}$, on a $p(x_0) \geq 1$, donc pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, en distinguant le cas $\lambda \leq 0$ immédiat du cas $\lambda > 0$, on a $f(\lambda x_0) \leq p(\lambda x_0)$. Par le théorème 6.6, il existe donc une forme linéaire ℓ sur E prolongeant f, telle que $\ell \leq p$. Ceci implique que ℓ est continue en 0 (donc partout) car, pour tout $\epsilon > 0$, en notant $\pm$ le signe de $\ell(x)$, on a, pour tout x dans $V_\epsilon \cap (-V_\epsilon)$ (qui est un voisinage de 0 dans E)

$$|\ell(x)| = \ell(\pm x) \leq p(\pm x) \leq \epsilon \ .$$

De plus, pour tout x dans C, on a $\ell(x) \leq p(x) < 1$. Comme $\ell(x_0) = f(x_0) = 1$, le résultat s'en déduit. □

(1) Pour montrer la première assertion du théorème 6.9, on considère

$$C = \{x - y \ : \ x \in A, y \in B\} \ ,$$

qui est convexe et non vide car A et B le sont, ouvert car union des ouverts $A - y$ pour y dans B, et ne contient pas 0 car A et B sont disjoints. Par le lemme 6.10, il existe donc $\ell \in E'$ tel que $\ell(z) < 0$ pour tout z dans C, i.e. tel que $\ell(x) < \ell(y)$ pour tous x dans A et y dans B. Posons $\alpha = \sup_{x\in A} \ell(x)$, qui vérifie donc $\alpha \leq \inf_{y\in B} \ell(y)$. Alors l'hyperplan affine d'équation $\ell = \alpha$ (qui est fermé car ℓ est continue) sépare A et B.

(2) Le cas où E est un espace vectoriel normé admet une preuve plus courte, nous la donnons tout d'abord, même si elle n'est pas nécessaire pour le cas général. Comme

A est compact et B fermé, et puisque la distance d'un point à un fermé est continue nulle seulement si le point appartient au fermé, nous avons $\epsilon = \frac{1}{2} \inf_{x\in A}\ d(x, B) > 0$, donc les ϵ-voisinages ouverts $A_\epsilon = \mathscr{V}_\epsilon(A)$ et $B_\epsilon = \mathscr{V}_\epsilon(B)$ sont convexes, ouverts, non vid disjoints.

Par (1), soit H un hyperplan affine fermé séparant A_ϵ et B_ϵ. Soit $\ell = \alpha$ une équati de H telle que pour tous x dans A_ϵ et y dans B_ϵ, on ait $\ell(x) \leq \alpha$ et $\ell(y) \geq \alpha$. Montro qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que pour tous x dans A, on ait $\ell(x) < \alpha - \epsilon$. Sinon, il existe une su $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans A telle que $\alpha - \frac{1}{n+1} \leq \ell(x_n) \leq \alpha$. Par compacité de A, soit $x \in A$ une vale d'adhérence de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Par continuité de ℓ, on a $\ell(x) = \alpha$, donc $x \in A \cap H$, qui est impossible. Mais alors l'hyperplan affine d'équation $\ell = \alpha - \epsilon$ sépare strictem A et B.

Pour le cas général, comme B est fermé, disjoint de A, pour tout x dans A, il exi un voisinage ouvert V_x de 0 dans E tel que $(x + V_x) \cap B = \emptyset$. Soit V'_x un voisinage ouv de 0 tel que $V'_x + V'_x \subset V_x$ (qui existe par continuité de $(x, y) \mapsto x + y$ en $(0, 0)$). P compacité de A, il existe $x_1, \ldots, x_n$ dans A tels que $A \subset (x_1 + V'_{x_1}) \cup \cdots \cup (x_n + V'_x$ Puisque $V'_{x_1} \cap \cdots \cap V'_{x_n}$ est un voisinage de 0, et puisque E est localement convexe existe un voisinage ouvert convexe W de 0 dans E tel que $W + (-W) \subset V'_{x_1} \cap \cdots \cap$ (par continuité de $(x, y) \mapsto x - y$ en $(0, 0)$). Alors $A' = A + W$ et $B' = B + W$ s des ouverts convexes non vides dans E. Montrons que A' et B' sont disjoints. En effet $a \in A$, $b \in B$, $w_1, w_2 \in W$ et $a + w_1 = b + w_2$, alors soient $i \in \{0, \cdots, n\}$ et $v_i \in V'_{x_i}$ t que $a = x_i + v_i$. Alors $b = x_i + w_1 - w_2 + v_i$, qui appartient à $B \cap (x_i + V_{x_i})$ par construct de W et de V'_{x_i}. Mais ceci contredit la définition de V_{x_i}. On conclut alors comme dans cas particulier précédent.

Voici quelques conséquences du théorème de Hahn-Banach (forme géométrique).

Un *demi-espace fermé* d'un espace vectoriel topologique réel E est une partie A de telle qu'il existe une forme linéaire continue ℓ sur E et $\alpha \in \mathbb{R}$ telle que $A = \ell^{-1}(\,]-\infty,$ L'hyperplan d'équation $\ell = \alpha$ est dit *associé* au demi-espace fermé. Tout hyperplan aff fermé de E définit (i.e. est associé à) deux demi-espaces fermés. Tout demi-espace fer de E est un convexe fermé de E.

Si C est un convexe de E, un *hyperplan d'appui* de C est un hyperplan affine fermé de E, passant par un point de C, tel que C soit contenu dans l'un des deux demi-espa définis par H.

Proposition 6.11 *Soit E un espace vectoriel topologique localement convexe réel.*

(1) Tout convexe fermé C de E est l'intersection des demi-espaces fermés qui le c tiennent.

(2) Si E est séparé, alors tout convexe compact non vide C de E est l'intersection demi-espaces fermés qui le contiennent et sont définis par les hyperplans d'appui de C

Preuve. (1) Le résultat est immédiat si C est vide. Sinon, pour tout $x \notin C$, comme singleton de E est convexe compact non vide, il existe par le théorème de Hahn-Bana 6.9 (2) un hyperplan affine fermé séparant strictement $\{x\}$ et C.

(2) Comme E est séparé, tout singleton de E est convexe fermé. Pour tout $x \notin C$ existe donc, par le théorème de Hahn-Banach 6.9 (2), un hyperplan affine fermé d'équat $\ell = \alpha$ séparant strictement $\{x\}$ et C. Suposons par exemple que $\ell(x) > \alpha$, et pos $\alpha' = \sup_{x\in C} \ell(x) \leq \alpha$. Alors C est contenu dans le demi-espace fermé défini par $\ell \leq \alpha'$ celui-ci ne contient pas x. Par compacité de C et continuité de ℓ, la borne supérieure est atteinte. Donc l'hyperplan affine fermé d'équation $\ell = \alpha'$ est un hyperplan d'appui

Proposition 6.12 *Soient E un espace vectoriel topologique localement convexe réel et F un sous-espace vectoriel de E. Alors F est dense dans E si et seulement si F n'est pas contenu dans un hyperplan fermé de E.*

De manière équivalente, F n'est pas dense dans E si et seulement s'il existe une forme linéaire continue sur E, non nulle, qui s'annule sur F. Ce résultat est un moyen très pratique de montrer qu'un sous-espace vectoriel est dense : un sous-espace vectoriel F est dense si toute forme linéaire continue qui s'annule sur F est nulle.

Comme cas particulier de ce résultat, tout hyperplan affine non fermé d'un espace vectoriel topologique localement convexe (par exemple normé) réel est dense.

Preuve. Si F est dense dans E, comme toute forme linéaire continue ℓ est uniformément continue, et comme $\mathbb{R}$ est complet, nous avons vu (voir le théorème 5.18 si E est un espace vectoriel normé et le commentaire qui suit sa preuve sinon) que ℓ s'étend continuement de manière unique à $\overline{F}$. Donc si ℓ est nulle sur F, alors ℓ est nulle.

Réciproquement, remarquons que $\overline{F}$ est un sous-espace vectoriel fermé de E, donc un convexe fermé non vide. Si F n'est pas dense dans E, soit $x_0 \notin \overline{F}$, de sorte que $\{x_0\}$ soit un compact convexe non vide disjoint de $\overline{F}$. Par le théorème de Hahn-Banach 6.9 (2), il existe donc $\ell \in E' - \{0\}$ tel que

$$\forall\, x \in \overline{F}, \quad \ell(x) \leq \ell(x_0)\ .$$

Comme F est stable par homothéties, ceci implique que ℓ est nulle sur F, donc que F est contenu dans l'hyperplan (fermé) d'équation $\ell = 0$. □

Proposition 6.13 *Soit E un espace vectoriel réel normé. Si E' est séparable, alors E est séparable.*

La réciproque est fausse, car l'espace de Banach $\mathbb{L}^1(\mathbb{R})$ (pour la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$) est séparable, mais son dual topologique $\mathbb{L}^\infty(\mathbb{R})$ ne l'est pas.

Preuve. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'image dense dans E'. Pour tout n dans $\mathbb{N}$, par définition de la norme duale $||f_n|| = \sup_{x\in E,\ ||x||=1} f_n(x)$, il existe $x_n \in E$ tel que

$$||x_n|| = 1 \quad \text{et} \quad f_n(x_n) \geq \frac{1}{2}||f_n||\ .$$

L'ensemble $\mathscr{A}$ des combinaisons linéaires finies à coefficients dans $\mathbb{Q}$ des éléments de $\{x_n\ :\ n \in \mathbb{N}\}$ est dénombrable. Montrons que $\mathscr{A}$ est dense dans E, ce qui concluera.

Il suffit de démontrer que le sous-espace vectoriel réel F engendré par $\{x_n\ :\ n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans E (car $\mathscr{A}$ est dense dans F). Soit f une forme linéaire continue sur E s'annulant sur F (donc sur chaque x_n). Montrons que f est nulle, ce qui concluera par la proposition 6.12.

Par densité de $\{f_n\ :\ n \in \mathbb{N}\}$, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $||f - f_n|| \leq \epsilon$. Donc

$$\frac{1}{2}||f_n|| \leq f_n(x_n) = (f_n - f)(x_n) \leq ||f_n - f||\,||x_n|| \leq \epsilon\ .$$

Donc $||f|| \leq ||f - f_n|| + ||f_n|| \leq 3\epsilon$. D'où $f = 0$, ce qui montre le résultat. □

Proposition 6.14 *Soit E un espace vectoriel topologique localement convexe séparé réel. Alors la topologie faible sur E est séparée.*

Nous avions déjà démontré (et la preuve était élémentaire, voir la proposition 2. que la topologie faible-étoile sur E' est séparée. Mais la séparation de la topologie fai sur E est, par contre, beaucoup moins élémentaire.

Preuve. Soient x et y deux points distincts de E. Alors $\{x\}$ est convexe compact n vide, et, puisque E est séparé, $\{y\}$ est convexe fermé non vide. D'après le théorème Hahn-Banach 6.9 (2), il existe donc une forme linéaire continue $\ell \in E'$ non nulle et $\alpha \in$ tels que l'hyperplan d'équation $\ell = \alpha$ sépare strictement $\{x\}$ et $\{y\}$. Alors

$$U = \{z \in E\ :\ \ell(z) < \alpha\} \quad \text{et} \quad V = \{z \in E\ :\ \ell(z) > \alpha\}$$

sont, quitte à les échanger, des voisinages ouverts disjoints de x et y pour la topolo faible (la moins fine rendant continue les éléments de E').

Remarque. On peut par contre montrer que si E est un espace vectoriel normé dimension infinie, alors la topologie faible sur E n'est pas métrisable.

Proposition 6.15 *Soient E un espace vectoriel topologique localement convexe sép réel et C un convexe de E. Alors C est faiblement fermé si et seulement s'il est fortem fermé.*

Preuve. Comme la topologie forte est plus fine que la topologie faible (voir la fin paragraphe 2.8), il suffit de montrer que si C est fortement fermé, alors C est faibleme fermé.

Comme un demi-espace fermé est par définition faiblement fermé, ceci découle de proposition 6.11 (1) (car une intersection de fermés est fermée).

[Pour une preuve directe, soit $x_0 \notin C$. Par le théorème de Hahn-Banach 6.9 (2) existe $\ell \in E'$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall\, x \in C, \quad \ell(x) < \alpha < \ell(x_0)\ .$$

Alors $V = \{x \in E\ :\ \ell(x) > \alpha\}$ est un voisinage faible de x_0 disjoint de C, ce qui mon que le complémentaire de C est faiblement ouvert.]

Soient E un espace vectoriel réel et C un convexe de E. Une application $\varphi : C$ $]-\infty, +\infty]$ est dite *convexe* si

$$\forall\, x, y \in C,\ \ \forall\, t \in [0,1], \quad \varphi\big(tx + (1-t)y\big) \leq t\varphi(x) + (1-t)\varphi(y)\ .$$

Par exemple, si $||\cdot||$ est une semi-norme sur E, nous avons déjà utilisé le fait que $||\cdot$ $E \to \mathbb{R}$ est convexe.

Porisme 6.16 *Soient E un espace vectoriel topologique localement convexe réel, C convexe fortement fermé de E et $\varphi : C \to\ ]-\infty, +\infty]$ une application convexe se continue inférieurement pour la topologie forte. Alors φ est semi-continue inférieurem pour la topologie faible.*

Preuve. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, montrons que $F = \{x \in C\ :\ \varphi(x) \leq \lambda\}$ est faiblement fer Or F est convexe, car φ et C sont convexes, et fortement fermé, car φ est fortem semi-continue inférieurement et C est fortement fermé. On applique alors la proposit 6.15 précédente.

Résultats de compacités pour topologies affaiblies.

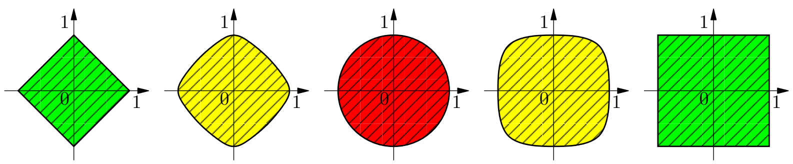
Nous avons vu (théorème de Riesz 4.18) que si E est un espace vectoriel normé réel ou complexe de dimension infinie, alors la boule unité fermée de E n'est pas compacte. Le but de cette partie est de montrer que l'on récupère des résultats de compacité à condition d'affaiblir suffisamment la topologie, tout en la gardant séparée ("moins d'ouverts implique plus de compact"), et d'étudier la structure des compacts convexes.

Soient E un espace vectoriel topologique réel ou complexe et A une partie de E. L'*enveloppe convexe fermée* de A est l'intersection de tous les convexes fermés contenant A. C'est le plus petit (pour l'inclusion) convexe fermé contenant A. Comme l'adhérence d'un convexe est convexe, c'est l'adhérence de l'intersection de tous les convexes contenant A. Si E est localement convexe réel, alors il découle de la proposition 6.11 (1) que l'enveloppe convexe de A est l'intersection de tous les demi-espaces fermés contenant A.

Si A est convexe, on dit qu'un point x de A est un *point extrémal* de A s'il n'existe aucun segment ouvert contenant x et contenu dans A, i.e. si

$$\forall\, y,z\in A,\ \forall\, t\in\,]0,1[\,,\quad x=t\,y+(1-t)z \implies y=z\ ,$$

cette dernière égalité impliquant alors que $x=y=z$.



boule unité de $||\cdot||_1$ — boule unité de $||\cdot||_{\frac{3}{2}}$ — boule unité de $||\cdot||_2$ — boule unité de $||\cdot||_4$ — boule unité de $||\cdot||_\infty$

Exercice E.63 *Soient $p\in[0,+\infty]$ et B la boule unité fermée de $\mathbb{R}^n$ muni de la norme $||\cdot||_p$ (voir le paragraphe 2.8).*

Montrer que si $p\in\,]1,+\infty[$, alors l'ensemble des points extrémaux de B est sa frontière ∂B.

Montrer que si $p=1$, alors l'ensemble des points extrémaux de B est l'ensemble des $2n$ points $\pm x_i$ où $1\le i\le n$ et $x_i=(\delta_{ij})_{1\le j\le n}$.

Montrer que si $p=\infty$, alors l'ensemble des points extrémaux de B est l'ensemble des 2^n points $(\pm1,\pm1,\dots,\pm1)$.

Soient E un espace vectoriel réel et C un convexe de E. Une application $\varphi:C\to[-\infty,+\infty[$ est *concave* si

$$\forall\, x,y\in C,\ \ \forall\, t\in[0,1],\quad \varphi\big(tx+(1-t)y\big)\ge t\varphi(x)+(1-t)\varphi(y)\ ,$$

ou, de manière équivalente, si $-\varphi$ est convexe.

Proposition 6.17 *Soient K un convexe compact non vide d'un espace vectoriel topologique localement convexe séparé réel E et $f:K\to\mathbb{R}$ une application concave semi-continue inférieurement. Alors f atteint sa borne inférieure en un point extrémal de K.*

Preuve. Notons $\mathscr{F}$ l'ensemble des parties fermées non vides X de K, telles que to[ut] segment ouvert dans K rencontrant X est contenu dans X. L'ensemble $\mathscr{F}$ vérifie [les] propriétés suivantes.

• L'ensemble $\mathscr{F}$ est non vide, car $K\in\mathscr{F}$.

• Un singleton $\{x\}$ appartient à $\mathscr{F}$ si et seulement si x est un point extrémal de [K,] par définition d'un point extrémal de K.

• Toute intersection non vide d'une famille d'éléments de $\mathscr{F}$ appartient à $\mathscr{F}$. [En] particulier, par compacité de K, l'ensemble $\mathscr{F}$ est inductif décroissant pour l'inclusio[n :] si $\mathscr{F}'$ est une partie totalement ordonnée de $\mathscr{F}$, alors $\bigcap\mathscr{F}'$ est un minorant de $\mathscr{F}'$ da[ns] $\mathscr{F}$ (cette intersection est non vide, car sinon, par compacité de K, il existerait une par[tie] finie $\mathscr{F}''$ de $\mathscr{F}'$ d'intersection vide, et un plus petit élément de $\mathscr{F}''$ serait vide, ce qui n'[est] pas possible par définition de $\mathscr{F}$).

• Montrons que si $X\in\mathscr{F}$ et si $g:K\to\mathbb{R}$ est concave et semi-continue inférieu[re]ment, en notant $Y=g^{-1}(\,]-\infty,\alpha])\cap X$ l'ensemble des points de X où g atteint sa bo[rne] inférieure $\alpha=\inf_{x\in X}\,g(x)$, alors Y appartient à $\mathscr{F}$.

En effet, comme $g_{|X}$ est semi-continue inférieurement et puisque X est compact (...] fermé dans K) et non vide, il découle des propositions 5.27 et 5.28 que Y est non vide [et] fermé. Soient x et y distincts dans K et $t\in\,]0,1[$ tels que $z=t\,x+(1-t)y\in Y$. Al[ors] $x,y\in X$ car $Y\subset X\in\mathscr{F}$. Comme g est concave, on a $\alpha=g(z)\ge t\,g(x)+(1-t)g(y)$ [...] $t\alpha+(1-t)\alpha=\alpha$, donc $g(x)=g(y)=\alpha$ et $x,y\in Y$.

Maintenant, avec (K,f) comme dans l'énoncé de la proposition 6.17, notons K' l'[en]semble des points de K où f atteint sa borne inférieure, qui appartient à $\mathscr{F}$, par ce [qui] précède. Par le théorème de Zorn 4.8 appliqué à l'ensemble, ordonné par l'inverse de l'[in]clusion, des éléments de $\mathscr{F}$ contenus dans K, l'ensemble $\mathscr{F}$ contient un élément minim[al] M contenu dans K'. Montrons que M est un singleton, donc est réduit à un point extrém[al] de K, ce qui concluera.

Par l'absurde, si x et y sont deux points distincts de M, alors par la proposition 6.[...] il existe une forme linéaire continue ℓ sur E telle que $\ell(x)<\ell(y)$. Mais alors l'ensem[ble] des points de M où ℓ atteint sa borne inférieure serait un élément de $\mathscr{F}$ strictem[ent] contenu dans M, par le quatrième point (ℓ, étant continue et linéaire, est semi-contin[ue] inférieurement et concave). Ceci n'est pas possible.

Théorème 6.18 (Théorème de Krein-Milman) *Soit K un convexe compact d[...] espace vectoriel topologique localement convexe séparé (par exemple un espace vecto[riel] normé) réel ou complexe. Alors K coïncide avec l'enveloppe convexe fermée de ses poi[nts] extrémaux.*

Preuve. Dans le cas d'un espace vectoriel complexe, la propriété de partie compac[te,] celle de partie convexe et celle de point extrémal d'un convexe sont en fait des proprié[tés] de l'espace vectoriel réel sous-jacent. Nous pouvons donc supposer que K est un conve[xe] compact dans un espace vectoriel topologique localement convexe réel E. Nous pouvo[ns] aussi supposer que K est non vide.

Soit C l'enveloppe convexe fermée de l'ensemble des points extrémaux de K. Il [est] clair que $C\subset K$. Pour montrer que $K\subset C$, il suffit, par la proposition 6.11, de mont[rer] que pour toute forme linéaire continue ℓ sur E et tout $\alpha\in\mathbb{R}$ tels que $\ell(x)\ge\alpha$ dans [C,] on a $\ell(x)\ge\alpha$ dans K. Mais ceci découle de la proposition 6.17 précédente.

Si E est un espace vectoriel normé réel ou complexe, nous noterons $\overline{B}_E$ la boule un[ité] fermée de E. En particulier, $\overline{B}_{E'}=\{f\in E'\ :\ ||f||\le1\}$.

Théorème 6.19 (Théorème de Banach-Alaoglu) *Soit E un espace vectoriel normé sur $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{K}=\mathbb{C}$. Alors la boule unité fermée $\overline{B}_{E'}$ du dual topologique E' de E est compact pour la topologie faible-étoile.*

La boule unité d'un espace vectoriel normé de dimension infinie n'est jamais compacte pour la topologie forte (théorème de Riesz 4.18). Vu l'importance de la compacité en analyse, ceci explique l'intérêt de ce résultat. Il y a bien sûr un prix à payer ; d'une part, il faut savoir que l'espace vectoriel normé sur lequel on travaille est le dual topologique, muni de la norme duale, d'un certain espace vectoriel normé, qu'il n'est pas toujours facile de trouver (voir le cours d'Analyse fonctionelle et équations aux dérivées partielles du second semestre) ; d'autre part, on obtient un résultat pour la topologie faible-étoile, et il faut parfois travailler beaucoup pour revenir aux propriétés de la topologie forte.

Preuve. On munit E' de la topologie faible-étoile, qui est séparée par la proposition 2.22. Considérons l'espace vectoriel topologique produit $\mathbb{K}^E$ et l'application linéaire $\Phi : E' \to \mathbb{K}^E$ définie par $\Phi(f) = \big(f(x)\big)_{x\in E}$, qui est clairement injective et linéaire. Montrons que $\Phi^{-1} : \Phi(E') \to E'$ est continue. Il suffit (par les propriétés de topologie initiale de la topologie faible-étoile) de montrer que pour tout x dans E, l'application de $\Phi(E')$ dans $\mathbb{K}$ définie par $s \mapsto \Phi^{-1}(s)(x)$ est continue. Mais si $s=(s_x)_{x\in E}$ alors $\Phi^{-1}(s)(x) = s_x$, et le résultat découle donc de la continuité des projections canoniques d'un produit sur chacun de ses facteurs. Nous avons

$$\Phi(\overline{B}_{E'}) = \{s\in\mathbb{K}^E \;:\; \forall\, x,y\in E,\ \forall\,\lambda\in\mathbb{K},\quad |s_x|\leq ||x||,\ \ s_{x+y}=s_x+s_y,\ \ s_{\lambda x}=\lambda s_x\}\ .$$

Par continuité des combinaisons linéaires finies de projections canoniques, et puisqu'une intersection de fermés est fermée, on en déduit que $\Phi(\overline{B}_{E'})$ est un fermé dans l'espace produit

$$\prod_{x\in E}\{\lambda\in\mathbb{K}\;:\;|\lambda|\leq||x||\}\ ,$$

qui est compact par le théorème de Tychonov 4.12. D'où le résultat, puisque l'image du compact $\Phi(\overline{B}_{E'})$ par l'application continue Φ^{-1} (à valeurs dans un espace séparé) est compacte. □

Soit X un espace topologique localement compact non vide. Nous avons vu dans le théorème 6.5 que l'espace de Banach $\mathscr{M}_{\mathbb{K}}(X)$ des mesures boréliennes régulières signées si $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, complexes si $\mathbb{K}=\mathbb{C}$, est le dual topologique de l'espace de Banach $\mathscr{C}_0(X,\mathbb{K})$ pour la norme uniforme. En particulier, nous pouvons bien considérer la topologie faible-étoile sur $\mathscr{M}(X,\mathbb{K})$ (qui est moins fine que la topologie forte, définie par la norme des mesures).

Le résultat suivant est donc une application directe du théorème de Banach-Alaoglu 6.19.

Porisme 6.20 *Soit X un espace topologique localement compact non vide, alors pour tout $c\geq 0$, le sous-ensemble $\{\mu\in\mathscr{M}_{\mathbb{K}}(X)\;:\;||\mu||\leq c\}$ est un convexe compact pour la topologie faible-étoile.* □

La *topologie vague* sur l'ensemble $\mathscr{M}_+(X)$ des mesures boréliennes, positives, finies sur les compacts, sur X est la topologie initiale définie par la famille d'applications $\big(\mu\mapsto\mu(f)\big)_{f\in\mathscr{C}_c(X,\mathbb{R})}$ de $\mathscr{M}_+(X)$ dans $\mathbb{R}$. Notons que ces applications sont bien définies, par la condition de finitude sur les compacts des mesures. Les propriétés suivantes découlent des propriétés des topologies initiales.

- La topologie vague est la topologie la moins fine rendant continues les applicati $\mu\mapsto\mu(f)$ pour $f\in\mathscr{C}_c(X,\mathbb{R})$.
- Si $\mu_0\in\mathscr{M}_+(X)$, alors l'ensemble des parties de la forme

$$V_{\epsilon,f_1,\dots,f_n}(\mu_0) = \big\{\mu\in\mathscr{M}_+(X)\;:\;\ \forall\, i\in\{1,\dots,n\},\ \ |\mu(f_i)-\mu_0(f_i)|<\epsilon\big\}$$

lorsque $\epsilon>0$, $n\in\mathbb{N}$ et $f_1,\dots,f_n\in\mathscr{C}_c(X,\mathbb{R})$, est un système fondamental de voisina de μ_0 dans $\mathscr{M}_+(X)$ pour la topologie vague.

Sur l'ensemble $\mathscr{M}_+(X)\cap\mathscr{M}_{\mathbb{R}}(X)$ (des mesures boréliennes positives régulières finies X, qui est un cône convexe dans $\mathscr{M}_{\mathbb{R}}(X)$), nous pouvons considérer à la fois la topolo (induite par la topologie) vague de $\mathscr{M}_+(X)$ et la topologie (induite par la topolog faible-étoile de $\mathscr{M}_{\mathbb{R}}(X)$.

Lemme 6.21 *Sur tout borné de $\mathscr{M}_+(X)\cap\mathscr{M}_{\mathbb{R}}(X)$, les topologies vague et faible-éto coïncident.*

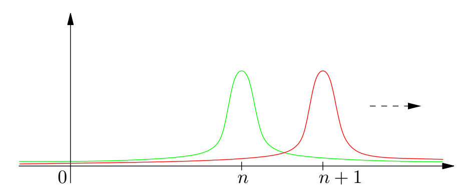
Rappelons que si X est compact, alors $\mathscr{C}_c(X,\mathbb{K})=\mathscr{C}_0(X,\mathbb{K})=\mathscr{C}(X,\mathbb{K})$, donc résultat est trivial.

Preuve. Comme $\mathscr{C}_c(X,\mathbb{R})$ est dense dans $\mathscr{C}_0(X,\mathbb{R})$ par la proposition 6.4, le résul découle de la proposition 2.23.

Notons $\mathrm{Prob}(X)$ l'espace des mesures positives boréliennes régulières sur X, de ma totale 1. C'est clairement un convexe borné de $\mathscr{M}(X,\mathbb{R})$.

Porisme 6.22 *Soit X un espace compact, alors* $\mathrm{Prob}(X)$ *est un convexe compact pour topologie vague.*

L'hypothèse de compacité dans ce corollaire est nécessaire : la suite des masses Dirac aux points entiers n de $\mathbb{R}$ est une suite de mesures de probabilité sur l'espace r compact $\mathbb{R}$, qui converge vaguement vers 0 (qui n'est pas une mesure de probabilit quand $n\to+\infty$. De même, si λ_n est la mesure gaussienne translatée par n, alors la su $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vaguement vers la mesure nulle.



Ce problème de perte de masse à l'infini intervient souvent dans l'étude de converger de suites de mesures de probabilité.

Preuve. Par compacité de X, les topologies vague et faible-étoile coïncident sur Prob(Montrons que $\mathrm{Prob}(X)$ est un fermé faible-étoile de $\{\mu\in\mathscr{M}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R})\;:\;||\mu||\leq 1\}$, qui compact par le corollaire 6.20 précédent, ce qui conclut.

Une mesure réelle est positive si et seulement si, pour tout f dans $\mathscr{C}_0(X,\mathbb{K})$ telle $f\geq 0$, on a $\mu(f)\geq 0$. L'application constante f_1 de valeur 1 appartient à $\mathscr{C}_0(X,\mathbb{K})$ $\mathscr{C}(X,\mathbb{K})$ car X est compact, et μ est de probabilité si et seulement si $\mu(f_1)=1$. résultat découle alors du fait qu'une intersection de fermés est un fermé.

Proposition 6.23 *Soit E un espace vectoriel normé réel ou complexe.*

(1) $\overline{B}_{E'}$ est métrisable pour la topologie faible-étoile si et seulement si E est séparable.

(2) $\overline{B}_{E}$ est métrisable pour la topologie faible si et seulement si E' est séparable.

Par le théorème de Banach-Alaoglu 6.19, il découle de (1) que si E est séparable, alors la topologie faible-étoile sur $\overline{B}_{E'}$ est métrisable compacte, donc séparable. Donc la topologie faible-étoile sur E' est séparable. Mais cela n'implique pas que la topologie forte sur E' soit séparable.

Preuve. (1) Supposons que E soit séparable, et montrons que $\overline{B}_{E'}$ est métrisable pour la topologie faible-étoile. Nous avons vu (voir la fin du paragraphe 2.8) que la topologie faible-étoile sur E' est la topologie définie par la famille de semi-normes $\big(||\cdot||_x\big)_{x\in E}$ où

$$\forall\, x\in E,\ \ \forall\, \ell\in E',\quad ||\ell||_x=|\ell(x)|\ .$$

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'image dense dans E. Montrons que la restriction à $\overline{B}_{E'}$ de la topologie faible-étoile coïncide avec la restriction à $\overline{B}_{E'}$ de la topologie définie par la famille dénombrable de semi-normes $\big(||\cdot||_{x_n}\big)_{n\in\mathbb{N}}$. Cette famille est séparante (si $\ell\in E'-\{0\}$, alors il existe $x\in E$ tel que $\ell(x)\neq 0$, et donc $\ell(x_n)\neq 0$ si x_n est assez proche de x, par continuité de ℓ). La proposition 2.1 (2) impliquera alors que $\overline{B}_{E'}$ est métrisable.

La coincidence des ces topologies découle de la proposition 2.23, mais nous redonnons l'argument. Par linéarité (et l'autre sens étant évident), il suffit de montrer que tout voisinage faible-étoile de 0 contient un voisinage de 0 pour la topologie définie par $\big(||\cdot||_{x_n}\big)_{n\in\mathbb{N}}$. Soient $\epsilon>0$, $x\in E$ et $U=\{\ell\in\overline{B}_{E'}\ :\ |\ell(x)|<\epsilon\}$. Soit $n\in\mathbb{N}$ tel que $||x-x_n||\leq\frac{\epsilon}{2}$. Si $\ell\in\overline{B}_{E'}$ vérifie $|\ell(x_n)|<\frac{\epsilon}{2}$, alors

$$|\ell(x)|=|\ell(x-x_n)+\ell(x_n)|\leq||\ell||\,||x-x_n||+|\ell(x_n)|<1\times\frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2}=\epsilon\ .$$

Donc $\{\ell\in\overline{B}_{E'}\ :\ |\ell(x_n)|<\frac{\epsilon}{2}\}\subset U$ et le résultat en découle.

Réciproquement, supposons que d soit une distance sur $\overline{B}_{E'}$ induisant la topologie faible-étoile, et montrons que E est séparable. Pour tout n dans $\mathbb{N}$, soient $\epsilon_n>0$ et F_n une partie finie de E telle que

$$\big\{\ell\in\overline{B}_{E'}\ :\ \forall\, x\in F_n,\quad |\ell(x)|<\epsilon_n\big\}\subset\Big\{\ell\in\overline{B}_{E'}\ :\ d(\ell,0)<\frac{1}{n+1}\Big\}\ .$$

Alors $D=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}F_n$ est dénombrable. Puisque l'intersection des boules de rayons $\frac{1}{n+1}$ centrées en 0 est réduite à $\{0\}$, on en déduit que pour tout $\ell\in\overline{B}_{E'}$, donc pour tout $\ell\in E'$, si $\ell(x)=0$ pour tout x dans D, alors ℓ est nulle. Par la proposition 6.12, ceci implique que l'espace vectoriel engendré par D est dense dans E. En prenant l'ensemble des combinaisons linéaires finies à coefficients rationnels des éléments de D, on montre donc que E est séparable.

(2) Le fait que si E' est séparable, alors $\overline{B}_E$ est métrisable pour la topologie faible se montre de manière complètement similaire. La réciproque, plus subtile, est admise ici. $\square$

Porisme 6.24 *(1) Si X est un espace métrisable dénombrable à l'infini, alors pour tout $c\geq 0$, l'espace $\{\mu\in\mathscr{M}_{\mathbb{K}}(X)\ :\ ||\mu||\leq c\}$ est métrisable pour la topologie faible-étoile.*

(2) Si X est un espace métrisable compact, alors $\operatorname{Prob}(X)$ est métrisable compact pour la topologie vague.

Preuve. (1) Si X est métrisable et dénombrable à l'infini (donc localement compac alors $\mathscr{C}_c(X,\mathbb{K})$ est séparable pour la norme uniforme, par la proposition 5.43. Com $\mathscr{C}_c(X,\mathbb{K})$ est dense dans $\mathscr{C}_0(X,\mathbb{K})$, l'espace de Banach $\mathscr{C}_0(X,\mathbb{K})$ est donc séparable po la norme uniforme. Puisque $\mathscr{M}_{\mathbb{K}}(X)$ est le dual topologique de $\mathscr{C}_0(X,\mathbb{K})$, sa boule un fermée est donc métrisable pour la topologie faible-étoile, par la proposition 6.23. première assertion s'en déduit.

(2) La seconde assertion découle de la première, par le corollaire 6.22 et l'égalité $\operatorname{Prob}(X)$ des topologies vague et faible-étoile, X étant compact (voir le lemme 6.21).

Applications de la théorie de Baire.

Dans ce sous-paragraphe, les espaces vectoriels et les applications linéaires sont $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{K}=\mathbb{C}$.

Les trois résultats suivant sont des conséquences de la complétude. Le premier s'appe « Principle of Uniform Boundedness » dans la littérature anglo-saxone.

Théorème 6.25 (Théorème de Banach-Steinhaus) *Soient E un espace de Fréc et F un espace vectoriel normé. Soit $\mathscr{F}=(u_\alpha)_{\alpha\in\mathscr{A}}$ une famille d'applications linéai continues de E dans F. On suppose que*

$$\forall\, x\in E,\quad \sup_{\alpha\in\mathscr{A}}\ ||u_\alpha(x)||\ <+\infty\ .$$

Alors $\mathscr{F}$ est équicontinue.

Si E est un espace de Banach, la conclusion de ce théorème signifie (voir le paragrap 5.5) que

$$\sup_{\alpha\in\mathscr{A}}\ ||u_\alpha||\ <+\infty\ ,$$

ou autrement dit que

$$\exists\, c>0,\ \forall\, x\in E,\ \forall\, \alpha\in\mathscr{A},\quad \sup_{\alpha\in\mathscr{A}}\ ||u_\alpha(x)||\ \leq c\,||x||\ .$$

Preuve. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, considérons

$$F_n=\{x\in E\ :\ \forall\, \alpha\in\mathscr{A},\ ||u_\alpha(x)||\ \leq n\}\ .$$

Alors F_n est fermé (comme intersection de fermés, par continuité de $x\mapsto||u_\alpha(x)||$). I l'hypothèse du théorème de Banach-Steinhaus $E=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}F_n$. Par le théorème de Ba 5.46, il existe N dans $\mathbb{N}$ tel que l'intérieur de F_N soit non vide. Soient $x_0\in E$ et V voisinage de 0 dans E tel que $x_0+V\subset F_N$. Alors pour tout x dans V, pour tout $\alpha\in$ on a

$$||u_\alpha(x)||\leq||u_\alpha(x+x_0)||+||u_\alpha(x_0)||\leq N+||u_\alpha(x_0)||\ ,$$

ce qui montre que $\mathscr{F}$ est équicontinue en 0, donc partout par linéarité.

Théorème 6.26 (Théorème de l'image ouverte) *Soient E et F deux espaces Fréchet, et u une application linéaire, continue, surjective. Alors u est ouverte.*

De plus, si N est le noyau de u, alors u induit par passage au quotient un isomorphis (d'espaces vectoriels topologiques) entre l'espace de Fréchet quotient E/N et F.

Si u n'est pas surjective, alors on peut montrer (voir la preuve de l'étape 1 ci-dessous ou [Die2, page 87]) que le sous-espace vectoriel image $u(E)$ est maigre (i.e. négligeable au sens de Baire) dans F.

Preuve. On considère sur E et F des distances complètes induisant la topologie et invariantes par translations (voir la définition 3.15). Remarquons que pour tout $\eta > 0$, on a $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} n\,B(0,\eta)$, car pour tout x dans E, la suite $(x/n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 (quand n tend vers $+\infty$), donc x/n appartient au voisinage ouvert $B(0,\eta)$ de 0 pour n assez grand.

Le théorème découle des deux étapes suivantes.

Étape 1 : Montrons que pour tout $r > 0$, il existe $\rho > 0$ tel que $B(0,\rho) \subset \overline{u(B(0,r))}$. Par linéarité de u, par l'invariance par translations des distances et puisque les translations sont des homéomorphismes, on en déduit que pour tout x dans E, on a $B(u(x),\rho) \subset \overline{u(B(x,r))}$.

Preuve. Soit $F_n = \overline{n\,u(B(0,\frac{r}{2}))}$. Puisque u est linéaire et surjectif (et par la remarque préliminaire), on a $F = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$. Par le théorème de Baire 5.46, il existe N dans $\mathbb{N}$ tel que l'intérieur de F_N soit non vide. Comme les homothéties sont des homéomorphismes, l'intérieur de $\overline{u(B(0,\frac{r}{2}))}$ est non vide. Donc il existe $y \in F$ et $\rho > 0$ tel que $B(y,\rho) \subset \overline{u(B(0,\frac{r}{2}))}$. En particulier, par l'invariance de la distance par translations, la continuité de l'addition, la linéarité de u et l'inégalité triangulaire,

$$B(0,\rho) = -y + B(y,\rho) \subset -y + \overline{u(B(0,\frac{r}{2}))} \subset \overline{u(B(0,\frac{r}{2}))} + \overline{u(B(0,\frac{r}{2}))}$$
$$\subset \overline{u(B(0,\frac{r}{2}) + B(0,\frac{r}{2}))} \subset \overline{u(B(0,r))}\,. \quad \square$$

Étape 2 : Soient X et Y deux espaces métriques, tels que X soit complet, et $u : X \to Y$ une application continue telle que pour tout $r > 0$, il existe $\rho > 0$ tel que pour tout x dans X, on ait $B(u(x),\rho) \subset \overline{u(B(x,r))}$. Alors $B(u(x),\rho) \subset u(B(x,2r))$, et en particulier, u est ouverte.

Preuve. En effet, soit $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergeant vers 0 telle que $\rho_0 = \rho$ et telle que pour tout x dans X, on ait $B(u(x),\rho_n) \subset \overline{u(B(x,2^{-n}r))}$. Soient $x \in X$ et $y \in B(u(x),\rho)$, montrons que $y \in u(B(x,2r))$.

Par récurrence, on construit une suite de points $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans X telle que $u(x_n) \in B(y,\rho_n)$ et, si $n \geq 1$, alors $x_n \in B(x_{n-1}, 2^{-n+1}r)$. Posons $x_0 = x$, qui convient. Soit $n \geq 1$ et supposons construits $x_0,\dots,x_{n-1}$ qui conviennent. Alors $y \in B(u(x_{n-1}),\rho_{n-1}) \subset \overline{u(B(x_{n-1},2^{-n+1}r))}$. Donc il existe $x_n \in B(x_{n-1},2^{-n+1}r)$ tel que $u(x_n) \in B(y,\rho_n)$, ce qui montre le résultat. Maintenant, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans X, car par inégalité triangulaire, pour tous n,p dans $\mathbb{N}$,

$$d(x_n,x_{n+p}) \leq \sum_{i=0}^{p-1} d(x_{n+i},x_{n+i+1}) \leq \sum_{i=0}^{p-1} 2^{-n-i}r \;\leq 2^{-n+1}r\,.$$

Comme X est complet, cette suite converge vers un point x' de X tel que $d(x_0,x') \leq 2r$. Par continuité de u et puisque $d(u(x_n),y) \leq \rho_n$, on a $u(x') = \lim_{n\to+\infty} u(x_n) = y$. Le résultat en découle. $\square$

Les étapes 1 et 2 montrent la première assertion du théorème. Le noyau N de u est fermé, car u est continue. Donc la topologie quotient de E/N fait de E/N un espace de

Fréchet (voir l'exercice corrigé E.45 (i), et la proposition 3.18 dans le cas des espaces Banach). La dernière assertion vient du fait que l'application $\overline{u}$, obtenue par passage quotient de u par la projection canonique $\pi : E \to E/N$, est bijective, continue et ouve (car $\overline{u}(U) = u(\pi^{-1}(U))$ pour tout $U \subset E/N$).

Porisme 6.27 (Théorème de Banach) *Soient E et F deux espaces de Fréchet. Al toute application linéaire continue et bijective de E dans F est un isomorphisme (d'espa vectoriels topologiques).*

En particulier, si $f : E \to F$ est une application linéaire continue bijective entre de espaces de Banach, alors $f^{-1} : F \to E$ est aussi continue.

Porisme 6.28 *Soient E un espace vectoriel, et $||\cdot||_1$ et $||\cdot||_2$ deux normes complè sur E, telles qu'il existe $c \geq 0$ telle que $||\cdot||_2 \leq c\,||\cdot||_1$. Alors ces deux normes s équivalentes.*

Preuve. Ces normes munissent toutes deux E d'une structure d'espace de Banach, et applique le corollaire précédent à l'identité de $(E,||\cdot||_1)$ dans $(E,||\cdot||_2)$, qui est biject et continue.

Théorème 6.29 (Théorème du graphe fermé) *Soient E et F deux espaces de F chet. Une application linéaire u de E dans F est continue si et seulement si son grap*

$$G = \{(x,y) \in E \times F \;:\; y = u(x)\}$$

est fermé dans l'espace produit $E \times F$.

En particulier, en utilisant la caractérisation séquentielle de la continuité et la linéar de u, une application linéaire $u : E \to F$ entre deux espaces de Fréchet (par exemp deux espaces de Banach) est continue si (et seulement si) pour tout suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans convergeant vers 0 telle que $\big(u(x_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $y \in F$, on a $y = 0$. C'est souv sous cette forme que l'on utilise le théorème du graphe fermé.

Preuve. On sait (voir le quatrième point de l'exercice corrigé E.77 du paragraphe 8 que toute application continue à valeur dans un espace séparé est de graphe fermé.

Réciproquement, si G est fermé, alors par linéarité de u, le graphe G est un so espace vectoriel fermé du produit $E \times F$ de deux espaces de Fréchet. Donc G est espace de Fréchet (voir les propositions 3.16 et 3.17 (iii)). La restriction de la premi projection ${\rm pr_1}_{|G} : G \to E$ est linéaire, continue et bijective, donc c'est un isomorphis par le théorème de Banach 6.27. Donc $u = {\rm pr}_2 \circ {{\rm pr_1}_{|G}}^{-1}$ est continue.

Voici une conséquence du théorème du graphe fermé.

Proposition 6.30 *Soient E et F deux espaces de Fréchet, et $u : E \to F$ une applicat linéaire.*

Alors u est continue pour les topologies fortes de E et F si et seulement si u continue pour les topologies faibles de E et F.

Preuve. Si u est fortement continue, alors pour toute forme linéaire fortement contin $\ell' : F \to \mathbb{K}$, la forme linéaire $\ell' \circ u$ est fortement continue, donc faiblement continue (définition de la topologie faible !). Donc u est faiblement continue, par les propriétés topologie initiale de la topologie faible.

Réciproquement, si u est faiblement continue, si $x_n \to 0$ et $u(x_n) \to y$, alors x_n – et $u(x_n) \rightharpoonup y$, et donc $y = 0$ par la continuité faible de u. On conclut par le théorème graphe fermé.

6.2 Espaces de Hilbert

Si z est un nombre complexe, nous noterons comme d'habitude $\overline{z}$ le conjugué de z et Re z sa partie réelle, en rappelant que si z est réel, alors $\overline{z} = z$ et Re $z = z$, ce qui permet de donner des formules valables aussi bien pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Si E est un espace vectoriel complexe, notons $\overline{E}$ l'espace vectoriel E (dit *conjugué* de E) où la multiplication par un scalaire est remplacée par

$$(\lambda, x) \mapsto \overline{\lambda}\, x \ .$$

Si E est un espace vectoriel réel, la notation $\overline{E}$ désigne encore l'espace vectoriel réel E. Remarquons que $\overline{\overline{E}} = E$.

Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Tout sous-espace vectoriel de $\overline{E}$ est un sous-espace vectoriel de E, et réciproquement. Toute norme de E est une norme de $\overline{E}$, et réciproquement. Une application *anti-linéaire* de E dans F est une application linéaire de $\overline{E}$ dans F, i.e. une application $f : E \to F$ telle que

$$\forall\, x, y \in E, \ \ \forall\, \lambda \in \mathbb{K}, \quad \ell(x+y) = \ell(x) + \ell(y) \ \ \text{ et } \ \ \ell(\lambda x) = \overline{\lambda}\, \ell(x) \ .$$

En particulier, si E est un espace vectoriel topologique sur $\mathbb{K}$, alors $\overline{E}\,' = \overline{E'}$ est l'espace vectoriel des applications continues $\ell : E \to \mathbb{K}$ telles que, pour tous x, y dans E et λ dans $\mathbb{K}$, on ait $\ell(x+y) = \ell(x) + \ell(y)$ et $\ell(\lambda x) = \overline{\lambda}\, \ell(x)$. Remarquons que si $u : E \to F$ est une application linéaire, alors $u : \overline{E} \to \overline{F}$ est encore une application linéaire. Bien sur, si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, les applications anti-linéaires sont les applications linéaires.

Soient E, F, G trois espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$. Une application $f : E \times F \to G$ est *sesquilinéaire* si $f : E \times \overline{F} \to G$ est une application bilinéaire. Une *forme sesquilinéaire* est une application sesquilinéaire $f : E \times F \to \mathbb{K}$. Bien sur, si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, les applications sesquilinéaires sont les applications bilinéaires.

Rappels sur les espaces préhilbertiens et définitions.[4]

Soit $\mathscr{H}$ un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{K} = \mathbb{C}$).

Un *produit scalaire* sur $\mathscr{H}$ est une forme sesquilinéaire (bilinéaire si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$), hermitienne (symétrique si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$), définie positive sur $\mathbb{H}$, i.e. une application $B : \mathscr{H} \times \mathscr{H} \to \mathbb{K}$ telle que

(1) [linéarité à gauche]

$$\forall\, u, u', v \in \mathscr{H},\ \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad B(u + \lambda u', v) = B(u, v) + \lambda\, B(u', v) \ ,$$

(2) [hermitienne]

$$\forall\, u, v \in \mathscr{H}, \quad B(v, u) = \overline{B(u, v)} \ ,$$

(3) [définie positive]

$$\forall\, u \in \mathscr{H}, \quad B(u, u) \geq 0 \ ,$$

et $B(u, u) = 0$ si et seulement si $u = 0$.

[4] Ou, entre $\underset{\text{parent}}{(}\ \underset{\text{thèse}}{)}$, une histoire de $\underset{\text{bra}}{\overset{\langle}{\text{croc}}}\ \underset{\text{ket}}{\overset{\rangle}{\text{chais}}}$.

Les propriétés (1) et (2) impliquent que B est anti-linéaire à droite, i.e. que

$$\forall\, u, v, v' \in \mathscr{H},\ \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad B(u, v + \lambda v') = B(u, v) + \overline{\lambda}\, B(u, v') \ ,$$

et donc que B est bien sesquilinéaire.

Nous noterons

$$B(u, v) = \langle u, v \rangle = \langle u, v \rangle_{\mathscr{H}} \ ,$$

ce dernier lorsque l'on veut préciser $\mathscr{H}$.

L'application de $\mathscr{H}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $u \mapsto ||u|| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$ est appelée la *nor associée au produit scalaire* $\langle \cdot, \cdot \rangle$ (voir la proposition 6.31 pour la justification de la ter nologie).

Deux éléments u, v de $\mathscr{H}$ sont dit *orthogonaux* (pour le produit scalaire considéré) $\langle u, v \rangle = 0$, et on note alors parfois $u \perp v$. La relation « être orthogonal à » est symétriq Si E, F sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathscr{H}$, on dit que E et F sont *orthogonau* tout élément de E est orthogonal à tout élément de F. Si E est un sous-espace vecto de $\mathscr{H}$, on appelle *orthogonal* de E le sous-espace vectoriel

$$E^{\perp} = \{x \in \mathscr{H} \ : \ \forall\, y \in E, \ \ \langle x, y \rangle = 0\}$$

des éléments de $\mathscr{H}$ orthogonaux à tout élément de E.

Formulaire. Soient u et v dans $\mathscr{H}$. La norme associée à un produit scalaire vérifie, p les caractères sesquilinéaire et hermitien, que $\mathbb{K}$ vaille $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$,

$$||u + v||^2 = ||u||^2 + ||v||^2 + 2\,\mathrm{Re}\,\langle u, v \rangle \ .$$

En particulier, elle vérifie l'*identité de Pythagore* : si u et v sont orthogonaux, alors

$$||u + v||^2 = ||u||^2 + ||v||^2 \ ,$$

et par récurrence, si $u_1, \dots, u_n \in \mathscr{H}$ sont deux à deux orthogonaux, alors

$$||u_1 + \dots + u_n||^2 = ||u_1||^2 + \dots + ||u_n||^2 \ .$$

Elle vérifie l'*identité de la médiane* :

$$\Big|\Big|\frac{u+v}{2}\Big|\Big|^2 + \Big|\Big|\frac{u-v}{2}\Big|\Big|^2 = \frac{1}{2}\left(||u||^2 + ||v||^2\right) \ ,$$

ainsi que

$$||u + v||^2 - ||u - v||^2 = 4\,\mathrm{Re}\,\langle u, v \rangle \ .$$

La proposition suivante a déjà été démontrée l'année dernière.

Proposition 6.31 *Soit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un produit scalaire sur $\mathscr{H}$. Sa norme associée est une nor sur $\mathscr{H}$. Elle vérifie l'inégalité de Cauchy-Schwarz*

$$\forall\, u, v \in \mathscr{H}, \quad |\,\langle u, v \rangle\,| \leq ||u||\,||v|| \ ,$$

avec égalité si et seulement si u et v sont colinéaires.

Preuve. Soient u et v dans $\mathscr{H}$. L'inégalité de Cauchy-Schwarz (ainsi que son cas d'égalité) est immédiate si $\langle u,v\rangle = 0$. Sinon, pour tout X dans $\mathbb{R}$, posons $\lambda = X\frac{\langle u,v\rangle}{|\langle u,v\rangle|}$. Alors

$$||u+\lambda v||^2 = ||u||^2 + |\lambda|^2\,||v||^2 + 2\,\mathrm{Re}\,\big(\overline{\lambda}\,\langle u,v\rangle\big) = ||u||^2 + X^2\,||v||^2 + 2\,X|\,\langle u,v\rangle\,|\ .$$

Ce polynôme quadratique réel en X étant positif, est de discriminant (réduit) négatif, donc $|\langle u,v\rangle|^2 - ||u||^2||v||^2 \leq 0$, ce qui montre l'inégalité de Cauchy-Schwarz. S'il y a égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz, alors ce polynôme a une racine double, donc il existe $\lambda\in\mathbb{K}$ tel que $||u+\lambda v||^2 = 0$, ce qui implique que u et v sont colinéaires.

Il est immédiat que $||\lambda u||^2 = |\lambda|^2\,||u||^2$, et, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned}||u+v||^2 &= ||u||^2 + ||v||^2 + 2\,\mathrm{Re}\,\langle u,v\rangle \leq ||u||^2 + ||v||^2 + 2\,|\,\langle u,v\rangle\,| \\ &\leq ||u||^2 + ||v||^2 + 2\,||u||\,||v|| = \big(||u|| + ||v||\big)^2\ .\end{aligned}$$

Comme le produit scalaire est défini positif, ceci montre que $||\cdot||$ est une norme sur $\mathscr{H}$. □

En particulier, pour tous x,y dans $\mathscr{H}$, il découle de l'inégalité de Cauchy-Schwarz et en considérant $y = x/||x||$ si $x\neq 0$ que

$$||x|| = \sup_{||y||=1}\ \langle x,y\rangle\ .$$

De plus, le résultat précédant montre que le produit scalaire, en tant qu'application de $\mathscr{H}\times\mathscr{H}\to\mathbb{K}$, est continu (en $(0,0)$ donc en tout point) pour la topologie sur $\mathscr{H}$ induite par sa norme associée. En particulier, l'orthogonal d'un sous-espace vectoriel est fermé.

Une *norme préhilbertienne* sur $\mathscr{H}$ est une norme associée à un produit scalaire sur $\mathscr{H}$. Elle détermine le produit scalaire, par la première formule du formulaire ci-dessus, avec la relation $\mathrm{Im}\ \langle u,v\rangle =\ \mathrm{Re}\ \langle u, i\,v\rangle$ si $\mathbb{K}=\mathbb{C}$. Un *espace préhilbertien* est un espace vectoriel réel ou complexe muni d'un produit scalaire.

Deux espaces préhilbertiens $\mathscr{H}_1$ et $\mathscr{H}_2$ sont *isomorphes* s'il existe un isomorphisme linéaire $\varphi:\mathscr{H}_1\to\mathscr{H}_2$ préservant les produits scalaires, i.e. tel que

$$\forall\ u,v\in\mathscr{H}_1,\quad \langle\varphi(u),\varphi(v)\rangle_{\mathscr{H}_2} = \langle u,v\rangle_{\mathscr{H}_1}\ .$$

Il est équivalent de demander qu'un isomorphisme linéaire $\varphi:\mathscr{H}_1\to\mathscr{H}_2$ préserve les produits scalaires ou qu'il soit *isométrique*, i.e. qu'il préserve les normes associées, au sens que

$$\forall\ u\in\mathscr{H}_1,\quad ||\varphi(u)||_{\mathscr{H}_2} = ||u||_{\mathscr{H}_1}\ .$$

Si $\mathscr{H}$ est un espace préhilbertien, on note $U(\mathscr{H})$ le groupe des automorphismes *unitaires* de $\mathscr{H}$, i.e. des isomorphismes linéaires de $\mathscr{H}$ dans $\mathscr{H}$ préservant le produit scalaire.

Une *norme hilbertienne* est une norme préhilbertienne complète. Un *espace de Hilbert* est un espace préhilbertien complet (pour la norme associée).

En particulier, muni de sa norme hilbertienne, c'est un espace de Banach. Mais la classe des espaces de Hilbert est une classe très particulière d'espaces de Banach, et l'on se gardera bien de généraliser les propriétés des premiers aux seconds.

Si $\mathscr{H}$ est un espace de Hilbert, alors $U(\mathscr{H})$ est un sous-groupe topologique fermé du groupe topologique $\mathscr{GL}(\mathscr{H})$ des homéomorphismes linéaires de l'espace vectoriel normé $\mathscr{H}$.

Exemples. (1) Pour tout $n\in\mathbb{N}$, l'espace $\mathbb{R}^n$ (resp. $\mathbb{C}^n$) muni du produit scalaire, *euclidien standard* (resp. *hermitien standard*),

$$\langle x,y\rangle = \sum_{i=1}^n x_iy_i \quad (\text{resp. } \sum_{i=1}^n x_i\overline{y_i}\ )$$

où $x=(x_1,\dots,x_n)$ et $y=(y_1,\dots,y_n)$, est un espace de Hilbert réel (resp. complexe) dimension finie.

(2) L'espace vectoriel normé complété d'un espace vectoriel réel ou complexe m d'un produit scalaire est un espace de Hilbert (voir le théorème 5.24), car le prod scalaire B, étant uniformément continu sur les bornés par

$$|B(u,v)-B(u',v')| = |B(u-u',v)+B(u',v-v')| \leq ||u-u'||\,||v|| + ||u'||\,||v-v'||$$

se prolonge continuement de manière unique au complété, en un produit scalaire qui ind la norme complétée, par passage à la limite.

(3) Soit $(X,\mathscr{A},\mu)$ un espace mesuré. Alors comme vu en cours d'Intégration et p babilité, $\mathbb{L}^2(X,\mathscr{A},\mu)$, muni du produit scalaire

$$\langle f,g\rangle = \int_{x\in X} f(x)\overline{g(x)}\ d\mu(x)\ ,$$

est un espace de Hilbert, qui est séparable si μ est σ-finie et si la tribu (σ-algèbre) $\mathscr{A}$ engendrée par une partie dénombrable (voir le théorème 6.3 et [Coh, page 110]).

En particulier, pour tout $r\in\mathbb{N}-\{0\}$ et tout ouvert non vide Ω de $\mathbb{R}^r$, l'espace $\mathbb{L}^2($ muni du produit scalaire

$$\langle f,g\rangle = \int_{x\in\Omega} f(x)\overline{g(x)}\ dx$$

est un espace de Hilbert séparable. Par exemple, pour tout $a>0$,

$$U_a: u\mapsto \Big\{x\mapsto \frac{1}{a^{r/2}}\,u\big(\frac{x}{a}\big)\Big\}$$

est un automorphisme unitaire de $\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^r)$.

(4) Soit $\mathscr{H}$ un espace de Hilbert sur $\mathbb{K}$ (par exemple $\mathscr{H}=\mathbb{K}$). L'espace $\ell^2(\mathscr{H})$ suites dans $\mathscr{H}$, dont la suite des carrés des normes est sommable, muni du produit scala

$$\langle x,y\rangle = \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle x_n,y_n\rangle_{\mathscr{H}}\ ,$$

où $x=(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $y=(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, est un espace de Hilbert sur $\mathbb{K}$, séparable si $\mathscr{H}$ séparable.

Projection sur un convexe fermé.

Théorème 6.32 *Soient $\mathscr{H}$ un espace de Hilbert réel ou complexe et C un convexe fer non vide de $\mathscr{H}$. Alors pour tout $x\in\mathscr{H}$, il existe un unique $y=p_C(x)$ dans C tel que*

$$||x-y|| = \min_{z\in C}||x-z||\ .$$

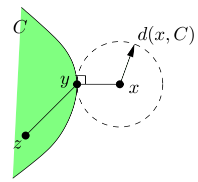
De plus, $p_C : \mathscr{H} \to C$ est 1-lipschitzienne et $p_C(x)$ est l'unique élément y de $\mathbb{H}$ tel que

$$y \in C \quad \text{et} \quad \forall\, z \in C, \quad \mathrm{Re}\,\langle x-y, z-y\rangle \leq 0\ .$$

Si C est un sous-espace vectoriel fermé de $\mathscr{H}$, alors p_C est linéaire, et $p_C(x)$ est l'unique élément y de C tel que $x - p_C(x)$ soit orthogonal à tout élément de C.

On appelle $y = p_C(x)$ la *projection* (orthogonale ou hilbertienne) de x sur C, qui est donc l'unique point de C tel que

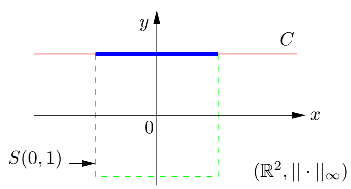
$$d(x,y) = d(x,C)\ .$$



L'existence et l'unicité des projections sont des propriétés cruciales des espaces de Hilbert. Par exemple dans l'espace de Banach $\mathbb{R}^2$ muni de la norme

$$||(x,y)||_\infty = \max\{|x|,|y|\}\ ,$$

une projection d'un point x sur un convexe fermé non vide C existe certes par un argument de compacité, mais elle n'est pas forcément unique. Plus précisément, le sous-espace C des points (x,y) tels que $y=1$ est un sous-espace affine (en dimension finie), donc convexe fermé non vide. L'ensemble des projections de $x=(0,0)$ sur C (i.e. des points de C minimisant la distance à x) est exactement $[-1,1]\times\{1\}$.



Preuve. Soit $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans C telle que

$$\lim_{n\to\infty} ||x-y_n|| = \inf_{z\in C} ||x-z|| = d(x,C)\ .$$

Comme $||u+v||^2 - ||u-v||^2 = 4\,\mathrm{Re}\,\langle u,v\rangle$, il vient

$$\begin{aligned} ||y_m-y_n||^2 &= ||y_m-x||^2 + ||y_n-x||^2 - 2\,\mathrm{Re}\,\langle y_m-x, y_n-x\rangle \\ &= ||y_m-x||^2 + ||y_n-x||^2 - \frac{1}{2}||2x-y_m-y_n||^2 + \frac{1}{2}||y_m-y_n||^2\ . \end{aligned}$$

Comme $\frac{y_n+y_m}{2}$ appartient à C par convexité, on a $||x-\frac{y_n+y_m}{2}|| \geq d(x,C)$. Donc

$$\frac{1}{2}||y_m-y_n||^2 \leq ||y_m-x||^2 + ||y_n-x||^2 - 2\,d(x,C)^2\ .$$

Comme le membre de droite tends vers 0 quand $n\to+\infty$ et $m\geq n$, et puisque le membre de gauche est positif, on en déduit donc que la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans C, donc converge vers un point $y\in\mathscr{H}$, car $\mathscr{H}$ est complet. Ce point y appartient à C, car C est

fermé, et il vérifie $||x-y|| = \inf_{z\in C}\ ||x-z||$ par passage à la limite ; en particulier ce borne inférieure est atteinte, en au moins un point, que nous noterons $p_C(x)$.

Pour tout $y\in C$, par convexité de C, en raisonnant par équivalence, nous avons

$$\forall\, z\in C, \quad ||x-z||^2 \geq ||x-y||^2$$

si et seulement si

$$\forall\, z\in C,\ \forall\, t\in[0,1] \quad ||x-\big(tz+(1-t)y\big)||^2 \geq ||x-y||^2$$

si et seulement si

$$\forall\, z\in C,\ \forall\, t\in[0,1] \quad ||x-y-t(z-y)||^2 \geq ||x-y||^2$$

si et seulement si

$$\forall\, z\in C,\ \forall\, t\in[0,1] \quad -2t\,\mathrm{Re}\,\langle x-y,z-y\rangle + t^2||z-y||^2 \geq 0$$

si et seulement si

$$\forall\, z\in C,\ \forall\, t\in[0,1] \quad \mathrm{Re}\,\langle x-y,z-y\rangle \leq \frac{t}{2}||z-y||^2$$

si et seulement si

$$\forall\, z\in C, \quad \mathrm{Re}\,\langle x-y,z-y\rangle \leq 0\ .$$

Montrons que, pour tous $x,x'\in\mathscr{H}$, si $y=p_C(x)$ et $y'=p_C(x')$, alors $||y-y'|$ $||x-x'||$ (ce qui en particulier montrera l'unicité de la projection de x sur C). En ef par ce qui précède, on a

$$\mathrm{Re}\,\langle x-y,y'-y\rangle \leq 0 \quad \text{et} \quad \mathrm{Re}\,\langle x'-y',y-y'\rangle \leq 0\ .$$

Donc en additionnant, on a

$$\mathrm{Re}\,\langle (x-y)-(x'-y'),y'-y\rangle \leq 0 \iff \mathrm{Re}\,\langle x-x',y'-y\rangle + ||y'-y||^2 \leq 0\ ,$$

ce qui implique par l'inégalité de Cauchy-Schwarz que

$$||y'-y||^2 \leq -\,\mathrm{Re}\,\langle x-x',y'-y\rangle \leq ||x-x'||\ ||y'-y||\ .$$

On en déduit que p_C est 1-lipschitzienne.

La preuve de la dernière assertion, qui découle de la précédente, est laissée en exerc au lecteur.

Porisme 6.33 *Soient $\mathscr{H}$ un espace de Hilbert réel ou complexe, et E un sous-esp vectoriel de $\mathscr{H}$.*

(1) Si E est fermé, alors $E^\perp$ est un supplémentaire fermé de E.

(2) Le sous-espace E est dense dans $\mathscr{H}$ si et seulement si $E^\perp=\{0\}$.

La première propriété est spécifique aux espaces de Hilbert. En fait, tout espace Banach qui n'est pas isomorphe (en tant qu'espace vectoriel topologique) à un espace Hilbert contient un sous-espace vectoriel fermé n'admettant pas de supplémentaire fer (voir [LT1]).

Preuve. (1) Puisque le produit scalaire de $\mathscr{H}$ est défini positif, $E\cap E^\perp=\{0\}$. De plus p_E est la projection orthogonale sur E, alors pour tout x dans $\mathscr{H}$, $x=p_E(x)+(x-p_E($ et $x-p_E(x)\in E^\perp$ par la dernière assertion de 6.32, donc $\mathscr{H}=E+E^\perp$.

(2) Par continuité, $E^\perp=\overline{E}^{\,\perp}$, et le résultat découle alors de (1).

Exercice E.64 *Soit E un sous-espace vectoriel d'un espace de Hilbert réel ou complexe $\mathscr{H}$. Montrer que $E \subset \big(E^{\perp}\big)^{\perp}$, et que $\big(E^{\perp}\big)^{\perp} = E$ si et seulement si E est fermé.*

Autodualité des espaces de Hilbert réels.

Le résultat suivant dit qu'un espace de Banach réel, dont la norme est hilbertienne, est canoniquement isomorphe à son dual topologique.

Théorème 6.34 (Théorème de Riesz-Fréchet) *Soient $\mathscr{H}$ un espace de Hilbert réel ou complexe, et $\overline{\mathscr{H}}\,'$ le dual topologique de son conjugué. L'application $\mathscr{H} \to \overline{\mathscr{H}}\,'$ définie par $x \mapsto \{y \mapsto \langle x, y\rangle\}$ est un isomorphisme linéaire et une isométrie entre la norme de $\mathscr{H}$ et la norme duale de $\overline{\mathscr{H}}\,'$.*

Preuve. Il est immédiat que, pour tout x dans $\mathscr{H}$, l'application $\ell_x : y \mapsto \langle x, y\rangle$ est une forme linéaire sur $\overline{\mathscr{H}}$, continue car $||\ell_x|| \le ||x||$ par l'inégalité de Cauchy-Schwarz. L'application $x \mapsto \ell_x$ est clairement linéaire, et isométrique car $\ell_x(x) = ||x||^2$, donc injective. Montrons qu'elle est surjective, ce qui concluera.

Soit $\varphi \in \overline{\mathscr{H}}\,'$, que nous pouvons supposer non nulle, et $N = \varphi^{-1}(0)$ son noyau, qui est un hyperplan vectoriel fermé de $\mathscr{H}$. Par le corollaire 6.33 (1), le sous-espace vectoriel $N^{\perp}$ est donc une droite vectorielle supplémentaire de N. Pour tout u dans $\mathscr{H}$, nous pouvons donc écrire $u = v + \lambda y$ où $v \in N$, $\lambda \in \mathbb{K}$, et

$$\varphi(u) = \overline{\lambda}\,\varphi(y) \quad \text{et} \quad \langle y, u\rangle = \overline{\lambda}\,||y||^2 = \overline{\lambda}\,.$$

Donc $\varphi = \varphi(y)\,\ell_y = \ell_{\varphi(y)\,y}$, ce qu'il fallait démontrer. □

Ce résultat pourrait permettre d'identifier un espace de Hilbert réel et son dual, mais on se gardera de le faire en général, car par exemple, cette identification se comporte mal par passage à des sous-espaces vectoriels munis de produits scalaires différents.

Par exemple, si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, si μ est la mesure borélienne sur $\mathbb{R}$ définie par $d\mu(x) = (1 + |x|)\,dx$, alors $\mathbb{L}^2(\mu)$ est un sous-espace vectoriel (dense) de $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$, mais le produit scalaire de $\mathbb{L}^2(\mu)$, qui est

$$\langle f, g\rangle_{\mathbb{L}^2(\mu)} = \int_{-\infty}^{+\infty} (1 + |x|) f(x) g(x)\; dx\;,$$

n'est pas la restriction à $\mathbb{L}^2(\mu)$ du produit scalaire de $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$, qui est

$$\langle f, g\rangle_{\mathbb{L}^2(\mathbb{R})} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) g(x)\; dx\;.$$

Donc pour tout h dans $\mathscr{D}(\mathbb{R})$, si $\widetilde{h} \in (\mathbb{L}^2(\mu))'$ est la forme linéaire correspondant à h dans $\mathbb{L}^2(\mu)$, et si $\widetilde{\widetilde{h}} \in (\mathbb{L}^2(\mathbb{R}))'$ est la forme linéaire correspondant à h dans $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$, alors

$$\widetilde{\widetilde{h}}_{|\mathbb{L}^2(\mu)} \neq \widetilde{h}\;,$$

donc il ne serait pas raisonnable d'identifier à la fois $\widetilde{\widetilde{h}}$ et $\widetilde{h}$ avec h.

Voici deux corollaires du théorème 6.34 de Riesz-Fréchet.

Porisme 6.35 *Soient $\mathscr{H}$ un espace de Hilbert sur $\mathbb{K}$, et $a : \mathscr{H} \times \mathscr{H} \to \mathbb{K}$ une for sesquilinéaire continue. Alors il existe un unique $u \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ tel que*

$$\forall\, x, y \in \mathscr{H},\;\; \langle u(x), y\rangle = a(x, y)\;.$$

Si de plus a est hermitienne, alors u est auto-adjoint, i.e.

$$\forall\, x, y \in \mathscr{H},\;\; \langle u(x), y\rangle = \langle x, u(y)\rangle\;.$$

Preuve. Pour tout x dans $\mathscr{H}$, l'application $y \mapsto a(x, y)$ est anti-linéaire continue. Do par le théorème 6.34 de Riesz-Fréchet, il existe un unique élément $u(x) \in \mathscr{H}$ tel c $\langle u(x), y\rangle = a(x, y)$ pour tout y dans $\mathscr{H}$. Par unicité et linéarité à gauche de a, l'applicat u est linéaire. Comme $||u(x)||^2 = a(x, u(x)) \le ||a||\;||x||\;||u(x)||$, l'application linéaire est continue.

La dernière affirmation découle de ce que, pour tous x, y dans $\mathscr{H}$,

$$\langle u(x), y\rangle = a(x, y) = \overline{a(y, x)} = \overline{\langle u(y), x\rangle} = \langle x, u(y)\rangle\;.$$

Porisme 6.36 *Si $\mathscr{H}$ est un espace de Hilbert, alors toute boule fermée dans $\mathscr{H}$ compacte pour la topologie faible de $\mathscr{H}$. Elle est de plus métrisable si $\mathscr{H}$ est séparable. particulier, toute suite bornée dans un espace de Hilbert admet une sous-suite faiblem convergente.*

Rappelons que par le théorème de 6.34 de Riesz-Fréchet, dire qu'une suite (f_n), dans un espace de Hilbert $\mathscr{H}$ converge faiblement vers $f \in \mathscr{H}$ équivaut à dire que po tout $g \in \mathscr{H}$, les produits scalaires $\langle f_n, g\rangle$ convergent vers $\langle f, g\rangle$ dans $\mathbb{K}$:

$$f_n \rightharpoonup f \quad\Longleftrightarrow\quad \forall\, g \in \mathscr{H},\; \langle f_n, g\rangle \to \langle f_n, g\rangle\;.$$

Preuve. Par le théorème 6.34 de Riesz-Fréchet, $\mathscr{H}$ est (à isomorphisme isométrique pr le dual topologique de $\overline{\mathscr{H}}$, donc sa boule unité est compacte pour la topologie faible-éto par le théorème 6.19 de Banach-Alaoglu, et métrisable par la proposition 6.23 (1) si est séparable (ce sens n'utilise pas le théorème de Hahn-Banach). Les homothéties translations étant des homéomorphismes, le cas de toutes les boules fermées s'en dédu Maintenant, l'identification avec le dual se faisant par le produit scalaire, la topolo faible-étoile de $\mathscr{H}$ vu comme le dual topologique de $\overline{\mathscr{H}}$, coïncide avec la topologie fai de $\mathscr{H}$.

La dernière assertion découle de la précédente appliquée à l'adhérence du sous-espa vectoriel engendré par une suite bornée $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, qui est un espace de Hilbert (comp car fermé) séparable (car les combinaisons linéaires finies à coefficients rationnels des y sont denses).

La proposition suivante donne parfois un moyen de passer de la convergence faibl la convergence forte dans un espace de Hilbert.

Proposition 6.37 *Soient $\mathscr{H}$ un espace de Hilbert, et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergeant f blement vers $x \in \mathscr{H}$. Si $(||x_n||)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $||x||$, alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge fortem vers x.*

La réciproque est bien sûr vraie, par continuité de la norme.

Preuve. L'hypothèse implique que le second membre de l'égalité $||x_n - x||^2 = ||x_n||^2 + ||x||^2 - 2\,\mathrm{Re}\,\langle x_n, x\rangle$ converge vers 0. $\square$

Théorèmes de Lax-Milgram et de Stampachia.

Soient $\mathscr{H}$ un espace de Hilbert sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et $f : \mathscr{H} \times \mathscr{H} \to \mathbb{K}$ une forme sesquilinéaire. Rappelons (voir le paragraphe 2.8) que f est continue si et seulement s'il existe $c \geq 0$ telle que

$$\forall\, x, y \in \mathscr{H}, \quad |f(x,y)| \leq c\,||x||\,||y||\ .$$

L'application f sera dite *coercive* s'il existe $c > 0$ telle que

$$\forall\, x \in \mathscr{H}, \quad f(x,x) \geq c\,||x||^2\ .$$

Cette condition demande en particulier que pour tout $x \in \mathscr{H}$, l'élément $f(x,x)$ de $\mathbb{K}$ soit un nombre réel. En particulier, si f est coercive, alors $x \mapsto f(x,x)$ est positive ou nulle, et ne s'annule qu'en $x = 0$.

Théorème 6.38 (Théorème de Lax-Milgram) *Soient $\mathscr{H}$ un espace de Hilbert sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et $a : \mathscr{H} \times \mathscr{H} \to \mathbb{K}$ une forme sesquilinéaire continue et coercive. Pour toute forme linéaire continue $\varphi \in \overline{\mathscr{H}}'$, il existe un unique u dans $\mathscr{H}$ tel que*

$$\forall\, v \in \mathscr{H}, \quad a(u,v) = \varphi(v)\ . \quad (*)$$

De plus, si a est symétrique ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$) ou hermitienne ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$), alors u est l'unique élément de $\mathscr{H}$ tel que

$$\frac{1}{2}a(u,u) - \mathrm{Re}\,\varphi(u) = \min_{v \in \mathscr{H}} \Big(\frac{1}{2}a(v,v) - \mathrm{Re}\,\varphi(v)\Big)\ . \quad (**)$$

Le théorème de Lax-Milgram est un cas particulier du théorème suivant (prendre $C = \mathscr{H}$ et utiliser le fait que si ℓ et ℓ' sont deux formes linéaires sur $\overline{\mathscr{H}}$ telles que $\mathrm{Re}\,\ell \geq \mathrm{Re}\,\ell'$, alors $\ell = \ell'$).

Théorème 6.39 (Théorème de Stampachia) *Soient $\mathscr{H}$ un espace de Hilbert sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $a : \mathscr{H} \times \mathscr{H} \to \mathbb{K}$ une forme sesquilinéaire continue et coercive, et C un convexe fermé non vide de $\mathscr{H}$. Pour tout $\varphi \in \overline{\mathscr{H}}'$, il existe un unique u dans C tel que*

$$\forall\, v \in \mathscr{H}, \quad \mathrm{Re}\; a(u, v-u) \geq \mathrm{Re}\;\varphi(v-u)\ .$$

De plus, si a est symétrique ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$) ou hermitienne ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$), alors u est l'unique élément de C tel que

$$\frac{1}{2}a(u,u) - \mathrm{Re}\,\varphi(u) = \min_{v \in C} \Big(\frac{1}{2}a(v,v) - \mathrm{Re}\,\varphi(v)\Big)\ .$$

Ce résultat est un outil simple et assez efficace pour la résolution des équations aux dérivées partielles linéaires elliptiques (voir le cours d'Analyse fonctionnelle et équations aux dérivées partielles du second semestre). Le lien entre l'équation (*) et le problème de minimisation (**) est à souligner. Dans le vocabulaire du calcul des variations, on dit

que (*) est l'*équation d'Euler* associée au problème de minimisation (**) : si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, no
verrons au chapitre 7 suivant que l'application $F : \mathscr{H} \to \mathbb{R}$ définie par

$$F : u \mapsto \frac{1}{2}f(u,u) - \varphi(u)$$

est différentiablqe, l'équation (*) étant alors exactement l'équation

$$F'(u) = 0\ .$$

Cette relation, généralisée dans le théorème de Stampacchia, est souvent utilisée,
physique (principe de moindre action, minimisation d'énergie, ...), en mécanique (for
d'une nappe élastique tendue au-dessus d'un obstacle) ou en finance (optimisation s
contrainte de stocks). Le point noir est qu'elle ne permet de traiter convenablement
des problèmes linéaires, et que la plupart des phénomènes naturels (météorologie, mé
nique des fluides, ...) ne le sont pas.

Preuve. Puisque φ et $v \mapsto a(u,v)$, pour tout u dans $\mathscr{H}$, sont des formes linéai
continues sur $\overline{\mathscr{H}}$, par le théorème de Riesz-Fréchet 6.34, il existe un unique w dans
et, pour tout u dans $\mathscr{H}$, un unique $A(u)$ dans $\mathscr{H}$ tels que, pour tous u, v dans $\mathscr{H}$, on

$$\varphi(v) = \langle w, v\rangle \quad \text{et} \quad a(u,v) = \langle A(u), v\rangle\ .$$

Soit $c \geq 1$ tel que, pour tous u, v dans $\mathscr{H}$, on ait

$$|a(u,v)| \leq c\,||u||\,||v|| \quad \text{et} \quad a(u,u) \geq \frac{1}{c}\,||u||^2\ .$$

Il est immédiat que $A : \mathscr{H} \to \mathscr{H}$ est linéaire, par unicité. Pour tout u dans $\mathscr{H}$, puis
$A(u)$ et $v \mapsto a(u,v)$ ont la même norme par le théorème de Riesz-Fréchet, et puis
coercivité de a, nous avons

$$||A(u)|| \leq c\,||u|| \quad \text{et} \quad \langle A(u), u\rangle \geq \frac{1}{c}\,||u||^2\ .$$

Si $r > 0$ est assez petit (par exemple $r = \frac{1}{c^3}$), alors $k = \sqrt{1 - \frac{2r}{c} + c^2r^2} \in [0,1[$. Not
$S : \mathscr{H} \to \mathscr{H}$ l'application $u \mapsto p_C(u - rA(u) + rw)$. Alors, comme p_C est 1-lipschitzien

$$\begin{aligned} ||S(u) - S(v)||^2 &\leq ||u - v - rA(u-v)||^2 \\ &= ||u-v||^2 - 2r\langle u - v, A(u-v)\rangle + r^2||A(u-v)||^2 \leq k^2||u-v||^2\ . \end{aligned}$$

Donc S est strictement contractante. Par le théorème du point fixe de Banach 3.19, puis
$\mathscr{H}$ est complet, l'application S admet un unique point fixe u. Par définition de p_C, n
avons $u = p_C(u - rA(u) + rw)$ si et seulement si $u \in C$ et

$$\forall\, v \in C, \quad \mathrm{Re}\,\langle (u - rA(u) + rw) - u, v - u\rangle \leq 0\ ,$$

et cette inégalité est équivalente à $\mathrm{Re}\,\langle A(u), v-u\rangle \geq \mathrm{Re}\,\langle w, v-u\rangle$. La première assert
en découle donc, par définition de w et de $A(u)$.

Supposons maintenant que la forme sesquilinéaire a soit symétrique ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$) ou h
mitienne ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$). Alors a est un produit scalaire sur l'espace vectoriel $\mathscr{H}$, et, puis
a est continue et coercive, sa norme associée $u \mapsto \sqrt{a(u,u)}$ est équivalente à la nor

de $\mathscr{H}$. Donc $\mathscr{H}$, muni du produit scalaire a, est encore un espace de Hilbert, et φ est encore une forme linéaire continue sur $\mathscr{H}$ pour ce produit scalaire. Par le théorème de Riesz-Fréchet 6.34, il existe donc un unique w' dans $\mathscr{H}$ tel que, pour tout v dans $\mathscr{H}$, on ait $\varphi(v) = a(w', v)$.

Donc $u \in C$ vérifie

$$\forall\, v \in \mathscr{H}, \quad \operatorname{Re} a(u, v-u) \geq \operatorname{Re} \varphi(v-u)$$

si et seulement si $u \in C$ vérifie

$$\forall\, v \in \mathscr{H}, \quad \operatorname{Re} a(w'-u, v-u) \leq 0$$

donc si et seulement si $u \in C$ est la projection de w' sur C pour le produit scalaire a. Par les propriétés de cette projection, u est donc l'unique point de C tel que

$$\sqrt{a(w'-u, w'-u)} = \min_{v \in C} \sqrt{a(w'-v, w'-v)}\ .$$

En prenant les carrés, en développant et en simplifiant par $a(w', w')$, le point u est donc l'unique point de C tel que

$$a(u,u) - 2\operatorname{Re} a(w', u) = \min_{v \in C} \big(a(v,v) - 2\operatorname{Re} a(w', v)\big)\ .$$

En divisant par 2 et en utilisant la définition de w', le résultat en découle. □

Bases hilbertiennes.

Soient $\mathscr{H}$ un espace de Hilbert réel ou complexe et $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de sous-espaces vectoriels fermés. On dit que $\mathscr{H}$ est la *somme hilbertienne* de $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si

• les sous-espaces vectoriels E_n sont deux à deux orthogonaux,

• le sous-espace vectoriel engendré par les E_n est dense (ou, de manière équivalente par le corollaire 6.33 (2), d'orthogonal nul) dans $\mathscr{H}$,

et on note (certains ouvrages omettant la barre)

$$\mathscr{H} = \overline{\bigoplus_{n\in\mathbb{N}}}\ E_n\ .$$

Attention, on ne confondra pas somme hilbertienne et somme directe.

Réciproquement, soit $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'espaces de Hilbert tous réels ou tous complexes. Soit $\mathscr{H}$ l'ensemble des $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \prod_{n\in\mathbb{N}} E_n$ tels que $\sum_{n\in\mathbb{N}} ||x_n||^2$ converge. Alors il est facile de vérifier que $\mathscr{H}$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel produit $\prod_{n\in\mathbb{N}} E_n$, puisque $||\lambda x_n||^2 = |\lambda|^2 ||x_n||^2$ et $||x_n + y_n||^2 \leq 2\big(||x_n||^2 + ||y_n||^2\big)$. Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, pour tous x_n, y_n dans E_n,

$$|\langle x_n, y_n\rangle| \leq ||x_n||\,||y_n|| \leq \frac{1}{2}\big(||x_n||^2 + ||y_n||^2\big)\ .$$

Donc si

$$\langle (x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}\rangle_{\mathscr{H}} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle x_n, y_n\rangle_{E_n}\ ,$$

alors cette série converge absolument, et définit un produit scalaire sur $\mathscr{H}$. Remarquons que si $E_n = \mathbb{K}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $\mathscr{H}$ est exactement $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{K})$. (On peut aussi définir des intégrales d'espaces de Hilbert.)

Exercice E.65 *Montrer que $\mathscr{H}$ est un espace de Hilbert, et que si F_n est le sous-esp des suites de $\mathscr{H}$ dont tous les termes sauf peut-être le n-ème est nul, alors F_n est sous-espace vectoriel fermé de $\mathscr{H}$, isomorphe à l'espace de Hilbert E_n, et $\mathscr{H}$ est som hilbertienne de $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Montrer que si E_n est séparable pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $\mathscr{H}$ encore séparable.*

Proposition 6.40 *Soit $\mathscr{H}$ un espace de Hilbert réel ou complexe, somme hilbertie d'une suite $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de sous-espaces vectoriels fermés. Pour tout u dans $\mathscr{H}$, posons u_n $p_{E_n}(u)$ la projection hilbertienne de u sur le sous-espace vectoriel fermé E_n. Alors p tout u dans $\mathscr{H}$, les séries $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} ||u_n||^2$ sont convergentes et*

$$u = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n\ ,$$

$$||u||^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} ||u_n||^2 \quad \text{(égalité de Parseval)}\ .$$

Réciproquement, pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathscr{H}$ telle que $u_n \in E_n$ pour tout n, s série $\sum_{n=0}^{+\infty} ||u_n||^2$ converge, alors la série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est convergente, et si $u = \sum_{n=0}^{+\infty}$ alors $u_n = p_{E_n}(u)$.

Remarquons que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ n'est en général pas normalement convergente (i.e série $\sum_{n=0}^{+\infty} ||u_n||$ n'est pas forcément convergente).

Preuve. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, soit $S_k = \sum_{i=0}^{k} p_{E_i}$, qui est une application linéaire de $\mathscr{H}$ da $\mathscr{H}$. Par orthogonalité deux à deux des E_n et par l'inégalité de Pythagore, nous avo pour tout $u \in \mathscr{H}$,

$$||S_k(u)||^2 = \sum_{i=0}^{k} ||u_n||^2\ . \quad (*)$$

Comme $u - u_n$ est orthogonal à u_n (par les propriétés de la projection orthogonale sur sous-espace vectoriel fermé), nous avons $\langle u, u_n\rangle = ||u_n||^2$, donc par sommation

$$\langle u, S_k(u)\rangle = ||S_k(u)||^2\ .$$

D'où, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, pour tout $u \in \mathscr{H}$, nous avons $||S_k(u)|| \leq ||u$

Soit $u \in \mathscr{H}$. Par densité du sous-espace vectoriel F engendré par les E_n, pour t $\epsilon > 0$, il existe $v \in F$ tel que $||u - v|| < \frac{\epsilon}{2}$. Pour k assez grand, $v \in E_0 + \cdots + E_k$, d $S_k(v) = v$. Par conséquent,

$$||S_k(u) - u|| = ||S_k(u) - S_k(v) + v - u|| \leq ||S_k(u-v)|| + ||v-u|| \leq 2||v-u|| < \epsilon$$

Donc $S_k(u)$ converge vers u. Ceci montre la première égalité.

La seconde découle par passage à la limite de (*). La réciproque est laissée en exerc (utiliser le critère de Cauchy, l'égalité $||\sum_{k=n}^{n+p} u_k||^2 = \sum_{k=n}^{n+p} ||u_k||^2$ pour tous $n, p \in \mathbb{N}$, la continuité de p_{E_n}).

Soit $\mathscr{H}$ un espace de Hilbert sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Si $\mathscr{H}$ est de dimension fi une *base hilbertienne* de $\mathscr{H}$ est par définition une base orthonormée de $\mathscr{H}$. Si $\mathscr{H}$ est dimension infinie, une *base hilbertienne* de $\mathscr{H}$ est une suite $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathscr{H}$ de vecteurs orthonormés qui engendre un sous-espace vectoriel dense de $\mathscr{H}$:

$$\forall\, p\in\mathbb{N},\ \ ||e_p||=1;\quad \forall p,q\in\mathbb{N},\ \ p\neq q\ \Rightarrow\ \langle e_p,e_q\rangle=0\,;\quad \overline{\mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}(\{e_n\ :\ n\in\mathbb{N}\})}=\mathscr{H}\ .$$

Autrement dit, une base hilbertienne est une suite $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de vecteurs unitaires de $\mathscr{H}$ telle que $\mathscr{H}$ soit somme hilbertienne des droites vectorielles $\mathbb{C}e_n$:

$$\mathscr{H}=\overline{\bigoplus_{n\in\mathbb{N}}}\ \mathbb{K}e_n\ .$$

Attention, on ne confondra pas base hilbertienne et base (vectorielle) : en dimension infinie, on peut montrer qu'une base hilbertienne n'est pas une base vectorielle. On s'autorisera à indexer les bases hilbertiennes par d'autres ensembles dénombrables que $\mathbb{N}$ ou $\{0,\dots,n\}$.

Remarques. (1) Si un espace de Hilbert $\mathscr{H}$ admet une base hilbertienne, alors $\mathscr{H}$ est séparable. En effet, l'ensemble des combinaisons linéaires (finies), à coefficients dans $\mathbb{Q}$ si $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou dans $\mathbb{Q}[i]$ si $\mathbb{K}=\mathbb{C}$, des éléments d'une base hilbertienne de $\mathscr{H}$ est dense dans $\mathscr{H}$. Nous montrerons la réciproque dans le théorème 6.41.

(2) Il découle de la proposition 6.40 que si $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de $\mathscr{H}$, alors pour tout u dans $\mathscr{H}$, il existe une unique suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{K}$ telle que les séries $\sum_{n\in\mathbb{N}}\lambda_n e_n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}}|\lambda_n|^2$ convergent, et

$$u=\sum_{n\in\mathbb{N}}\lambda_n e_n\quad\text{et}\quad ||u||^2=\sum_{n\in\mathbb{N}}|\lambda_n|^2\ .$$

En effet, λ_n est l'unique scalaire tel que $p_{\mathbb{K}e_n}(u)=\lambda_n e_n$, c'est-à-dire

$$\lambda_n=\langle u,e_n\rangle\ .$$

La suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est appelée la suite des *coordonnées hilbertiennes* de u dans la base hilbertienne $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Attention, on ne confondra pas coordonnées hilbertiennes et coordonnées vectorielles.

Exemples. (1) La suite $\Big(e_n : t\mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ e^{nit}\Big)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de l'espace de Hilbert $\mathbb{L}^2([0,2\pi];\mathbb{C})$ des applications mesurables de $[0,2\pi]$ dans $\mathbb{C}$, de carré intégrable pour la mesure de Lebesgue, modulo égalité presque partout. En effet, c'est clairement une suite orthonormée de vecteurs, dont l'espace vectoriel engendré est dense pour la norme uniforme dans $\mathscr{C}([0,2\pi],\mathbb{C})$ par le corollaire 5.41 du théorème de Weierstrass ; de plus, la convergence uniforme implique la convergence $\mathbb{L}^2$, et $\mathscr{C}([0,2\pi],\mathbb{C})$ est dense dans $\mathbb{L}^2([0,2\pi];\mathbb{C})$ par le cours d'Intégration et probabilité (ou [Coh]).

Pour toute fonction f dans $\mathbb{L}^2([0,2\pi];\mathbb{C})$, les coordonnées hilbertiennes $(c_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ de f dans cette base hilbertienne sont par définition les *coefficients de Fourier* de f

$$c_n(f)=\langle f,e_n\rangle=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{2\pi}f(t)\ e^{-nit}\ dt\ .$$

Par la proposition 6.40, on obtient la formule de *transformation de Fourier inverse*

$$f=\sum_{n\in\mathbb{N}}c_n(f)\ e_n=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{n\in\mathbb{N}}c_n(f)\ e^{nit}$$

(attention, la convergence de cette série est dans $\mathbb{L}^2([0,2\pi];\mathbb{C})$) et la *formule de Parse*
pour les séries de Fourier

$$||f||_2=\Big(\int_0^{2\pi}|f(t)|^2\ dt\Big)^{1/2}=\Big(\sum_{n\in\mathbb{N}}|c_n(f)|^2\Big)^{1/2}\ .$$

(2) De même, la suite $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où $e_0 : t\mapsto\sqrt{\frac{1}{\pi}}$ et $e_n : t\mapsto\sqrt{\frac{2}{\pi}}\ \cos nt$ si $n\geq 1$
une base hilbertienne de $\mathbb{L}^2([0,\pi];\mathbb{R})$ (pour appliquer l'hypothèse de séparation des poi
dans le théorème de Weierstrass, remarquer que l'application cosinus est une bijection
$[0,\pi]$ sur $[-1,1]$).

De même, la suite $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où $e_0 : t\mapsto\sqrt{\frac{1}{\pi}}$ et $e_n : t\mapsto\sqrt{\frac{2}{\pi}}\ \sin nt$ si $n\geq 1$ est une b
hilbertienne de $\mathbb{L}^2([-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}];\mathbb{R})$.

Théorème 6.41 *Tout espace de Hilbert séparable admet une base hilbertienne.*

Si $\mathscr{H}$ est de dimension finie, le résultat est connu, et la méthode usuelle se généra
en dimension infinie, comme indiqué ci-dessous.

Preuve. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dense dans $\mathscr{H}$. Si $\mathscr{H}$ est de dimension infinie, qui
à extraire, nous pouvons supposer que v_{n+1} n'appartient pas au sous-espace vecto
engendré par $\{v_0,\dots,v_n\}$. Le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt fournit al
une suite $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathscr{H}$ de vecteurs orthonormés qui engendre le même sous-esp
vectoriel que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Porisme 6.42 *Deux espaces de Hilbert séparables de dimension infinie sont isomorph*

Preuve. Soient $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux bases hilbertiennes de deux espaces de Hilb
séparables $\mathscr{H}$ et $\mathscr{G}$ respectivement, qui existent par le théorème précédent. Alors l'appli
tion linéaire qui envoie e_n sur f_n est un isomorphisme linéaire isométrique d'un sous-esp
vectoriel dense de $\mathscr{H}$ dans un sous-espace vectoriel dense de $\mathscr{G}$, donc se prolonge en
isomorphisme linéaire isométrique de $\mathscr{H}$ dans $\mathscr{G}$ (par le théorème de prolongement 5.1
□

La notion de base hilbertienne s'étend aux espaces de Hilbert non séparables,
prenant des familles de vecteurs indexées par des ensembles non dénombrable (voir
exemple [Dix, chap. VIII, XI]). En utilisant le théorème de Zorn, le théorème 6.41 re
valide pour les espaces de Hilbert non séparables.

6.3 Théorie spectrale des opérateurs auto-adjoints bornés

Spectre des opérateurs bornés.

Soient E un espace vectoriel topologique sur un corps topologique $\mathbb{K}$, et u un *opérat*
continu dans E (i.e. un élément de $\mathscr{L}(E)$).

Une *valeur régulière* de u est un élément $\lambda\in\mathbb{K}$ tel que $u-\lambda\,\mathrm{id}$ soit inversible d
$\mathscr{L}(E)$. L'ensemble des valeurs régulières de u est appelé l'*ensemble résolvant* de u.
élément de $\mathbb{K}$ qui n'est pas une valeur régulière de u est une *valeur spectrale* de u,
l'ensemble des valeurs spectrales est appelé le *spectre* de u, et noté $\mathrm{Sp}(u)$. Si $\mathbb{K}$ est
corps valué (par exemple $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{K}=\mathbb{C}$), le *rayon spectral* de u est

$$\rho(u)=\sup_{\lambda\in\mathrm{Sp}(u)}|\lambda|$$

(avec la convention usuelle $\rho(u) = -infty$ si $\mathrm{Sp}(u)$ est vide).

Une *valeur propre* de u est un élément $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que le noyau de $u - \lambda\,\mathrm{id}$ soit non nul. Le sous-espace vectoriel $\mathrm{Ker}(u - \lambda\,\mathrm{id})$ est alors appelé l'*espace propre de u associé à λ*. La dimension de cet espace propre est appelé la *multiplicité* de λ. Un élément non nul de $\mathrm{Ker}(u - \lambda\,\mathrm{id})$ est appelé un *vecteur propre de u associé à λ*. L'ensemble des valeurs propres est noté $\mathrm{Vp}(u)$.

Le *spectre résiduel* de u est l'ensemble, noté $\mathrm{Sp}_{res}(u)$, des $\lambda \in \mathbb{K}$ non valeurs propres tels que l'image de $u - \lambda\,\mathrm{id}$ ne soit pas dense dans E.

Remarques. (1) Par le théorème de Banach 6.27, si E est un espace de Fréchet (par exemple un espace de Banach), alors il suffit que $u - \lambda\,\mathrm{id}$ soit bijectif pour que son inverse soit continu, et donc pour que λ soit une valeur régulière.

(2) Toute valeur propre est une valeur spectrale :

$$\mathrm{Vp}(u) \subset \mathrm{Sp}(u)\ .$$

En dimension finie n, cette inclusion est une égalité, et les valeurs spectrales sont les (au plus n) racines du polynôme caractéristique $\det(u - X\,\mathrm{id})$, la multiplicité d'une valeur spectrale étant la multiplicité de la racine correspondante. Mais cette inclusion peut être stricte en dimension infinie, voir les exercices E.66 et E.67 ci-dessous.

(3) Le spectre résiduel est contenu dans le spectre :

$$\mathrm{Sp}_{res}(u) \subset \mathrm{Sp}(u)\ .$$

(4) Pour tout λ dans $\mathbb{K}$, nous avons

$$\mathrm{Sp}(\lambda u) = \lambda\,\mathrm{Sp}(u),\ \ \mathrm{Vp}(\lambda u) = \lambda\,\mathrm{Vp}(u),\ \ \mathrm{Sp}_{res}(\lambda u) = \lambda\,\mathrm{Sp}_{res}(u)\ ,$$

et, si $\mathbb{K}$ est un corps valué,

$$\rho(\lambda u) = |\lambda|\,\rho(u)\ .$$

Proposition 6.43 *Si E est un espace de Banach sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, et $u \in \mathscr{L}(E)$, alors le spectre de u est un compact de $\mathbb{K}$, non vide si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et $E \neq \{0\}$, contenu dans la boule de centre 0 et de rayon $||u||$:*

$$\rho(u) \leq ||u||\ .$$

Preuve. Montrons que le rayon spectral de u est au plus $||u||$. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $|\lambda| > ||u||$. Soit $v = \frac{u}{\lambda} \in \mathscr{L}(E)$, alors $||v|| < 1$. Donc par le lemme 6.2, $\mathrm{id} - v$ est inversible dans $\mathscr{L}(E)$. D'où $u - \lambda\,\mathrm{id} = -\lambda(\mathrm{id} - \frac{u}{\lambda})$ est inversible dans $\mathscr{L}(E)$, et λ est une valeur régulière.

Montrons que l'ensemble résolvant de u est ouvert. Soit λ_0 une valeur régulière de u, et $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $|\lambda - \lambda_0| < \frac{1}{||(u-\lambda_0\,\mathrm{id})^{-1}||}$. Soit $v = (\lambda - \lambda_0)(u - \lambda_0\,\mathrm{id})^{-1} \in \mathscr{L}(E)$, alors $||v|| < 1$. Donc par le lemme 6.2, $\mathrm{id} - v$ est inversible dans $\mathscr{L}(E)$. D'où $u - \lambda\,\mathrm{id} = (u - \lambda_0\,\mathrm{id})(\mathrm{id} - v)$ est inversible dans $\mathscr{L}(E)$, et λ est une valeur régulière de u.

Nous renvoyons par exemple à [Die1, 13.1.3] pour la non-vacuité du spectre quand $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. $\square$

Comme le montre l'exercice suivant, tout compact de $\mathbb{K}$ est le spectre d'au moins un opérateur linéaire continu.

Exercice E.66 *Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, soit $\mathscr{H}$ un espace de Hilbert sur $\mathbb{K}$ séparable dimension infinie, soit $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base hilbertienne de $\mathscr{H}$, soit C un compact de $\mathbb{K}$, soit $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dense dans C.*

Montrer qu'il existe un et un seul opérateur $u \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ tel que $u(e_n) = \lambda_n e_n$ p tout $n \in \mathbb{N}$.

Montrer que le spectre de u est le compact C prescrit :

$$\mathrm{Sp}(u) = C\ ,$$

que ses valeurs propres sont les λ_n (dont on calculera les espaces propres) :

$$\mathrm{Vp}(u) = \{\lambda_n\ :\ n \in \mathbb{N}\}\ ,$$

et que le spectre résiduel de u est vide :

$$\mathrm{Sp}_{res}(u) = \emptyset\ .$$

Exercice E.67 *Soit $\mathscr{H}$ un espace de Hilbert complexe séparable de dimension infi soit $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base hilbertienne de $\mathscr{H}$, et soit $u \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ l'opérateur $\sum_{i\in\mathbb{N}} x_i e_i$ $\sum_{i\in\mathbb{N}} x_i e_{i+1}$.*

Montrer que u est continu, n'a pas de valeur propre :

$$\mathrm{Vp}(u) = \emptyset\ ,$$

que son spectre est le disque unité fermé :

$$\mathrm{Sp}(u) = \{z \in \mathbb{C}\ :\ |z| \leq 1\}\ ,$$

et que son spectre résiduel est le disque unité ouvert :

$$\mathrm{Sp}_{res}(u) = \{z \in \mathbb{C}\ :\ |z| < 1\}\ .$$

L'application qui à un opérateur continu associe son spectre vérifie une propriété semi-continuité.

Soient E un espace métrique, et $\mathscr{P}_c(E)$ l'ensemble des fermés bornés non vides E, muni de la distance de Hausdorff (voir l'exemple (viii) du paragraphe 1.3). Soit X espace topologique, une application $f : X \to \mathscr{P}_c(E)$ est dite *semi-continue supérieurem* en un point x_0 de X si pour tout voisinage ouvert U de $f(x_0)$ dans E, il existe voisinage ouvert V de x_0 dans X tel que pour tout $x \in V$, on ait $f(x) \subset U$. U application $f : X \to \mathscr{P}_c(E)$ est dite *semi-continue supérieurement* si elle est semi-contin supérieurement en tout point de X.

Cette notion vérifie quelques propriétés analogues à celles étudiées au paragraphe 5 Par exemple, pour tous $P \subset Q$ dans $\mathscr{P}_c(E)$, l'application d'un espace topologique dans $\mathscr{P}_c(E)$, qui est constante égale à P en dehors d'un point x_0, et valant Q en x_0, semi-continue supérieurement. Mais elle n'est pas continue en x_0 si x_0 n'est pas isolé da X et si Q contient strictement P. Par exemple, si deux applications $f, g : X \to \mathscr{P}_c($ sont semi-continues supérieurement, alors $f \cup g\ :\ x \mapsto f(x) \cup g(x)$ est semi-contin supérieurement.

Proposition 6.44 *Soit E un espace de Banach sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. L'applicat de $\mathscr{L}(E)$ dans $\mathscr{P}_c(\mathbb{K})$ définie par $u \mapsto \mathrm{Sp}(u)$ (de domaine l'ensemble des opérateurs spectre non vide si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) est semi-continue supérieurement.*

En particulier, l'application de $\mathscr{L}(E)$ dans $\mathbb{R}$ définie par $u \mapsto \rho(u)$ (de domaine l' semble des opérateurs de spectre non vide si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) est semi-continue supérieuremen

En dimension finie et si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, ces applications sont même continues. Mais en dimension infinie, ceci n'est plus vrai.

Preuve. Si λ_0 n'appartient pas au spectre de $u_0 \in \mathscr{L}(E)$, alors $u_0 - \lambda_0\,\mathrm{id}$ est inversible, donc pour u proche de u_0 et λ proche de λ_0, l'opérateur $u - \lambda\,\mathrm{id}$ est encore inversible (voir la proposition 6.1 (2)), donc λ n'appartient pas au spectre de u.

L'application de $\mathscr{P}_c(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{R}$ qui à un compact non vide K associe $\max_{\lambda \in K} |\lambda|$ est clairement continue, donc la dernière assertion s'en déduit. $\square$

Opérateurs compacts.

Soient E et F deux espaces vectoriels normés sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, et $\overline{B}_E$ la boule unité fermée de E. Un élément u de $\mathscr{L}(E, F)$ est appelé *compact* si $u(\overline{B}_E)$ est d'adhérence compacte dans F (pour la topologie forte, i.e. pour la topologie induite par la norme de F), ou, de manière équivalente, si l'image de tout borné est d'adhérence compacte, ou, de manière encore équivalente, si l'image par u de toute suite bornée admet une sous-suite convergente.

Exemples. (1) Un élément u de $\mathscr{L}(E, F)$ est dit *de rang fini* si son image est de dimension finie. Par le théorème de Riesz (et le fait que l'image de $u(\overline{B}_E)$ soit contenue dans $\overline{B}_F(0, ||u||)$), un opérateur de rang fini est compact.

En particulier, si E et F sont de dimensions finies, alors tout élément de $\mathscr{L}(E, F)$ est compact.

(2) Soient X, Y deux espaces métriques compacts, E, F les espaces de Banach $\mathscr{C}(Y, \mathbb{K})$, $\mathscr{C}(X, \mathbb{K})$ respectivement (pour les normes uniformes $||\cdot||_\infty$), μ une mesure positive borélienne finie sur Y et $N \in \mathscr{C}(X \times Y, \mathbb{K})$. Pour tout $f \in E$, notons $Kf \in F$ l'application définie par

$$Kf(x) = \int_{y \in Y} N(x, y)\, f(y)\, d\mu(y)\ ,$$

pour tout $x \in X$. Alors $K \in \mathscr{L}(E, F)$ est un opérateur compact, dit *opérateur à noyau, de noyau N.*

En effet, remarquons que

$$|Kf(x) - Kf(x')| \leq ||f||_\infty \int_{y \in Y} |N(x, y) - N(x', y)|\, d\mu(y)$$

pour tous x, x' dans X. Comme μ est finie, et par continuité uniforme en y de $x \mapsto N(x, y)$ (par le théorème de Heine 5.17), ceci montre que Kf est bien définie et continue, et que l'image par K de la boule unité fermée de E est équicontinue. L'application K est clairement linéaire, et continue car $||Kf||_\infty \leq ||\mu||\ ||N||_\infty ||f||_\infty$. Ceci montrant aussi que les images des applications Kf pour $f \in \overline{B}_E$ restent dans un compact fixé de $\mathbb{K}$, l'opérateur K est compact, par le théorème d'Arzela-Ascoli 5.31.

(3) Soient $(X, \mathscr{A}, \mu)$ et $(Y, \mathscr{B}, \nu)$ deux espaces mesurés, E, F les espaces de Hilbert $\mathbb{L}^2(\nu)$, $\mathbb{L}^2(\mu)$ respectivement, et $N \in \mathbb{L}^2\big((X, \mathscr{A}, \mu) \times (Y, \mathscr{B}, \nu)\big)$. Pour tout $f \in E$, notons $Kf \in F$ l'application définie par

$$Kf(x) = \int_{y \in Y} N(x, y)\, f(y)\, d\nu(y)\ ,$$

pour (presque) tout $x \in X$. Alors $K \in \mathscr{L}(E, F)$ est un opérateur compact, dit *opérateur à noyau de type Hilbert-Schmidt, de noyau N.*

En effet, par le théorème de Fubini, nous avons $N_x : y \mapsto N(x, y)$ est dans $\mathbb{L}^2(\nu)$ po
μ-presque tout $x \in X$. Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, pour tout $f \in F$,

$$|Kf(x)| \leq ||N_x||_2\ ||f||_2$$

pour μ-presque tout $x \in X$. De nouveau par le théorème de Fubini, $||Kf||_2 \leq ||N||_2||f$
Donc l'application K est bien définie, clairement linéaire, et continue. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ u
suite dans $\overline{B}_E$, et montrons que, quitte à extraire, la suite $(Kf_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge for
ment dans F. Par le corollaire 6.36, nous pouvons supposer quitte à extraire que (f_n)
converge faiblement vers $f \in E$. En particulier, pour μ-presque tout x, $Kf_n(x) = \langle f_n, \overline{N}$
converge vers $\langle f, \overline{N_x} \rangle_E = Kf(x)$. Comme $|Kf_n(x)| \leq ||N_x||_2$ pour μ-presque tout x
pour tout n, par le théorème de convergence dominée de Lebesgue, $||Kf_n(x)||_2$ conver
vers $||Kf||_2$. De plus, Kf_n converge faiblement vers Kf, puisque K est continue donc f
blement continue. Par la proposition 6.37, nous avons donc que Kf_n converge forteme
vers Kf.

Exercice E.68 *Soient I un intervalle ouvert borné de $\mathbb{R}$ et $p \in \mathbb{N}$. Notons $||\cdot||_0$ la nor
uniforme sur $\mathscr{C}(I, \mathbb{R})$ et $\mathscr{D}^{(p)}(I)$ l'espace vectoriel des applications $f : I \to \mathbb{R}$ de cla
C^p, de dérivées d'ordre au plus p bornées sur I, muni de la norme $||f||_p = \sum_{i=0}^p ||f^{(i)}$
Montrer que $\mathscr{D}^{(p)}(I)$ est un espace de Banach et que pour $p \geq 1$, l'injection $f \mapsto f$
$\mathscr{D}^{(p)}(\mathbb{R})$ dans $\mathscr{D}^{(p-1)}(\mathbb{R})$ est un opérateur compact.*

Proposition 6.45 *Si F est un espace de Banach, alors l'ensemble des opérateurs co
pacts de E dans F est un sous-espace vectoriel fermé de $\mathscr{L}(E, F)$. De plus, si $u \in \mathscr{L}(E,$
est compact, si G_1 et G_2 sont des espaces vectoriels normés, si $v \in \mathscr{L}(G_1, E)$ et
$w \in \mathscr{L}(F, G_2)$, alors $w \circ u \circ v \in \mathscr{L}(G_1, G_2)$ est compact.*

En particulier, par l'exemple (1), toute limite d'une suite d'opérateurs de rang fini
un opérateur compact. Mais on connait des exemples d'opérateurs compacts qui ne so
pas limites d'opérateurs de rang fini (voir par exemple [LT2]).

Si E est un espace de Banach, l'ensemble des opérateurs compacts de E dans lui-mê
est donc un idéal bilatère fermé dans l'algèbre de Banach $\mathscr{L}(E)$.

Preuve. Il est immédiat que l'ensemble des opérateurs compacts est stable par co
binaisons linéaires. Si un opérateur $u \in \mathscr{L}(E, F)$ est compact, si $v \in \mathscr{L}(G_1, E)$
$w \in \mathscr{L}(F, G_2)$, alors $v(\overline{B}_{G_1})$ est borné car $||v||$ est fini, donc $u \circ v(\overline{B}_{G_1})$ est contenu da
un compact, donc $w \circ u \circ v(\overline{B}_{G_1})$ est contenu dans un compact, car l'image d'un comp
par une application continue à valeurs dans un espace séparé est encore compact. Puis
tout fermé dans un compact est compact, $w \circ u \circ v(\overline{B}_{G_1})$ est donc d'adhérence compac

Pour montrer la fermeture de l'ensemble des opérateurs compacts, soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ u
suite d'opérateurs compacts de E dans F, convergeant vers u dans $\mathscr{L}(E, F)$. Montro
que $u(\overline{B}_E)$ est d'adhérence compacte. Puisque F est complet, par le théorème 4.6
Bolzano-Weierstrass, il suffit de montrer que pour tout $\epsilon > 0$, on peut recouvrir $u(\overline{B}$
par un nombre fini de boules de rayon ϵ. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $||u_n - u|| < \frac{\epsilon}{2}$. Puis
l'opérateur u_n est compact, il existe $y_1, \dots, y_n \in F$ tels que $u_n(\overline{B}_E) \subset \bigcup_{i=1}^n B(y_i, \frac{\epsilon}{2})$. M
alors par inégalité triangulaire, $u(\overline{B}_E) \subset \bigcup_{i=1}^n B(y_i, \epsilon)$.

Proposition 6.46 *Si F est un espace de Hilbert, alors tout opérateur compact u de
dans F est limite d'opérateurs de rang fini.*

Preuve. Pour tout $\epsilon > 0$, soient $y_1, \dots, y_n \in F$ tels que $u(\overline{B}_E) \subset \bigcup_{i=1}^n B(y_i, \frac{\epsilon}{2})$. Notons p la projection orthogonale sur le sous-espace vectoriel engendré par $y_1, \dots, y_n$ et $v = p \circ u$, qui est linéaire continue, de rang fini. Pour tout $x \in \overline{B}_E$, soit $i \in \mathbb{N} \cap [1, n]$ tel que $u(x) \in B(y_i, \frac{\epsilon}{2})$. Alors, comme $p(y_i) = y_i$ et puisque $||p|| \leq 1$, nous avons

$$||u(x) - v(x)|| \leq ||u(x) - y_i|| + ||p(y_i) - p(u(x))|| \leq \epsilon ,$$

donc $||u - v|| \leq \epsilon$. □

Proposition 6.47 (Théorème de Schauder) *Si E est un espace de Banach, si un opérateur $u \in \mathscr{L}(E, F)$ est compact, alors son adjoint $u' \in \mathscr{L}(F', E')$ est compact.*

Preuve. Notons X l'espace métrique compact $\overline{u(\overline{B}_E)}$, et considérons l'espace de Banach $\mathscr{C}(X, \mathbb{K})$ (muni de la norme uniforme $|| \cdot ||_\infty$). Notons $\mathscr{A}$ le sous-ensemble de $\mathscr{C}(X, \mathbb{K})$ des restrictions à X des éléments de $\overline{B}_{F'}$. Alors $\mathscr{A}$ est équicontinu (ses éléments sont 1-lipschitziens), et pour tout x dans X, $\mathscr{A}(x)$ est borné (par $||u||$). Par le théorème 5.31 d'Arzela-Ascoli, $\mathscr{A}$ est d'adhérence compacte dans $\mathscr{C}(X, \mathbb{K})$.

Soit $(\ell_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dans $\overline{B}_{F'}$. Quitte à extraire, la suite des éléments $\ell_{n|X}$ de $\mathscr{A}$ est donc convergente, donc de Cauchy, dans $\mathscr{C}(X, \mathbb{K})$. Comme

$$\begin{aligned} ||u'(\ell_n) - u'(\ell_m)||_{E'} &= \sup_{x \in \overline{B}_E} |u'(\ell_n)(x) - u'(\ell_m)(x)| \\ &= \sup_{x \in \overline{B}_E} |\ell_n(u(x)) - \ell_m(u(x))| = ||\ell_{n|X} - \ell_{m|X}||_\infty , \end{aligned}$$

la suite $\big(u'(\ell_n)\big)_{n \in \mathbb{N}}$, qui est de Cauchy dans l'espace de Banach E', converge. Donc l'opérateur u' est compact. □

Les propriétés élémentaires du spectre des opérateurs compacts sont regroupées dans le résultat suivant.

Proposition 6.48 *Soient E un espace de Banach, et $u \in \mathscr{L}(E)$ un opérateur compact.*

(1) Le noyau de $\mathrm{id} - u$ est de dimension finie.

(2) L'image de $\mathrm{id} - u$ est fermée.

(3) Si $\mathrm{id} - u$ est injective, alors $\mathrm{id} - u$ est surjective, donc inversible dans $\mathscr{L}(E)$.

(4) Si E est de dimension infinie, alors 0 est une valeur spectrale.

(5) Toute valeur spectrale non nulle de u est une valeur propre de u de multiplicité finie, isolée dans $\mathrm{Sp}(u)$.

En particulier, si $u \in \mathscr{L}(H)$ est compact, alors $\mathrm{Sp}(u) \cap \mathbb{K}^*$ est ou bien fini, ou bien une suite $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergente vers 0.

Preuve. Notons $v = \mathrm{id} - u$ et $N = \mathrm{Ker}(v)$.

(1) Pour tout $x \in N$, nous avons $u(x) = x$. La boule unité fermée $\overline{B}_N = \overline{B}_E \cap N$ de N est fermée dans E car N est fermé. Elle est d'adhérence compacte dans E, donc compacte, car $\overline{B}_N \subset u(\overline{B}_E)$ et u est compact. Donc par le théorème 4.18 de Riesz, la dimension de N est finie.

(2) Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dans E telle que $v(x_n)$ converge vers un point y dans E. Montrons que y appartient à l'image de v. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, puisque N est de dimension finie, il existe $z_n \in N$ tel que $d(x_n, N) = d(x_n, z_n)$ (par continuité et compacité).

Supposons par l'absurde que $d(x_n, N)$ tende vers $+\infty$. Posons $w_n = \frac{1}{d(x_n, N)}(x_n - z$
qui est de norme 1. Puisque u est compact, quitte à extraire, $u(w_n)$ converge vers w da
E. Comme $w_n - u(w_n) = v(w_n) = \frac{1}{d(x_n, N)} v(x_n)$ converge vers 0, nous avons w_n conve
vers w et $w \in N$ par continuité de u. Or $d(w_n, N) = 1$ par définition de z_n, et do
$d(w, N) = 1$, ce qui est une contradiction.

Donc quitte à extraire, la suite $(||x_n - z_n||)_{n \in \mathbb{N}}$ reste bornée, et comme u est compa
quitte à extraire, $u(x_n - z_n) = x_n - z_n - v(x_n)$ converge vers un point y' dans E. Do
$x_n - z_n$ converge vers $y' + y$. Par continuité, $y = \lim v(x_n) = \lim v(x_n - z_n) = v(y' +$
appartient alors à l'image de v, ce qu'il fallait démontrer.

(3) Soient $E_0 = E$ et $E_1 = v(E_0)$. Supposons par l'absurde que v est injectif et q
$E_1 \neq E_0$. Par (2), E_1 est un sous-espace fermé de E_0, stable par u (qui commute a
v). La restriction de u à E_1 est encore un opérateur compact de l'espace de Bana
E_1, car E_1 est fermé dans E_0. Par récurrence et puisque v est injectif, la suite $(E_n$
$v^n(E_0))_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite strictement décroissante de sous-espaces vectoriels fermés
E. Soient $x_n \in E_n - E_{n+1}$, $x'_n \in E_{n+1}$ tel que $d(x_n, x'_n) \leq 2\, d(x_n, E_{n+1})$ (ce qui
possible car $d(x_n, E_{n+1}) > 0$) et $y_n = \frac{1}{||x_n - x'_x||}(x_n - x'_n)$. Pour tous $m > n$, nous avo
$y_m + v(y_n) - v(y_m) \in E_{n+1}$. Donc

$$\begin{aligned} ||u(y_n) - u(y_m)|| = \big|\big|\big(y_n - v(y_n)\big) - \big(y_m - v(y_m)\big)\big|\big| &= \big|\big|y_n - \big(y_m + v(y_n) - v(y_m)\big) \\ \geq d(y_n, E_{n+1}) = \frac{d(x_n, E_{n+1})}{||x_n - x'_n||} \geq \frac{1}{2} . \end{aligned}$$

Or puisque u est compact et $||y_n|| = 1$, la suite $u(y_m)$ doit avoir une sous-suite convergen
contradiction.

(4) Si $0 \notin \mathrm{Sp}(u)$, alors u^{-1} existe et est continu. Puisque u est compact, $\overline{B}_E$
$u^{-1}(u(\overline{B}_E))$ est compact, ce qui implique par le théorème 4.18 de Riesz que la dimens
de E est finie.

(5) Si λ est une valeur spectrale non nulle qui n'est pas une valeur propre, alors
est un opérateur compact tel que $\mathrm{id} - \frac{1}{\lambda}u$ soit injective et non surjective, ce qui contre
(3).

Soit λ une valeur propre non nulle. Comme $\frac{1}{\lambda}u$ est compact, le noyau de $\mathrm{id} - \frac{1}{\lambda}u$
de dimension finie par (1), donc la multiplicité de λ est finie.

Montrons que λ est isolée dans $\mathrm{Sp}(u)$. Sinon, soient $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des valeurs propres n
nulles deux à deux distinctes, convergeant vers λ. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit e_n un vect
propre unitaire de valeur propre λ_n, et E_n le sous-espace vectoriel de E engendré p
$e_0, \dots, e_n$. Alors $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite strictement croissante de sous-espaces vectori
fermés de E. Comme ci-dessus, pour tout $n \geq 1$, soient $e'_n \in E_{n-1}$ tel que $d(e_n, e'_n)$
$2d(e_n, E_{n-1})$ et $y_n = \frac{e_n - e'_n}{||e_n - e'_n||}$. Si $n > m$, alors $z = u\big(\frac{e'_n}{\lambda_n ||e_n - e'_n||}\big) - u\big(\frac{y_m}{\lambda_m}\big) \in E_{n-1}$, donc

$$\big|\big|u\big(\frac{y_n}{\lambda_n}\big) - u\big(\frac{y_m}{\lambda_m}\big)\big|\big| = \big|\big|\frac{e_n}{||e_n - e'_n||} - z\big|\big| \geq \frac{d(e_n, E_{n-1})}{||e_n - e'_n||} \geq \frac{1}{2} ,$$

ce qui, avec la convergence de λ_n vers $\lambda \neq 0$, contredit aussi que u est compact.

Opérateurs auto-adjoints.

Soient E, F et G des espaces de Hilbert sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Proposition 6.49 *Pour tout $u \in \mathscr{L}(E,F)$, il existe une unique application $u^* \in \mathscr{L}(F,E)$ telle que*

$$\langle u^*(y), x\rangle_E = \langle y, u(x)\rangle_F$$

pour tous $x \in F$ et $y \in E$. L'application $u \mapsto u^*$ est involutive (i.e. $(u^*)^* = u$), anti-linéaire (i.e. $(u+\lambda v)^* = u^*+\overline{\lambda}v^*$), isométrique (i.e. $||u^*|| = ||u||$) et vérifie $(u\circ v)^* = v^*\circ u^*$ pour tous $u \in \mathscr{L}(E,F)$ et $v \in \mathscr{L}(G,E)$, où G est un espace de Hilbert.

De plus, $||u \circ u^*|| = ||u^* \circ u|| = ||u||^2$.

L'application u^* est appelée l'*adjoint* de u pour les produits scalaires de E et de F. Lorsque l'on identifie un espace de Hilbert et son dual par la dualité de Riesz-Fréchet (théorème 6.34), cette notion d'adjoint correspond à celle introduite dans le paragraphe 6.1, ce qui explique la terminologie.

Preuve. L'unicité de u^* est claire. Elle implique les propriétés d'involution, d'anti-linéarité, et la relation $(u \circ v)^* = v^* \circ u^*$.

Pour l'existence, soient $\varphi_E : E \to \overline{E}\,'$ et $\varphi_F : F \to \overline{F}\,'$ les isomorphismes de Riesz-Fréchet (voir le théorème 6.34), et $u' : \ell \mapsto \ell \circ u$ l'adjoint de u au sens du paragraphe 6.1, considéré comme une application (linéaire, continue) de $\overline{F'} = \overline{F}\,'$ dans $\overline{E'} = \overline{E}\,'$. Alors

$$u^* = \varphi_E^{-1} \circ u' \circ \varphi_F$$

convient.

Comme les isomorphismes de Riesz-Fréchet sont des isométries, et par le corollaire 6.7 (4), nous avons $||u^*|| = ||u'|| = ||u||$. [On peut aussi utiliser le fait que pour tout $y \in F$, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$||u^*(y)||^2 = \langle u^*(y), u^*(y)\rangle_E = \langle u(u^*(y)), y\rangle_F \leq ||u||\ ||(u^*(y))||\ ||y||\ ,$$

qui implique que $||u^*|| \leq ||u||$. Comme $(u^*)^* = u$, en remplaçant u par u^*, on a donc $||u^*|| = ||u||$.]

Nous avons donc

$$||u^* \circ u|| \leq ||u^*||\ ||u|| = ||u||^2\ .$$

De plus, pour tout $x \in E$, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$||u(x)||^2 = \langle u(x), u(x)\rangle_F = \langle u^* \circ u(x), x\rangle_E \leq ||u^* \circ u||\ ||x||^2\ ,$$

donc $||u||^2 \leq ||u^* \circ u||$. D'où $||u^* \circ u|| = ||u||^2$, et en remplaçant u par u^*, nous avons donc $||u \circ u^*|| = ||u^*||^2 = ||u||^2$. □

Lorsque $\mathscr{H}$ est un espace de Hilbert, les propriétés de l'algèbre de Banach $\mathscr{L}(\mathscr{H})$ munie de l'involution $u \mapsto u^*$ sont synthétisées dans la définition suivante.

Une C^*-*algèbre* (aussi appelée *algèbre stellaire* par quelques irréductibles gaulois) est une algèbre de Banach A sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ munie d'une application $u \mapsto u^*$ de A dans A telle que, pour tous $u, v \in A$ et $\lambda \in \mathbb{K}$,

- $(u^*)^* = u$ (involution)
- $(u + v)^* = u^* + v^*$ et $(\lambda u)^* = \overline{\lambda}\, u^*$ (anti-linéaire)
- $(u\,v)^* = v^*\, u^*$ (anti-multiplicative)
- $||uu^*|| = ||u||^2$.

Il découle de ces propriétés que u^* est inversible si et seulement si u l'est, et qu'alors

$$(u^*)^{-1} = (u^{-1})^*\ .$$

On vérifie facilement, par la proposition 6.49, que si $\mathscr{H}$ est un espace de Hilbert réel
complexe, alors $\mathscr{L}(\mathscr{H})$ muni de l'adjoint est une C^*-algèbre pour le produit $uv = u \circ$
La préservation de la norme par passage à l'adjoint dans $\mathscr{L}(\mathscr{H})$ est en fait une propri
générale des C^*-algèbres.

Proposition 6.50 *Si A est une C^*-algèbre, et si $u \in A$, alors $||u|| = ||u^*||$, et $||uu^*|$*
$||u^*u||$.

Preuve. Nous avons $||u||^2 \leq ||u||\ ||u^*||$ par la dernière propriété des C^*-algèbres, do
$||u|| \leq ||u^*||$. D'où le résultat en changeant u en u^*.

Nous renvoyons par exemple à [Con, KR, Tak] pour de nombreux autres compléme
sur les C^*-algèbres.

Soit $\mathscr{H}$ un espace de Hilbert sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Un opérateur $u \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ est
auto-adjoint si $u = u^*$. Un opérateur $u \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ est dit *positif* si $\langle u(x), x\rangle \geq 0$ pour to
$x \in \mathscr{H}$. Par exemple, pour tout $u \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$, les opérateurs uu^* et u^*u sont auto-adjoi
positifs.

Remarques. (1) Si u est autoadjoint, alors l'application $(x, y) \mapsto \langle u(x), y\rangle$ est une for
sesquilinéaire (bilinéaire si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$), et hermitienne (symétrique si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$). Elle est posit
si u est positif.

(2) Quand $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, un opérateur positif est auto-adjoint. En effet, en posant $a(x, y$
$\langle u(x), y\rangle$, qui est une forme sesquilinéaire, il suffit de montrer que a est hermitienne, c'e
à-dire que pour tous x, y dans $\mathscr{H}$, nous avons $\mathrm{Re}(a(x, y) - a(y, x)) = 0$ et $\mathrm{Im}(a(x, y$
$a(y, x)) = 0$. La seconde égalité découle de

$$a(x, y) + a(y, x) = a(x + y, x + y) - a(x, x) - a(y, y) \in \mathbb{R}$$

et la première de cette égalité où x est remplacé par ix.

Les propriétés élémentaires principales des opérateurs auto-adjoints sont résum
dans la proposition suivante. Certaines d'entre elles ont déjà été vues l'année derni
dans les espaces de Hilbert de dimension finie.

Proposition 6.51 *Soient $\mathscr{H}$ un espace de Hilbert sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et $u \in \mathscr{L}(\mathscr{H}$*

(i) Le spectre de l'adjoint u^* de u est le conjugué du spectre de u :

$$z \in \mathrm{Sp}(u^*) \iff \overline{z} \in \mathrm{Sp}(u)\ .$$

(ii) L'orthogonal de l'image de u est le noyau de son adjoint :

$$\big(u(\mathscr{H})\big)^\perp = \mathrm{Ker}(u^*)\ .$$

(iii) L'opérateur u est compact si et seulement si son adjoint u^* l'est.

(iv) Si u est auto-adjoint, et si F est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{H}$ invariant pa
(i.e. tel que $u(F) \subset F$), alors $F^\perp$ est aussi invariant par u.

(v) Si u est auto-adjoint, si $M = \sup_{||x||=1}\langle u(x), x\rangle$ et $m = \inf_{||x||=1}\langle u(x), x\rangle$, alors
et M appartiennent au spectre de u, $\mathrm{Sp}(u) \subset [m, M]$, et

$$\rho(u) = ||u|| = \sup_{||x||=1} |\langle u(x), x\rangle| = \max\{M, -m\}\ .$$

En particulier, le rayon spectral de u est égal à sa norme, et si $\mathrm{Sp}(u) = \{0\}$*, alors* $u = 0$.

(vi) Si u est auto-adjoint, alors son spectre résiduel est vide :

$$\mathrm{Sp}_{res}(u) = \emptyset\ .$$

(vii) Si u est auto-adjoint, alors le spectre $\mathrm{Sp}(u)$ *de u est l'ensemble des $\lambda \in \mathbb{K}$ tels qu'il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathscr{H}$ telle que $||x_n|| = 1$ et $\lim_{n\to+\infty} ||u(x_n) - \lambda x_n|| = 0$.*

Preuve. (i) L'opérateur $u - \lambda\,\mathrm{id}$ est inversible si et seulement si son adjoint, qui est $u^* - \overline{\lambda}\,\mathrm{id}$, est inversible.

(ii) Nous avons $x \in u(\mathscr{H})^\perp$ si et seulement si $\langle u(y), x\rangle = 0$ pour tout y dans $\mathscr{H}$, si et seulement si $\langle y, u^*(x)\rangle = 0$ pour tout y dans $\mathscr{H}$, donc si et seulement si $x \in \mathrm{Ker}(u^*)$.

(iii) Ceci découle de la proposition 6.47, par le théorème 6.34 de dualité de Riesz-Fréchet.

(iv) Soit $x \in F^\perp$. Pour tout $y \in F$, nous avons $u(y) \in F$, donc $\langle u(x), y\rangle = \langle x, u(y)\rangle = 0$. D'où $u(x) \in F^\perp$.

(v) Notons que $\langle u(x), x\rangle$ est réel, car u est auto-adjoint donc $\langle u(x), x\rangle = \langle x, u(x)\rangle = \overline{\langle u(x), x\rangle}$, et de valeur absolue majorée par $||u||$ par l'inégalité de Cauchy-Schwarz. En particulier, M et m sont des nombres réels bien définis. La preuve de l'assertion (v) découlera des points suivants.

- Montrons que $\mathrm{Sp}(u)$ est réel.

Si λ est une valeur propre de u, et x un vecteur propre (non nul) de u de valeur propre λ, alors

$$\lambda\langle x, x\rangle = \langle u(x), x\rangle = \langle x, u(x)\rangle = \overline{\lambda}\ \langle x, x\rangle\ ,$$

donc λ est réelle. Soit $\lambda \in \mathbb{K} - \mathbb{R}$. Posons $v = u - \lambda\,\mathrm{id}$, qui est injective, car λ n'est pas une valeur propre. Pour tout x dans $\mathscr{H}$, nous avons $\mathrm{Im}\langle v(x), x\rangle = \mathrm{Im}\big(\langle u(x), x\rangle - \langle \lambda x, x\rangle\big) = -\mathrm{Im}\,\lambda\ ||x||^2$. Donc par l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$|\,\mathrm{Im}\,\lambda|\ ||x||^2 \leq ||v(x)||\ ||x||\ .$$

Le résultat suivant montre donc que l'image de v est fermée, puisque $\mathrm{Im}\,\lambda \neq 0$.

Lemme 6.52 *Soient E, F deux espaces vectoriels normés sur $\mathbb{K}$, avec E complet, et $v \in \mathscr{L}(E, F)$. S'il existe $c > 0$ tel que $c||x|| \leq ||v(x)||$ pour tout x dans E, alors l'image de v est fermée, et $v : E \to v(E)$ est un homéomorphisme.*

Preuve. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans E telle que $v(x_n)$ converge vers y dans F. Alors $\big(v(x_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy, donc par l'hypothèse, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans E. Elle converge donc vers $x \in E$, tel que $v(x) = y$ par continuité de v. D'où y est dans l'image de v. □

Par (ii), l'orthogonal de l'image de v est égal au noyau de $u^* - \overline{\lambda}\,\mathrm{id} = u - \overline{\lambda}\,\mathrm{id}$, qui est réduit à $\{0\}$, car $\overline{\lambda}$, n'étant par réel, n'est pas une valeur propre de u. Donc l'image de v est dense par le corollaire 6.33 (2). Comme elle fermée par le lemme ci-dessus, l'application v est surjective, donc bijective, et λ n'est pas une valeur spectrale.

- Montrons que $\mathrm{Sp}(u) \subset\ ]-\infty, M]$. En remplaçant u par $-u$, ceci montrera que $\mathrm{Sp}(u) \subset\ [m, +\infty[$, donc que $\mathrm{Sp}(u) \subset\ [m, M]$.

Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, soit $v_\lambda = \lambda\,\mathrm{id} - u$. Alors l'application $(x, y) \mapsto \langle v_\lambda(x), y\rangle$ de $\mathscr{H} \times$
dans $\mathbb{K}$ est continue, sesquilinéaire. Si $\lambda > M$, alors cette application est coercive : po
tout x dans $\mathscr{H}$, nous avons $\langle v_\lambda(x), x\rangle = \langle \lambda x, x\rangle - \langle u(x), x\rangle \geq (\lambda - M)||x||^2$. En particuli
l'application v_λ est injective. Elle est aussi surjective. En effet, pour tout y dans
l'application $z \mapsto \langle y, z\rangle$ appartient à $\overline{\mathscr{H}'}$. Donc par le théorème 6.38 de Lax-Milgra
il existe x dans $\mathscr{H}$ tel que $\langle v_\lambda(x), z\rangle = \langle y, z\rangle$ pour tout z dans $\mathscr{H}$. Ceci implique q
$v_\lambda(x) = y$, i..e. que v_λ est surjective, donc que λ n'appartient pas au spectre de u.

- Montrons que $M \in \mathrm{Sp}(u)$. En remplaçant u par $-u$, ceci montre que $m \in \mathrm{Sp}(u$

Soit $v = M\,\mathrm{id} - u$, qui est auto-adjoint. L'application sesquilinéaire $(x, y) \mapsto \langle v(x)$
est hermitienne, et positive par définition de M. Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz (s
le cas d'égalité nécessitait la condition définie (positive), voir la preuve de la proposit
6.31), nous avons $|\langle v(x), y\rangle|^2 \leq \langle v(x), x\rangle\langle v(y), y\rangle$. Rappelons que $||x'|| = \sup_{||y'||=1}\langle x',$
pour tout $x' \in \mathscr{H}$. Donc par l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$||v(x)||^2 \leq ||v||\ \langle v(x), x\rangle\ .$$

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $\mathscr{H}$ telle que $||x_n|| = 1$ et $\langle u(x_n), x_n\rangle$ converge vers M. Al
$\langle v(x_n), x_n\rangle$ converge vers 0 et donc $||v(x_n)||$ aussi. Si M n'appartient pas au spectre de
alors v est inversible et $x_n = v^{-1}(v(x_n))$ converge vers 0, ce qui n'est pas possible.

- Soit $\kappa = \sup_{||x||=1} |\langle u(x), x\rangle|$, montrons que $\kappa \geq ||u||$.

Pour tous x et y dans $\mathscr{H}$ de norme 1, puisque u est auto-adjoint, nous avons

$$\begin{aligned}|4\,\mathrm{Re}\,\langle u(x), y\rangle| &= |\langle u(x+y), x+y\rangle - \langle u(x-y), x-y\rangle| \\ &\leq \kappa\big(||x+y||^2 + ||x-y||^2\big) = 2\kappa\big(||x||^2 + ||y||^2\big) = 4\kappa\end{aligned}$$

Par homogénéité, pour tous x et y dans $\mathscr{H}$, nous avons donc $|\,\mathrm{Re}\,\langle u(x), y\rangle| \leq \kappa\,||x||\,||$
Donc $||u(x)||^2 = \mathrm{Re}\,\langle u(x), u(x)\rangle \leq \kappa\,||x||\,||u(x)||$, ce qui implique que $||u|| \leq \kappa$.

Par la proposition 6.43 et ce qui précède, nous avons

$$||u|| \geq \rho(u) \geq \max\{M, -m\} = \sup_{||x||=1} |\langle u(x), x\rangle| \geq ||u||\ .$$

L'assertion (v) en découle.

(vi) Soit λ une valeur spectrale non valeur propre de u. Puisque u est auto-adjoint
est réelle par (v). L'image de $u - \lambda\,\mathrm{id}$ est dense, car son orthogonal est nul par (ii). Do
λ n'appartient pas au spectre résiduel, et celui-ci est vide.

(vii) Notons σ l'ensemble des $\lambda \in \mathbb{K}$ tels qu'il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathscr{H}$ te
que $||x_n|| = 1$ et $\lim_{n\to+\infty} ||u(x_n) - \lambda x_n|| = 0$.

Si $\lambda \notin \mathrm{Sp}(u)$, alors $x_n = (u - \lambda\,\mathrm{id})^{-1}(u(x_n) - \lambda x_n)$ tend vers 0 quand $||u(x_n) - \lambda x$
tend vers 0, donc $\lambda \notin \sigma$.

Réciproquement, soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$, qui en particulier est réel. Si λ est une valeur prop
alors $\lambda \in \sigma$ (en considérant une suite constante en un vecteur propre unitaire). Sin
$v = u - \lambda\,\mathrm{id}$ est d'image dense par (vi). Si $\lambda \notin \sigma$, alors il existe $N \in \mathbb{N} - \{0\}$ tel q
$||v(x)|| \geq N$ pour tout vecteur unitaire x de $\mathscr{H}$. Par homogénéité, $||v(x)|| \geq N||x||$ po
tout $x \in \mathscr{H}$. Par le lemme 6.52, l'image de v est fermée, ce qui contredit que $\lambda \in \mathrm{Sp}($
□

Exercice E.69 *Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, soit $\mathscr{H}$ un espace de Hilbert séparable sur $\mathbb{K}$, soit F un sous-espace vectoriel fermé de $\mathscr{H}$ de codimension infinie, soit $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base hilbertienne de l'orthogonal $F^\perp$ de $\mathscr{F}$, et soit $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs convergeant vers 0.*

Montrer qu'il existe un et un seul opérateur auto-adjoint positif compact $u \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ tel que u s'annule sur F et $u(e_n) = \lambda_n e_n$ pour tout n.

Montrer que les valeurs propres de u sont les λ_n (de multiplicités finies)

$$\mathrm{Vp}(u) = \{\lambda_n \ : \ n \in \mathbb{N}\} ,$$

que le spectre de u est

$$\mathrm{Sp}(u) = \{0\} \cup \mathrm{Vp}(u) .$$

Le but de la partie suivante est de montrer que tous les opérateurs auto-adjoints compacts positifs de rang infini sont comme dans l'exercice.

Spectre des opérateurs auto-adjoints compacts.

Le résultat suivant dit en particulier qu'un opérateur auto-adjoint compact d'un espace de Hilbert séparable est diagonalisable en base hilbertienne.

Théorème 6.53 *Soit u un opérateur auto-adjoint compact dans un espace de Hilbert $\mathscr{H}$ sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Il existe deux suites finies ou infinies de réels strictement positifs $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N},\, n<N_+}$ et $(\nu_n)_{n\in\mathbb{N},\, n<N_-}$, convergeant vers 0 si $N_+ = +\infty$ (resp. $N_- = +\infty$), telles que si $E_\lambda = \mathrm{Ker}(u - \lambda\,\mathrm{id})$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, alors*

(1) les λ_n, $-\nu_n$ sont des valeurs propres de multiplicités finies de u, qui sont les seules valeurs spectrales non nulles de u ;

(2) $||u|| = \max\{\lambda_0, \nu_0\}$ si $u \neq 0$;

(3) $\mathscr{H}$ est somme hilbertienne de E_0 et des E_{λ_n}, E_{ν_n} ;

(4) (Principe de Rayleigh) si $k < N_+$ et $n < N_-$, alors

$$\lambda_k = \max_{x\in\left(E_0\oplus\bigoplus_{i=0}^{k-1} E_{\lambda_i}\right)^\perp,\, ||u||=1} \langle u(x), x\rangle \quad \text{et} \quad -\nu_n = \min_{x\in\left(E_0\oplus\bigoplus_{i=0}^{n-1} E_{\nu_i}\right)^\perp,\, ||u||=1} \langle u(x), x\rangle .$$

Bien sûr, 0 peut être ou ne pas être une valeur propre. Il découle immédiatement de ce résultat que 0 n'appartient pas au spectre de u si et seulement si $\mathscr{H}$ est de dimension finie et si u est bijectif ; de plus u n'a pas de valeur propre non nulle si et seulement si $u = 0$.

Preuve. (1) Par les propositions 6.48 et 6.51 (v), l'ensemble des valeurs spectrales non nulles de u est formé de valeurs propres réelles isolées bornées de multiplicités finies. En séparant les positives et les négatives, elles forment donc deux suites finies ou infinies de réels strictement positifs $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N},\, n<N_+}$ et de réels strictement négatifs $(-\nu_n)_{n\in\mathbb{N},\, n<N_-}$. Ces suites convergent vers 0 si $N_+ = +\infty$ (resp. $N_- = +\infty$), par fermeture du spectre.

(2) Ceci découle de la proposition 6.51 (v).

(3) Montrons tout d'abord que ces sous-espaces (qui sont fermés) sont orthogonaux deux à deux. Si $x, y \in \mathscr{H}$ et $u(x) = \lambda x$ et $u(y) = \mu y$ avec $\mu \neq \lambda$ deux nombres réels, alors puisque u est auto-adjoint

$$\lambda\langle x, y\rangle = \langle u(x), y\rangle = \langle x, u(y)\rangle = \mu\langle x, y\rangle ,$$

donc x et y sont orthogonaux, ce qui montre le résultat.

Notons F le sous-espace vectoriel de $\mathscr{H}$ engendré par ces sous-espaces, et montre
que F est dense dans $\mathscr{H}$.

Par construction, F est invariant par u, donc $F^\perp$ est invariant par u par la propost
6.51 (iv). L'opérateur linéaire $v = u_{|F^\perp}$ est auto-adjoint compact, et par construction
n'a pas de valeur propre non nulle, donc par la proposition 6.48 (5), son spectre est réd
à $\{0\}$. Par la proposition 6.48 (6) ou 6.51 (v), l'opérateur v est nul, donc $F^\perp$ est conte
dans E_0, donc est nul. Par le corollaire 6.33 (2), le sous-espace vectoriel F est donc den

(4) Quitte à changer u en $-u$, il suffit de montrer la première égalité. Notons F_k
$E_0 \oplus E_{\lambda_0} \oplus E_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_{k-1}}$, qui est invariant par u. Alors $F_k^\perp$ l'est aussi, et $u_{|F_k}$
auto-adjoint compact, de plus grande valeur spectrale λ_k. Le résultat découle donc de
proposition 6.51 (v).

Porisme 6.54 *(1) Soit u un opérateur auto-adjoint compact positif dans un espace
Hilbert $\mathscr{H}$ de dimension infinie. Alors il existe une suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels strictem
positifs convergeants vers 0, qui sont des valeurs propres de u de multiplicités finies, te
que, en posant $E_\lambda = \mathrm{Ker}(u - \lambda\,\mathrm{id})$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,*

$$\mathrm{Sp}(u) = \{0\} \cup \{\lambda_n \ : n \in \mathbb{N}\} , \quad \mathscr{H} = E_0 \oplus \overline{\bigoplus_{n\in\mathbb{N}}} E_{\lambda_n} \quad \text{et} \quad \lambda_0 = \sup_{x\in\mathrm{Ker}(u)^\perp,\, ||x||=1} \langle u(x), x\rangle$$

*(2) Soit u un opérateur auto-adjoint compact dans un espace de Hilbert séparable
Alors $\mathscr{H}$ admet une base hilbertienne formée de vecteurs propres de u.*

Preuve. (1) Cette assertion découle immédiatement du théorème 6.53, car le spectre d'
opérateur positif est positif.

(2) Avec les notations du théorème 6.53, chaque $E_0, E_{\lambda_n}, E_{\nu_n}$ est un espace de Hilb
séparable (de dimension finie sauf peut-être E_0), donc en mettant bout à bout des ba
orthonormées des E_{λ_n}, E_{ν_n} et en y intercalant les éléments d'une base hilbertienne de
on obtient le résultat.

Résolution spectrale des opérateurs auto-adjoints.

Le but de ce chapitre est de décrire un opérateur auto-adjoint d'un espace de Hilb
sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ par des quantités définies sur son spectre. Un rôle important va ê
joué par les projecteurs orthogonaux.

Proposition 6.55 *Soit $\mathscr{H}$ un espace de Hilbert sur $\mathbb{K}$, et $P \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$. Alors P est
projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel fermé de $\mathscr{H}$ si et seulement si P
un opérateur auto-adjoint idempotent (i.e. $P^2 = P$) de $\mathscr{H}$. De plus, P est alors positi
P est la projection orthogonale sur son image $P(\mathscr{H})$.*

Preuve. Si P est la projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel fermé F de
alors pour tous x, y dans $\mathscr{H}$, les vecteurs $P(x)$ et $y - P(y)$, ainsi que $P(x) - x$ et $P($
sont orthogonaux, et donc $\langle P(x), y\rangle = \langle P(x), P(y)\rangle = \langle x, P(y)\rangle$. Ceci montre que P
auto-adjoint, et positif, car $\langle P(x), x\rangle = \langle P(x), P(x)\rangle \geq 0$. Comme la restriction de P à
est l'identité, P est idempotent.

Réciproquement, soit P un opérateur auto-adjoint idempotent. Si $y = P(x)$, al
$P(y) = P^2(x) = P(x) = y$. Donc l'image $P(\mathscr{H})$ est contenue dans le noyau de id $-$
donc égal à ce noyau, et en particulier, $P(\mathscr{H})$ est fermé. Puisque P est autoadjoint, po
tous x, y dans $\mathscr{H}$, $\langle P(y), x - P(x)\rangle = \langle y, P(x) - P^2(x)\rangle = 0$. Donc $P(x)$ est un vect
tel que $P(x) - x$ soit orthogonal à $P(\mathscr{H})$, ce qui montre le résultat.

Définition 6.56 *Soit $\mathscr{H}$ un espace de Hilbert sur $\mathbb{K}$. Une famille $(P_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ de projecteurs orthogonaux de $\mathscr{H}$ est appelé une* résolution de l'identité *si*

(a) $P_\lambda \circ P_\mu = P_{\min\{\lambda,\mu\}}$;
(b) $P_\lambda = 0$ si λ est assez petit, et $P_\lambda = \mathrm{id}$ si λ est assez grand ;
(c) pour tout x dans $\mathscr{H}$, $\lim_{\mu\to\lambda^+} P_\mu(x) = P_\lambda(x)$.

La première propriété s'appelle la *propriété de croissance*, la troisième la *propriété de continuité faible à droite*. Lorsque l'on s'intéresse à des opérateurs linéaires dont le domaine de définition n'est pas tout l'espace de départ (dit *non-bornés*), la condition (b) doit être remplacée par $\lim_{\mu\to-\infty} P_\mu(x) = 0$ et $\lim_{\mu\to+\infty} P_\mu(x) = x$, pour tout $x \in \mathscr{H}$.

Il découle de ces propriétés et des propriétés des projections orthogonales que pour tout x dans X, l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\lambda \mapsto \langle P_\lambda(x), x\rangle$$

est une application nulle au voisinage de $-\infty$, égale à $||x||^2$ au voisinage de $+\infty$, croissante, (car pour tout $x \in \mathscr{H}$, si $\lambda \le \mu$, alors

$$\langle P_\lambda(x), x\rangle = \langle P_\lambda(x), P_\lambda(x)\rangle = \langle P_\lambda \circ P_\mu(x), P_\lambda \circ P_\mu(x)\rangle \le \langle P_\mu(x), P_\mu(x)\rangle = \langle P_\mu(x), x\rangle$$

puisque P_λ est de norme au plus 1), et continue à droite.

Le résultat suivant est montré par exemple dans [Coh, page 23].

Théorème 6.57 *Si $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction bornée, croissante, continue à droite, nulle sur $]-\infty, m[$ et constante sur $]M, +\infty[$, alors il existe une unique mesure positive borélienne finie μ sur $\mathbb{R}$, à support contenu dans $[m, M]$, telle que $\mu(]-\infty, \lambda]) = F(\lambda)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.* □

Une telle mesure est appelée *mesure de Stieljes*, et notée dF. Par unicité, si $t \ge 0$ et $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une telle autre fonction, alors $F + tG$ est aussi bornée, croissante, continue à droite, nulle sur $]-\infty, m[$ et constante sur $]M, +\infty[$, et $d(F + tG) = dF + tdG$. De plus, $||dF|| = \lim_{\lambda\to+\infty} F(\lambda)$.

En particulier, nous noterons $d\langle P_\lambda(x), x\rangle$ la mesure de Stieljes de l'application $\lambda \mapsto \langle P_\lambda(x), x\rangle$, qui vérifie les hypothèses du théorème ci-dessus.

Proposition 6.58 *Soient $\mathscr{H}$ un espace de Hilbert sur $\mathbb{K}$, $(P_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ une résolution de l'identité, et $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{K})$. Il existe un unique opérateur linéaire $u \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ tel que, pour tout $x \in \mathscr{H}$,*

$$\langle u(x), x\rangle = \int_{\lambda\in\mathbb{R}} f(\lambda)\ d\langle P_\lambda(x), x\rangle\ .$$

Cet opérateur est autoadjoint si f est à valeurs réelles, et positif si f est à valeurs positives.

Cet opérateur sera noté

$$u = \int_{\lambda\in\mathbb{R}} f(\lambda)\ dP_\lambda\ .$$

Preuve. Pour tout $x \in \mathscr{H}$, notons $q(x) = \int_{\lambda\in\mathbb{R}} f(\lambda)\ d\langle P_\lambda(x), x\rangle$, qui est bien défini, car μ est de support compact. Par les propriétés des mesures de Stieljes, l'application $a : \mathscr{H} \times \mathscr{H}$ définie par $a(x, y) = \frac{1}{2}\big(q(x+y) - q(x) - q(y)\big)$ si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, et par

$$a(x, y) = \frac{1}{2}\big(q(x+y) - q(x) - q(y)\big) + \frac{i}{2}\big(q(x+iy) - q(x) - q(y)\big)$$

si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, est sesquilinéaire, et hermitienne si f est réelle. Toujours par les proprié des mesures de Stieljes, la mesure $d\langle P_\lambda(x), x\rangle$ est de norme au plus $||x||^2$ et son supp est contenu dans $[m, M]$ si $P_\lambda = 0$ pour $\lambda < m$ et $P_\lambda = \mathrm{id}$ pour $\lambda > M$. Donc $C = \max_{\lambda\in[m,M]} |f(\lambda)|$ (qui est fini), alors pour tout x dans $\mathscr{H}$, nous avons $q(x) \le C||x$ Donc pour tous x, y dans $\mathscr{H}$ de norme 1, nous avons $|a(x, y)| \le 6C$, donc a est contin

Le résultat découle alors du corollaire 6.35 au théorème de dualité de Riesz-Fréch
□

Il est possible de montrer que tout opérateur linéaire continu auto-adjoint sur espace de Hilbert réel ou complexe est de cette forme.

6.4 Indications pour la résolution des exercices

Schème E.65. L'application $p_n : \mathscr{H} \to E_n$ définie par $p_n\big((x_k)_{k\in\mathbb{N}}\big) = x_n$ est une app cation linéaire, et pour tous x, y dans $\mathscr{H}$, nous avons $\langle x, y\rangle_{\mathscr{H}} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle p_n(x), p_n(y)\rangle$ Puisque $\langle\cdot,\cdot\rangle_{E_n}$ est une forme sesquilinéaire hermitienne, par passage à la limite des éga tés, $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathscr{H}}$ est aussi une forme sesquilinéaire hermitienne. Puisqu'une série converge de termes positifs ou nuls est positive ou nulle, et est nulle si et seulement si chacun ses termes est nul, $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathscr{H}}$ est définie positive. Donc $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathscr{H}}$ est un produit scalaire sur dont la norme associée est

$$||x|| = \Big(\sum_{k\in\mathbb{N}} ||x_k||^2\Big)^{\frac{1}{2}}$$

si $x = (x_k)_{k\in\mathbb{N}}$. En particulier, $||p_n(x)|| = ||x_n|| \le ||x||$, donc p_n est 1-lipschitzienne, do continue. De plus p_n est un isomorphisme linéaire isométrique en restriction au sous-espa vectoriel F_n, qui est fermé comme intersection de fermés, car

$$F_n = \{x \in \mathscr{H}\ :\ \forall\ k \in \mathbb{N} - \{n\},\ p_k(x) = 0\}$$

et p_k est continue pour tout $k \in \mathbb{N}$. Il est immédiat par définition du produit scala de $\mathscr{H}$ que F_n et F_m sont orthogonaux si $n \ne m$. Pour tout $x = (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathscr{H}$, s $N \in \mathbb{N}$ tel que $\big(\sum_{k=N}^{+\infty} ||x_k||^2\big)^{\frac{1}{2}} < \epsilon$, et soit y l'élément de $\mathscr{H}$, dont les N premiè composantes sont $x_0, \dots, x_{N-1}$ et dont les autres composantes sont nulles. Alors y un élément de la somme directe des F_n (car somme finie d'éléments des F_k). De p $||x - y|| = \big(\sum_{k=N}^{+\infty} ||x_k||^2\big)^{\frac{1}{2}} < \epsilon$. Donc la somme directe des F_n est dense dans $\mathscr{H}$. C montre que $\mathscr{H}$ est une somme hilbertienne des F_n. (Mais $\mathscr{H}$ n'est pas égale à la som directe des F_n, cette somme directe étant l'ensemble des éléments de $\mathscr{H}$ dont toutes composantes sauf un nombre fini sont nulles).

Schème E.66. L'idée clef est d'utiliser les coordonnées hilbertiennes, ce qui est natu vu l'énoncé, et d'appliquer moultes fois le théorème de Parseval 6.40.

Pour tout x dans $\mathscr{H}$, nous noterons $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les coordonnées hilbertiennes de x da la base hilbertienne $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Par linéarité et continuité, si un tel opérateur u existe, al pour tout x dans $\mathscr{H}$, nous avons $u(x) = u(\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n e_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n x_n e_n$, ce qui mon l'unicité. Réciproquement, pour tout x dans $\mathscr{H}$, puisque C est compact, il existe Λ tel que $|\lambda_n| \le \Lambda$ pour tout n, et donc la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} |\lambda_n x_n|^2$, majorée par $\Lambda \sum_{n\in\mathbb{N}} |x$ qui est égal à $\Lambda||x||^2$ par l'égalité de Parseval, converge. Par le théorème 6.40, la sé $y = \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n x_n e_n$ converge donc dans $\mathscr{H}$, et on pose $u(x) = y$. Il est immédiat que u linéaire, et que $||u|| \le \Lambda$ (toujours par l'égalité de Parseval). Donc u est continue, ce montre l'existence.

Par unicité des coordonnées hilbertiennes, pour tout x dans $\mathscr{H}$ et tout λ dans $\mathbb{C}$, si $u(x) = \lambda x$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons $\lambda_n x_n = \lambda x_n$, ce qui implique que $x_n = 0$ ou que $\lambda = \lambda_n$. Donc les valeurs propres sont exactement les λ_n pour $n \in \mathbb{N}$. Si λ est une valeur propre, son espace propre E_λ, qui est l'ensemble des $x \in \mathscr{H}$ tels que $x_n = 0$ si $\lambda_n \neq \lambda$, est l'adhérence du sous-espace vectoriel somme directe des $\mathbb{C}e_n$ pour les $n \in \mathbb{N}$ tels que $\lambda_n = \lambda$ (attention, si une infinité de λ_n prennent la valeur λ, cet espace propre E_λ n'est pas la somme directe de ces droites, qui n'est pas fermée, mais est la somme hilbertienne de ces droites). Donc

$$\mathrm{Vp}(u) = \{\lambda_n \;:\; n \in \mathbb{N}\}\ .$$

Comme le spectre $\mathrm{Sp}(u)$ est fermé, et contient $\mathrm{Vp}(u)$ qui est dense dans C, nous avons donc l'inclusion $C \subset \mathrm{Sp}(u)$. Pour montrer que cette inclusion est une égalité, soit $\lambda \in \mathbb{C} - C$. Comme C est compact, il existe $\epsilon > 0$ tel que le disque de centre λ et de rayon $\epsilon > 0$ soit contenu dans le complémentaire de C. En particulier, $|\lambda_n - \lambda| \geq \epsilon > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Montrons que $u - \lambda\,\mathrm{id}$ est surjectif. Pour tout y dans $\mathscr{H}$, posons $x_i = \frac{y_i}{\lambda_i - \lambda}$ (le dénominateur ne s'annule pas). Alors la série $\sum_{i\in\mathbb{N}} |x_i|^2$, majorée par $\frac{1}{\epsilon^2}\sum_{i\in\mathbb{N}} |y_i|^2$, qui est égal à $\frac{||y||^2}{\epsilon^2}$ par l'égalité de Parseval, converge. Par le théorème 6.40, la série $x = \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n e_n$ converge donc dans $\mathscr{H}$. Par linéarité et continuité de u, nous avons

$$u(x) - \lambda x = \sum_{n\in\mathbb{N}} (\lambda_n - \lambda) x_n e_n = \sum_{n\in\mathbb{N}} y_n e_n = y\ ,$$

ce qui montre la surjectivité.

Montrons que $u - \lambda\,\mathrm{id}$ est injectif. Pour tout x dans $\mathscr{H}$, par l'égalité de Parseval, nous avons $||u(x) - \lambda x||^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} |(\lambda_n - \lambda)x_n|^2 \geq \epsilon^2 ||x||$, donc $u(x) - \lambda x$ ne s'annule que si x est nul, ce qui montre l'injectivité.

Donc $u - \lambda\,\mathrm{id}$ est bijectif, et tout $\lambda \notin C$ est une valeur régulière de u. Ceci montre que

$$\mathrm{Sp}(u) = C\ .$$

Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ non valeur propre de u, montrons que l'image de $u - \lambda\,\mathrm{id}$ est dense dans $\mathscr{H}$. Ceci montre que le spectre résiduel de u est vide. Pour tout y dans $\mathscr{H}$ et tout $\epsilon > 0$, soit N tel que $\sum_{n=N+1}^{+\infty} |y_i|^2 \leq \epsilon^2$ (ce qui est possible par la convergence de la série $\sum |y_i|^2$ par le théorème de Parseval). Posons $x_i = \frac{y_i}{\lambda_i - \lambda}$ (le dénominateur ne s'annule pas) et $x = \sum_{i=0}^{N} x_i e_i$. Alors $u(x) - \lambda x = \sum_{i=0}^{N} \lambda_i x_i e_i - \lambda x_i e_i = \sum_{i=0}^{N} y_i e_i$. Par l'égalité de Parseval, $||(u(x) - \lambda x) - y|| = \big(\sum_{n=N+1}^{+\infty} |y_i|^2\big)^{\frac{1}{2}} \leq \epsilon$, ce qui montre le résultat.

Schème E.67. Pour tout x dans $\mathscr{H}$, nous noterons $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les coordonnées hilbertiennes de x dans la base hilbertienne $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$. La série à termes deux à deux orthogonaux $\sum_{i\in\mathbb{N}} x_i e_{i+1}$, dont la somme des carrés des normes des termes est $\sum_{i\in\mathbb{N}} |x_i|^2 = ||x||$, converge par le théorème de Parseval 6.40. Donc $u(x)$ est bien définie, et clairement linéaire, et est isométrique : $||u(x)|| = ||x||$ pour tout x dans $\mathbb{H}$. En particulier u est injective de norme 1, donc de rayon spectral au plus 1, et le spectre de u est contenu dans le disque unité fermé $D = \{z \in \mathbb{C} \;:\; |z| \leq 1\}$ de $\mathbb{C}$.

Comme u est injective, 0 n'est pas valeur propre. Si $\lambda \in \mathbb{C} - \{0\}$ et $u(x) = \lambda x$, alors par unicité des coordonnées hilbertiennes, $\lambda x_0 = 0$ et $\lambda x_{i+1} = x_i$ pour tout $i \in \mathbb{N}$. Ceci implique que $x_i = 0$ pour tout i, donc $x = 0$, et u n'a pas de valeur propre.

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $|\lambda| < 1$. Montrons que $u - \lambda\,\mathrm{id}$ n'est pas d'image dense dans $\mathscr{H}$. C
montrera que le spectre résiduel contient le disque unité ouvert. Comme le spectre résid
est contenu dans le spectre, qui est fermé, ceci montrera l'autre inclusion $D \subset \mathrm{Sp}(u)$,
donc que

$$\mathrm{Sp}(u) = D\ .$$

Notons $\varphi : \mathscr{H} \to \mathbb{C}$ la forme linéaire $y \mapsto \sum_{i\in\mathbb{N}} \lambda^i y_i$, qui est bien définie, car
suite des coordonnées hilbertiennes $(y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est bornée et $|\lambda| < 1$. Il est immédiat de v
que φ est continue (les coordonnées hilbertiennes le sont). Son noyau est un hyperp
vectoriel fermé. Montrons que l'image de $u - \lambda\,\mathrm{id}$ est contenu dans ce noyau, qui n'est p
dense car fermé et de codimension 1, ce qui conclut. Soient $x, y \in \mathscr{H}$. Si $y = u(x) -$
alors, par unicité des coordonnées hilbertiennes, nous avons $y_0 = -\lambda x_0$ (équation E
et $y_{i+1} = x_i - \lambda x_{i+1}$ (équation E_i) pour tout $i \in \mathbb{N}$. En multipliant par λ^{i+1} l'équat
E_i pour tout $i \in \mathbb{N} \cup \{-1\}$ et en ajoutant les $n+1$ premières équations, nous obten
$\sum_{i=0}^{n} \lambda^i y_i = -\lambda^{i+1} x_i$. Comme la suite $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est bornée et $|\lambda| < 1$, par passage à la lim
nous obtenons que y appartient au noyau de φ, ce qui montre le résultat.

7 Calcul différentiel banachique

Nous renvoyons par exemple à [Ave, Car, Die1] pour des références générales concernant ce chapitre. Nous renvoyons à [Die1] pour ce qui concerne les applications analytiques réelles (ou de classe C^ω) et analytiques complexes, deux notions dont nous ne traiterons guère ici.

L'idée directrice du calcul différentiel est celle de l'approximation locale des fonctions par des fonctions linéaires ou affines, pour arriver à modeler les comportement locaux de fonctions sur ceux des fonctions linéaires ou affines. Les applications de ce principe de linéarisation sont nombreuses, aussi bien en mathématique qu'en physique.

Si E et F sont deux espaces vectoriels normés, nous munirons $\mathscr{L}(E,F)$ de la norme d'opérateur $||u|| = \sup_{||x||\leq 1} ||u(x)||$, de sorte que $\mathscr{L}(E,F)$ est un espace de Banach si E et F le sont (voir le paragraphe 6.1).

7.1 Dérivation

Notons $\mathbb{K}$ le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soient E et F deux espaces vectoriels normés sur $\mathbb{K}$, U un ouvert de E, $f : U \to F$ une application, et a un point de U.

On dit que f est *différentiable* (au sens de Fréchet), ou aussi *dérivable*, au point a s'il existe une application linéaire continue $g : E \to F$ telle que

$$f(a+h) - f(a) - g(h) = o(h)$$

quand h tend vers 0 (le membre de gauche est bien défini si h est suffisamment proche de 0).

En particulier, si f est différentiable en a, alors f est continue en a.

Une telle application g, si elle existe, est unique. En effet, soit g_* une autre application linéaire continue telle que $f(a+h)-f(a)-g_*(h) = o(h)$. Alors $g_*(h)-g(h) = o(h)$ quand h tend vers 0, c'est-à-dire que pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout h dans E, si $||h|| < \eta$, alors $||g_*(h) - g(h)|| \leq \epsilon||h||$. Pour tout h dans E tel que $||h|| \leq 1$, nous avons $||\frac{\eta}{2}h|| < \eta$, donc par homogénéité, $||g_*(h) - g(h)|| \leq \epsilon||h||$. D'où $||g_* - g|| \leq \epsilon$ pour tout $\epsilon > 0$, et $g_* = g$.

Cet élément g de l'espace vectoriel normé $\mathscr{L}(E,F)$ sera noté

$$\boxed{df_a : E \to F}$$

(ou aussi $f'(a)$ ou encore $Df(a)$) et appelé la *différentielle* (ou aussi *dérivée*) de f en a.

Remarques. (1) Il est équivalent de demander qu'il existe une application linéaire continue $g : E \to F$ telle que $f(a+h) - f(a) - g(h) = o(h)$, et que les deux conditions suivantes soient vérifiées

(i) f est continue en a,

(ii) il existe une application linéaire $g : E \to F$ telle que

$$||f(x) - f(a) - g(x-a)|| = o(||x-a||)$$

quand x tend vers a.

En effet, les deux conditions (i) et (ii), et le fait que U soit ouvert, impliquent que g
continue en 0, donc continue par linéarité. Réciproquement, nous avons déjà mention
que la différentiabilité de f en a implique la continuité de f en a.

(2) La différentiabilité de f en a, ainsi que la valeur de df_a, ne changent pas si l
remplace les normes de E et F par des normes équivalentes. En particulier, lorsque no
considèrerons des produits finis d'espaces vectoriels normés, nous pourrons utiliser n'i
porte quelle norme produit $||\cdot||_p$ pour $p \in [1, +\infty]$, deux telles normes étant équivalent
Si E et F sont de dimension finie, la différentiabilité de f en a, ainsi que la valeur de d
ne dépendent donc pas des normes sur E et F.

(3) Ces propriétés ne dépendent que du germe de f en a : si deux applications co
cident sur un voisinage de a, alors l'une est différentiable en a si et seulement si l'autre l'e
et les différentielles en a coïncident alors. Nous nous autoriserons souvent à restrein
l'ouvert de départ.

(4) Supposons que $E = \mathbb{K}$. L'application qui à $c \in F$ associe l'application linéa
continue $t \mapsto tc$ de $\mathbb{K}$ dans F est un isomorphisme (linéaire isométrique) d'espaces vec
riels normés, de F dans $\mathscr{L}(E,F)$. L'application $f : U \to F$ est différentiable en a si
seulement si la limite

$$f'(a) = \lim_{x\to a,\ x\neq a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a}$$

existe dans F, et alors df_a est l'application $t \mapsto tf'(a)$. Le fait de noter de la mê
manière un élément c de F et l'élément correspondant $t \mapsto tc$ de $\mathscr{L}(\mathbb{K}, F)$ ne pose p
d'inconvénient majeur.

(5) On dit parfois « $\mathbb{K}$-différentiable en a » au lieu de « différentiable en a » lorsq
l'on veut préciser le corps de base $\mathbb{K}$.

Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, soient $E_\mathbb{R}$ et $F_\mathbb{R}$ les espaces vectoriels normés réels sous-jacents à E e
F (i.e. $E_\mathbb{R} = (E, +, \cdot_{|\mathbb{R}\times E}, ||\ \ ||)$). Si $f : U \to F$ est une application $\mathbb{C}$-différentiable
a, alors f est encore une application de l'ouvert U de $E_\mathbb{R}$ à valeurs dans $F_\mathbb{R}$, et to
application $\mathbb{C}$-linéaire continue de E dans F étant une application $\mathbb{R}$-linéaire de $E_\mathbb{R}$
$F_\mathbb{R}$, l'application f est $\mathbb{R}$-différentiable en a, et son application différentielle en a en ta
qu'application $\mathbb{R}$-différentiable coïncide avec son application différentielle en a en ta
qu'application $\mathbb{C}$-différentiable.

Mais la réciproque est fausse : par exemple, l'application $z \mapsto \overline{z}$ de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$
$\mathbb{R}$-différentiable en tout point, mais n'est $\mathbb{C}$-différentiable en aucun point. Nous renvoy
au cours d'Analyse complexe du second semestre pour un apprentissage approfondi d
applications $\mathbb{C}$-différentiables entre ouverts de $\mathbb{C}$.

On dit que f est *différentiable* (ou aussi *dérivable*) dans U si f est différentiable
tout point de U. L'application $x \mapsto df_x$ de U dans $\mathscr{L}(E,F)$ est alors notée

$$df : U \to \mathscr{L}(E,F)$$

(ou aussi $f' : U \to \mathscr{L}(E,F)$), et appelée la *différentielle* (ou aussi *dérivée*) de f. On dit q
f est *continuement différentiable* (ou aussi *de classe* C^1) en a si f est différentiable en to
point d'un voisinage ouvert V de a dans U, et si $df : V \to \mathscr{L}(E,F)$ est continue en a (po
la structure usuelle d'espace vectoriel normé de $\mathscr{L}(E,F)$). On dit que f est *continuem*
différentiable (ou aussi *de classe* C^1) dans U si f est continuement différentiable en to

point de U, ou, de manière équivalente, si f est différentiable en tout point de U et si $df : U \to \mathscr{L}(E, F)$ est continue.

Remarque. Une application de classe C^1 en a (resp. dans U) est en particulier continue en a (resp. dans U).

Propriétés élémentaires des différentielles.

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Soient E, F, G trois espaces vectoriels normés sur $\mathbb{K}$, U un ouvert de E, V un ouvert de F, a un point de U, $f, f_1, f_2 : U \to F$ et $g : V \to G$ des applications telles que $f(U)$ soit contenu dans V.

Notons que si f est supposée continue en a, et si l'on remplace la condition $f(U) \subset V$ par la condition plus faible $f(a) \in V$, alors $f^{-1}(V) \cap U$ est un voisinage de a, et l'on peut donc restreindre f à un voisinage ouvert de a de sorte que $f(U)$ soit contenu dans V.

Nous énonçons une liste de propriétés basiques des différentielles, et nous les démontrerons ensuite.

(1) Si f est constante, alors f est continuement différentiable en a, et
$$df_a = 0 \,.$$

(2) Si $f : U \to F$ est la restriction d'une application linéaire continue de E dans F, que l'on notera encore f, alors f est continuement différentiable dans U et, pour tout $x \in U$,
$$df_x = f \,.$$

(3) **(Théorème de dérivation des fonctions composées)** Si f est différentiable en a et si g est différentiable en $f(a)$, alors $g \circ f : U \to G$ est différentiable en a, et
$$d(g \circ f)_a = dg_{f(a)} \circ df_a \,.$$

(4) Si $F = F_1 \times \cdots \times F_n$ est un produit d'espaces vectoriels normés, et $f = (f_1, \dots, f_n)$, alors f est différentiable en a (resp. continuement différentiable en a, différentiable dans U, continuement différentiable dans U) si et seulement si f_i l'est pour tout $i = 1, \dots, n$, et alors
$$df_a = (d(f_1)_a, \dots, d(f_n)_a) \,.$$

(5) Si $E = E_1 \times \cdots \times E_n$ est un produit d'espaces vectoriels normés, et si f est la restriction d'une application multilinaire continue, que l'on notera encore f, alors f est continuement différentiable dans U et, pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in U$,
$$df_{(x_1,\dots,x_n)} : (h_1, \dots, h_n) \mapsto f(h_1, x_2, \dots, x_n) + f(x_1, h_2, x_3, \dots, x_n) + \cdots + f(x_1, \dots, x_{n-1}, h_n) \,.$$

(6) Si f_1 et f_2 sont différentiables en a, alors $f_1 + \lambda f_2$ est différentiable en a pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, et
$$d(f_1 + \lambda f_2)_a = d(f_1)_a + \lambda d(f_2)_a \,.$$

(7) Si $F = \mathbb{R}$ (auquel cas E est supposé réel) ou $F = \mathbb{C}$ (et plus généralement si F est une algèbre normée), si f_1 et f_2 sont différentiables en a, alors l'application produit $f_1 f_2$ (définie par $x \mapsto f_1(x) f_2(x)$) est différentiable en a, et
$$d(f_1 f_2)_a = f_2(a) d(f_1)_a + f_1(a) d(f_2)_a \,.$$

(8) Si E et F sont des espaces de Banach, si $f(U)$ est un ouvert de F et si $f : U \to f($
est un homéomorphisme, différentiable en a, tel que df_a soit une bijection de E
F, alors f^{-1} est différentiable en $b = f(a)$ et
$$d(f^{-1})_b = (df_{f^{-1}(b)})^{-1} \,.$$

(9) Si E et F sont des espaces de Banach, alors l'application $\varphi : \mathscr{GL}(E, F) \to \mathscr{GL}(F,$
définie par $u \mapsto u^{-1}$ est continuement différentiable sur $\mathscr{GL}(E, F)$, et sa différe
tielle en $u \in \mathscr{GL}(E, F)$ est l'application $d\varphi_u : \mathscr{L}(E, F) \to \mathscr{L}(F, E)$ définie par
$$d\varphi_u(h) = -u^{-1} \circ h \circ u^{-1} \,.$$

Preuve. L'assertion (1) est immédiate. L'assertion (2) est facile, car si f est linéai
alors $f(x) - f(a) - f(x - a) = 0$.

Montrons l'assertion (3). Soit $b = f(a)$. Pour tout $\epsilon \in \,]0, 1]$, posons $\epsilon' = \frac{\epsilon}{1+||df_a||+||dg}$
qui appartient à $]0, 1]$. Par différentiabilité de f en a et de g en b, soit $\eta > 0$ tel que
$||s|| \leq \eta$ et $||t|| \leq \eta$, alors
$$f(a + s) - b - df_a(s) = \epsilon_1(s) \quad \text{et} \quad ||g(b + t) - g(b) - dg_b(t)|| \leq \epsilon' \, ||t|| \,.$$
où $||\epsilon_1(s)|| \leq \epsilon' \, ||s||$.

Pour tout $s \in E$ tel que $||s|| \leq \frac{\eta}{1+||df_a||} \leq \eta$, posons $t = df_a(s) + \epsilon_1(s)$, de sorte q
$f(a + s) = b + t$ et $||t|| \leq (||df_a|| + 1) \, ||s|| \leq \eta$. Alors
$$\begin{aligned} ||g \circ f(a + s) - g \circ f(a) - dg_b(df_a(s))|| &= ||g(b + t) - g(b) - dg_b(t) + dg_b(\epsilon_1(s))|| \\ &\leq \epsilon' \, ||t|| + ||dg_b|| \, ||\epsilon_1(s)|| \\ &\leq \epsilon' \, (||df_a|| + 1 + ||dg_b||) \, ||s|| = \epsilon \, ||s|| \,, \end{aligned}$$
ce qui montre le résultat.

[Pour les lecteurs préférant utiliser la notation de Landau o, la preuve ci-dessus peut s'écri
$$\begin{aligned} g \circ f(a + h) &= g\big(f(a) + df_a(h) + o(h)\big) \\ &= g \circ f(a) + dg_{f(a)}\big(df_a(h) + o(h)\big) + o\big(df_a(h) + o(h)\big) \\ &= g \circ f(a) + dg_{f(a)} \circ df_a(h) + o(h) \end{aligned}$$
cette dernière égalité étant vraie car $dg_{f(a)}$ et df_a sont linéaires continues.]

L'assertion (4) est facile, en utilisant le fait qu'une application $u : E \to F_1 \times \cdots \times$
est linéaire continue si et seulement si ses composantes $u_1, \dots, u_n$ le sont, et les proprié
des limites d'applications à valeurs dans un produit.

Montrons l'assertion (5). Nous pouvons supposer que $n \geq 2$. Considérons la nor
$||(y_1, \dots, y_n)|| = \max\{||x_1||, \dots, ||x_n||\}$ sur E. Par continuité des applications mult
néaires (voir le paragraphe 2.8), soit $c \geq 0$ tel que, pour tout $(y_1, \dots, y_n)$ dans E,
ait
$$||f(y_1, \dots, y_n)|| \leq c \, ||y_1|| \dots ||y_n|| \,.$$
Soient $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $h = (h_1, \dots, h_n)$ dans E. Par multilinéarité de f, l'expressio
$$f(x + h) - f(x) - \big(f(h_1, x_2, \dots, x_n) + f(x_1, h_2, x_3, \dots, x_n) + \cdots + f(x_1, \dots, x_{n-1}, h_n$$

est somme d'un nombre fini (au plus 2^n) de termes de la forme $f(y_1,\ldots,y_n)$ avec $y_k \in \{x_k, h_k\}$ où, pour aux moins deux indices distincts i et j, on a $y_i = h_i$ et $y_j = h_j$. Pour chacun de ces termes, il existe donc un entier α dans $[2,n]$ tel que

$$||f(y_1,\ldots,y_n)|| \leq c\,||x||^{n-\alpha}||h||^{\alpha} = o(||h||)\ ,$$

quand h tend vers 0, ce qui montre le résultat.

L'assertion (6) découle de (2), (3) et (4), en composant l'application à valeurs dans un produit $x \mapsto (f_1(x), f_2(x))$ et l'application linéaire continue $(x,y) \mapsto x + \lambda y$.

L'assertion (7) découle de même de (3), (4) et (5), en composant l'application à valeur dans un produit $x \mapsto (f_1(x), f_2(x))$ et l'application bilinéaire continue $(x,y) \mapsto xy$.

Montrons l'assertion (8). Par le théorème de Banach 6.27, l'application $df_a : E \to F$ (linéaire, continue, bijective), est d'inverse continu, et en particulier $c = ||{df_a}^{-1}||$ est fini, strictement positif.

Pour tout x dans U, posons $y = f(x)$. Par la différentiabilité de f en a, nous avons

$$y - b - df_a(x-a) = ||x-a||\ \epsilon(x) \quad (*)$$

où $\epsilon : U \to E$ vérifie $\lim_{x\to a}\epsilon(x) = 0$. En particulier,

$$||x-a|| = ||{df_a}^{-1}\big(df_a(x-a)\big)|| \leq c\big(||y-b|| + ||x-a||\,||\epsilon(x)||\big)\ .$$

Donc si x est assez proche de a pour que $||\epsilon(x)|| < \frac{1}{2\,c}$, alors

$$||x-a|| \leq 2\,c\,||y-b||\ . \quad (**)$$

Pour tout $y \in f(U)$, posons $\epsilon'(y) = {df_a}^{-1}\circ\epsilon\circ f^{-1}(y)$, qui converge vers 0 quand y tend vers b, par composition de limites et d'applications continues. Alors en appliquant ${df_a}^{-1}$ à l'égalité (*) et en changeant les signes, nous obtenons

$$f^{-1}(y) - f^{-1}(b) - {df_a}^{-1}(y-b) = -||f^{-1}(y) - f^{-1}(b)\,||\,\epsilon'(y) = o(||y-b||)\ ,$$

par (**). Ceci montre le résultat.

Montrons enfin l'assertion (9). Rappelons que par la proposition 6.1 (2), la partie $\mathscr{GL}(E,F)$ est un ouvert de $\mathscr{L}(E,F)$, et que par le lemme 6.2, si $h \in \mathscr{L}(F,F)$ et $||h|| < 1$, alors $\mathrm{id} + h$ est inversible, d'inverse $\sum_{n\in\mathbb{N}}(-1)^n h^n$.

Soit $u_0 \in \mathscr{GL}(E,F)$. Montrons que $u \mapsto u^{-1}$ est différentiable en u_0, de différentielle $h \mapsto -u_0^{-1}\circ h\circ u_0^{-1}$. La composition à droite (resp. à gauche) par l'application linéaire continue u_0^{-1} est une application linéaire continue de $\mathscr{L}(E,F)$ dans $\mathscr{L}(F,F)$ (resp. de $\mathscr{L}(F,F)$ dans $\mathscr{L}(F,E)$). Comme le diagramme suivant commute,

$$\begin{array}{ccccc}
 & u & \mapsto & u^{-1} & \\
u & \mathscr{GL}(E,F) & \longrightarrow & \mathscr{GL}(F,E) & u_0^{-1}\circ w \\
\downarrow & \downarrow & & \uparrow & \uparrow \\
u\circ u_0^{-1} & \mathscr{GL}(F,F) & \longrightarrow & \mathscr{GL}(F,F) & w \\
 & v & \mapsto & v^{-1} &
\end{array}$$

c'est-à-dire puisque $u^{-1} = u_0^{-1}\circ(u\circ u_0^{-1})^{-1}$, il suffit de montrer, par le théorème de dérivation des fonctions composées (l'assertion (3) ci-dessus), que l'application de $\mathscr{GL}(F,F)$

dans $\mathscr{GL}(F,F)$ définie par $v \mapsto v^{-1}$ est différentiable en id, de différentielle $h \mapsto -h$. si $h \in F$ et $||h|| < 1$, alors par le rappel

$$||(\mathrm{id}+h)^{-1} - \mathrm{id} + h|| \leq ||h||^2 \sum_{n\in\mathbb{N}} ||h||^n = o(||h||)\ ,$$

ce qui montre le résultat.

Remarques : (i) Il découle par récurrence de (3), (4), (6) et (7) que toute applicat polynomiale de $\mathbb{K}^n$ dans $\mathbb{K}$ est de classe C^1. En utilisant de plus (8), toute applicat rationnelle de $\mathbb{K}^n$ dans $\mathbb{K}$ (fraction de deux polynômes) est de classe C^1 en tout point son dénominateur ne s'annule pas.

(ii) Dans la propriété (8), la condition que df_a soit bijective ne peut être omise. I exemple, l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $x \mapsto x^3$ est un homéomorphisme dériva en 0, mais sa réciproque n'est pas dérivable en 0.

(iii) Dans la propriété (9), si $E = F = \mathbb{K}^n$, alors l'application de $\mathscr{L}(E,E)$ da $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ qui à une application linéaire associe sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ un isomorphisme linéaire (entre espaces vectoriels de dimension finie), donc est de cla C^1 ainsi que son inverse. Elle envoie l'ouvert $\mathscr{GL}(E,E)$ de $\mathscr{L}(E,E)$ sur l'ouvert $\mathrm{GL}_n($ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ (des matrices de déterminant non nul). Donc l'application de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ da $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ qui à X associe X^{-1} est de classe C^1. On pouvait aussi déduire ceci de la form $X^{-1} = \frac{1}{\det(X)}{}^t\mathrm{Comatrice}(X)$ par la remarque (i).

(iv) Par définition des notations de Laudau (voir le paragraphe 3.2), nous avons bes pour définir la différentiabilité (que l'on appelle la *différentiabilité au sens de Fréchet*) E et F soient des espaces vectoriels normés (en pratique des espaces de Banach). Il exi une autre notion de différentiabilité qui fait encore sens (et est parfois utile) lorsque E F sont seulement supposés des espaces vectoriels topologiques (en pratique des espa de Fréchet).

Soient E et F deux espaces vectoriels topologiques réels, U un ouvert de E, et $U \to F$ une application. Pour tout h dans E, on dit que f admet une *dérivée en a d la direction h* si la limite

$$\partial_h f(a) = \lim_{\epsilon\to 0,\epsilon>0} \frac{f(a+\epsilon h) - f(a)}{\epsilon}$$

existe dans F. Pour tout $t > 0$, l'application f est alors dérivable en a dans la direct th, et $\partial_{th}f(a) = t\partial_h f(a)$. Mais comme on le voit en regardant l'application de $\mathbb{R}$ dans définie par $x \mapsto |x|$, si f est dérivable dans toute direction, l'application $h \mapsto \partial_h f(a)$ n' pas forcément linéaire. On dit que f est *différentiable au sens de Gâteaux* en a si f adn une dérivée en a dans toute direction, et si l'application $h \mapsto \partial_h f(a)$ de E dans F linéaire et continue. L'exercice suivant est immédiat.

Exercice E.70 *Soient E et F des espaces vectoriels normés réels, U un ouvert de E un point de U et $f : U \to F$ une application. Montrer que si f est différentiable en alors f est différentiable au sens de Gâteaux en a, et $df_a(h) = \partial_h f(a)$ pour tout h d E.*

7.2 Théorème des accroissements finis et applications

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Théorème 7.1 (Théorème de la moyenne) *Soient a et b dans $\mathbb{R}$ tels que $a < b$, G un espace vectoriel normé réel, $f : [a,b] \to G$ et $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ deux applications continues, dérivables sur $]a,b[$, telles que $||f'(t)|| \leq g'(t)$ pour tout $t \in]a,b[$. Alors*

$$||f(b) - f(a)|| \leq g(b) - g(a) .$$

Remarque. Il existe de nombreuses variantes de ce résultat. On peut demander seulement que f et g soient dérivables à droites (respectivement à gauche) et vérifient $||f'_d(t)|| \leq g'_d(t)$ (respectivement $||f'_g(t)|| \leq g'_g(t)$) sur le complémentaire dans $[a,b]$ d'un ensemble dénombrable (voir [Die1, page 150-152], [Car, page 42-45]).

Lorsque g est de classe C^1, nous utiliserons parfois la conclusion de ce théorème sous la forme équivalente

$$||f(b) - f(a)|| \leq \int_a^b g'(s)\, ds .$$

Preuve. Montrons que, pour tout $\epsilon > 0$ et pour tout $x \in [a,b]$, nous avons

$$||f(x) - f(a)|| \leq g(x) - g(a) + \epsilon(x - a + 1) .$$

En prenant $x = b$ et en faisant tendre ϵ vers 0, le résultat en découlera.

Supposons par l'absurde que l'ensemble U des $x \in [a,b]$ tels que $||f(x) - f(a)|| > g(x) - g(a) + \epsilon(x - a + 1)$ soit non vide. Alors U est ouvert (par continuité), non vide, ne contenant pas a (par définition, car $\epsilon > 0$), donc sa borne inférieure c n'appartient pas à U (car U est ouvert et $a \notin U$) et appartient à $]a,b[$. Par définition de la dérivée, il existe $\eta > 0$ tel que $c + \eta \leq b$ et pour tout $t \in]c, c+\eta]$ on ait

$$||f'(c)|| \geq \Big|\Big|\frac{f(t) - f(c)}{t - c}\Big|\Big| - \frac{\epsilon}{2}$$

et

$$g'(c) \leq \frac{g(t) - g(c)}{t - c} + \frac{\epsilon}{2} .$$

D'où

$$||f(t) - f(c)|| \leq g(t) - g(c) + \epsilon(t - c) .$$

Comme $c \notin U$, on a $||f(c) - f(a)|| \leq g(c) - g(a) + \epsilon(c - a + 1)$, donc, par inégalité triangulaire,

$$||f(t) - f(a)|| \leq ||f(t) - f(c)|| + ||f(c) - f(a)|| \leq g(t) - g(a) + \epsilon(t - a + 1) .$$

Ceci, étant vrai pour tout $t \in]c, c+\eta]$, contredit le fait que c soit la borne inférieure de U. $\square$

Théorème 7.2 (Théorème des accroissements finis) *Soient $k \in [0, +\infty[$, E et F des espaces vectoriels normés sur $\mathbb{K}$, U un ouvert convexe de E et $f : U \to F$ une application différentiable dans U telle que*

$$\forall\, x \in U, \quad ||df_x|| \leq k .$$

Alors, pour tous x, y dans U,

$$||f(y) - f(x)|| \leq k\, ||y - x|| .$$

Preuve. Soit $G = F$ si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, et sinon, soit $G = F_{\mathbb{R}}$ l'espace vectoriel normé réel so
jacent à F. Pour tous $x, y \in U$, soit $\varphi : [0,1] \to G$ l'application définie par $t \mapsto f(t$
$(1-t)x)$, qui est bien définie par convexité. Par le théorème de dérivation des foncti
composées et la remarque (5) du paragraphe 7.1, l'application φ est $\mathbb{R}$-différentiable
vérifie

$$\varphi'(t) = df_{ty+(1-t)x}(y - x) ,$$

donc $||\varphi'(t)|| \leq k||y - x||$. En appliquant le théorème de la moyenne avec $a = 0$, $b =$
$f = \varphi$ et g l'application $t \mapsto k||y - x||t$, le résultat en découle.

Remarque. La preuve montre plus précisément que si E et F des espaces vectori
normés sur $\mathbb{K}$, si $x, h \in E$, si U est un ouvert contenant le segment fermé $[x, x+h]$ en
x et $x + h$, si $f : U \to F$ est une application continue en tout point de $[x, x+h]$,
différentiable en tout point du segment ouvert $]x, x+h[$, alors

$$||f(x+h) - f(x)|| \leq ||h|| \sup_{t \in]0,1[} ||df_{x+th}|| ,$$

ce qui est parfois utile.

Porisme 7.3 *Soient E et F des espaces vectoriels normés sur $\mathbb{K}$, U un ouvert conn*
de E et $f : U \to F$ une application différentiable, de différentielle nulle en tout point
U. Alors f est constante.

Preuve. Soit $a \in U$ (si U est vide, il n'y a rien à montrer) et soit V l'ensemble des poi
x de U tels que $f(x) = f(a)$. Alors V est non vide (car $a \in V$), fermé par continuité d
(et séparation de F) et ouvert, car tout point de U contient un voisinage ouvert conv
contenu dans U, et on applique le théorème des accroissements finis (avec $k = 0$). D
V est égal à U par connexité.

On en déduit facilement que si E et F sont des espaces vectoriels normés sur $\mathbb{K}$, si U
un ouvert connexe de E et si $f : U \to F$ est une application différentiable de différenti
constante sur U, alors f est somme d'une application constante et de la restriction à
d'une application linéaire (la différentielle df_{x_0} de f en n'importe quel point x_0 de U,
considérant $f - df_{x_0}$).

Dans les deux résultats suivants, nous noterons $f'(a)$ plutôt que df_a les applicati
différentielles en un point a, pour éviter une débauche d'indices.

Théorème 7.4 (Théorème d'interversion des limites et des dérivées) *Soien*
un espace vectoriel normé sur $\mathbb{K}$, F un espace de Banach sur $\mathbb{K}$, U un ouvert connexe
E, et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications différentiables de U dans F telles que

(i) il existe $x_0 \in U$ tel que la suite $(f_n(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans F,

(ii) pour tout a dans U, il existe $r > 0$ tel que $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément
$B(a,r)$.

Alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $B(a,r)$, et si $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ et si $g(x$
$\lim_{n\to\infty} f'_n(x)$, alors f est différentiable sur U et $f'(x) = g(x)$ pour tout x dans U :

$$\big(\lim_{n\to\infty} f_n\big)' = \lim_{n\to\infty} f'_n .$$

Comme vu l'année précédente, notons que la condition de convergence uniforme (locale) des dérivées est nécessaire. Par exemple, si $f_n :]-1,1[\to \mathbb{R}$ est l'application $x \mapsto \sqrt{x^2 + \frac{1}{n+1}}$, alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers l'application $f : x \mapsto |x|$ de $]-1,1[$ dans $\mathbb{R}$, la suite $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers l'application valant -1 sur $]-1,0[$, valant 0 en 0 et valant 1 sur $]0,1[$, mais f n'est pas dérivable en 0.

Preuve. Pour tout $x \in B(a,r)$, il découle du théorème des accroissements finis 7.2 que

$$\begin{aligned}||f_n(x) - f_m(x) - \big(f_n(a) - f_m(a)\big)|| &\leq ||x-a|| \sup_{y\in B(a,r)} ||f'_n(y) - f'_m(y)|| \quad (*)\\ &\leq r \sup_{y\in B(a,r)} ||f'_n(y) - f'_m(y)|| \,.\end{aligned}$$

Par (ii), et par complétude de F, ceci implique que si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en un point de $B(a,r)$, alors elle est uniformément de Cauchy donc uniformément convergente sur $B(a,r)$.

En particulier, l'ensemble A des points de U où $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge est ouvert et fermé. Il est non vide par (i), donc égal à U par connexité de U.

Pour tout a dans U, montrons que $g(a)$ est la différentielle de f en a, ce qui conclut. Pour tout $\epsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geq N$, alors, par (ii) et puisque $f'_n(a) \to g(a)$,

$$\sup_{y\in B(a,r)} ||f'_n(y) - f'_N(y)|| \leq \frac{\epsilon}{3} \quad \text{et} \quad ||f'_N(a) - g(a)|| \leq \frac{\epsilon}{3}$$

En particulier par (*)

$$||f_n(x) - f_N(x) - \big(f_n(a) - f_N(a)\big)|| \leq \frac{\epsilon}{3}\,||x-a|| \,.$$

Par passage à la limite quand n tend vers $+\infty$, on a donc

$$||f(x) - f(a) - \big(f_N(x) - f_N(a)\big)|| \leq \frac{\epsilon}{3}\,||x-a|| \,.$$

Par différentiabilité de f_N en a, soit $r' \in]0,r]$ tel que si $x \in B(a,r')$, alors

$$||f_N(x) - f_N(a) - f'_N(a)(x-a)|| \leq \frac{\epsilon}{3}\,||x-a|| \,.$$

Par l'inégalité triangulaire, on en déduit que

$$\begin{aligned}&||f(x) - f(a) - g(a)(x-a)||\\ &\leq ||f(x) - f(a) - \big(f_N(x) - f_N(a)\big) + f_N(x) - f_N(a) - f'_N(a)(x-a) +\\ &\quad f'_N(a)(x-a) - g(a)(x-a)||\\ &\leq \epsilon\,||x-a|| \,,\end{aligned}$$

ce qui montre le résultat. □

Le résultat suivant découle immédiatement du théorème 7.4 d'interversion des limites et des dérivées.

Théorème 7.5 (Théorème d'interversion des séries et des dérivées) *Soient E un espace vectoriel normé sur $\mathbb{K}$, F un espace de Banach sur $\mathbb{K}$, U un ouvert connexe de E, et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications différentiables de U dans F telles que*

(1) il existe $x_0 \in U$ tel que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(x_0)$ converge dans F,

(2) pour tout a dans U, il existe $r > 0$ tel que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} f'_n$ converge uniformém sur $B(a,r)$.

Alors la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge uniformément sur $B(a,r)$, et sa somme est différentia sur U, de différentielle en $x \in U$ égale à $\sum_{n\in\mathbb{N}} f'_n(x)$:

$$\Big(\sum_{n\to\infty} f_n\Big)' = \sum_{n\to\infty} f'_n \,. \quad \square$$

7.3 Différentielles partielles et d'ordre supérieur

Différentielles partielles.

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Soient $n \in \mathbb{N} - \{0\}$, $E_1, \dots, E_n$ et F des espaces vec riels normés sur $\mathbb{K}$, E l'espace vectoriel normé produit $E_1 \times \cdots \times E_n$ (muni de la nor $||(x_1,\dots,x_n)|| = \max\{||x_1||,\dots,||x_n||\}$), U un ouvert de E, $f : U \to F$ une applicati et $i \in \{1,\dots,n\}$.

Pour tout $a = (a_1,\dots,a_n)$ dans U, on dit que f est *différentiable (ou dérivable)* *rapport à la i-ème variable* en a si l'application (parfois appelée la *i-ème applicat partielle*)

$$x \mapsto f(a_1,\dots,a_{i-1},x,a_{i+1},\dots,a_n)$$

est différentiable en a_i. La différentielle en a_i de cette application, qui est un élément $\mathscr{L}(E_i,F)$, est notée

$$\boxed{\partial_i f_a} \quad \text{ou} \quad D_i f(a) \quad \text{ou} \quad \partial_{x_i} f(a) \quad \text{ou} \quad f'_{x_i}(a) \quad \text{ou} \quad \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \,,$$

et appelée la *i-ème différentielle partielle* (ou i-ème *dérivée partielle*) de f en a.

Si $E_i = \mathbb{K}$, alors f est différentiable par rapport à la i-ème variable en a si et seulem si la limite

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lim_{x\to a_i,\; x\neq a_i} \frac{f(a_1,\dots,a_{i-1},x,a_{i+1},\dots,a_n) - f(a)}{x - a_i}$$

existe, et alors $\partial_i f_a : \mathbb{K} \to F$ est l'application $t \mapsto t\,\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$. Le fait de noter de la mê manière un élément c de F et l'élément correspondant $t \mapsto t\,c$ de $\mathscr{L}(\mathbb{K},F)$ ne pose p d'inconvénient majeur.

On dit que f est *différentiable (ou dérivable) par rapport à la i-ème variable* dans U f est différentiable (ou dérivable) par rapport à la i-ème variable en tout point de U, l'application $\partial_i f : x \mapsto \partial_i f_x$ de U dans $\mathscr{L}(E_i,F)$ est appelée l'application *i-ème différ tielle partielle* (ou i-ème *dérivée partielle*). Par exemple, si f est la restriction à U d'u application multilinéaire, encore notée f, de $E_1 \times \cdots \times E_n$ dans F, alors f est différentia par rapport à la i-ème variable sur U, et $\partial_i f_a : h \mapsto f(a_1,\dots,a_{i-1},h,a_{i+1},\dots,a_n)$.

Une application différentiable par rapport à chaque variable n'est pas forcément d férentiable. Des exemples ont été vus l'année dernière, par exemple l'application de dans $\mathbb{R}$ définie par $(0,0) \mapsto 0$ et $(x,y) \mapsto \frac{xy}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ est dérivable par rapp à chaque variable, mais n'est même pas continue en $(0,0)$.

Proposition 7.6 *(1) Si f est différentiable en un point a de U, alors f est différentiable par rapport à chaque variable en a, et*

$$df_a : (h_1, \dots, h_n) \mapsto \sum_{i=1}^{n} \partial_i f_a(h_i) \ .$$

(2) L'application f est continuement différentiable sur U si et seulement si f est différentiable par rapport à chaque variable en tout point de U et si pour tout $i = 1, \dots, n$, l'application $\partial_i f : x \mapsto \partial_i f_x$ de U dans $\mathscr{L}(E_i, F)$ est continue sur U.

Preuve. (1) Supposons que f soit différentiable en $a = (a_1, \dots, a_n) \in U$, et soit $df : U \to \mathscr{L}(E, F)$ sa différentielle. Par le théorème de dérivation des applications composées, l'application $x \mapsto f(a_1, \dots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \dots, a_n)$ est différentiable en a_i, de différentielle en a_i égale à $h \mapsto df_a(0, \dots, 0, h, 0, \dots, 0)$. La première assertion en découle par linéarité de df_a, car $df_a(h_1, \dots, h_n) = \sum_{i=1}^n df_a(0, \dots, h_i, \dots, 0)$.

(2) Supposons de plus que f soit de classe C^1. Si A, B, C sont des espaces vectoriels normés sur $\mathbb{K}$, alors pour tout $v \in \mathscr{L}(A, B)$, l'application linéaire $\mathscr{L}(B, C) \to \mathscr{L}(A, C)$ définie par $u \mapsto u \circ v$ est continue. Donc l'application de U dans $\mathscr{L}(E_i, F)$ définie par $x \mapsto \{h \mapsto df_x(0, \dots, 0, h, 0, \dots, 0)\}$ est continue, comme composée d'applications continues.

Réciproquement, supposons que f soit différentiable par rapport à chaque variable, de différentielles partielles continues sur U. Par continuité des $\partial_i f$ en a, pour tout $\epsilon > 0$, pour tout $a = (a_1, \dots, a_n)$ dans U, il existe $r > 0$ tel que $B(a, r) \subset U$ et pour tous $h', h'' \in B(0, r)$ et tout $i = 1, \dots, n$,

$$||\partial_i f_{a+h'} - \partial_i f_{a+h''}|| \leq \frac{\epsilon}{2n} \ .$$

Soit $h = (h_1, \dots, h_n)$ tel que $||h|| = \max\{||h_1||, \dots, ||h_n||\} < r$. Pour tout $x \in B_{E_i}(0, r)$, posons

$$u_i[x] = (a_1 + h_1, \dots, a_{i-1} + h_{i-1}, a_i + x, a_{i+1}, \dots, a_n) \ ,$$

de sorte que $u_i[0] = u_{i-1}[h_{i-1}]$ si $i \geq 1$. Nous avons alors, par somme télescopique,

$$f(a+h) - f(a) = \sum_{i=1}^{n} f(u_i[h_i]) - f(u_i[0]) \ . \quad (*)$$

Par le théorème des accroissements finis appliqué à l'application g de $B_{E_i}(0, r)$ (qui est convexe) dans F définie par $x \mapsto f(u_i[x]) - \partial_i f_{u_i[0]}(x)$, nous obtenons $||g(h_i) - g(0)|| \leq ||h_i|| \ \sup_{x \in B_{E_i}(0,r)} ||dg_x||$, donc

$$\big|\big|f(u_i[h_i]) - f(u_i[0]) - \partial_i f_{u_i[0]}(h_i)\big|\big| \leq ||h_i|| \sup_{||x|| \leq r} ||\partial_i f_{u_i[x]} - \partial_i f_{u_i[0]}|| \leq \frac{\epsilon}{2n} \, ||h_i|| \ .$$

Par (*) et l'inégalité triangulaire, nous avons donc

$$\begin{aligned}
&\Big|\Big|f(a+h) - f(a) - \sum_{i=1}^{n} \partial_i f_a(h_i)\Big|\Big| \\
&= \Big|\Big| \sum_{i=1}^{n} f(u_i[h_i]) - f(u_i[0]) - \partial_i f_a(h_i)\Big|\Big| \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} \ \big|\big|f(u_i[h_i]) - f(u_i[0]) - \partial_i f_{u_i[0]}(h_i)\big|\big| + \sum_{i=1}^{n} \ \big|\big|\partial_i f_{u_i[0]}(h_i) - \partial_i f_a(h_i)\big|\big| \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} \ \frac{\epsilon}{2n} \, ||h_i|| + \sum_{i=1}^{n} \ \frac{\epsilon}{2n} \, ||h_i|| \leq \epsilon \, ||h|| \ .
\end{aligned}$$

Donc f est différentiable en a, de différentielle en a égale à

$$df_a : (h_1, \dots, h_n) \mapsto \sum_{i=1}^{n} \ \partial_i f_a(h_i) \ .$$

Comme somme de composées d'applications continues (la composition à droite par l'app cation linéaire continue i-ème projection $(h_1, \dots, h_n) \mapsto h_i$ étant une application conti de $\mathscr{L}(E_i, F)$ dans $\mathscr{L}(E, F)$), la différentielle $df : a \mapsto df_a$ de f est donc continue.

En particulier, supposons que $E = \mathbb{K}^n$. Si f est différentiable en $a = (a_1, \dots, a_n) \in$ alors f admet des dérivées partielles

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lim_{x \to a_i, \, x \neq a_i} \ \frac{f(a_1, \dots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \dots, a_n) - f(a)}{x - a_i}$$

par rapport à chaque variable en a ; dans ce cas, df_a est l'application de $\mathbb{K}^n$ dans F défi par

$$df_a : (h_1, \dots, h_n) \mapsto \sum_{j=1}^{n} \ h_j \ \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) \ .$$

De plus, f est de classe C^1 si et seulement si f admet des dérivées partielles par rapp à chaque variable en tout point $a = (a_1, \dots, a_n)$ de U, et si les applications $a \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ U dans F sont continues

Différentielles d'ordre supérieur.

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Soient E et F deux espaces vectoriels normés sur $\mathbb{K}$, U un ouvert de E, $a \in U$ et $f : U \to F$ une application. Rappelons que $\mathscr{L}(E,F)$ est aussi un espace vectoriel normé sur $\mathbb{K}$ (pour la norme d'opérateur), qui est un espace de Banach si F l'est.

On dit que f est *deux fois différentiable* (ou deux fois dérivable) en a si f est différentiable sur un voisinage ouvert V de a contenu dans U, et si l'application $df : V \to \mathscr{L}(E,F)$ est différentiable en a, et nous noterons

$$d^2 f_a = d(df)_a \ .$$

D'autres notations sont possibles, comme $D^2 f(a)$, $f''(a)$, ...

On dit que f est *deux fois différentiable* dans U si f est deux fois différentiable en tout point de U, ou, de manière équivalente, si f est différentiable dans U, et si l'application $df : U \to \mathscr{L}(E,F)$ est différentiable dans U.

Rappelons (voir la proposition 2.21) que l'application de $\mathscr{L}(E, \mathscr{L}(E,F))$ dans l'espace vectoriel normé $\mathscr{L}(E,E;F)$ des applications bilinéaires continues de $E \times E$ dans F, définie par $u \mapsto \{(x,y) \mapsto u(x)(y)\}$, est un isomorphisme linéaire isométrique, d'inverse l'application $u \mapsto \big\{x \mapsto (y \mapsto u(x,y))\big\}$. Si f est deux fois différentiable en a, nous identifierons donc $d^2 f_a$ avec l'application bilinéaire continue de $E \times E$ dans F correspondante.

Remarque. Par le théorème de dérivation des applications composées, et puisque pour tout h' dans E, l'application d'évaluation $u \mapsto u(h')$ en h' est linéaire continue de $\mathscr{L}(E,F)$ dans F, on en déduit que si f est deux fois différentiable en $a \in U$, alors pour tout h' dans E, l'application $x \mapsto df_x(h')$ est différentiable en a, de différentielle en a égale à $h \mapsto d^2 f_a(h,h')$.

En particulier, si $E = \mathbb{K}^r$, si f est deux fois différentiable en a, si $1 \le i,j \le r$, en notant

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial\big(\frac{\partial f}{\partial x_j}\big)}{\partial x_i}(a) \ ,$$

alors en posant $h = (h_1, \dots, h_r)$ et $h' = (h'_1, \dots, h'_r)$, comme $df_x(h') = \sum_{1 \le j \le r} \ h'_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)$, nous avons

$$d^2 f_a(h,h') = \sum_{1 \le i,j \le r} h_i h'_j \ \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \ .$$

Proposition 7.7 *Si f est deux fois différentiable en $a \in U$, alors $d^2 f_a$ est une application bilinéaire continue symétrique.*

Preuve. Montrons que l'application bilinéaire continue $d^2 f_a$ est symétrique. Pour tout $\epsilon > 0$, soit $r > 0$ tel que $B(a,r) \subset U$ et, pour tous $h, h' \in E$ tels que $||h||, ||h'|| \le \frac{r}{2}$ et pour tout $t \in [0,1]$, on ait

$$||df_{a+th+h'} - df_a - d^2 f_a(th+h')|| \le \epsilon ||th+h'|| \le \epsilon\big(||h|| + ||h'||\big) \ .$$

Si $||h||, ||h'|| \le \frac{r}{2}$, considérons l'application $g : [0,1] \to F$ définie par

$$g(t) = f(a+th+h') - f(a+th) \ ,$$

qui est dérivable par le théorème de dérivation des applications composées, de dérivée

$$g'(t) = df_{a+th+h'}(h) - df_{a+th}(h) = \big(df_{a+th+h'} - df_a\big)(h) - \big(df_{a+th} - df_a\big)(h) \ ,$$

qui vérifie donc par l'inégalité triangulaire

$$\begin{aligned} &||g'(t) - d^2 f_a(h',h)|| \\ &= ||\big(df_{a+th+h'} - df_a - d^2 f_a(th+h')\big)(h) - \big(df_{a+th} - df_a + d^2 f_a(th)\big)(h)|| \\ &\le 2\,\epsilon\big(||h|| + ||h'||\big)||h|| \le 2\,\epsilon\big(||h|| + ||h'||\big)^2 \ . \end{aligned}$$

Par le théorème 7.2 des accroissements finis (et plus précisément la remarque la suiva
appliqué à l'application $t \mapsto g(t) - t\, d^2 f_a(h',h)$, nous avons donc

$$||g(1) - g(0) - d^2 f_a(h',h)|| \le \sup_{0 \le t \le 1} ||g'(t) - d^2 f_a(h',h)|| \le 2\,\epsilon\big(||h|| + ||h'||\big)^2 \ .$$

Or $g(1) - g(0) = f(a+h+h') - f(a+h) - f(a+h') + f(a)$ est symétrique en h et
Donc par l'inégalité triangulaire,

$$||d^2 f_a(h,h') - d^2 f_a(h',h)|| \le 4\,\epsilon\big(||h|| + ||h'||\big)^2 \ .$$

Comme cette équation, vérifiée si $||h||, ||h'|| \le \frac{r}{2}$, est inchangée si on remplace h, h' p
$\lambda h, \lambda h'$ pour tout $\lambda > 0$, elle est donc vraie pour tous h, h' dans E. En faisant tendr
vers 0, le résultat s'en déduit.

En particulier, si $E = \mathbb{K}^r$, si f est deux fois différentiable en a, alors la proposit
précédente implique le résultat suivant, connu sous le nom de *théorème de Schwarz* : po
$1 \le i,j \le r$, nous avons

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a) \ .$$

Soit $p \in \mathbb{N} - \{0,1\}$. Par récurrence, en posant $d^1 f = df$, $\mathscr{L}_1(E,F) = \mathscr{L}(E,F)$
$\mathscr{L}_p(E,F) = \mathscr{L}(E, \mathscr{L}_{p-1}(E,F))$, on dit que f est *p fois différentiable en a* si elle
$p-1$ fois différentiable en tout point d'un voisinage ouvert V de a, et si sa $(p-1)$-è
différentielle $d^{p-1} f : V \to \mathscr{L}_{p-1}(E,F)$ est différentiable en a, et on note

$$d^p f_a = d(d^{p-1} f)_a \ ,$$

appelée la *p-ème différentielle de f en a*. D'autres notations sont possibles pour d^p
comme $D^p f(a)$, $f^{(p)}(a)$, ... On dit que f est *p fois différentiable sur U* si f est p f
différentiable en tout point de U, ou, de manière équivalente par récurrence, si f est p-
fois différentiable sur U, et si sa $(p-1)$-ème différentielle $d^{p-1} f : U \to \mathscr{L}_{p-1}(E,F)$
différentiable sur U.

Notons que par récurrence, si f est p fois différentiable sur un voisinage de a et si a
est q fois différentiable en a, alors f est $p+q$ fois différentiable en a, et

$$d^{p+q} f_a = d^q(d^p f)_a \ .$$

Par récurrence, si $F = F_1 \times \cdots \times F_n$, alors $f = (f_1, \dots, f_n)$ est p fois différentiable e
(respectivement sur U) si et seulement si toutes ses composantes $f_i : U \to F_i$ le sont.

Comme pour $p = 2$, l'application de $\mathscr{L}_p(E,F)$ dans l'espace vectoriel normé des a
plications p-linéaires continues de E^p dans F, définie par

$$u \mapsto \{(h_1, \dots, h_p) \mapsto u(h_1)(h_2)\dots(h_p)\} \ ,$$

est un isomorphisme isométrique d'espaces vectoriels normés, et on identifie $d^p f_a$ avec l'application p-linéaire continue de E^p dans F définie par $(h_1, \dots, h_p) \mapsto d^p f_a(h_1)(h_2)\dots(h_p)$.

Comme dans la remarque précédent la proposition 7.7, si f est p fois différentiable en a, si $2 \leq q \leq p$, alors pour tous $h_q, \dots, h_p$ fixés dans E, l'application de E^{p-1} dans F définie par $(h_1, \dots, h_{q-1}) \mapsto d^p f_a(h_1, h_2, \dots, h_p)$ est la $(q-1)$-ème différentielle en a de l'application $x \mapsto d^{p-q+1} f_x(h_q, \dots, h_p)$.

Proposition 7.8 *Si f est p fois différentiable en a, alors l'application p-linéaire continue $d^p f_a : E^p \to F$ est symétrique.*

Preuve. Montrons le résultat par récurrence sur $p \geq 2$. Le cas $p = 2$ a été démontré dans la proposition 7.7. Soit $p \geq 3$, et supposons le résultat démontré pour $p-1$. Soit $(h_1, \dots, h_p) \in E^p$. L'application $x \mapsto d^{p-2} f_x(h_3, \dots, h_p)$ est deux fois différentiable en a, de différentielle seconde $(h, h') \mapsto d^p f_a(h, h', h_3 \dots, h_p)$, donc par la proposition 7.7,

$$d^p f_a(h_1, h_2, h_3, \dots, h_p) = d^p f_a(h_2, h_1, h_3, \dots, h_p)\ .$$

Par récurrence, pour toute permutation σ de $\{2, \dots, p\}$, pour tout x suffisamment proche de a, nous avons $d^{p-1} f_x(h_{\sigma(2)}, h_{\sigma(3)}, \dots, h_{\sigma(p)}) = d^{p-1} f_x(h_2, h_3, \dots, h_p)$. En différentiant cette égalité en $x = a$, on obtient donc

$$d^p f_a(h_1, h_{\sigma(2)}, h_{\sigma(3)}, \dots, h_{\sigma(p)}) = d^p f_a(h_1, h_2, h_3, \dots, h_p)\ .$$

Comme le groupe des permutations de $\{1, \dots, p\}$ est engendré par la transposition $(1\ 2)$ et par le sous-groupe des permutations fixant 1, le résultat en découle. □

En particulier, si $E = \mathbb{K}^r$, si f est p fois différentiable en a, en notant par récurrence

$$\frac{\partial^p f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_p}}(a) = \frac{\partial\big(\frac{\partial^{p-1} f}{\partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_p}}\big)}{\partial x_{i_1}}(a)\ ,$$

(qui sont appelées les *dérivées partielles d'ordre* p en a), si $h_i = (h_{i,1}, \dots, h_{i,r})$ pour $i = 1, \dots, p$, alors l'ordre des différentielles partielles n'a pas d'importance, et par récurrence

$$d^p f_a(h_1 \dots, h_p) = \sum_{1 \leq i_1, \dots, i_p \leq n} h_{1,i_1} \dots h_{p,i_p} \frac{\partial^p f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_p}}(a)\ .$$

Si $m = (m_1, \dots, m_r) \in \mathbb{N}^r$ et si f est $m_1 + \dots + m_r$ fois différentiable en a, nous noterons aussi

$$\partial^m f(a) = \partial_1^{m_1} \dots \partial_r^{m_r} f(a) = \frac{\partial^{m_1 + \dots + m_r} f}{\partial x_1^{m_1} \dots \partial x_r^{m_r}}(a)\ .$$

Si $k \in \mathbb{N} - \{0\}$, l'application f est dite *de classe* C^k en a si elle est k fois différentiable en tout point d'un voisinage ouvert V de a, et si sa k-ème différentielle $d^k f : V \to \mathscr{L}_k(E, F)$ est continue en a. Elle est dite *de classe* C^k dans U si elle est de classe C^k en tout point de U. Par convention, l'application f est dite *de classe* C^0 en a (resp. dans U) si elle est continue en a (resp. dans U). L'application f est dite *de classe* C^∞ en a (resp. dans U) si elle est de classe C^k en a (resp. dans U) pour tout k dans $\mathbb{N}$.

Proposition 7.9 *(1) Si E est un produit fini $E_1 \times \dots \times E_r$ d'espaces vectoriels norm*
sur $\mathbb{K}$ et si $k \in \mathbb{N} - \{0\}$, alors, l'application f est de classe C^k dans U si et seulem
si toutes les différentielles partielles d'ordre au plus k de f existent en tout point de U
sont continues dans U.

(2) Si F est un produit fini $F_1 \times \dots \times F_n$ d'espaces vectoriels normés sur $\mathbb{K}$, al
$f = (f_1, \dots, f_n)$ est p fois différentiable en a ou dans U, ou de classe C^k (resp. C^∞) e
ou dans U si et seulement si toutes ses composantes $f_i : U \to F_i$ le sont, et

$$d^p f_a = (d^p(f_1)_a, \dots, d^p(f_n)_a)\ .$$

(3) Soit G un espace vectoriel normé sur $\mathbb{K}$. Si $\ell : F \to G$ est une application liné
continue, si f est p fois différentiable en a, alors $\ell \circ f$ est p fois différentiable en a,
$d^p(\ell \circ f) = \ell \circ d^p f$. Si $\ell : G \to F$ est une application linéaire continue, si f est p f
différentiable en a, alors $f \circ \ell$ est p fois différentiable en a, et $d^p(f \circ \ell)_a(h_1, \dots, h_p)$
$d^p f_{\ell(a)}(\ell(h_1), \dots, \ell(h_p))$.

(4) Toute combinaison linéaire finie d'applications de U dans F qui sont p-fois di
rentiables ou de classe C^p en a ou dans U l'est encore.

(5) Si E est un produit $E_1 \times \dots \times E_r$ de $r \in \mathbb{N} - \{0\}$ espaces vectoriels normés sur
la restriction à tout ouvert de E de toute application r-linéaire continue de $E_1 \times \dots \times$
dans F est de classe C^∞, et sa $(r+1)$-ème différentielle est nulle.

En particulier, si $E = \mathbb{K}^r$ et $k \in \mathbb{N} - \{0\}$, alors l'application f est de classe C^k da
U si et seulement si les r^k dérivées partielles d'ordre k de f existent en tout point de
et sont continues dans U.

En particulier, les applications linéaires sont C^∞, et la composition à droite et à gau
par une application linéaire continue est C^∞.

Preuve. Les assertions (1) et (2) sont immédiates par le cas $k = 1$ déjà traité et p
récurrence.

L'assertion (3) se démontre par récurrence car $d(f \circ \ell)_x = df_{\ell(x)} \circ \ell$ et $d(\ell \circ f) = \ell \circ$

L'assertion (4) découle des assertions (2) et (3), car $x \mapsto f_1(x) + \lambda f_2(x)$ est compo
de $x \mapsto (f_1(x), f_2(x))$ et de l'application linéaire $(u, v) \mapsto u + \lambda v$.

(5) Ceci se montre par récurrence sur r. Le cas $r = 1$ est connu. La différentielle d'u
application r-linéaire continue f en $x = (x_1, \dots, x_r)$ est l'application linéaire

$$(h_1, \dots, h_r) \mapsto f(h_1, x_2, \dots, x_r) + f(x_1, h_2, x_3, \dots, x_r) + \dots + f(x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, h_r)$$

Donc df est la somme (finie) pour $i = 1, \dots, n$ de la composition de l'application linéa
$(x_1, \dots, x_r) \mapsto (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_r)$ et de l'application $(r-1)$-linéaire continue
$E_1 \times \dots \times E_{i-1} \times E_{i+1} \times \dots \times E_r$ dans $\mathscr{L}(E_i, F)$ définie par $(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_r)$
$\{h \mapsto f(x_1, \dots, x_{i-1}, h, x_{i+1}, \dots, x_r)\}$. Le résultat découle de (3) et (4), par récurrence.

En particulier, si $f : E^2 \to F$ est une application bilinéaire continue, alors sa différe
tielle seconde $d^2 f_{x,x'} \in \mathscr{L}(E^2, E^2; F)$ est constante en $(x, x') \in E^2$, égale à

$$((h_1, h_1'), (h_2, h_2')) \mapsto f(h_1, h_2') + f(h_1', h_2)\ .$$

Exercice E.71 *Pour tout $p \geq 1$, calculer la différentielle p-ème d'une application*
linéaire de E^p dans F.

Proposition 7.10 *Soient $p \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, E, F, G trois espaces vectoriels normés sur $\mathbb{K}$, U un ouvert de E, V un ouvert de F, a un point de U, et $f : U \to F$ et $g : V \to G$ des applications telles que $f(U)$ soit contenu dans V.*

(1) Si f est p fois différentiable en a et si g est p fois différentiable en $f(a)$, alors $g \circ f : U \to G$ est p fois différentiable en a.

(2) Si f est de classe C^p en a (resp. dans U) et si g est de classe C^p en $f(a)$ (resp. dans V), alors $g \circ f$ est de classe C^p en a (resp. dans U) .

Preuve. Si $p = 1$, le résultat (1) est le théorème de dérivation des fonctions composées, qui implique que

$$d(g \circ f)_a = dg_{f(a)} \circ df_a \ ,$$

donc que $x \mapsto d(g \circ f)_x$ est la composée de l'application $\varphi : U \to \mathscr{L}(E, F) \times \mathscr{L}(F, G)$ définie par $x \mapsto (df_x, dg_{f(x)})$, et de l'application bilinéaire continue $\psi : \mathscr{L}(E, F) \times \mathscr{L}(F, G) \to \mathscr{L}(E, G)$ définie par $(u, v) \mapsto v \circ u$.

Comme ψ est de classe C^∞ par la proposition 7.9 (5), et comme φ est $p-1$ fois différentiable sur un voisinage de a (resp. de classe C^{p-1} en a ou sur U), car chacune de ses composantes l'est, par composition d'applications qui, par récurrence, sont $p-1$ fois différentiables (resp. de classe C^{p-1}), la proposition en découle. $\square$

Proposition 7.11 *Soient $p \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, E, F deux espaces vectoriels normés sur $\mathbb{K}$, U un ouvert de E et $a \in U$.*

(1) Tout produit fini d'applications de U dans $\mathbb{K}$ (et plus généralement dans une algèbre normée sur $\mathbb{K}$) qui sont p-fois différentiable ou de classe C^p en a ou dans U l'est encore.

(2) Toute application polynomiale et toute fraction rationnelle de $\mathbb{K}^n$ dans $\mathbb{K}$ est C^∞ sur son domaine de définition.

(3) L'application $\varphi : \mathscr{GL}(E, F) \to \mathscr{GL}(F, E)$ définie par $u \mapsto u^{-1}$ est C^∞.

(4) Si $p \geq 1$, si E et F sont des espaces de Banach, si $f(U)$ est un ouvert de F, et si $f : U \to f(U)$ est un homéomorphisme p fois différentiable ou de classe C^p en a (respectivement dans U) tel que $df_a : E \to F$ soit un isomorphisme linéaire, alors $f^{-1} : f(U) \to E$ l'est encore en $f(a) = b$ (respectivement dans $f(U)$).

Preuve. L'assertion (1) découle des propositions 7.9 (2) (5) et 7.10.

(3) Le fait que φ soit de classe C^p pour tout $p \in \mathbb{N} - \{0\}$ se montre par récurrence sur p, en utilisant le cas $p = 1$ déjà démontré, la formule $d\varphi_u : h \mapsto -u^{-1} \circ h \circ u^{-1}$ déjà démontrée (exprimant $d\varphi$ comme composée de $u \mapsto (u^{-1}, u^{-1})$ et de l'application bilinéaire $(v, w) \mapsto \{h \mapsto -v \circ h \circ w\}$ de $\mathscr{L}(F, E) \times \mathscr{L}(F, E)$ dans $\mathscr{L}(\mathscr{L}(E, F), \mathscr{L}(F, E))$), et les propositions 7.9 (2) (5) et 7.10.

L'assertion (2) découle des propositions 7.9 (2) (5) et 7.10, et des points (1) et (3).

L'assertion (4) se montre par récurrence sur p, en utilisant le cas $p = 1$ déjà démontré, la formule $d(f^{-1})_b = (df_{f^{-1}(b)})^{-1}$ déjà démontrée, le point (3) et la proposition 7.10. $\square$

Exercice E.72 *Avec les notations E, F, G, U, V, f, g, a de la proposition précédente, si f est deux fois différentiable en a et si g deux fois différentiable en $f(a)$, calculer la dérivée seconde de $g \circ f$ en a.*

Applications analytiques.

Soient $r \in \mathbb{N} - \{0\}$, et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Pour tout $n = (n_1, \ldots, n_r) \in \mathbb{N}^r$ et to $z = (z_1, \ldots, z_r) \in \mathbb{K}^r$, on pose

$$|n| = n_1 + \cdots + n_r \ , \quad n! = n_1! \ \ldots \ n_r!$$

et

$$z^n = z_1^{n_1} \ldots z_r^{n_r} \ .$$

Soit E un espace de Banach sur $\mathbb{K}$. Une *série entière* dans E en r variables est la don d'une famille $(c_n)_{n \in \mathbb{N}^r} \in E^{\mathbb{N}^r}$ d'éléments de E indexée par $\mathbb{N}^r$. Les c_n sont appelés *coefficients* de cette série entière. On la note souvent $\sum z^n c_n$, avec $z = (z_1, \ldots, z_r)$ r-uplet des *variables* de cette série entière.

Elle est dite *normalement convergente* en $z \in \mathbb{K}^r$ si la série réelle $\sum_{n \in \mathbb{N}^r} ||z^n c_n||$ convergente, et on note alors

$$\sum_{n \in \mathbb{N}^r} z^n c_n = \lim_{N \to +\infty} \sum_{n \in \mathbb{N}^r,\, |n| \leq N} z^n c_n \ ,$$

cette limite existant bien.

Proposition 7.12 *Si une série entière dans E en r variables, de coefficients $(c_n)_{n\in}$ converge normalement en un point $w = (w_1, \ldots, w_n) \in \mathbb{K}^r$ tel que $w_i \neq 0$ pour tou alors l'application $f : z \mapsto \sum_{n \in \mathbb{N}^r} z^n c_n$ de $\prod_{i=1}^r B(0, |w_i|)$ dans E est de classe C^∞, pour tout m dans $\mathbb{N}^r$,*

$$\partial^m f(0) = m! \, c_m \ .$$

Preuve. Soit $M = \sup_{n \in \mathbb{N}^r} ||w^n c_n||$, qui est fini par l'hypothèse. Fixons $z' = (z'_1, \ldots,$ dans $\prod_{i=1}^r B(0, |w_i|)$, et $r_i \in \,]\,|z'_i|, |w_i|\,[$. Posons $t_i = r_i/|w_i| \in [0, 1[$ et $t = (t_1, \ldots, t_r)$. S $U = \prod_{i=1}^r B(z'_i, r_i - |z'_i|)$, qui est un voisinage ouvert de z' dans $\mathbb{K}^r$. Pour tout $n \in$ soit $f_n : U \to E$ l'application de classe C^∞ définie par $z \mapsto z^n c_n$.

Alors pour tout $z \in U$, et tout $i \in \{1, \ldots, r\}$, on a $||f_n(z)|| \leq Mt^n$ et $||\partial_i f_n|| \leq M n_i t$ où $\partial_i n = (n_1, \ldots, n_{i-1}, n_i - 1, n_{i+1} \ldots, n_r)$ si $n_i \neq 0$, et 0 sinon.

Donc par un argument de séries géométriques, les séries $\sum_{n \in \mathbb{N}^r} f_n$ et $\sum_{n \in \mathbb{N}^r} \partial$ convergent uniformément sur U. Par le théorème 7.5 d'interversion des séries et des rivées, l'application $f = \sum_{n \in \mathbb{N}^r} f_n$ admet donc pour tout i une i-ème dérivée parti $\partial_i f = \sum_{n \in \mathbb{N}^r} \partial_i f_n$ continue sur U. En particulier, f est de classe C^1, et si m est le r-up dont les coefficient sont nuls sauf le i-ème qui est égal à 1, alors $\partial^m f(0) = \partial_i f(0) =$ Le résultat en découle par récurrence.

Soient U un ouvert de $\mathbb{K}^r$ et E un espace de Banach sur $\mathbb{K}$. Une application $f : U \to$ est dite *analytique* ou de classe C^ω (*analytique réelle* si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, *analytique complex* $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) si pour tout a dans U, il existe un voisinage de a dans U et une série enti $\sum (z - a)^n c_n$ dans E en r variables normalement convergente sur U, de somme égale sur U. Par la proposition précédente, cette série entière est unique.

Nous renvoyons à [Die1] pour des compléments sur les applications analytiques, ai qu'au cours d'Analyse complexe et harmonique pour l'étude des applications analytiq d'une variable complexe. Dans la suite, nous nous contenterons de mentionner sans vér cation complète quelques résultats qui restent valable sans grand changement dans le des applications analytiques réelles.

- Une application constante est analytique.

• Si $f : U \to E$ est restriction d'une application linéaire (encore notée f) de $\mathbb{K}^r$ dans E, si $(e_1, \dots, e_r)$ est la base canonique de $\mathbb{K}^r$, alors, pour tout $a = (a_1, \dots, a_r)$ dans U,

$$f(z) = f(a) + \sum_{i=1}^{r} (z_i - a_i) f(e_i) ,$$

donc f est analytique.

• Si $E = E_1 \times \cdots \times E_{r'}$, et si $f = (f_1, \dots f_{r'})$, alors f est analytique en $a \in U$ si et seulement si, pour tout $i \in \{1, \dots, r'\}$, l'application $f_i : U \to E_i$ est analytique en a.

• **(Théorème de substitution de séries entières dans une série entière)** Soient $r, r' \in \mathbb{N} - \{0\}$, U un ouvert de $\mathbb{K}^r$, V un ouvert de $\mathbb{K}^{r'}$, E un espace de Banach, $f : U \to \mathbb{K}^{r'}$ et $g : V \to E$ deux applications telles que $f(U) \subset V$. Si f est analytique en a et si g est analytique en $f(a)$, alors $g \circ f : U \to E$ est analytique en a. De plus, si $f = (f_1, \dots, f_{r'})$ et $\sum_{p_i \in \mathbb{N}^r} (z - a)^{p_i} c_{i,p_i}$ est la série entière égale à f_i au voisinage de a pour $i \in \{1, \dots, r'\}$, si $\sum_{n \in \mathbb{N}^r} (w - f(a))^n c_n$ est la série entière égale à g au voisinage de a, alors la série entière égale à $g \circ f$ au voisinage de a est obtenue en remplaçant chaque variable $w_i - f_i(a)$ dans la série entière de g en $f(a)$ par $\sum_{p_i \in \mathbb{N}^r - \{0\}} (z - a)^{p_i} c_{i,p_i}$, en appliquant la loi de Newton, et en regroupant les coefficients d'un monôme $(z - a)^m$ donné pour $m \in \mathbb{N}^r$ (voir [Die1, page 192]).

• Si $r = r_1 + \cdots + r_p$, alors la restriction à U d'une application p linéaire de $\mathbb{K}^{r_1} \times \cdots \times \mathbb{K}^{r_p}$ dans E est analytique.

• Si une série entière dans E en r variables, de coefficients $(c_n)_{n \in \mathbb{N}^r} \in E^{\mathbb{N}^r}$, converge normalement en un point $w = (w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{K}^r$ tel que $w_i \neq 0$ pour tout i, alors l'application $f : z \mapsto \sum_{n \in \mathbb{N}^r} z^n c_n$ de $U = \prod_{i=1}^{r} B(0, |w_i|)$ dans E, qui est analytique en 0 par définition, est analytique sur U.

• Si $f : U \to E$ et $g : U \to E$ sont analytiques en $a \in U$, alors $f + \lambda g$ est analytique en a pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$. De plus, si $\sum_{n \in \mathbb{N}^r} (z - a)^n a_n$ (resp. $\sum_{n \in \mathbb{N}^r} (z - a)^n b_n$) est la série entière en r variables, égale à f (resp. g) au voisinage de a, alors $\sum_{n \in \mathbb{N}^r} (z - a)^n (a_n + \lambda b_n)$ est la série entière en r variables, égale à $f + \lambda g$ au voisinage de a.

• Toute application polynomiale de $\mathbb{K}^r$ dans $\mathbb{K}$ est analytique. Toute application rationelle de $\mathbb{K}^n$ dans $\mathbb{K}$ (fraction de deux polynômes) est analytique en tout point où son dénominateur ne s'annule pas. En particulier, l'application de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ qui à X associe X^{-1} est analytique.

Vocabulaire.

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Soient E et F des espaces de Banach sur $\mathbb{K}$, U un ouvert de E, x un point de U et $f : U \to F$ une application.

• Si $E = F$ est de dimension finie et si f est $\mathbb{K}$-différentiable en x, alors on note $j_x f$ le déterminant de l'application linéaire df_x, et on l'appelle le *jacobien* de f en x.

• Si $E = \mathbb{K}^p$, $F = \mathbb{K}^q$, et si f, de fonctions composantes $f_1, \dots, f_q$, est $\mathbb{K}$-différentiable en x, alors la matrice de df_x dans les bases canoniques, qui est, avec i l'indice de ligne et j l'indice de colonne,

$$\mathrm{J}_x f = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) \right)_{\substack{1 \le i \le q \\ 1 \le j \le p}} ,$$

est appelée la *matrice jacobienne* de f en x. Si $p = q$, alors le jacobien de f en x est déterminant de la matrice jacobienne de f en x.

Si H est le vecteur colonne des coordonnées de $h \in E$, alors $(\mathrm{J}_x f)\ H$ est le vect colonne des coordonnées de $df_x(h)$, par la remarque suivant la proposition 7.6.

Si V est un ouvert de $\mathbb{K}^q$ tel que $f(U) \subset V$, et si $g : V \to \mathbb{K}^r$ est $\mathbb{K}$-différentiable $y = f(x)$, alors le théorème de dérivation des fonctions composées s'écrit

$$\mathrm{J}_x(g \circ f) = \mathrm{J}_y g\ \mathrm{J}_x f ,$$

c'est-à-dire, pour $i = 1, \dots, r$ et $j = 1, \dots, p$,

$$\frac{\partial (g \circ f)_i}{\partial x_j}(x) = \sum_{k=1}^{q} \frac{\partial g_i}{\partial y_k}(y)\ \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(x) .$$

• Si f est $\mathbb{K}$-différentiable en x, on note $rk_x f$ le rang de l'application linéaire df_x,

$$rk_x f = \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Im}\ df_x ,$$

appelé le *rang* de f en x. On a

$$rk_x f \le \min\{\dim_{\mathbb{K}} E, \dim_{\mathbb{K}} F\} .$$

Si E et F sont de dimension finie, c'est aussi le rang de la matrice de l'application liné df_x dans des bases de E, F. Si $F = \mathbb{K}^q$, et si $f_1, \dots, f_q$ sont les composantes de f, al le rang de f en x est le rang du système de formes linéaires continues $(d(f_1)_x, \dots, d(f_q$ dans le dual topologique E' de E. Si $E = \mathbb{K}^p$, alors le rang de f en x est le rang système de vecteurs $\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_p}(x)\right)$ de F. Si $E = \mathbb{K}^p$ et $F = \mathbb{K}^q$, alors le rang d en x est égal au rang de sa matrice jacobienne en x.

Si E et F sont de dimension finie, et si f est de classe C^1 sur U, alors l'applicat $x \mapsto rk_x f$ est semi-continue inférieurement (voir le paragraphe 5.4), i.e. pour tout x da U, il existe un voisinage U' de x dans U tel que, pour tout y dans U', on ait $rk_y f \ge r$ (car $\mathbb{N}$ est discret). Mais il ne faut pas croire que l'application $x \mapsto rk_x f$ soit localem constante !

• Si f est différentiable en x, on dit que f est une *immersion* en x si la différenti $df_x : E \to F$ de f en x est injective. Si E est de dimension finie, ceci équivaut à dire $rk_x f = \dim E$. On dit que f est une *immersion* si f est une immersion en tout point U.

• Si f est différentiable en x, on dit que f est une *submersion* en x si la différenti $df_x : E \to F$ de f en x est surjective. Si F est de dimension finie, ceci équivaut à dire $rk_x f = \dim F$. On dit que f est une *submersion* si f est une submersion en tout point U.

• Si f est différentiable au voisinage de x (et pas seulement au point x !), on dit qu est une *application de rang constant au voisinage* de x (on dit aussi une *subimmersion* x) si la différentielle $df_y : E \to F$ est de rang constant fini pour tout y dans un voisin de x dans U. Par exemple, si E et F sont de dimension finie, par semi-continuité inférie du rang, une immersion ou submersion en x, qui est différentiable sur un voisinage de est une application de rang constant au voisinage de x.

• Soient k un élément de $(\mathbb{N}-\{0\})\cup\{\infty,\omega\}$ tel que $E=F=\mathbb{K}^r$ pour un $r\in\mathbb{N}-\{0\}$ si $k=\omega$, et V un ouvert de F. On dit qu'une application $f:U\to V$ de classe C^k est un C^k-*difféomorphisme* (ou *difféomorphisme* lorsque k est sous-entendu, par exemple $k=\infty$, ce qui sera souvent le cas dans les exercices) si f est bijective et si son inverse est de classe C^k.

7.4 Inversion locale et équations implicites

Notons $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{K}=\mathbb{C}$.

Théorème 7.13 (Théorème d'inversion locale) *Soient E et F deux espaces de Banach sur $\mathbb{K}$, U un ouvert de E, k un élément de $(\mathbb{N}-\{0\})\cup\{\infty\}$ et $f:U\to F$ une application de classe C^k. Si, en un point a de U, la différentielle $df_a:E\to F$ est bijective, alors il existe un voisinage ouvert V de a contenu dans U, et un voisinage ouvert W de $f(a)$, tels que $f:V\to W$ soit un C^k-difféomorphisme.*

Remarque. Ce résultat est encore vrai si $E=F=\mathbb{K}^r$ pour un $r\in\mathbb{N}-\{0\}$ et $k=\omega$, voir [Die1, page 264].

Preuve. Quitte à composer f à la source par la translation par $-a$ et au but par la translation par $-f(a)$ (qui sont de classe C^∞), on peut supposer que $a=0$ et $f(a)=0$. Par le théorème de Banach 6.27, l'inverse de l'application $df_0:E\to F$ (linéaire, continue, bijective) est continue. Quitte à remplacer f par $df_0^{-1}\circ f$ (qui fixe 0), on peut donc supposer que $F=E$, que $a=f(a)=0$ et que $df_0=\mathrm{id}_E$. Soit $g:x\mapsto f(x)-x$, qui est une application continuement différentiable de U dans E, et qui vérifie $g(0)=0$. Comme $dg_x=df_x-df_0$, $\mathscr{GL}(E,E)$ est ouvert dans $\mathscr{L}(E,E)$ et $x\mapsto df_x$ est continue, il existe $r>0$ tel que pour tout x dans $\overline{B}(0,r)$, nous avons $x\in U$, df_x est inversible et $||dg_x||\le\frac{1}{2}$. Donc, par le théorème 7.2 des accroissements finis, l'application g est $\frac{1}{2}$-lipschitzienne sur $\overline{B}(0,r)$. En particulier, g fixant 0, nous avons

$$g(\overline{B}(0,r))\subset\overline{B}(0,\frac{r}{2})\,.\quad(*)$$

Remarquons que f est injective sur $\overline{B}(0,r)$, car si $x,x'\in\overline{B}(0,r)$ et si $f(x)=f(x')$, alors par définition de g et puisque g est $\frac{1}{2}$-lipschitzienne, nous avons

$$||x-x'||=||g(x)-g(x')||\le\frac{1}{2}||x-x'||\,,$$

donc $x=x'$.

Posons $W=B(0,\frac{r}{2})$ et $X=\{\psi\in\mathscr{C}(W,E)\;:\;\psi(W)\subset\overline{B}(0,r)\}$. Alors, par continuité de l'évaluation en un point, X est un fermé, donc un sous-espace métrique complet, de l'espace de Banach $\mathscr{C}(W,E)$ pour la norme uniforme. De plus, l'application identité id_W de W, considérée aussi comme à valeurs dans E, appartient à X. L'application de X dans $\mathscr{C}(W,E)$ définie par

$$\psi\mapsto\mathrm{id}_W-g\circ\psi$$

est à valeurs dans l'ensemble des applications $\psi\in\mathscr{C}(W,E)$ telles que $\psi(W)\subset B(0,r)$, donc est à valeurs dans X, car $B(0,\frac{r}{2})+\overline{B}(0,\frac{r}{2})\subset B(0,\frac{r}{2})$ et par $(*)$ ci-dessus. Elle est de plus $\frac{1}{2}$-lipschitzienne, car g l'est. Donc par le théorème 3.19 du point fixe de Banach, elle admet un point fixe φ. Comme $\mathrm{id}_W-g\circ\varphi=\varphi$, nous avons $f\circ\varphi=\mathrm{id}_W$. Notons

$V=f^{-1}(W)\cap B(0,r)$, qui est un ouvert. Alors $f:V\to W$ est continue, injective $V\subset\overline{B}(0,r)$, surjective car $f\circ\varphi=\mathrm{id}_W$, d'inverse égal à φ qui est continu. Donc f est homéomorphisme. Puisque df_x est inversible pour tout $x\in V\subset\overline{B}(0,r)$, l'application est donc C^k par la proposition 7.11 (5).

Notons que si $E=F=\mathbb{R}^n$ (muni de n'importe quelle norme), et plus générale si E et F sont de même dimension finie, alors on peut bien sûr remplacer « bijectiv par « injective » dans le théorème 7.13. Les corollaires suivants sont des applicatio immédiates (aussi valides si $k=\omega$).

Porisme 7.14 (Théorème de l'image ouverte) *Soient $k\in(\mathbb{N}-\{0\})\cup\{\infty\}$ et $U\to F$ une application de classe C^k. Si la différentielle de f en tout point de U bijective, alors $f(U)$ est un ouvert de F. Si de plus f est injective, alors l'applicat $f:U\to f(U)$ est un C^k-difféomorphisme.*

Remarquons que l'inclusion standard de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^{n+1}$, définie par $(x_1,\dots,x_n)$ $(x_1,\dots,x_n,0)$, est un C^∞-difféomorphisme sur son image, mais que celle-ci n'est pas ouvert de $\mathbb{R}^{n+1}$.

Porisme 7.15 *Si $k\in(\mathbb{N}-\{0\})\cup\{\infty\}$, une application bijective entre deux ouverts de différentiable de classe C^k, dont le jacobien ne s'annule pas, est un C^k-difféomorphis entre ces ouverts.*

Le résultat suivant est essentiellement équivalent au précédent (voir l'exercice E.104) donne des conditions suffisantes pour pouvoir résoudre une équation de la forme $f(x,y)$ 0 d'inconnue y et de paramètre x, de sorte que l'inconnue $y=g(x)$ dépende en plus manière régulière du paramètre x.

Théorème 7.16 (Théorème des fonctions implicites) *Soient E,F,G trois espa de Banach sur $\mathbb{K}$, U un ouvert de $E\times F$, k un élément de $(\mathbb{N}-\{0\})\cup\{\infty\}$, et $f:U$ — une application de classe C^k. Si, en un point (a,b) de U tel que $f(a,b)=0$, la différenti partielle par rapport à la seconde variable $\partial_2f_{(a,b)}:F\to G$ est bijective, alors il existe voisinage ouvert U' de (a,b) contenu dans U, un voisinage ouvert V de a dans E et application $g:V\to F$ de classe C^k tels que l'assertion*

$$(x,y)\in U'\quad\text{et}\quad f(x,y)=0$$

soit équivalente à l'assertion

$$x\in V\quad\text{et}\quad y=g(x)\,.$$

En particulier, $g(a)=b$ et, pour tout x suffisamment proche de a dans V,

$$dg_x=-\big(\partial_2f_{(x,g(x))}\big)^{-1}\circ\partial_1f_{(x,g(x))}\,.$$

Remarque. Ce résultat est encore vrai si $E=F=\mathbb{K}^r$ pour un $r\in\mathbb{N}-\{0\}$ et $k=$ par la remarque suivant l'énoncé du théorème 7.13 d'inversion locale.

Preuve. Soit φ l'application de U dans $E\times G$ définie par $\varphi(x,y)=(x,f(x,y))$. Alors est de classe C^k (car ses composantes le sont), et sa différentielle en (a,b) est, en calcul par blocs, triangulaire inférieure, de blocs diagonaux inversibles, d'expression

$$(h,k)\mapsto\big(h,\partial_1f_{(a,b)}(h)+\partial_2f_{(a,b)}(k)\big)\,.$$

Donc $d\varphi_{(a,b)}$ est bijective, d'inverse

$$(h', k') \mapsto \Big(h', \partial_2 f^{-1}_{(a,b)}\big(k' - \partial_1 f_{(a,b)}(h')\big)\Big)\ . \quad (**)$$

Par le théorème d'inversion locale, il existe un voisinage ouvert U' de (a,b) dans U et un voisinage ouvert U'' de $\varphi(a,b) = (a,0)$ dans $E \times G$ tels que $\varphi : U' \to U''$ soit un C^k-difféomorphisme, dont on note ψ l'inverse, qui est de la forme $(x,z) \mapsto (x, \psi_2(x,z))$. En particulier, comme $f(x,y) = 0$ si et seulement si $\varphi(x,y) = (x,0)$, les assertions

$$(x,y) \in U' \quad \text{et} \quad f(x,y) = 0$$

et

$$(x,0) \in U'' \quad \text{et} \quad \psi(x,0) = (x,y)$$

sont équivalentes. Notons $V = \{x \in E \ : \ (x,0) \in U''\}$, qui est un ouvert de E, et $g : x \mapsto \psi_2(x,0)$, qui est une application de classe C^k de V dans F. Le premier résultat en découle.

La dernière assertion découle de $(**)$ (qui est vrai en remplaçant (a,b) par tout $(x,y) \in U'$), par linéarité de la seconde projection pr_2 et de $x \mapsto (x,0)$, et par le théorème de dérivation des applications composées, car

$$dg_x(h') = \mathrm{pr}_2 \circ d\psi_{(x,0)}(h',0) = \mathrm{pr}_2 \circ d(\phi^{-1})_{(x,0)}(h',0) = \mathrm{pr}_2 \circ d(\phi_{(x,g(x))})^{-1}(h',0)\ . \quad \square$$

Comme précédemment, si $F = G = \mathbb{R}^n$, et plus généralement si F et G sont de même dimension finie, alors on peut remplacer « bijective » par « surjective » dans cet énoncé. Le corollaire suivant est une application immédiate.

Porisme 7.17 *Soient $p, n \in \mathbb{N} - \{0\}$, U un ouvert de $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^n$, $k \in (\mathbb{N} - \{0\}) \cup \{\infty, \omega\}$, et $f : U \to \mathbb{R}^n$ une application de classe C^k. Si, en un point (a,b) de U tel que $f(a,b) = 0$, le jacobien partiel par rapport aux n dernières variables* $\det\Big(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a,b)\Big)_{1 \le i \le n,\ p+1 \le j \le p+n}$ *est non nul, alors il existe un voisinage ouvert U' de (a,b) contenu dans U, un voisinage ouvert V de a dans $\mathbb{R}^p$ et une application $g : V \to \mathbb{R}^n$ de classe C^k tels que l'assertion*

$$(x,y) \in U' \quad \text{et} \quad f(x,y) = 0$$

soit équivalente à l'assertion

$$x \in V \quad \text{et} \quad y = g(x)\ . \quad \square$$

Voici quelques applications classiques des théorèmes précédents. On fixe $p, q \le n$ dans $\mathbb{N}$ et k un élément de $(\mathbb{N} - \{0\}) \cup \{\infty, \omega\}$. Un C^k-*difféomorphisme local* de $\mathbb{K}^n$ *en un point* a est un C^k-difféomorphisme d'un voisinage ouvert de a sur un voisinage ouvert de a, qui envoie a sur a. Les applications

$$(x_1, \dots, x_p) \mapsto (x_1, \dots, x_p, 0, \dots, 0)$$

de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$,

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_q)$$

de $\mathbb{K}^n$ dans $\mathbb{K}^q$, et

$$(x_1, \dots, x_p) \mapsto (x_1, \dots, x_r, 0, \dots, 0)$$

de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^q$ où $r \le \min\{p,q\}$, sont respectivement une immersion, une submersi
une application de rang constant r. Les résultats suivants disent que ces exemples so
localement et modulo changements de coordonnées (en général non linéaires) locaux,
seuls.

Porisme 7.18 (Théorème de forme normale locale des immersions) *Soient
un ouvert de $\mathbb{K}^p$ contenant 0 et $f : U \to \mathbb{K}^n$ une application de classe C^k, qui est
immersion en 0 telle que $f(0) = 0$. Alors il existe un C^k-difféomorphisme local ψ de
en 0 tel que, au voisinage de 0, on ait*

$$\psi \circ f\ (x_1, \dots, x_p) = (x_1, \dots, x_p, 0, \dots, 0)\ .$$

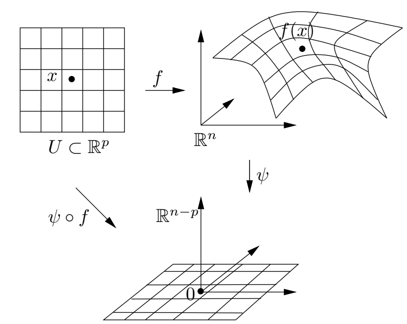
Preuve. Quitte à appliquer un isomorphisme linéaire de $\mathbb{K}^n$, nous pouvons suppo
que l'image de df_0 soit engendrée par les p premiers vecteurs de base de $\mathbb{K}^n$. Soit al
$V = U \times \mathbb{K}^{n-p}$ qui est un ouvert de $\mathbb{K}^n$ contenant 0, et

$$g(x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_p) + (0, \dots, 0, x_{p+1}, \dots, x_n)\ .$$

L'application $g : V \to \mathbb{K}^n$ est de classe C^k au voisinage de 0, envoie 0 sur 0, et
différentielle de g en 0 est inversible. Par le théorème 7.13 d'inversion locale, $\psi = g^{-1}$
un C^k-difféomorphisme local de $\mathbb{K}^n$ en 0, et, au voisinage de 0,

$$(x_1, \dots, x_p, 0, \dots, 0) = \psi \circ g(x_1, \dots, x_p, 0, \dots, 0) = \psi \circ f(x_1, \dots, x_p). \quad \square$$

Géométriquement, ce résultat dit que l'image d'une immersion peut être, au voisinage de chaque point, redressée en un (ouvert d'un) sous-espace vectoriel par un difféomorphisme au but.



Porisme 7.19 (Théorème de forme normale locale des submersions) *Soient
un ouvert de $\mathbb{K}^n$ contenant 0 et $f : U \to \mathbb{K}^q$ une application de classe C^k, qui est
submersion en 0 telle que $f(0) = 0$. Alors il existe un C^k-difféomorphisme local φ de
en 0, tel que, au voisinage de 0, on ait*

$$f \circ \varphi\ (x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_q)\ .$$

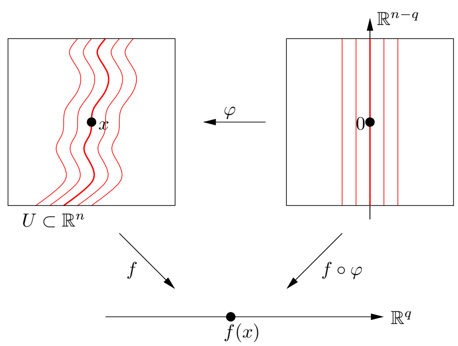
Preuve. Quitte à appliquer un isomorphisme linéaire de $\mathbb{K}^n$, nous pouvons supposer
les images par df_0 des q premiers vecteurs de la base canonique de $\mathbb{K}^n$ forment une b
de $\mathbb{K}^q$. Soit alors

$$g : (x_1, \dots, x_n) \mapsto (f(x_1, \dots, x_n), x_{q+1}, \dots, x_n)\ .$$

L'application $g : U \to \mathbb{K}^n$ est de classe C^k au voisinage de 0, envoie 0 sur 0, et sa différentielle en 0 est inversible. Par le théorème 7.13 d'inversion locale, $\varphi = g^{-1}$ est un C^k-difféomorphisme local de $\mathbb{K}^n$ en 0, et, en considérant les q premières coordonnées de $g \circ \varphi = \mathrm{id}$, nous avons, au voisinage de 0,

$$f \circ \varphi(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_q) \ . \quad \square$$

Géométriquement, ce résultat implique qu'au voisinage de chaque point de la source, la préimage de l'image de ce point par une submersion peut être redressée en un (ouvert d'un) sous-espace vectoriel par un difféomorphisme à la source.



Porisme 7.20 (Théorème de forme normale locale des applications de rang constant) *Soient U un ouvert de $\mathbb{K}^p$ contenant 0 et $f : U \to \mathbb{K}^q$ une application de classe C^k, qui est une application de rang constant $r \le \min\{p, q\}$ sur un voisinage de 0 avec $f(0) = 0$. Alors, il existe un C^k-difféomorphisme local ψ de $\mathbb{K}^q$ en 0 et un C^k-difféomorphisme local φ de $\mathbb{K}^p$ en 0, tels que, au voisinage de 0, on ait*

$$\psi \circ f \circ \varphi\,(x_1, \dots, x_p) = (x_1, \dots, x_r, 0, \dots, 0) \ .$$

Preuve. Notons $(e_1, \dots, e_p)$ la base canonique de $\mathbb{K}^p$ et $(f_1, \dots, f_q)$ celle de $\mathbb{K}^q$. Nous pouvons supposer, quitte à appliquer un isomorphisme linéaire à la source et au but, que $df_0(e_i) = f_i$ pour $i = 1, \dots, r$, et $df_0(e_i) = 0$ pour $i = r+1, \dots, p$.

Soit π la projection sur les r premières composantes dans $\mathbb{K}^q$, et

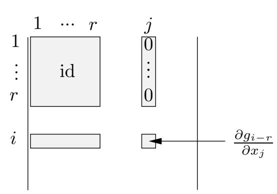
$$F : (x_1, \dots, x_p) \mapsto (\pi(f(x_1, \dots, x_p)), x_{r+1}, \dots, x_p) \ .$$

Comme $F : U \to \mathbb{K}^p$ est de classe C^k et $dF_0 = \mathrm{id}$, l'application F admet un inverse local G au voisinage de 0, qui vérifie $\pi \circ f \circ G(x_1, \dots, x_p) = (x_1, \dots, x_r)$. Autrement dit, en faisant un changement de coordonnées à la source, on s'est ramené au cas où

$$f(x_1, \dots, x_p) = (x_1, \dots, x_r, g(x_1, \dots, x_p)) \ ,$$

où $g : U \to \mathbb{K}^{q-r}$ est de classe C^k.

Soient $i, j > r$. Pour x proche de 0, considérons le mineur de la matrice jacobienne Jf_x, obtenu en ne gardant que les r premières lignes et colonnes, la i-ème ligne et la j-ème colonne. Ce mineur est nul, puisque df_x est de rang r.



Donc $\frac{\partial g_{i-r}}{\partial x_j}(x) = 0$ pour $i = r+1, \dots, q$. Ainsi, $g_{i-r}(x_1, \dots, x_p) = g_{i-r}(x_1, \dots, x_r, 0, \dots,$
et g ne dépend que des r première variables. Donc

$$f(x_1, \dots, x_p) = f(x_1, \dots, x_r, 0, \dots, 0) \ .$$

Considérons maintenant l'application f restreinte à $\mathbb{K}^r \times \{0\}$: elle est immersive en
si bien qu'on peut la transformer au voisinage de 0 en $(x_1, \dots, x_r) \mapsto (x_1, \dots, x_r, 0, \dots$
par un C^k-difféomorphisme local au but. Ceci conclut.

Remarque. Ce résultat est moins anodin qu'il n'y paraît. Essayez par exemple de mont
le résultat suivant : soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dont la différentielle est partout de rang 1, égal
l'identité sur $\mathbb{R} \times \{0\}$. Alors l'image de f est incluse dans $\mathbb{R} \times \{0\}$. Directement, ce n'
pas évident que f ne va pas s'écarter de la droite des abscisses, et que la condition
rang de la différentielle est une contrainte suffisante.

7.5 Théorie de Cauchy-Lipschitz

Soient E un espace de Banach réel, U un ouvert de $\mathbb{R} \times E$, et $f : U \to E$ une applicat
continue.

Une application différentiable u d'un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ dans E est une *solut
de l'équation différentielle*

$$y' = f(t, y)$$

définie par f si pour tout t dans I, le couple $(t, u(t))$ appartient à U et

$$u'(t) = f(t, u(t)) \ .$$

Une solution $u : I \to E$ de cette équation différentielle est dite *maximale* s'il n'exi
pas de solution $v : J \to E$ de cette équation différentielle, où J est un intervalle ouv
contenant strictement I, telle que $v_{|I} = u$.

L'application f est dite *semi-lipschitzienne* si pour tout (t_0, x_0) dans U, il existe $c \geq$
J un intervalle ouvert contenant t_0 et W un voisinage ouvert de x_0 dans E, tels que
cylindre $J \times W$ soit contenu dans U et que pour tout $t \in J$, l'application de W da
E définie par $x \mapsto f(t, x)$ soit c-lipschitzienne. (Il est important que c ne dépende p
du temps $t \in J$, et nous avons opté pour la terminologie « semi-lipschitzien » plutôt q
« localement lipschitzien par rapport à la seconde variable de manière uniforme en
première ».) Par exemple, il découle du théorème 7.2 des accroissements finis que si f
de classe C^1 sur U (et même si f est seulement supposée différentiable par rapport à
seconde variable telle que l'application $\partial_2 f : U \to \mathscr{L}(E, E)$ soit continue), alors f
semi-lipschitzienne.

Nous allons étudier dans le résultat suivant le *problème de Cauchy* pour l'équat
différentielle définie par $f : U \to E$, c'est-à-dire, étant donné $(t_0, x_0) \in U$, mont
l'existence et l'unicité locale d'une solution $u = u_{t_0, x_0}$ de l'équation différentielle

$$y' = f(t, y) \ ,$$

vérifiant la *condition initiale*

$$u(t_0) = x_0 \ .$$

Nous étudierons aussi la régularité de u, ainsi que la régularité de u en les conditio
initiales (t_0, x_0), sous des hypothèses de régularité de f. Le théorème 7.21 suivant dit
particulier que si $k \in (\mathbb{N} - \{0\}) \cup \{\infty\}$ (et il est important que $k \geq 1$), alors

$$\boxed{\text{si } f \text{ est de classe } \mathrm{C}^k, \text{ alors } u \text{ existe, est unique, et est } \mathrm{C}^k \text{ en } t, t_0, x_0.}$$

Dans de nombreux problèmes physiques, l'évolution d'un système est régie par une équation différentielle, mais celle-ci peut dépendre de paramètres physiques. Il est intéressant d'étudier la dépendance (en particulier la régularité) des solutions en fonctions de ces paramètres, et nous allons formaliser cette étude.

Soient E un espace de Banach, Λ un espace topologique (dont les éléments seront appelés les *paramètres*), V un ouvert de $\mathbb{R} \times E \times \Lambda$, et $g : V \to E$ une application continue.

Soit $\lambda \in \Lambda$. Une application différentiable u d'un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ dans E est une *solution de l'équation différentielle de paramètre* λ

$$y' = g(t, y, \lambda)$$

définie par g si, pour tout t dans I,

$$(t, u(t), \lambda) \in V \quad \text{et} \quad u'(t) = g(t, u(t), \lambda) \ .$$

L'application g est dite *semi-lipschitzienne à paramètre* si pour tout (t_0, x_0, λ_0) dans V, il existe $c \geq 0$, J un intervalle ouvert contenant t_0, W un voisinage ouvert de x_0 dans E et W' un voisinage ouvert de λ_0 dans Λ, tels que $J \times W \times W' \subset V$ et que pour tous $t \in J$ et $\lambda \in W'$, l'application de W dans E définie par $x \mapsto g(t, x, \lambda)$ soit c-lipschitzienne. (Il est important que c ne dépende ni du temps $t \in J$ ni du paramètre $\lambda \in W'$, et nous avons opté pour la terminologie « semi-lipschitzien à paramètre » plutôt que « localement lipschitzien par rapport à la seconde variable de manière uniforme en la première et la troisième ».) Par exemple, il découle du théorème 7.2 des accroissements finis que si g est différentiable par rapport à la seconde variable et si l'application $\partial_2 g : V \to \mathscr{L}(E, E)$ est continue (ce qui est en particulier le cas si Λ est un (ouvert d'un) espace de Banach et si g est de classe C^1 sur V), alors g est semi-lipschitzienne à paramètre.

Nous allons aussi étudier dans le résultat suivant le *problème de Cauchy* pour l'équation différentielle à paramètre définie par $g : V \to E$, c'est-à-dire, étant donné $(t_0, x_0, \lambda_0) \in V$, montrer l'existence et l'unicité locale d'une solution $u = u_{t_0, x_0, \lambda_0}$ de l'équation différentielle

$$y' = g(t, y, \lambda_0) \ ,$$

vérifiant la *condition initiale*

$$u(t_0) = x_0 \ .$$

Si Λ est un (ouvert d'un) espace de Banach, nous étudierons aussi la régularité de u, ainsi que la régularité de u en le triplet (t_0, x_0, λ_0) de conditions initiales et de paramètre, sous des hypothèses de régularité de f. Le théorème 7.21 suivant dit en particulier que si $k \in (\mathbb{N} - \{0\}) \cup \{\infty\}$, alors

$$\boxed{\text{si } g \text{ est de classe } \mathrm{C}^k, \text{ alors } u \text{ existe, est unique, et est } \mathrm{C}^k \text{ en } t, t_0, x_0, \lambda_0.}$$

Théorème 7.21 *Soient E un espace de Banach réel, U un ouvert de $\mathbb{R} \times E$, et $f : U \to E$ une application continue semi-lipschitzienne.*

(1) (**Existence et unicité des solutions**) *Pour tout (t_0, x_0) dans U, il existe une une seule solution maximale $u_{t_0,x_0} : I_{t_0,x_0} \to E$ de l'équation différentielle définie f valant x_0 à l'instant t_0.*

(2) (**Régularité**) *S'il existe $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ tel que f soit de classe C^k, alors toute solut de l'équation différentielle définie par f est de classe C^{k+1}.*

S'il existe $r \in \mathbb{N} - \{0\}$ tel que $E = \mathbb{R}^r$, et si f est analytique réelle sur U, al toute solution de l'équation différentielle définie par f est analytique réelle.

(3) (**Dépendance des conditions initiales**) *Soit $\mathscr{D} = \{(s, t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times E \ : \ $ $I_{t,x}\}$ et, pour tous $s, t \in \mathbb{R}$, soit $U_{s,t} = \{x \in E \ : \ s \in I_{t,x}\}$. Soient $R_{s,t} : U_{s,t} \to$ l'application définie par $x \mapsto u_{t,x}(s)$, et $R : \mathscr{D} \to E$ celle définie par (s, t, x) $R_{s,t}(x) = u_{t,x}(s)$.*

- *Les ensembles $\mathscr{D}$ et $U_{s,t}$ sont ouverts.*
- *Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, si $x \in U_{\alpha,t} \cap U_{s,t}$, alors $R_{\alpha,t}(x) \in U_{s,\alpha}$ et*

$$R_{s,\alpha} \circ R_{\alpha,t}(x) = R_{s,t}(x) \ .$$

- *Pour tout $(s, t, x) \in \mathscr{D}$, il existe un voisinage ouvert V de (s, t, x) dans $\mathscr{D}$ tel la restriction de R à V soit lipschitzienne. En particulier, R est continue.*
- *L'application $R_{t,s} : U_{t,s} \to U_{s,t}$ est un homéomorphisme, d'inverse $R_{t,s}^{-1} = R_{s,t}$.*
- *Pour tout $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, si $\partial_2 f : U \to \mathscr{L}(E, E)$ existe et si f et $\partial_2 f$ sont de cla C^k, alors R est de classe C^{k+1}.*
- *Pour tout $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, si $\partial_2 f : U \to \mathscr{L}(E, E)$ existe et si f et $\partial_2 f$ sont de cla C^k, alors $R_{t,s}$ est un C^{k+1}-difféomorphisme.*

(4) (**Dépendance des paramètres**) *Soit Λ un espace topologique, V un ouvert $\mathbb{R} \times E \times \Lambda$, et $g : V \to E$ une application continue.*

- *Supposons g semi-lipschitzienne à paramètres. Pour tout (t_0, x_0, λ_0) dans V existe un intervalle ouvert I contenant t_0 et un voisinage ouvert W de λ_0 dans tels que, pour tout λ dans W, il existe une et une seule solution $t \mapsto u(t, \lambda)$ défi sur I de l'équation différentielle $y' = g(t, y, \lambda)$, valant x_0 à l'instant t_0 ; de pl l'application $(t, \lambda) \mapsto u(t, \lambda)$ de $I \times W$ dans E est continue.*
- *Supposons que Λ soit un espace de Banach, et que g soit semi-lipschitzien Pour tout (t_0, x_0, λ_0) dans V, notons $u_{t_0,x_0,\lambda_0} : I_{t_0,x_0,\lambda_0} \to E$ la solution maximale l'équation différentielle $y' = g(t, y, \lambda_0)$ valant x_0 à l'instant t_0. Notons*

$$\mathscr{E} = \{(s, t, x, \lambda) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times E \times \Lambda \ : \ s \in I_{t,x,\lambda}\} \ .$$

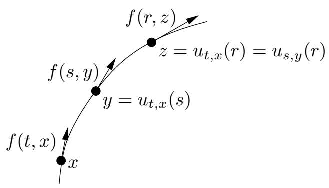
Alors la partie $\mathscr{E}$ est ouverte, et l'application $S : \mathscr{E} \to E$ définie par (s, t, x, λ) $u_{t,x,\lambda}(s)$ est localement lipschitzienne, et en particulier continue.

- *Supposons que Λ soit un espace de Banach. Pour tout $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, si $\partial_2 g : V$ $\mathscr{L}(E, E)$ et $\partial_3 g : V \to \mathscr{L}(\Lambda, E)$ existent, et si $g, \partial_2 g, \partial_3 g$ sont de classe C^k, alors est de classe C^{k+1}.*

Dans l'avant-dernier point, nous demandons que g soit semi-lipschitzienne en t qu'application définie sur une partie ouverte de $\mathbb{R} \times (E \times \Lambda)$ (ce qui est plus fort de demander que g soit semi-lipschitzienne à paramètre). Cela est par exemple vérifi les différentielles partielles $\partial_2 g : V \to \mathscr{L}(E, E)$ et $\partial_3 g : V \to \mathscr{L}(\Lambda, E)$ existent et s continues, et donc en particulier si g est de classe C^1.

Les affirmations encadrées précédant l'énoncé du théorème 7.21 découlent bien de ce théorème.

L'application $R : \mathscr{D} \to E$ définie dans (3) est appelée l'*application résolvante* de l'équation différentielle $y' = f(t, y)$ définie par f. Le second point de l'assertion (3), appelé *propriété de cocycle* dit que si y est la valeur au temps s de la solution u valant x au temps t, alors la valeur au temps r de la solution valant y au temps s est exactement $u(r)$.



Nous étudierons dans la preuve ci-dessous (voir la proposition 7.28) les propriétés particulières de l'application résolvante lorsque l'équation différentielle est linéaire.

Preuve. (**Existence locale**) Fixons (t_0, x_0) dans U. Pour tous $\epsilon, \eta > 0$, notons $I_\epsilon = [t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon]$ et B_η la boule fermée dans E de centre x_0 et de rayon η.

Puisque f est continue en (t_0, x_0), elle est bornée sur un voisinage suffisamment petit de (t_0, x_0). Puisque f est semi-lipschitzienne, il existe $c \geq 0$, $\epsilon, \eta > 0$ tels que $I_\epsilon \times B_\eta \subset U$,

$$M = \sup_{(t,x) \in I_\epsilon \times B_\eta} ||f(t, x)|| < +\infty$$

et

$$\forall t \in I_\epsilon, \ \ \forall x, x' \in B_\eta, \quad ||f(t, x) - f(t, x')|| \leq c\,||x - x'||\ .$$

Soit $\epsilon' \in \,]\,0, \epsilon]$ tel que $c\,\epsilon' \leq \frac{1}{2}$ et $(c\eta + M)\epsilon' \leq \eta$.

Notons F l'espace de Banach $\mathscr{C}(I_{\epsilon'}, E)$ des applications continues y de $I_{\epsilon'}$ dans E, muni de la norme uniforme $||y|| = \sup_{t \in I_{\epsilon'}} ||y(t)||$. Soit B la boule fermée dans F de centre l'application constante de valeur x_0 (encore notée x_0) et de rayon η. Pour tout y dans B, l'application $\varphi(y) : I_{\epsilon'} \to E$ définie par

$$t \mapsto x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))\, ds$$

est bien définie et continue, par continuité de f et de y (et puisque y est à valeurs dans B_η).

Pour tous y, z dans B, nous avons

$$\begin{aligned} ||\varphi(y) - \varphi(z)|| &= \sup_{t \in I_{\epsilon'}} \Big|\Big| \int_{t_0}^{t} \big(f(s, y(s)) - f(s, z(s))\big) ds \,\Big|\Big| \\ &\leq c\,\epsilon' \sup_{s \in I_{\epsilon'}} ||\, y(s) - z(s)\, || \leq \frac{1}{2}\, ||y - z|| \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} ||\varphi(y) - x_0|| &\leq ||\varphi(y) - \varphi(x_0)|| + ||\varphi(x_0) - x_0|| \\ &\leq c\,\epsilon'\, ||y - x_0|| + \sup_{t \in I_{\epsilon'}} \Big|\Big| \int_{t_0}^{t} f(s, x_0)\, ds \,\Big|\Big| \leq c\epsilon'\eta + M\epsilon' \leq \eta\ . \end{aligned}$$

L'application $\varphi : B \to F$ définie par $y \mapsto \varphi(y)$ est donc contractante (plus précisém $\frac{1}{2}$-lipschitzienne) et à valeurs dans B. Puisque B est fermé dans F, donc complet, p le théorème 3.19 du point fixe de Banach, l'application φ admet donc un point fixe Puisque y vérifie $y(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))$ pour tout $t \in I_{\epsilon'}$, l'application $y : I_{\epsilon'} \to E$ dérivable, et est une solution de l'équation différentielle $y' = f(t, y)$ valant x_0 en t_0.

(**Existence locale avec paramètres**) La démonstration de l'existence locale en p sence de paramètres, c'est-à-dire du premier point (sauf l'unicité, qui sera vue plus ta de l'assertion (4) du théorème 7.21, est complètement analogue.

Avec I_ϵ, B_η comme ci-dessus, pour tout $(t_0, x_0, \lambda_0) \in V$, puisque $g : V \to E$ est conti et semi-lipschitzienne à paramètre, il existe $c \geq 0$, $\epsilon, \eta > 0$ et un voisinage W de λ_0 t que $I_\epsilon \times B_\eta \times W \subset V$, $M = \sup_{(t,x,\lambda) \in I_\epsilon \times B_\eta \times W} ||g(t, x, \lambda)||$ est fini et

$$\forall t \in I_\epsilon, \ \ \forall \lambda \in W, \ \ \forall x, x' \in B_\eta, \quad ||g(t, x, \lambda) - g(t, x', \lambda)|| \leq c\,||x - x'||\ .$$

Pour $\epsilon' \in \,]0, \epsilon]$, nous notons maintenant F l'espace de Banach $\mathscr{C}_b(I_{\epsilon'} \times W, E)$ des plications continues bornées y de $I_{\epsilon'} \times W$ dans E, muni de la norme uniforme $||\, y\, ||$ $\sup_{(t,\lambda) \in I_{\epsilon'} \times W} ||\, y(t, \lambda)\, ||$. Toujours avec B la boule fermée dans F de centre l'applicat constante x_0 et de rayon η, pour tout y dans B, nous notons maintenant $\varphi(y) : I_{\epsilon'} \times W$ l'application définie par

$$(t, \lambda) \mapsto x_0 + \int_{t_0}^{t} g(s, y(s), \lambda)\, ds\ .$$

Le raisonnement ci-dessus fournit donc, pour ϵ' assez petit, une application continue $I_{\epsilon'} \times W \to E$, telle que pour tout $\lambda \in W$, l'application de $I_{\epsilon'}$ dans E définie par $t \mapsto u(t$ soit une solution définie sur $I_{\epsilon'}$ de l'équation différentielle $y' = g(t, y, \lambda)$, valant x l'instant t_0.

(**Solutions approchées**) Ce qui précède montre l'existence de solutions locales. Av de montrer l'unicité locale des solutions, et donc l'unicité des solutions maximales, n montrons un lemme qui nous sera aussi utile pour la dépendance des conditions initia et des paramètres.

Soit $\epsilon \geq 0$. Une *solution ϵ-approchée* de l'équation différentielle $y' = f(t, y)$ définie f est une application dérivable u d'un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ dans E telle que, p tout t dans I, on ait $(t, u(t)) \in U$ et

$$||\, u'(t) - f(t, u(t))\, || \leq \epsilon\ .$$

Les solutions 0-approchées de l'équation différentielle $y' = f(t, y)$ sont bien sûr ses s tions (exactes).

Lemme 7.22 *Soient $k > 0$, $\epsilon, \eta \geq 0$, $u : I \to E$ une solution ϵ-approchée et $v : I \to$ une solution η-approchée de l'équation différentielle définie par f. On suppose que f k-lipschitzienne en la seconde variable sur les graphes de u et de v (i.e. sur l'ensemble couples de la forme $(t, u(t))$ ou $(t, v(t))$ pour $t \in I$). Alors pour tous $t, t_0 \in I$,*

$$||\, u(t) - v(t)\, || \leq ||\, u(t_0) - v(t_0)\, ||\, e^{k|t - t_0|} + (\epsilon + \eta)\, \frac{e^{k|t - t_0|} - 1}{k}\ .$$

La démonstration utilise le lemme taupinal bien connu suivant.

Lemme 7.23 *Soient $a, k, b > 0$ et $g : [0, b] \to [0, +\infty[$ une application continue telle que, pour tout $t \in [0, b]$, on ait $g(t) \le at + k \int_0^t g(s)ds$. Alors $g(t) \le \frac{a}{k}(e^{kt} - 1)$ pour tout $t \in [0, b]$.*

Preuve. On pose $h(t) = k\, e^{-kt} \int_0^t g(s)\, ds$, de sorte que h est de classe C^1, $h(0) = 0$ et $h'(t) = k\, e^{-kt}(g(t) - k \int_0^t g(s)\, ds) \le kat\, e^{-kt}$. Donc

$$h(t) = \int_0^t h'(s)\, ds \le \int_0^t kas\, e^{-ks}\, ds = \frac{a}{k}(1 - e^{-kt} - kte^{-kt}) \; .$$

Par conséquent

$$g(t) \le at + k \int_0^t g(s)ds = at + e^{kt}h(t) \le \frac{a}{k}(e^{kt} - 1) \; . \quad \square$$

Preuve du lemme 7.22. On suppose que $t_0 = 0$ (le résultat cherché s'y ramène par translation), et on montre le résultat pour $t > 0$ (le résultat cherché s'y ramène par la symétrie $t \mapsto -t$). Posons $w = u - v$, qui est une application dérivable de I dans E, telle que

$$||\, w'(t)\, || = ||\, u'(t) - v'(t)\, || \le \epsilon + \eta + ||\, f(t, u(t)) - f(t, v(t))\, || \le \epsilon + \eta + k\, ||\, w(t)\, || \; ,$$

puisque f est k-lipschitzienne en la seconde variable sur les graphes de u et de v. Par le théorème 7.1 de la moyenne, on a donc

$$\begin{aligned}||\, w(t) - w(0)\, || &\le \int_0^t \big(\epsilon + \eta + k\, ||\, w(s)\, ||\big)\, ds \\ &\le \big(\epsilon + \eta + k\, ||\, w(0)\, ||\big)t + k \int_0^t ||\, w(s) - w(0)\, ||\, ds \; ,\end{aligned}$$

par inégalité triangulaire. On applique alors le lemme 7.23 avec $a = \epsilon + \eta + k||\, w(0)\, ||$ et $g(t) = ||\, w(t) - w(0)\, ||$. Il en découle que

$$\begin{aligned}||\, u(t) - v(t)\, || = ||\, w(t)\, || &\le ||\, w(t) - w(0)\, || + ||\, w(0)\, || = g(t) + ||\, w(0)\, || \\ &\le \Big(\frac{\epsilon + \eta}{k} + ||\, w(0)\, ||\Big)(e^{kt} - 1) + ||\, w(0)\, || \\ &= ||\, u(0) - v(0)\, ||\, e^{kt} + (\epsilon + \eta)\, \frac{e^{kt} - 1}{k} \; .\end{aligned}$$

Le résultat en découle. $\square$

(**Unicité locale**) Fixons (t_0, x_0) dans U. Soient $u : I \to E$ et $v : J \to E$ deux solutions de l'équation différentielle $y' = f(t, y)$ définie par f telles que $t_0 \in I \cap J$ et $u(t_0) = v(t_0) = x_0$. Montrons que u et v coïncident sur l'intervalle ouvert $I \cap J$.

En effet, l'ensemble des points de $I \cap J$ où u et v coïncident est non vide car t_0 lui appartient, fermé car u et v sont continues, et ouvert par le lemme 7.22, car f est semi-lipschitzienne, ce qui conclut par connexité de $I \cap J$.

L'énoncé d'unicité pour les équations différentielles à paramètre découle immédiatement de ce qui précède, ce qui termine la démonstration du premier point de l'assertion (4) du théorème 7.21.

Puisque les hypothèses du théorème 7.1 de la moyenne ne demandent la dérivabilité que sur $]a, b[$, la preuve du lemme 7.22, ainsi que son application à l'unicité locale ci-dessus, restent valables pour montrer le résultat suivant.

Remarque 7.24 *Si I est un intervalle de la forme $[t_0, t_0 + \epsilon[$ ou $]t_0 - \epsilon, t_0]$, si $u, v : I \to$ sont deux applications continues telles que $u(t_0) = v(t_0)$ et si $u, v : \mathring{I} \to E$ sont soluti de l'équation différentielle $y' = f(t, y)$, alors $u = v$.*

(**Unicité globale**) Maintenant, soit $\mathscr{S}$ l'ensemble de tous les couples (I, u) où I un intervalle ouvert et $u : I \to E$ une solution de l'équation différentielle définie par f t que $t_0 \in I$ et $u(t_0) = x_0$. Alors la réunion I_{t_0,x_0} de tous les intervalles J, tels qu'il exi $(I, u) \in \mathscr{S}$ avec $I = J$, est un intervalle ouvert. Par l'affirmation précédente d'unic locale, il existe une application $u_{t_0,x_0} : I_{t_0,x_0} \to E$ qui, pour tout $(I, u) \in \mathscr{S}$, coïnc avec u sur I. Il est alors immédiat que u_{t_0,x_0} est l'unique solution maximale de l'équat différentielle définie par f valant x_0 en t_0. Ceci termine la démonstration de l'assert (1) du théorème 7.21.

Remarque. Par exemple, si $E = \mathbb{R}$, $U = \mathbb{R} \times E$, $f : (t, x) \mapsto x^2$, $t_0 = 0$, $x_0 >$ l'application différentiable $u :] - \infty, \frac{1}{x_0}[\to \mathbb{R}$ définie par $t \mapsto \frac{x_0}{1 - x_0 t}$ est la solut maximale de l'équation différentielle définie par f valant x_0 en $t_0 = 0$. L'application u peut pas être prolongée différentiablement au delà de $\frac{1}{x_0}$.

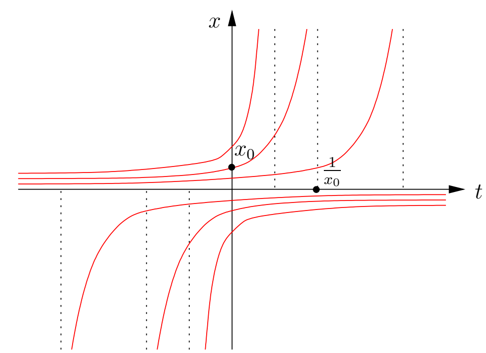


Figure : Portrait de phase des solutions de l'équation différentielle $y' = y^2$.

(**Explosion des solutions maximales en temps fini**) Ce phénomène d'*explos* des solutions d'équations différentielles quand on approche d'une borne finie de son maine maximal de définition est en fait général.

Proposition 7.25 *Soient E un espace de Banach réel, U un ouvert de $\mathbb{R} \times E$, et $f : U$ E une application continue semi-lipschitzienne. Soit J un intervalle ouvert et $u : J \to$ une solution de l'équation différentielle $y' = f(t, y)$ définie par f. Supposons que b une extrémité finie de $\overline{J}$ telle que f soit bornée sur l'ensemble des $(t, u(t))$ pour t dans voisinage de b, et qu'au moins une des valeurs d'adhérence des $(t, u(t))$ quand $t \in J$ t vers b appartienne à U. Alors il existe un intervalle ouvert J_* contenant J et b, et solution $u_* : J_* \to E$ de l'équation différentielle qui coïncide avec u sur J.*

Par contraposée, si u est une solution maximale, si b est une extrémité finie de son domaine (maximal) de définition, alors, quand le temps t converge vers b, $u'(t)$ est non borné ou toute valeur d'adhérence de $(t, u(t)$ appartient à la frontière de U.

Preuve. Supposons par exemple que $b = \sup J$. Soient $a \in J$ et $M > 0$ tels que, pour tout t dans $[a, b[$, on ait $||\, f(t, u(t))\, || \leq M$. Ceci implique que $||\, u'(t)\, || \leq M$. Par le théorème 7.2 des accroissements finis, pour tous $s, t \in [a, b[$, nous avons

$$||\, u(s) - u(t)\, || \leq M|s - t| \ .$$

Par complétude de E et un argument de suites de Cauchy, l'application $t \mapsto u(t)$ admet donc une limite quand $t \in J$ tend vers b, et donc se prolonge continuement en $t = b$. Notons que $(b, u(b))$ appartient à U par les hypothèses. Donc par le théorème d'existence, il existe une solution $v : I \to E$ de l'équation différentielle $y' = f(t, y)$, où I est un intervalle ouvert contenant b, telle que $v(b) = u(b)$. Par la remarque 7.24, les solutions u et v coïncident sur $I \cap J$. En posant $J_* = I \cup J$ et en considérant l'application u_* valant u sur J et v sur $J_* - J$, le résultat en découle. $\square$

Remarque. Si E est de dimension finie, si l'on suppose que u est bornée au voisinage de b, et que l'ensemble des valeurs d'adhérence des $(t, u(t))$ quand $t \in J$ tend vers b est contenu dans U, si a est fixé dans J, alors l'adhérence du graphe $\big\{(t, u(t)) \ : \ t \in [a, b[\big\}$ est un fermé borné, donc compact, contenu dans U, et, par continuité de f sur ce compact, f est bornée sur ce graphe. Donc la conclusion de la proposition 7.25 précédente reste valable. En particulier, si E est de dimension finie, et si le domaine de définition de l'équation différentielle est égal à tout $\mathbb{R} \times E$, alors une solution maximale $u(t)$ tend vers l'infini quand t tend vers une borne finie de son domaine de définition. En particulier, si u est maximale, si σ est une extrémité finie de son domaine de définition, alors $(t, u(t))$ sort de tout compact de U quand t tend vers σ.

(**Cas des équations différentielles linéaires**) Lorsque l'équation différentielle est linéaire, il est possible de préciser le théorème d'existence et d'unicité des solutions. Pour tout $\varphi \in \mathscr{L}(E, E)$ et tout $x \in E$, nous noterons ci-dessous $\varphi \cdot x$ au lieu de $\varphi(x)$, pour éviter une débauche de parenthèses.

Une *équation différentielle linéaire* (avec second membre) est une équation différentielle de la forme

$$y' - A(t) \cdot y = b(t) \ ,$$

où I est un intervalle ouvert, et $A : I \to \mathscr{L}(E, E)$ et $b : I \to E$ sont deux applications continues. Ce qui est remarquable dans ce cas est que les solutions maximales sont toutes définies sur l'intervalle I tout entier, comme le montre le résultat suivant.

Proposition 7.26 *Pour tous $t_0 \in I$ et $x_0 \in E$, il existe une unique solution $u : I \to E$ de l'équation différentielle linéaire $y' = A(t) \cdot y + b(t)$ telle que $u(t_0) = x_0$.*

Preuve. Notons $U = I \times E$ et $f : U \to E$ l'application définie par $(t, x) \mapsto A(t) \cdot x + b(t)$. Soit $u : J \to E$, où J est un intervalle ouvert contenant t_0, l'unique solution maximale de l'équation différentielle linéaire $y' = f(t, y)$ telle que $u(t_0) = x_0$. Montrons que $J = I$. Sinon, par exemple, $T = \sup J < \sup I$ (et en particulier T est fini). Soit $\epsilon > 0$ assez petit. Alors A et b sont définis et continus sur l'intervalle compact $[t_0 - \epsilon, T]$, donc sont bornés par respectivement $k > 0$ et $\eta \geq 0$. En particulier, f est k-lipschitzienne en la seconde variable sur $]t_0 - \epsilon, T[\, \times E$. Comme $u :]t_0 - \epsilon, T[\, \to E$ est une solution exacte et puisque

la fonction nulle sur $]t_0 - \epsilon, T[$ est une solution η-approchée de l'équation différentie linéaire $y' = f(t, y)$, il découle du lemme 7.22 que pour tout $t \in\,]t_0 - \epsilon, T[$,

$$||\, u(t)\, || \leq ||\, u(t_0)\, ||\, e^{k|t - t_0|} + \eta\, \frac{e^{k|t - t_0|} - 1}{k} \ .$$

Il en découle donc que $u(t)$ reste borné quand t tend vers T. Par conséquent $||\, f(t, u(t))\, |$ $k\, ||\, u(t)\, || + \eta$ reste aussi borné quand t tend vers T. Bien sûr, toute valeur d'adhérence $(t, u(t))$ quand t tend vers T reste dans $\{T\} \times E \subset U = I \times E$. Mais alors la proposit 7.25 contredit la maximalité de u.

(**Dépendance continue des paramètres pour les équations différentielles néaires**)

Une *équation différentielle linéaire à paramètre* est une équation différentielle de forme

$$y' = A(t, \lambda) \cdot x + b(t, \lambda) \ ,$$

où I est un intervalle ouvert, Λ un espace topologique, et $A : I \times \Lambda \to \mathscr{L}(E, E)$ $b : I \times \Lambda \to E$ sont deux applications continues. Dans ce cas, la dépendance des solutio dans les paramètres est continue non seulement au voisinage du temps origine t_0 com démontré précédemment, mais sur tout l'intervalle maximal de définition :

Proposition 7.27 *Pour tous $t_0 \in I$, $x_0 \in E$ et $\lambda \in \Lambda$, si $t \mapsto u(t, \lambda)$ est l'uni solution définie sur I de l'équation différentielle linéaire $y' = A(t, \lambda) \cdot x + b(t, \lambda)$ telle $u(t_0, \lambda) = x_0$, alors l'application $(t, \lambda) \mapsto u(t, \lambda)$ de $I \times \Lambda$ dans E est continue.*

Preuve. Fixons $(t_1, \lambda_1) \in I \times \Lambda$. Soit J un intervalle ouvert, de longueur notée $\ell(J) >$ d'adhérence compacte contenue dans I, contenant t_0 et t_1. Par continuité et compacité $\overline{J}$, il existe $k > 0$ et un voisinage W de λ_1 dans Λ tels que, pour tout $(t, \lambda) \in J \times W$, ait

$$\max \big\{||\, u(t, \lambda_1)\, ||, ||\, A(t, \lambda)\, ||\big\} \leq k \ .$$

De même (voir aussi la proposition 5.5 (2)), pour tout $\epsilon > 0$, il existe un voisinage $W' \subset$ de λ_1 dans Λ tels que, pour tout $(t, \lambda) \in J \times W'$, on ait

$$\max \big\{||\, A(t, \lambda) - A(t, \lambda_1)\, ||, ||\, b(t, \lambda) - b(t, \lambda_1)\, ||\big\} \leq \epsilon' = \frac{k\ \epsilon}{2(k+1)(e^{k\,\ell(J)} - 1)} \ .$$

Notons que pour tous $t \in I$ et $\lambda \in \Lambda$, les dérivées par rapport au temps $u'(t, \lambda)$ et $u'(t,$ sont définies, et

$$\begin{aligned} u'(t, \lambda) - u'(t, \lambda_1) = A(t, \lambda) \cdot \big(u(t, \lambda) - u(t, \lambda_1)\big) + \\ \big(A(t, \lambda) - A(t, \lambda_1)\big) \cdot u(t, \lambda_1) + b(t, \lambda) - b(t, \lambda_1) \ . \end{aligned}$$

Donc pour tout $(t, \lambda) \in J \times W'$,

$$||\, u'(t, \lambda) - u'(t, \lambda_1)\, || \leq k\, ||\, u(t, \lambda) - u(t, \lambda_1)\, || + \epsilon'\, (k + 1) \ .$$

Comme dans la preuve de la proposition 7.22, en posant $w(t) = u(t, \lambda) - u(t, \lambda_1)$, obtient que

$$||w(t)|| \leq \Big(\frac{\epsilon'(k+1)}{k} + ||w(0)||\Big)\big(e^{k|t - t_0|} - 1\big) + ||w(0)|| \ .$$

Puisque $w(0) = 0$ car $u(t_0, \lambda) = u(t_0, \lambda_1) = x_0$, on en déduit que pour tout $(t, \lambda) \in J \times W'$,

$$||\, u(t,\lambda) - u(t,\lambda_1)\,|| \leq \epsilon'\,(k+1)\,\frac{e^{k|t-t_0|}-1}{k} \leq \frac{\epsilon}{2}\ ,$$

par définition de ϵ'. Comme $t \mapsto u(t, \lambda_1)$ est continue sur l'intervalle ouvert J qui contient t_1, il existe un intervalle ouvert J' contenu dans J et contenant t_1 tel que, pour tout $t \in J'$, on ait $||\, u(t,\lambda_1) - u(t_1,\lambda_1)\,|| \leq \frac{\epsilon}{2}$. Par inégalité triangulaire, on a donc, pour tout $(t, \lambda) \in J' \times W'$,

$$||\, u(t,\lambda) - u(t_1,\lambda_1)\,|| \leq ||\, u(t,\lambda) - u(t,\lambda_1)\,|| + ||\, u(t,\lambda_1) - u(t_1,\lambda_1)\,|| \leq \epsilon\ ,$$

ce qui montre le résultat. □

(**Régularité des solutions**) Montrons l'assertion (2) du théorème 7.21. Soient $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ tel que f soit de classe C^k, et $u : I \to E$ une solution de l'équation différentielle définie par f. Alors $u'(t) = f(t, u(t))$, donc il est immédiat par récurrence (et le théorème de dérivation des fonctions composées) que u est de classe C^{k+1}.

En particulier, une solution de $y' = f(t, y)$ est toujours de classe C^1.

Nous renvoyons par exemple à [Die1, page 278] pour la preuve de l'affirmation concernant la régularité analytique réelle.

(**Dépendance continue des conditions initiales**) Montrons les quatre premiers points de l'assertion (3) du théorème 7.21. Notons que $U_{ss} = \{x \in E\ :\ (s,x) \in U\}$.

Commençons par prouver le second point. Pour tous $s, t, \alpha \in \mathbb{R}$, si $x \in U_{\alpha,t} \cap U_{s,t}$, alors $\alpha \in I_{t,x}$ donc $u_{t,x}$ est la solution maximale de l'équation différentielle définie par f valant $u_{t,x}(\alpha)$ à l'instant α, et $s \in I_{t,x}$ donc $u_{t,x}$ est définie en s. Par unicité, $u_{\alpha, u_{t,x}(\alpha)}$ est donc définie en s (c'est-à-dire $R_{\alpha,t}(x) = u_{t,x}(\alpha) \in U_{s,\alpha}$) et

$$R_{s,\alpha} \circ R_{\alpha,t}(x) = u_{\alpha,u_{t,x}(\alpha)}(s) = u_{t,x}(s) = R_{s,t}(x)\ .$$

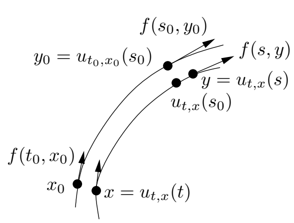
Il en découle, en remplaçant t par s et α par t, que si $x \in U_{t,s}$, alors en particulier $(s, x) \in U$, donc $x \in U_{t,s} \cap U_{s,s}$, et $R_{s,t} \circ R_{t,s}(x) = R_{s,s}(x) = x$. Ceci montre que $R_{t,s} : U_{t,s} \to U_{s,t}$ est une bijection d'inverse $R_{s,t}$. En particulier, le quatrième point de l'assertion (3) du théorème 7.21 découle du troisième.

Montrons que $\mathscr{D}$ est ouvert dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times E$, ce qui montrera que

$$U_{s,t} = \{x \in E\ :\ (s,t,x) \in \mathscr{D}\}$$

est ouvert dans E. Le premier point de l'assertion (3) du théorème 7.21 en découlera.

Soient $(s_0, t_0, x_0) \in \mathscr{D}$, et K un intervalle compact (dont nous noterons la longueur $\ell(K)$), contenant t_0, s_0 dans son intérieur, tel que u_{t_0,x_0} soit défini sur K. Montrons que si (t, x) est suffisamment proche de (t_0, x_0), alors $u_{t,x}$ est aussi défini sur l'intérieur de K, donc en s si s est suffisamment proche de s_0. Ceci implique que $\mathscr{D}$ est ouvert.



Puisque f est continue et semi-lipschitzienne, et par compacité de K, il existe $M, k >$
et un voisinage ouvert W du graphe de $u_{t_0,x_0|K}$ (i.e. de l'image (compacte) de K p
l'application continue $\sigma \mapsto (\sigma, u_{t_0,x_0}(\sigma))$, tels que $\overline{W}$ soit contenue dans U, que f s
majorée par M sur W, et que f soit k-lipschitzienne en la seconde variable sur W.

En particulier, par le théorème 7.2 des accroissements finis, nous avons, pour tou
dans K,

$$||\, u_{t_0,x_0}(t) - u_{t_0,x_0}(t_0)\,|| \leq M\,|t - t_0|\ . \quad (*)$$

Puisque W est ouvert, soit $\epsilon > 0$ tel que si $(r, z) \in K \times E$ vérifie $||\, z - u_{t_0,x_0}(r)\,|| \leq$
alors $(r, z) \in W$.

Soit $(t, x) \in W \cap (\overset{\circ}{K} \times E)$ tel que $||\, x - x_0\,|| \leq \frac{\epsilon}{2}\, e^{-k\,\ell(K)}$ et $|t - t_0| \leq \frac{\epsilon}{2M}\, e^{-k\,\ell(K)}$.

Notons J le plus grand intervalle ouvert de K contenant t sur lequel $u_{t,x}$ est défini
de graphe contenu dans W, et montrons que $b = \sup J$ est égal à $\sup K$, ce qui, avec
argument similaire pour la borne inférieure, conclut.

Par définition de J, l'application f est bornée (par M) sur le graphe de $u_{t,x|J}$, et to
valeur d'adhérence de $(\sigma, u_{t,x}(\sigma))$ quand $\sigma \in J$ tend vers b appartient à $\overline{W}$, donc à U. I
la proposition 7.25, la solution $u_{t,x}$ peut donc s'étendre à $[b, b + \eta\,[$ pour un $\eta > 0$ as
petit.

Pour tout $\sigma \in J$, par le lemme 7.22, puisque $u_{t,x}$ et u_{t_0,x_0} sont deux solutions (exact
de $y' = f(t, u)$, définies sur l'intervalle ouvert J contenant σ et t, de graphes conte
dans W (sur lequel f est k-lipschitzienne en la seconde variable), nous avons, par inéga
triangulaire et par (*),

$$\begin{aligned}
||\, u_{t,x}(\sigma) - u_{t_0,x_0}(\sigma)\,|| &\leq e^{k|\sigma-t|}\,||\, u_{t,x}(t) - u_{t_0,x_0}(t)\,|| \\
&= e^{k|\sigma-t|}\left(||\, x - x_0\, + u_{t_0,x_0}(t_0) - u_{t_0,x_0}(t)\,||\right) \\
&\leq e^{k\,\ell(K)}\left(||\, x - x_0\,|| + M\,|t_0 - t|\right) \leq \epsilon\ . \quad (**)
\end{aligned}$$

Par passage à la limite, $||\, u_{t,x}(b) - u_{t_0,x_0}(b)\,|| \leq \epsilon$, donc $(b, u_{t,x}(b)) \in W$, par définition
ϵ. Par conséquent, si η est assez petit, le graphe de l'application continue $u_{t,x}$ reste d
W sur $[b, b+\eta[$, ce qui contredit la maximalité de J si $b < \sup K$. Nous avons donc b
montré le premier point de l'assertion (3) du théorème 7.21 de Cauchy-Lipschitz.

Montrons maintenant que R est lipschitzienne sur W, ce qui implique le troisiè
point de l'assertion (3) du théorème 7.21. En effet, si s appartient à J (qui est éga
l'intérieur de K, donc est un voisinage de s_0), nous avons, par l'inégalité triangulaire, p
(**) et par le théorème des accroissements finis (f étant majorée par M sur W),

$$\begin{aligned}
||\, u_{t,x}(s) - u_{t_0,x_0}(s_0)\,|| &\leq ||\, u_{t,x}(s) - u_{t_0,x_0}(s)\,|| + ||\, u_{t_0,x_0}(s) - u_{t_0,x_0}(s_0)\,|| \\
&\leq e^{k\,\ell(K)}\big(||\, x - x_0\,|| + M\,|t_0 - t|\big) + M\,|s - s_0|\ ,
\end{aligned}$$

ce qui montre le résultat.

(**Propriétés de la résolvante dans le cas linéaire**) Étudions les propriétés pa
culières de l'application résolvante lorque l'équation différentielle est linéaire, c'est-à-d
si $U = I \times E$ et

$$f(t, x) = A(t) \cdot x + b(t)\ ,$$

où I est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, et où $A : I \times \Lambda \to \mathscr{L}(E, E)$ et $b : I \times \Lambda \to E$ s
deux applications continues.

Proposition 7.28 *Notons $R : I \times I \times E \to E$ l'application résolvante de l'équation différentielle linéaire (sans second membre) $y' = A(t) \cdot y$, qui est l'application qui à (s,t,x) associe la valeur en s de la solution maximale de cette équation différentielle valant x à l'instant t. Pour tous s,t, notons $R_{s,t} : E \to E$ l'application définie par $x \mapsto R(s,t,x)$.*

- *Pour tous $r,s,t \in I$, nous avons $R_{s,t} \in \mathscr{GL}(E)$,*

$$R_{r,t} = R_{r,s} \circ R_{s,t} \quad \text{et} \quad R_{t,t} = \mathrm{id}_E \ ,$$

donc en particulier

$$R_{s,t}^{-1} = R_{t,s} \ ,$$

et l'application de I dans l'espace de Banach $\mathscr{L}(E,E)$ définie par $s \mapsto R_{s,t}$ est l'unique solution définie sur I de l'équation différentielle

$$\frac{dY}{ds} = A(s) \circ Y$$

valant l'identité de E à l'instant t.

- *(***Méthode de la variation de la constante***) L'application résolvante de l'équation linéaire (avec second membre) $y' - A(t) \cdot x = b(t)$ est l'application R_b de $I \times I \times E$ définie par*

$$(s,t,x) \mapsto R_b(s,t,x) = R(s,t,x) + \int_t^s R(s,\theta,b(\theta))\ d\theta \ .$$

Par le premier point de cette proposition, la solution maximale (c'est-à-dire définie sur I) de l'équation différentielle linéaire sans second membre $y' - A(t) \cdot y = 0$ valant x_0 à l'instant t_0 s'écrit donc $t \mapsto R_{t,t_0} \cdot x_0$, où $R_{t,t_0} \in \mathscr{GL}(E)$. Un moyen pratique pour trouver les solutions de l'équation différentielle linéaire avec second membre $y' - A(t) \cdot y = b(t)$ consiste à les chercher sous la forme $y(t) = R_{t,t_0} \cdot z(t)$. En dérivant cette inégalité, on obtient que la fonction $t \mapsto z(t)$ vérifie alors $R_{t,t_0} \cdot z'(t) = b(t)$, c'est-à-dire $z'(t) = R_{t_0,t} \cdot b(t)$, donc z s'obtient par un calcul de primitive.

Preuve. Le fait que l'application résolvante d'une équation différentielle linéaire, qu'il y ait un second membre ou pas, soit bien définie sur $\mathscr{D} = I \times I \times E$ découle de la proposition 7.26 : pour tout $(t,x) \in I \times E$, nous avons $I_{t,x} = I$. En particulier, pour tous $s,t \in I$, nous avons $U_{s,t} = E$.

Sous les hypothèses du premier point, l'application $R_{s,t} : E \to E$ est linéaire (car $s \mapsto \lambda R_{s,t}(x) + \mu R_{s,t}(y)$ est une solution de l'équation différentielle $z' = A(t) \cdot z$, définie sur I, valant $\lambda x + \mu y$ à l'instant t, donc elle coïncide avec $s \mapsto R_{s,t}(\lambda x + \mu y)$ par unicité). Par linéarité de l'évaluation en un point, pour tout x dans E,

$$\frac{d\,R_{s,t}}{ds}(x) = \frac{d\,R_{s,t}(x)}{ds} = A(s) \cdot (R_{s,t}(x)) = \big(A(s) \circ R_{s,t}\big)(x) \ .$$

Les affirmations du premier point, et en particulier le fait que $R_{s,t} \in \mathscr{GL}(E)$, découlent alors des propriétés de l'application résolvante dans le cas général.

Enfin, il est immédiat de vérifier que $R_b(t,t,x) = x$ et que

$$\begin{aligned}\frac{d\,R_b(s,t,x)}{ds} &= \frac{d\,R(s,t,x)}{ds} + R(s,s,b(s)) + \int_t^s \frac{d\,R(s,\theta,b(\theta))}{ds}\ d\theta \\ &= A(s) \cdot R(s,t,x) + b(s) + \int_t^s A(s) \cdot R(s,\theta,b(\theta))\ d\theta \\ &= A(s) \cdot R_b(s,t,x) + b(s) \ ,\end{aligned}$$

ce qui montre la dernière assertion.

(**Dépendance continue des paramètres**) Montrons le second point de l'assert
(4) du théorème 7.21. Sous ses hypothèses, considérons le système différentiel

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = g(t,x,y) \\ \frac{dy}{dt} = 0 \end{cases}$$

et les conditions initiales $x(t_0) = x_0, y(t_0) = \lambda$. Soit E_* l'espace de Banach produit $E \times$
de sorte que V est un ouvert de $\mathbb{R} \times E_*$. Soit $g_* : V \to E_*$ l'application définie p
$g_*(t,x,y) = (g(t,x,y),0)$, qui est continue, semi-lipschitzienne. Notons pr_1 la project
sur le premier facteur de E_* dans E. Alors l'application résolvante S de l'équation d
férentielle à paramètre $z' = g(t,z,\lambda)$ est égale à $\mathrm{pr}_1 \circ R_{g_*}$, où R_{g_*} est la résolvante
l'équation différentielle (sans paramètre) associée à g_*, c'est-à-dire du système différent
ci-dessus.

La continuité de S, ainsi que l'ouverture de son domaine de définition et son caract
localement lipschitzien, découlent donc immédiatement de celles de R_{g_*} que nous avo
démontrées précédemment.

De la même manière, si la propriété de régularité C^k des équations différentiel
(sans paramètre) est vérifiée, alors il en est de même de la propriété de régularité
des équations différentielles à paramètre.

En particulier, le dernier point de l'assertion (4) du théorème 7.21 découle de l'ava
dernier point de l'assertion (3) de ce théorème.

Remarque. Notons que ceci démontre de nouveau la proposition 7.27, dans le cas parti
lier où Λ est (un ouvert d')un espace de Banach, et avec des hypothèses un peu plus fo
sur g (semi-lipschitzienne, plutôt que semi-lipschitzienne à paramètre, comme explic
juste après l'énoncé du théorème 7.21).

(**Dépendance régulière des conditions initiales et des paramètres**) Étudi
maintenant simultanément les propriétés de régularité de l'application résolvante et
régularité des solutions en les paramètres, sous des hypothèses de régularité de f. L
notations $E, U, f, R, \mathscr{D}$ sont celles de l'assertion (3) du théorème 7.21).

Lemme 7.29 *Si $\partial_2 f$ existe et est continue sur U, alors $\partial_1 R$, $\partial_2 R$, $\partial_3 R$ existent et ve
fient, pour tout $(s,t,x) \in \mathscr{D}$,*

(i) la dérivée $\partial_1 R_{(s,t,x)}$ de l'application $\sigma \mapsto R(\sigma,t,x)$ en $\sigma = s$ vaut

$$\partial_1 R_{(s,t,x)} = f(s, R(s,t,x)) \ ;$$

*(ii) la différentielle $\partial_3 R_{(s,t,x)}$ est la valeur en $\sigma = s$ de l'unique solution maximale σ
$y(\sigma)$ de l'équation différentielle linéaire à paramètres (t,x)*

$$\frac{dy}{d\sigma} = \partial_2 f_{(\sigma, R(\sigma,t,x))} \circ y$$

de condition initiale $y(t) = \mathrm{id}_E$;

(iii) la dérivée $\partial_2 R_{(s,t,x)}$ de l'application $\tau \mapsto R(s,\tau,x)$ en $\tau = t$ vaut

$$\partial_2 R_{(s,t,x)} = \partial_3 R_{(s,t,x)} \cdot f(t,x) \ .$$

Notons que l'application qui à σ associe la composition par $\partial_2 f_{(t,R(\sigma,t,x))}$ est bien une application continue d'un intervalle ouvert contenant t et s à valeurs dans l'espace de Banach $\mathscr{L}(\mathscr{L}(E,E),\mathscr{L}(E,E))$, et donc, par la proposition 7.26, la solution $\sigma \mapsto y(\sigma)$ définie dans (ii) est bien définie en $\sigma = s$ pour toutes les valeurs des paramètres (t,x) telles que $(s,t,x) \in \mathscr{D}$, et elle dépend continuement des paramètres et des conditions initiales par le premier point de l'assertion (4) du théorème 7.21), démontré précédemment.

En particulier, il découle des assertions (i) et (ii) que $\partial_1 R$ et $\partial_3 R$ sont continues sur $\mathscr{D}$, donc (voir la proposition 7.6 (2)) R est de classe C^1 en le couple des première et troisième variables, et nous nous servirons de cela pour montrer l'assertion (iii).

De même, il découle alors des trois assertions (i), (ii) et (iii) que $\partial_1 R, \partial_2 R, \partial_3 R$ existent et sont continues sur $\mathscr{D}$, donc R est de classe C^1 sur $\mathscr{D}$.

Démonstration du lemme 7.29.

(i) Comme $R(s,t,x) = u_{t,x}(s)$, l'assertion (i) découle simplement du fait que $u_{t,x}$ vérifie l'équation différentielle $\frac{dy}{ds} = f(s, y(s))$ définie par f.

(ii) Soit $(s,t,x) \in \mathscr{D}$ fixé. Pour tout $\sigma \in I_{t,x}$ (donc $(\sigma,t,x) \in \mathscr{D}$), notons

$$A(\sigma,t,x) = \partial_2 f_{(\sigma,R(\sigma,t,x))} \ ,$$

de sorte que $A : \mathscr{D} \to \mathscr{L}(E,E)$ définie par $(\sigma,t,x) \mapsto A(\sigma,t,x)$ soit continue. Notons $\sigma \mapsto z(\sigma,t,x)$ l'application de $I_{t,x}$ dans $\mathscr{L}(E,E)$ qui est la solution de l'équation différentielle linéaire à paramètres (t,x)

$$\frac{d\,y}{d\sigma} = A(\sigma,t,x) \circ y \ ,$$

valant id_E en $\sigma = t$, qui est bien définie sur tout $I_{t,x}$ par la proposition 7.26. Pour tout $h \in E$ suffisamment proche de 0, posons

$$w(\sigma) = R(\sigma,t,x+h) - R(\sigma,t,x) - z(\sigma,t,x) \cdot h \ ,$$

et montrons que $w(t) = o(h)$ quand h tend vers 0, ce qui implique l'assertion (ii).

Par l'assertion (i) et par définition de $z(\sigma,t,x)$, nous avons

$$w'(\sigma) = f(\sigma, R(\sigma,t,x+h)) - f(\sigma, R(\sigma,t,x)) - A(\sigma,t,x) \circ z(\sigma,t,x) \cdot h \ .$$

Donc $w'(\sigma) - A(\sigma,t,x) \cdot w(\sigma)$ est égal à

$$f(\sigma, R(\sigma,t,x+h)) - f(\sigma, R(\sigma,t,x)) - \partial_2 f_{(\sigma,R(\sigma,t,x))} \cdot \big(R(\sigma,t,x+h) - R(\sigma,t,x)\big) \ .$$

Posons $X_0 = R(\sigma,t,x)$. L'application

$$\varphi : X \mapsto f(\sigma, X) - f(\sigma, X_0) - \partial_2 f_{(\sigma,X_0)} \cdot (X - X_0)$$

est différentiable au voisinage de X_0, nulle en X_0, de différentielle au point X égale à $\partial_2 f_{(\sigma,X)} - \partial_2 f_{(\sigma,X_0)}$. Donc, par le théorème 7.2 des accroissements finis,

$$||\,\varphi(X)\,|| \leq \sup_{0 \leq \theta \leq 1} ||\,\partial_2 f_{(\sigma,\theta X+(1-\theta)X_0)} - \partial_2 f_{(\sigma,X_0)}\,||\;||\,X - X_0\,|| \ .$$

Soit $K \subset I_{t,x}$ un intervalle compact, contenant t et s dans son intérieur. Posons $X = R(\sigma,t,x+h)$, qui dépend de h. Par compacité de $K \times [0,1]$ et par continuité de l'application

$(\sigma,\theta,h) \mapsto \partial_2 f_{(\sigma,\theta X+(1-\theta)X_0)}$ de $K \times [0,1] \times W$ dans $\mathscr{L}(E,E)$, où W est un voisina suffisamment petit de 0 dans E (voir aussi la proposition 5.5), l'application

$$h \mapsto \partial_2 f_{(\sigma,\theta X+(1-\theta)X_0)} - \partial_2 f_{(\sigma,X_0)}$$

converge vers 0 quand h tend vers 0 uniformément en $(\sigma,\theta) \in K \times [0,1]$. Donc il exi $\eta > 0$ tel que si $||\,h\,|| < \eta$, alors

$$\forall \sigma \in K, \quad ||\,w'(\sigma) - A(\sigma,t,x) \cdot w(\sigma)\,|| \leq \epsilon\,||\,R(\sigma,t,x+h) - R(\sigma,t,x)\,|| \ .$$

Par compacité de K, et puisque R est localement lipschitzienne, il existe $M > 0$ tel q si η est suffisamment petit, si $\sigma \in K$ et $||h|| < \eta$, alors

$$||\,R(\sigma,t,x+h) - R(\sigma,t,x)\,|| \leq M\,||\,h\,|| \ .$$

Donc l'application $\sigma \mapsto w(\sigma)$ est, sur l'intérieur de K, une solution $(\epsilon M\,||\,h\,||)$-approc de l'équation différentielle linéaire

$$\frac{d\,y}{d\sigma} = A(\sigma,t,x) \cdot y \ .$$

De plus, $w(t) = 0$ et l'application continue $\sigma \mapsto A(\sigma,t,x)$ est bornée par $k > 0$ l'intervalle compact K. Par le lemme 7.22, l'application nulle étant une solution (exac de cette équation différentielle linéaire, nous avons

$$\forall \sigma \in K, \quad ||\,w(\sigma) - 0\,|| \leq ||\,w(t) - 0\,||\,e^{k|\sigma-t|} + \epsilon\,M\,||\,h\,||\,\frac{e^{k|\sigma-t|-1}}{k} = \epsilon\,M\,||\,h\,||\,\frac{e^{k|\sigma-t|-1}}{k}$$

En particulier, $w(s) = o(h)$, ce qu'il fallait démontrer.

(iii) Fixons $(s,t,x) \in \mathscr{D}$. Pour tout τ suffisamment proche de t, nous avons

$$R(\tau,s,R(s,\tau,x)) = R_{\tau,s} \circ R_{s,\tau}(x) = x \ ,$$

donc $y(\tau) = R(s,\tau,x) \in U_{\tau,s}$ est l'unique solution de l'équation $R(\tau,s,y(\tau)) - x =$ pour τ proche de t. Par les assertions (i) et (ii) (et le commentaire suivant les énon de (i), (ii) et (iii)), les applications $x \mapsto R_{t,s}(x) = R(t,s,x)$, $x \mapsto R_{s,t}(x) = R(s,t,$ et $(\tau,y) \mapsto R(\tau,s,y) - x$ sont de classe C^1. Par le quatrième point (déjà démontré) l'assertion (3) du théorème 7.21, l'application $R_{t,s} = R_{s,t}^{-1} : U_{t,s} \to U_{s,t}$ est donc un C difféomorphisme. De plus, $d(R_{t,s})_{y(t)} = \partial_3 R_{(t,s,y(t))}$, qui est donc inversible. Son inver puisque $R_{t,s}(y(t)) = x$ (i.e. $y(t) = {R_{t,s}}^{-1}(x)$), est égal à

$$\big(d(R_{t,s})_{y(t)}\big)^{-1} = -d(R_{s,t})_x = -\partial_3 R_{(t,s,x)} \ .$$

Par le théorème 7.16 des fonctions implicites, $y(\tau)$ est donc différentiable en $\tau = t$, et différentielle en $\tau = t$ (qui est $\partial_2 R_{(s,t,x)}$) vaut

$$-(\partial_3 R_{(t,s,y(t))})^{-1} \cdot \partial_1 R_{(t,s,y(t))} = \partial_3 R_{(t,s,x)} \cdot f(t, R(t,s,y(t))) = \partial_3 R_{(t,s,x)} \cdot f(t,x) \ .$$

Le résultat en découle.

Pour conclure la preuve de la dépendance régulière des conditions initiales et paramètres, montrons l'avant dernier point de l'assertion (3) du théorème 7.21 ainsi le dernier point de l'assertion (4). Le dernier point de l'assertion (3) découle de l'avant dernier immédiatement, par le quatrième point de cette assertion.

Pour cela, montrons par récurrence sur $k \geq 0$ que les deux assertions suivantes sont vraies, où f, R, g, S sont comme dans l'énoncé du théorème 7.21 :

(a) si f et $\partial_2 f$ sont de classe C^k, alors R est de classe C^{k+1} ;
(b) si g, $\partial_2 f$ et $\partial_3 f$ sont de classe C^k, alors S est de classe C^{k+1} ;

Nous venons de voir par le lemme 7.29 que a est vrai au rang $k = 0$.

La démonstration que l'assertion (a) au rang k implique l'assertion (b) au rang k est similaire à celle pour la dépendance continue des paramètres (en considérant le système différentiel

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = g(t, x, y) \\ \frac{dy}{dt} = 0 \end{cases}$$

et les conditions initiales $x(t_0) = x_0, y(t_0) = \lambda$: ce système étant de classe C^k, par (a) au rang k, sa résolvante est de classe C^{k+1}, et puisque S est une projection de cette résolvante, ceci montre (b) au rang k).

Montrons que les assertions (a) et (b) au rang k implique l'assertion (a) au rang $k+1$. Ceci vient du fait que par (i), (ii) et (iii) dans le lemme 7.29, les dérivées partielles $\partial_1 R, \partial_2 R, \partial_3 R$ sont de classe C^{k+1} car R, f et $\partial_2 f$ le sont, et en appliquant (le cas linéaire de) l'assertion (b) au rang k.

Ceci termine la preuve du théorème 7.21. □

Des équations différentielles d'ordre p à celles du premier ordre.

Montrons dans ce sous-paragraphe comment ramener la résolution des équations différentielles d'ordre p à celle des équations différentielles du premier ordre du type considéré ci-dessus.

Soient E et F deux espaces de Banach réels, p un élément de $\mathbb{N} - \{0\}$, W un ouvert de $\mathbb{R} \times E^{p+1}$, et $g : W \to F$ une application.

Une application p fois différentiable u d'un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ dans E est une *solution de l'équation différentielle d'ordre* p

$$g(t, y, y', \dots, y^{(p)}) = 0$$

définie par g si pour tout t dans I,

$$\big(t, u(t), u'(t), \dots, u^{(p)}(t)\big) \in W \quad \text{et} \quad g\big(t, u(t), u'(t), \dots, u^{(p)}(t)\big) = 0 \ .$$

Une telle équation différentielle est dite *résolue* si elle est de la forme

$$y^{(p)} = f(t, y, y', \dots, y^{(p-1)}) \ ,$$

i.e. s'il existe un ouvert U de $\mathbb{R} \times E^p$ et une application $f : U \to E$ tels que $W = U \times E$, $F = E$, et $g(t, y_0, y_1, \dots, y_p) = y_p - f(t, y_0, y_1, \dots, y_{p-1})$ pour tous $(t, y_0, y_1, \dots, y_p) \in W$.

Si I est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et G un espace de Banach réel, notons $\mathscr{D}^p(I, G)$ l'espace vectoriel réel des applications p fois dérivables de I dans G.

Notons $W_* = \big\{(t, x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_p) \in \mathbb{R} \times E^p \times E^p \ : \ (t, x_1, \dots, x_p, y_p) \in W\big\}$, qui est un ouvert de $\mathbb{R} \times E^p \times E^p$, et $g_* : W_* \to E^{p-1} \times F$ l'application définie par

$$(t, x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_p) \mapsto (x_2 - y_1, \dots, x_p - y_{p-1}, g(t, x_1, \dots, x_p, y_p)) \ .$$

L'application de $\mathscr{D}^p(I, E)$ dans $\mathscr{D}^1(I, E^p)$ définie par

$$u \mapsto \{v : t \mapsto \big(u(t), u'(t), \dots, u^{(p-1)}(t)\big)\}$$

est une application linéaire injective, et u est une solution de l'équation différenti $g(t, u, u', \dots, u^{(p)}) = 0$ d'ordre p si et seulement si son image v est une solution de l'éq tion différentielle du premier ordre $g_*(t, v, v') = 0$ (qui est résolue si $g(t, u, u', \dots, u^{(p)})$ = l'est). Ainsi, du point de vue théorique au moins, la résolution des équations différentiel d'ordre p se ramène à celle des équations différentielles du premier ordre.

Supposons donc que $p = 1$, et montrons comment, sous certaines hypothèses, on p ramener la résolution d'une équation différentielle du premier ordre à celle d'une équat différentielle résolue du premier ordre.

Soit $(t_0, a_0, a_1) \in W$ tel que $g(t_0, a_0, a_1) = 0$. Supposons que g soit de classe C^1 un voisinage ouvert de (t_0, a_0, a_1) dans W, et que $\partial_3 g(t_0, a_0, a_1) : E \to F$ soit inversib Il existe alors (par le théorème 7.16 des fonctions implicites) un voisinage ouvert U (t_0, a_0) dans $\mathbb{R} \times E$, un voisinage ouvert V de a_1, et une application continue $f : U \to$ tels que $U \times V \subset W$ et

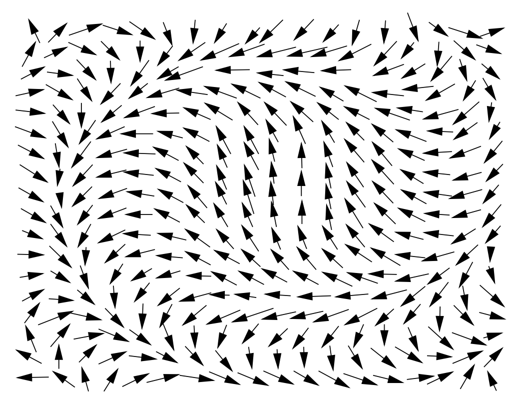
$$\forall (t, x_0, x_1) \in U \times V, \quad g(t, x_0, x_1) = 0 \Leftrightarrow f(t, x_0) = x_1$$

Si $u : I \to E$ est une solution de classe C^1 de l'équation différentielle $g(t, u, u') = 0$ t que $u(t_0) = a_0$ et $u'(t_0) = a_1$, alors il existe J un intervalle ouvert contenant t_0 tel si $t \in J$, alors $(t, u(t), u'(t)) \in U \times V$, et donc $u : J \to E$ est une solution de l'équat différentielle résolue du premier ordre

$$y' = f(t, y) \ .$$

7.6 Équations différentielles autonomes et champs de vecteurs

Une équation différentielle est dite autonome si la fonction qui la définit ne dépend p du temps. Plus précisément, soient E un espace de Banach réel, U un ouvert de $\mathbb{R} \times$ et $f : U \to E$ une application continue. L'équation différentielle $y' = f(t, y)$ est *autonome* s'il existe un ouvert U' de E et une application continue $X' : U' \to E$ telle $U = \mathbb{R} \times U'$ et $f(t, x) = X(x)$ pour tout x dans U'. La terminologie des champs de vecte est alors utilisée, en particulier par son extension possible aux variétés différentielles (le cours de Géométrie différentielle du second semestre).



Soit U un ouvert d'un espace de Banach réel E.

Une application X de U dans E est appelée un *champ de vecteurs sur* U. Une *courbe intégrale* (ou *trajectoire*) du champ de vecteurs X est une solution de l'équation différentielle $y' = X(y)$, i.e. une application dérivable u d'un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans U, telle que $u'(t) = X(u(t))$ pour tout t dans I. Ainsi, le vecteur $X(u(t))$ est le vecteur tangent à la courbe intégrale en), à tout instant t où elle est définie. Le *support* de X est, bien entendu, l'adhérence de l'ensemble des x dans U tels que $X(u) \neq 0$: c'est le plus petit fermé en dehors duquel X est nul.

Une courbe intégrale $u : I \to U$ du champ de vecteurs X est dite *maximale* si u est une solution maximale de l'équation différentielle $y' = X(y)$, i.e. s'il n'existe pas de courbe intégrale $v : J \to U$ du champ de vecteurs X, où J est un intervalle ouvert contenant strictement I, telle que $v_{|I} = u$. Par exemple, les courbes intégrales maximales du champ de vecteurs nul sur U sont les applications constantes de $\mathbb{R}$ dans U.

Le théorème 7.21 dans le cas autonome s'écrit de la manière suivante.

Théorème 7.30 *Soient E un espace de Banach réel, U un ouvert de E, et $X : U \to E$ un champs de vecteurs localement lipschitzien sur U.*

*(1) (***Existence et unicité des solutions***) Pour tout x dans U, il existe une et une seule courbe intégrale maximale $u_x : I_x \to U$ passant par x à l'instant $t = 0$.*

*(2) (***Régularité des solutions***) S'il existe $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ tel que X soit de classe C^k, alors toute courbe intégrale de X est de classe C^{k+1}.*

S'il existe $r \in \mathbb{N} - \{0\}$ tel que $E = \mathbb{R}^r$, et si X est analytique réel sur U, alors toute courbe intégrale de X est analytique réelle.

*(3) (***Dépendance des conditions initiales***) Soit $\mathscr{D} = \{(t,x) \in \mathbb{R} \times E \ : \ t \in I_x\}$ et, pour tout $t \in \mathbb{R}$, soit $U_t = \{x \in E \ : \ t \in I_x\}$. Soient $\phi^t : U_t \to U$ l'application définie par $x \mapsto u_x(t)$, et $\phi : \mathscr{D} \to E$ celle définie par $(t,x) \mapsto \phi^t(x) = u_x(t)$.*

- *Les ensembles $\mathscr{D}$ et U_t sont ouverts.*
- *Si $x \in U_t \cap U_s$, alors $x \in U_{t+s}$ et*

$$\phi^t(\phi^s(x)) = \phi^s(\phi^t(x)) = \phi^{t+s}(x) \ .$$

- *Pour tout $(t,x) \in \mathscr{D}$, il existe un voisinage ouvert V de (t,x) dans $\mathscr{D}$ tel que la restriction de ϕ à V soit lipschitzienne. En particulier, ϕ est continue.*
- *L'application $\phi^t : U_t \to U_{-t}$ est un homéomorphisme, d'inverse $(\phi^t)^{-1} = \phi^{-t}$.*
- *Pour tout $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, si X est de classe C^k, alors ϕ est de classe C^k, et $\phi^t : U_t \to U_{-t}$ est un C^k-difféomorphisme.*
- *Si X est C^1, alors le flot local de X préserve le champ de vecteurs X, i.e. pour tout t dans I_x,*

$$d(\phi^t)_x(X(x)) = X(\phi^t(x)) \ .$$

L'application $\phi : \mathscr{D} \to E$ est appelée le *flot local* du champ de vecteurs X.

Preuve. Pour tout $t_0 \in \mathbb{R}$ et $x_0 \in U$, notons u_{t_0,x_0} l'unique solution maximale de l'équation différentielle $y' = X(y)$ passant par x_0 à l'instant t_0. Puisque X ne dépend pas du temps, et par unicité, nous avons $I_{t_0,x_0} = t_0 + I_{0,x_0}$ et

$$\forall \ s \in I_{t_0,x_0}, \quad u_{t_0,x_0}(s) = u_{0,x_0}(s - t_0) \ .$$

En posant $I_{x_0} = I_{0,x_0}$ et $u_{x_0} = u_{0,x_0}$, les assertions (1) et (2) découlent des assertio
correspondantes du théorème 7.21.

En particulier, $s \in I_{t,x}$ si et seulement si $s - t \in I_x$. L'application résolvante R
l'équation différentielle $y' = X(y)$ a donc pour domaine de définition $\{(s,t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$
$E \ : \ s - t \in I_x\}$. Par définition de ϕ, nous avons

$$R(s,t,x) = \phi^{s-t}(x) \ ,$$

et $R_{s,t} = \phi^{s-t} : U_{s,t} = \{x \in E \ : \ s - t \in I_x\} = U_{s-t} \to E$. En remarquant que $\phi^t = R_{t,0}$
$\phi(t,x) = R(t,0,x)$, l'assertion (3) découle donc de l'assertion correspondante du théorè
7.21, sauf le dernier point, qui découle du théorème de dérivation des fonctions composé
et de la commutation de ϕ^t et ϕ^s (dès que définis) :

$$d(\phi^t)_x(X(x)) = \frac{d}{ds}_{|s=0}\phi^t(\phi^s(x)) = \frac{d}{ds}_{|s=0}\phi^s(\phi^t(x)) = X(\phi^t(x)) \ .$$

Un champ de vecteurs sur U est dit *complet* si toutes ses courbes intégrales sont défin
sur $\mathbb{R}$, ou, de manière équivalente si le domaine de définition de son flot local ϕ est $\mathbb{R} \times$
On appelle ϕ (ou la famille $(\phi^t)_{t\in\mathbb{R}}$) le *flot* de X. Le théorème 7.30 s'écrit alors de
manière suivante.

Théorème 7.31 *Soient E un espace de Banach réel, U un ouvert de E, et $X : U \to$
un champ de vecteurs localement lipschitzien complet. Il existe une unique applicat
$\phi : \mathbb{R} \times U \to U$ telle que, pour tout x dans U, l'application de $\mathbb{R}$ dans U définie
$t \mapsto \phi^t(x) = \phi(t,x)$ soit la courbe intégrale maximale de X passant par x à l'inst
$t = 0$.*

De plus, la famille $(\phi_t)_{t\in\mathbb{R}}$ est un groupe à un paramètre localement lipschitzien d'
méomorphismes, *i.e. ϕ est localement lipschitzien et les applications $\phi^t : U \to U$ sont
homéomorphismes, d'inverses $(\phi^t)^{-1} = \phi^{-t}$, tels que $\phi^0 = \mathrm{id}_U$ et*

$$\forall \ s,t \in \mathbb{R}, \quad \phi^t \circ \phi^s = \phi^s \circ \phi^t = \phi^{t+s} \ .$$

Pour tout $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, si X est de classe C^k, alors $(\phi_t)_{t\in\mathbb{R}}$ est un groupe à un paramè
C^k de C^k-difféomorphismes, *i.e. ϕ est de classe C^k, ϕ^t est C^k-difféomorphisme pour t
$t \in \mathbb{R}$ et $\phi^s \circ \phi^t = \phi^{t+s}$ pour tous $s,t \in \mathbb{R}$.*

Proposition 7.32 *Soit X un champ de vecteurs localement lipschitzien sur un ouver
d'un espace de Banach réel.*

*(1) Supposons qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que pour tout x dans U, il existe un voisin
ouvert U_x de x dans U tel que le flot local de X soit défini sur $]-2\epsilon, 2\epsilon[\, \times U_x$. Alors
champ de vecteurs X est complet.*

(2) Si X est à support compact dans U, alors X est complet.

Preuve. (1) Posons $\psi_t = \phi^{t-k\epsilon} \circ (\phi^\epsilon)^{\circ k}$ où k est la partie entière de t/ϵ et $(\phi^\epsilon)^{\circ k}$ est
composée k-ème de ϕ^ϵ. En discutant suivant que s soit un multiple de ϵ ou pas, il
immédiat que $\frac{d\psi_t(x)}{dt}_{|t=s} = X(\psi_s(x))$ et $\psi_0(x) = x$, pour tout s dans $\mathbb{R}$ et x dans U.
unicité, ψ est le flot local de X, qui est donc défini sur $\mathbb{R} \times M$.

(2) Notons K le support de X. Pour tout x dans K, il existe un voisinage ouvert
de x et $\epsilon_x > 0$ tel que le flot local de X soit défini sur $]-2\epsilon_x, 2\epsilon_x[\, \times U_x$. Par compaci

il existe $x_1, \ldots, x_k$ dans K tels que $K = U_{x_1} \cup \cdots \cup U_{x_k}$. Soit $\epsilon = \min_{1 \leq i \leq k} \epsilon_{x_i}$. Alors l'hypothèse de (1) est vérifiée, car sur l'ouvert $U - K$, le champ de vecteurs X est nul, donc complet. $\square$

Fixons $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty, \omega\}$. Si $k = \infty, \omega$, notons $k - 1 = k$, et on étend l'ordre de $\mathbb{N}$ par $\omega \geq \infty \geq n$ pour tout n dans $\mathbb{N}$. L'ensemble $\Xi_k(U) = \mathrm{C}^k(U, E)$ (aussi noté $\Xi(U)$ si $k = \infty$) des champs de vecteurs de classe C^k sur U, muni de l'addition point par point, et de la multiplication point par point par un réel, est un espace vectoriel réel. Muni de l'addition point par point, et de la multiplication point par point par un élément de l'anneau $\mathrm{C}^k(U, \mathbb{R})$, l'ensemble $\Xi_k(U)$ est un $\mathrm{C}^k(U, \mathbb{R})$-module. Si E est de dimension finie, et de base $(e_1, \ldots, e_n)$, alors $\Xi_k(U)$ est un $\mathrm{C}^k(U, \mathbb{R})$-module libre, de base les champs de vecteurs constants valant $e_1, \ldots, e_n$.

Si E, F sont des espaces de Banach réels, et U, V des ouverts de respectivement E et F, une application $f : U \to V$ de classe C^k est dite *étale* si $k \geq 1$ et si pour tout x dans U, l'application $df_x : E \to F$ est une bijection. Le théorème 7.13 d'inversion locale dit que les applications de classe C^k qui sont étales sont exactement les applications de classe C^k qui sont des C^k-difféomorphismes locaux.

Si $k \geq 1$, si $f : U \to V$ est une application C^k étale, et si $X \in \Xi_{k-1}(V)$, alors le champ de vecteurs f^*X sur V défini par

$$\forall\, y \in V, \quad f^*X(y) = (df_y)^{-1}\Big(X\big(f(y)\big)\Big) ,$$

qui est de classe C^{k-1} par l'exercice E.112 (2) (i), est appelé *l'image réciproque* de X par f. De plus, l'application $f^* : X \mapsto f^*X$ de $\Xi_k(V)$ dans $\Xi_{k-1}(U)$ est clairement linéaire.

Le point (3) de l'exercice E.112 montre les résultats suivants. Le premier est un résultat de forme normale d'un champ de vecteurs au voisinage d'un point non singulier : modulo changement de coordonnées non linéaire local, on peut se ramener à un champ de vecteurs constant.

Théorème 7.33 (Théorème du redressement) *Soient $k \in (\mathbb{N} - \{0\}) \cup \{\infty\}$, X un champ de vecteurs de classe C^k sur un ouvert U d'un espace de Banach E, et $a \in U$ tel que $X(a) \neq 0$. Alors il existe un C^k-difféomorphisme $f : V \to V'$, où V, V' sont des voisinages ouverts de a, tel que $f(a) = a$ et f^*X soit le champ de vecteurs constant $X(a)$ sur V.* $\square$

Théorème 7.34 (Théorème des boîtes à flot) *Soient $k \in (\mathbb{N} - \{0\}) \cup \{\infty\}$, X un champ de vecteurs C^k sur un ouvert U d'un espace vectoriel normé de dimension finie E, a un point de U tel que $X(a) \neq 0$, H un hyperplan supplémentaire à $\mathbb{R}X(a)$, et $S : W \to E$, où W est un voisinage ouvert de 0 dans H, une application de classe C^k, qui est une immersion en 0 telle que $S(0) = a$ et $X(a)$ n'appartienne pas à l'image de dS_0. Alors il existe un intervalle ouvert I contenant 0, une boule ouverte V de centre 0 dans H, un voisinage ouvert V' de 0 dans E, et un C^∞-difféomorphisme $\Psi : I \times V \to V'$ tel que Ψ^*X soit le champ de vecteur constant valant $(1, 0)$, et que $\Psi\big((\{0\} \times H) \cap V\big) = S(W) \cap V'$.* $\square$

L'image $\Psi(I \times V)$ de Ψ s'appelle une *boîte à flot* de X au voisinage de a, et $S(W) \cap V' = \Psi\big((\{0\} \times H) \cap V\big)$ une *transversale locale* de X en a dans cette boîte à flot.

Un point $a \in U$ tel que $X(a) = 0$ est appelé un *point d'équilibre* de X (ou un équilibre tout court, ou aussi un zéro du champ de vecteur X). Un point d'équilibre a est dit *stable*

si tout voisinage V de a contient un voisinage W de a tel que pour tout x dans W pour tout $t \in [0, +\infty[$, le point $\varphi^t(x)$ existe et appartient V. Un point d'équilibre a dit *attractif* s'il existe un voisinage W de a dans E tel que pour tout x dans V,

$$\lim_{t \to +\infty} \varphi^t(x) = a .$$

Une application L de classe C^1, d'un voisinage ouvert V d'un point d'équilibr d'un champ de vecteurs X, à valeurs dans $\mathbb{R}$, telle que a soit un minimum strict L et $dL_x(X(x)) \leq 0$ pour tout x dans V (respectivement $dL_x(X(x)) < 0$ pour tou dans $V - \{a\}$) est appelée une *application de Lyapounov* (respectivement *application Lyapounov stricte*) pour le point d'équilibre a. Le résultat suivant (la régularité C^1 champ de vecteurs suffit) est démontré dans la partie (4) de l'exercice E.112

Théorème 7.35 (Théorème de Lyapounov) *Soit X un champ de vecteurs C^1 sur ouvert d'un espace de Banach. Si un point d'équilibre a de X admet une applicat de Lyapounov (respectivement une application de Lyapounov stricte), alors a est sta (respectivement attractif).*

7.7 Indications pour la résolution des exercices

Schème E.72

$$d^2(g \circ f)_a(h, k) = d^2g_{f(a)}\big(df_a(h), df_a(k)\big) + dg_{f(a)}\big(df^2_a(h, k)\big) .$$

8 Exercices de révision

8.1 Énoncés

Chapitre 1.

Exercice E.73 Soient X un ensemble infini et $x \in X$. Soit $\mathscr{O}$ l'ensemble des parties de X dont le complémentaire est soit fini, soit infini et contenant x.

(1) Montrer que $\mathscr{O}$ est une topologie séparée sur X (appelée la *topologie de Ford* sur X pour le point x).

(2) Si X est dénombrable, montrer que $\mathscr{O}$ est métrisable (on pourra montrer qu'il est homéomorphe à la partie $\{0\} \cup \{\frac{1}{n+1} \;:\; n \in \mathbb{N}\}$ de $\mathbb{R}$ munie de la topologie induite).

(3) Si X est non dénombrable, montrer que $\mathscr{O}$ n'est pas métrisable.

Exercice E.74 Trouver un espace topologique X et une partie A de X telle que les parties A, $\overline{A}$, $\mathring{A}$, $\mathring{\overline{A}}$, $\overline{\mathring{A}}$, $\overline{\mathring{\overline{A}}}$, $\mathring{\overline{\mathring{A}}}$ soient deux à deux distinctes. Peut-on faire mieux ?

Chapitre 2.

Exercice E.75 Soit $p \in [1, +\infty]$. Sur l'espace vectoriel normé $\ell^p(\mathbb{R})$ des suites de puissance p-ème finie si $p < +\infty$ ou des suites bornées si $p = +\infty$, comparer la topologie induite par la norme et la topologie définie par la famille de semi-normes $\big((x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto |x_m|\big)_{m\in\mathbb{N}}$.

Exercice E.76 Soient X un espace topologique, A et B deux fermés de X tels que $A \cup B$ et $A \cap B$ soient connexes. Montrer que A et B sont connexes. Le résultat reste-t-il vrai si A n'est pas supposé fermé ?

Exercice E.77

- Montrer qu'un espace topologique X est séparé si et seulement si la diagonale $\Delta = \{(x, y) \in X \times X \;:\; x = y\}$ est fermée dans l'espace produit $X \times X$.
- Montrer que si $f, g : X \to Y$ sont deux applications continues et si Y est séparé, alors $\{x \in X \;:\; f(x) = g(x)\}$ est fermé dans X.
- Montrer que si $f, g : X \to Y$ sont deux applications continues, si Y est séparé, et si f et g coïncident sur une partie dense, alors $f = g$.
- Montrer que si $f : X \to Y$ est une application continue et si Y est séparé, alors le graphe de f
$$G = \{(x, y) \in X \times Y \;:\; y = f(x)\}$$
est fermé dans l'espace produit $X \times Y$.

Exercice E.78 Soit G un sous-groupe (additif) de $\mathbb{R}$. On considère la relation d'équivalence $\sim$ sur $\mathbb{R}$ définie par $x \sim y$ si $x - y \in G$. Quelle est la topologie quotient sur $\mathbb{R}/\!\sim$?

Exercice E.79 Soit $(X_i)_{i\in I}$ une famille d'espaces topologiques. Pour tout i dans I, soit $\mathscr{R}_i$ une relation d'équivalence sur X_i. Sur l'espace topologique somme disjointe $X = \coprod_{i\in I} X_i$, on considère la relation $\mathscr{R}$ définie par $x \,\mathscr{R}\, y$ si et seulement s'il existe $i \in I$ tel que $x, y \in X_i$ et $x \,\mathscr{R}_i\, y$. Montrer que $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence sur X, et que l'espace topologique quotient $X/\mathscr{R}$ est homéomorphe à l'espace topologique somme disjointe $\coprod_{i\in I} X_i/\mathscr{R}_i$.

Exercice E.80 Soient CX_1, CX_2 deux copies du cône sur un espace topologique X, $i_1 : X \to CX_1$, $i_2 : X \to CX_2$ les injections canoniques (i.e. si $\pi_k : X \times [0, 1] \to CX_1$ est projection canonique, alors $i_k(x) = \pi_k(x, 0)$ pour tout $x \in X$ et $k = 1, 2$, voir l'exemple du paragraphe 2.6). Sur l'espace topologique somme disjointe $CX_1 \coprod CX_2$, considér la relation d'équivalence $\mathscr{R}$ engendrée par $i_1(x) \sim i_2(x)$ pour tout $x \in X$. Montrer q l'espace topologique quotient $(CX_1 \coprod CX_2)/\mathscr{R}$ est homéomorphe à la suspension SX X (voir l'exemple (2) du paragraphe 2.6).

Chapitre 3.

Exercice E.81 (1) On considère l'application $f :]0, 1] \to \mathbb{C}$ définie par
$$f(t) = (1 + t)\, e^{\frac{i\pi}{2} \sin \frac{1}{t}} .$$
Quelles sont les valeurs d'adhérences de $f(t)$ quand t tend vers 0 ?

(2) Montrer que $\mathbb{Z} + \sqrt{2}\,\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$. En déduire que $\mathbb{Z} + \sqrt{2}\,\mathbb{N}$ est dense da $\mathbb{R}$. On considère l'application $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ définie par
$$g(t) = \big(\sin u,\, \sin(\sqrt{2}u)\big) .$$
Quelles sont les valeurs d'adhérences de $g(t)$ quand t tend vers $+\infty$?

Exercice E.82 (Espace des suites à décroissance rapide) Soient F un espace de Bana réel ou complexe et E l'espace vectoriel réel ou complexe des suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs da F telles que, pour tout k dans $\mathbb{N}$,
$$||x||_k = \sup_{n\in\mathbb{N}} \;(n + 1)^k\, ||x_n|| \;< +\infty .$$

(1) Montrer que $||\cdot||_k$ est une norme sur E pour tout $k \in \mathbb{N}$. On munit E de topologie définie par la famille de semi-normes $(||\cdot||_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

(2) On considère l'application $\sigma : E \to E$ définie en posant, pour tout $x = (x_n)$ dans E, $\sigma(x) = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où $y_n = x_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que σ est continue. (appelle σ *l'application de décalage*.)

(3) Montrer que E est métrisable complet.

Exercice E.83 Soient X un espace métrique compact, et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans X te que $d(x_{n+1}, x_n)$ converge vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Montrer que l'ensemble des vale d'adhérence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est connexe.

Exercice E.84 Quels sont les espaces topologiques métrisables qui sont complets po toute distance induisant la topologie originelle ?

Chapitre 4.

Exercice E.85 Soient (X, d) un espace métrique et A une partie compacte de X. Mont que l'ensemble $\{V_\epsilon(A) \;:\; \epsilon > 0\}$, ainsi que $\{\overline{V}_\epsilon(A) \;:\; \epsilon > 0\}$, est un système fondamen de voisinages de A.

Exercice E.86 Pour tout n dans $\mathbb{N}$, soit $\mathscr{A}_n$ un ensemble d'indices, et soit $(X_{n,\alpha})_{n\in\mathbb{N},\alpha\in\mathscr{A}_n}$ une famille d'espaces topologiques. Pour tout n dans $\mathbb{N}\cup\{-1\}$ et $\alpha\in\mathscr{A}_n$, soit $Y_{n,\alpha}$ un fermé de $X_{n,\alpha}$, avec $Y_{-1,\alpha}=\emptyset$. Construisons par récurrence une suite d'espaces topologiques $(S_n)_{n\in\mathbb{N}\cup\{-1\}}$. Tout d'abord, $S_{-1}=\emptyset$. Soit $n\in\mathbb{N}$. Supposons S_{n-1} construit, et donnons-nous $f_{n,\alpha}:Y_{n,\alpha}\to S_{n-1}$ une application continue, de sorte que l'application somme disjointe $f_n:\coprod_{\alpha\in\mathscr{A}_n}Y_{n,\alpha}\to S_{n-1}$ soit continue. Notons S_n l'espace topolologique recollement

$$S_n=\big(\coprod_{\alpha\in\mathscr{A}_n}X_n\big)\cup_{f_n}S_{n-1}\ .$$

(1) Montrer que S_0 est l'espace topologique somme disjointe de la famille $(X_{0,\alpha})_{\alpha\in\mathscr{A}_0}$.

(2) Soit $n\in\mathbb{N}$. Montrer que la restriction à S_{n-1} de la projection canonique de la somme disjointe $\big(\coprod_{\alpha\in\mathscr{A}_n}X_n\big)\coprod S_{n-1}$ dans S_n est un homéomorphisme sur son image, par laquelle on identifie S_{n-1} et son image dans S_n. Montrer que S_{n-1} est fermé dans S_n, et que la topologie induite sur S_{n-1} par la topologie de S_n est la topologie de S_{n-1}.

(2) Soit $n\in\mathbb{N}$. Pour toute partie finie J de $\mathscr{A}_n$, on note $S_{n,J}$ l'image de la partie $\big(\coprod_{\alpha\in J}X_n\big)\coprod S_{n-1}$ par la projection canonique dans S_n. Montrer que la topologie de S_n est la topologie faible définie par la famille des sous-espaces $S_{n,J}$ lorsque J parcours l'ensemble des parties finies de $\mathscr{A}_n$.

(3) Montrer qu'une suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans S_n converge vers un élément x de S_n si et seulement s'il existe une partie finie J de $\mathscr{A}_n$ telle que x et les x_n appartiennent à $S_{n,J}$, et que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x dans $S_{n,J}$.

On note S la réunion des S_n, que l'on munit de la topologie faible définie par la famille de parties $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(4) Montrer que S_n est fermé dans S et que la topologie induite sur S_n par la topologie de S_{n+1} est la topologie de S_n.

(5) Montrer qu'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans S converge vers un élément x de S si et seulement s'il existe $N\in\mathbb{N}$ tel que x et les x_n appartiennent à S_N, et que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x dans S_n.

(6) Donner un critère pour que S_n, puis que S, soit séparé. Décrire alors les compacts de S_n, puis de S.

Exercice E.87 Un espace topologique X est dit *normal* s'il est séparé et si pour tous fermés disjoints F,F' de X, il existe des ouverts disjoints U,U' de X avec $F\subset U$ et $F'\subset U'$.

- Montrer qu'un espace topologique compact est normal.
- Montrer que si F est un fermé de X et U un ouvert de X contenant F, alors il existe V un ouvert de X avec
$$F\subset V\subset\overline{V}\subset U.$$
- Soit X un espace topologique normal, $\sim$ une relation d'équivalence telle que la projection canonique $\pi:X\to X/\!\sim$ est fermée. Montrer que $X/\!\sim$ est normal (donc séparé).
- Soit X un espace topologique compact, $\sim$ une relation d'équivalence telle que la projection canonique $\pi:X\to X/\!\sim$ est fermée. Montrer que $X/\!\sim$ est compact.
- Soit X un espace topologique compact, $\sim$ une relation d'équivalence fermée (en tant que partie de $X\times X$). Montrer que $X/\!\sim$ est compact.

- Soient X,Y deux espaces topologiques normaux, A un fermé de X et $f:A\to$ une application continue. Montrer que $X\cup_f Y$ est normal (donc séparé). En dédu que $X/\langle A\rangle$ est normal. Si X,Y sont compacts, montrer que $X\cup_f Y$ est compact

Exercice E.88 Pour n dans $\mathbb{N}$, on note $||\cdot||$ la norme euclidienne standard sur $\mathbb{R}^n$ (a $||(x_1,\dots,x_n)||=\sqrt{x_1^2+\dots+x_n^2}$). Soit $\mathbb{B}_n=\{x\in\mathbb{R}^n\ :\ ||x||\leq 1\}$ la *boule unité* (ferm de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{S}_n=\{x\in\mathbb{R}^{n+1}\ :\ ||x||=1\}$ la sphère de dimension n. On identifie $\mathbb{C}^n$ avec par $(z_1,\dots,z_n)\mapsto(\mathrm{Re}\ z_1,\dots,\mathrm{Re}\ z_n,\mathrm{Im}\ z_1,\dots,\mathrm{Re}\ z_n)$. On identifie $\mathbb{R}^n$ avec un sous-esp de $\mathbb{R}^{n+1}$ par $(x_1,\dots,x_n)\mapsto(x_1,\dots,x_n,0)$.

- Sur $\mathbb{R}^{n+1}-\{0\}$, on considère la relation d'équivalence $x\sim_1\lambda x$ pour tout x da $\mathbb{R}^{n+1}-\{0\}$ et λ dans $\mathbb{R}-\{0\}$. Sur $\mathbb{S}_n$, on considère la relation d'équivalence $x\sim_2$ pour tout x dans $\mathbb{S}_n$. Sur $\mathbb{B}_n$, on considère la relation d'équivalence $\sim_3$ engendrée $x\sim -x$ pour tout x dans $\mathbb{S}_{n-1}=\partial\mathbb{B}_n$. Montrer que l'inclusion $\mathbb{S}_n\hookrightarrow\mathbb{R}^{n+1}-\{0\}$ l'application $\mathbb{B}_n\to\mathbb{S}_n$ définie par $(x_1,\dots,x_n)\mapsto(x_1,\dots,x_n,\sqrt{1-\sum_{i=1}^n x_i^2})$ induis des homéomorphismes $\mathbb{S}_n/\!\sim_2\to(\mathbb{R}^{n+1}-\{0\})/\!\sim_1$ et $\mathbb{B}_n/\!\sim_3\to\mathbb{S}_n/\!\sim_2$. Montrer ces espaces sont compacts. L'espace quotient $(\mathbb{R}^{n+1}-\{0\})/\sim_1$ est appelé l'*esp projectif réel* de dimension n et noté $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ ou $\mathbb{R}P_n$. On note $[x_1,\dots,x_{n+1}]$ la cla d'équivalence de $(x_1,\dots,x_{n+1})$.
- Sur $\mathbb{C}^{n+1}-\{0\}$, on considère la relation d'équivalence $x\sim_1\lambda x$ pour tout x da $\mathbb{C}^{n+1}-\{0\}$ et λ dans $\mathbb{C}-\{0\}$. Sur $\mathbb{S}_{2n+1}$, on considère la relation d'équival ce $x\sim_2\lambda x$ pour tout x dans $\mathbb{S}_{2n+1}$ et $\lambda\in\mathbb{S}_1$. Montrer que l'inclusion $\mathbb{S}_{2n+1}$ $\mathbb{C}^{n+1}-\{0\}$ induit un homéomorphisme $\mathbb{S}_{2n+1}/\!\sim_2\to(\mathbb{C}^{n+1}-\{0\})/\!\sim_1$. Montrer ces espaces sont compacts. L'espace quotient $(\mathbb{C}^{n+1}-\{0\})/\sim_1$ est appelé l'*esp projectif complexe* de dimension n et noté $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ ou $\mathbb{C}P_n$. On note $[z_1,\dots,z_{n+1}]$ classe d'équivalence de $(z_1,\dots,z_{n+1})$.
- Montrer que $\mathbb{P}_1(\mathbb{R})$ est homéomorphe au compactifié d'Alexandrov de $\mathbb{R}$ (don $\mathbb{S}_1$), par l'application $[x,y]\mapsto x/y$ si $y\neq 0$, et $[x,0]\mapsto\infty$. Montrer que $\mathbb{P}_1($ est homéomorphe au compactifié d'Alexandrov de $\mathbb{C}$ (donc à $\mathbb{S}_2$), par l'applicat $[w,z]\mapsto w/z$ si $z\neq 0$, et $[w,0]\mapsto\infty$.
- Si $f:\mathbb{S}_{n-1}\to\mathbb{P}_{n-1}(\mathbb{R})$ (ces deux espaces sont vides si $n=0$) est la project canonique $(x_1,\dots,x_n)\mapsto[x_1,\dots,x_n]$, montrer que l'application
$$\begin{array}{rcl}\phi:\mathbb{B}_n\coprod\mathbb{P}_{n-1}(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{P}_n(\mathbb{R})\\ (x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{B}_n & \mapsto & [x_1,\dots,x_n,\sqrt{1-\sum_{i=1}^n x_i^2}]\in\mathbb{P}_n(\mathbb{R})\\ {[x_1,\dots,x_n]}\in\mathbb{P}_{n-1}(\mathbb{R}) & \mapsto & [x_1,\dots,x_n,0]\in\mathbb{P}_n(\mathbb{R})\end{array}$$
induit un homéomorphisme
$$\mathbb{B}_n\cup_f\mathbb{P}_{n-1}(\mathbb{R})\to\mathbb{P}_n(\mathbb{R}).$$
- De manière analogue, montrer que si $f:\mathbb{S}_{2n-1}\to\mathbb{P}_{n-1}(\mathbb{C})$ est la projection ca nique $(z_1,\dots,z_n)\mapsto[z_1,\dots,z_n]$, alors l'application
$$\begin{array}{rcl}\phi:\mathbb{B}_{2n}\coprod\mathbb{P}_{n-1}(\mathbb{C}) & \to & \mathbb{P}_n(\mathbb{C})\\ (z_1,\dots,z_n)\in\mathbb{B}_{2n} & \mapsto & [z_1,\dots,z_n,\sqrt{1-\sum_{i=1}^n |z_i|^2}]\in\mathbb{P}_n(\mathbb{C})\\ {[z_1,\dots,z_n]}\in\mathbb{P}_{n-1}(\mathbb{C}) & \mapsto & [z_1,\dots,z_n,0]\in\mathbb{P}_n(\mathbb{C})\end{array}$$
induit un homéomorphisme
$$\mathbb{B}_{2n}\cup_f\mathbb{P}_{n-1}(\mathbb{C})\to\mathbb{P}_n(\mathbb{C}).$$

Exercice E.89 On munit $\{0,1\}$ de la topologie discrète et $X = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ de la topologie produit. On appelle *sous-suite finie consécutive* de $(x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in X$ toute suite finie de la forme $(x_k, x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_{k+\ell})$ avec $k, \ell \in \mathbb{N}$. Soit M un ensemble de suites finies de 0 et de 1. Montrer que le sous-espace des éléments de X, dont aucune sous-suite finie consécutive n'est dans M, est compact.

Exercice E.90 Rappelons qu'un espace topologique est *séparable* s'il admet une partie dénombrable dense, et *à base dénombrable* s'il existe un ensemble d'ouverts $\mathscr{B}$ tel que tout ouvert soit union d'éléments de $\mathscr{B}$.

- Montrer qu'un espace métrisable compact est séparable.
- Montrer qu'un espace métrisable compact est homéomorphe à un sous-espace de l'espace topologique produit $[0,1]^{\mathbb{N}}$.
- Si X est un espace topologique séparable, montrer que tout ouvert de l'espace topologique produit $X^{\mathbb{N}}$ est union dénombrable d'ouverts élémentaires.
- Si X est un espace topologique à base dénombrable, montrer que $X^{\mathbb{N}}$ est à base dénombrable.
- Si X est un espace topologique, est-ce que tout ouvert de $X^{\mathbb{N}}$ est union dénombrable d'ouverts élémentaires ?

Exercice E.91 Un espace topologique est dit *totalement discontinu* si tout point admet un système fondamental de voisinages à la fois ouverts et fermés.

(1) Montrer que tout sous-espace d'un espace totalement discontinu est totalement discontinu.

(2) Montrer que tout produit d'espaces totalement discontinus est totalement discontinu.

(3) Montrer que tout espace topologique métrisable, compact, totalement discontinu, sans point isolé, non vide est homéomorphe à l'espace triadique de Cantor (voir exercice E.22).

(4) Montrer que tout espace topologique métrisable, compact, sans point isolé, non vide contient un sous-espace homéomorphe à l'espace triadique de Cantor.

Exercice E.92 *(Anneaux hawaïens et bouquets de cercles)* (1) Soit

$$A = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ \big(x - \frac{1}{k+1}\big)^2 + y^2 = \frac{1}{(k+1)^2}\Big\} .$$

Montrer que A est un sous-espace compact, connexe et localement connexe de $\mathbb{R}^2$.

(2) On note $\overline{\mathbb{B}}$ la boule unité fermée de $\mathbb{R}^2$ (muni de sa distance euclidienne usuelle), $\mathbb{S}_1 = \{(s,t) \in \mathbb{R}^2 \ : \ s^2 + t^2 = 1\}$ le cercle unité de $\mathbb{R}^2$ et $x_* = (1,0) \in \mathbb{S}_1$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note C_k l'ensemble des suites $(z_i)_{i\in\mathbb{N}}$ dans $\overline{\mathbb{B}}$ telles que $z_k \in \mathbb{S}_1$ et $z_i = x_*$ si $i \neq k$. Soit $C = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} C_k$. Montrer que le sous-espace C de l'espace topologique produit $\overline{\mathbb{B}}^{\mathbb{N}}$ est compact.

(3) Soient I un ensemble, muni de la topologie discrète, et $\widetilde{\mathscr{B}}_I$ l'espace topologique produit $\mathbb{S}_1 \times I$. Notons $\mathscr{R}$ la relation d'équivalence sur $\widetilde{\mathscr{B}}_I$ définie par $(x,i)\ \mathscr{R}\ (y,j)$ si et seulement si ($i = j$ et $x = y$) ou ($x = y = x_*$). Soit $\mathscr{B}_I$ l'espace topologique quotient $\widetilde{\mathscr{B}}_I/\mathscr{R}$. Montrer que si I est fini, alors $\mathscr{B}_I$ est compact.

(4) Montrer que A et C sont homéomorphes, mais que A et $\mathscr{B}_{\mathbb{N}}$ ne sont pas homéomorphes.

Exercice E.93 *(Espaces grassmaniens)* Soient $n, k \in \mathbb{N}$ tels que $0 \leq k \leq n$. On note

$$\langle\, (x_1,\dots,x_n),(y_1,\dots,y_n)\,\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i \quad \text{et} \quad ||(x_1,\dots,x_n)|| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$$

le produit scalaire usuel et la norme euclidienne usuelle sur l'espace vectoriel réel $E =$ I
On note $\mathrm{O}(n)$ le groupe orthogonal des matrices réelles x de taille n-n telles que ${}^t x x =$
où I_n est la matrice identité n-n.

(1) Soit $B_k(E)$ l'ensemble des k-uplets $(v_1,\dots,v_k)$ de vecteurs orthonormés ($||v_i|| =$
pour $1 \leq i \leq k$ et $\langle v_i, v_j\rangle = 0$ si $1 \leq i \neq j \leq k$) de E. Montrer que $B_k(E)$ est
sous-espace compact de l'espace produit E^k.

(2) Pour $g \in \mathrm{O}(n)$ et $a = (v_1,\dots,v_k) \in B_k(E)$, on note $g\,a = (gv_1,\dots,gv_k)$. M
trer que l'application $(g,a) \mapsto ga$ est une action (à gauche) continue transitive de O
sur $B_k(E)$ (on rappelle qu'une action (à gauche) d'un groupe G sur un ensemble X
transitive si $\forall\, x,y \in X,\ \exists\, g \in G,\ \ y = gx$).

(3) On note H le sous-groupe de $\mathrm{O}(n)$ image de $\mathrm{O}(n-k)$ par le morphisme de grou
$x \mapsto \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}$ où I_k est la matrice identité de taille k-k. Montrer que H est fermé d
$\mathrm{O}(n)$, et que l'espace $B_k(E)$ et l'espace quotient $\mathrm{O}(n)/H$ sont homéomorphes.

(4) Soit $\mathscr{G}_k(E)$ l'ensemble des sous-espaces vectoriels de dimension k de E. On n
$\overline{\mathbb{B}_n}$ la boule unité fermée de E. Pour toute partie A de E, on note $\mathscr{V}_\epsilon(A) = \{x \in$ E
$d(x,A) < \epsilon\}$ le ϵ-voisinage de A. Pour F, F' dans $\mathscr{G}_k(E)$, on pose

$$d_H(F,F') = \inf\Big\{\epsilon > 0 \ : \ F \cap \overline{\mathbb{B}_n} \subset \mathscr{V}_\epsilon(F' \cap \overline{\mathbb{B}_n}), F' \cap \overline{\mathbb{B}_n} \subset \mathscr{V}_\epsilon(F \cap \overline{\mathbb{B}_n})\Big\} .$$

a) Montrer que $d_H : \mathscr{G}_k(E) \times \mathscr{G}_k(E) \to [0,+\infty[$ est une distance.

b) Montrer que l'application $B_k(E) \to \mathscr{G}_k(E)$, qui à un k-uplet orthonormé $(v_1,\dots,$
associe le sous-espace vectoriel engendré par $v_1,\dots,v_k$, est continue, surjective.

c) Pour $g \in \mathrm{O}(n)$ et $V \in \mathscr{G}_k(E)$, on note $g\,V$ l'image du sous-espace vectoriel
par l'application linéaire de matrice g dans la base canonique de $E = \mathbb{R}^n$. Montrer
l'application $(g,V) \mapsto gV$ est une action continue (à gauche) de $\mathrm{O}(n)$ sur $\mathscr{G}_k(E)$.

d) On note H le sous-groupe de $\mathrm{O}(n)$ image du groupe produit $\mathrm{O}(k) \times \mathrm{O}(n-k)$
le morphisme de groupes $(x,y) \mapsto \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}$. Montrer que H est fermé dans $\mathrm{O}(n)$
isomorphe au groupe topologique produit $\mathrm{O}(k) \times \mathrm{O}(n-k)$), et que l'espace $\mathscr{G}_k(E)$
l'espace quotient $\mathrm{O}(n)/H$ sont homéomorphes.

e) Montrer que pour tout $k \in \{0,\dots,n\}$, l'application de $\mathscr{G}_k(E)$ dans $\mathscr{G}_{n-k}(E)$
à un sous-espace vectoriel de dimension k de E associe son orthogonal (pour le prod
scalaire usuel) est un homéomorphisme.

Exercice E.94 *(Quotient séparé canonique)* (1) Soit X un espace topologique. On défi
une relation $\mathscr{R} = \mathscr{R}_X$ sur X par $x\ \mathscr{R}\ y$ si et seulement si pour tout espace topologi
séparé Y et pour toute application continue $f : X \to Y$, on a $f(x) = f(y)$. Montrer
$\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence.

On note $X_{\rm sep}$ l'espace topologique quotient $X/\mathscr{R}$, et $\pi_X : X \to X_{\rm sep}$ la projection canonique.

(i) Montrer que si X est séparé, alors π_X est un homéomorphisme.

(ii) Montrer que si Z est un espace topologique séparé et si $g : X \to Z$ est une application continue, alors il existe une unique application continue $g_{\rm sep} : X_{\rm sep} \to Z$ telle que $g_{\rm sep} \circ \pi_X = g$, i.e. tel que le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "\pi_X"'] \arrow[dr, "g"] & \\ X_{\rm sep} \arrow[rr, "g_{\rm sep}"] & & Z\,. \end{tikzcd}$$

(iii) Montrer que $X_{\rm sep}$ est séparé.

(iv) Si tout ouvert non vide X est dense, déterminer $X_{\rm sep}$. En déduire, si $n \in \mathbb{N}$ et si X est l'ensemble $\mathbb{R}^n$ muni de la topologie de Zariski, ce que vaut $X_{\rm sep}$.

(v) Montrer que si de tout recouvrement ouvert de X, on peut extraire un sous-recouvrement fini, alors $X_{\rm sep}$ est compact.

(vi) Montrer que X est connexe si et seulement si $X_{\rm sep}$ est connexe.

(vii) Montrer que si X, X' sont des espaces topologiques, et si $h : X \to X'$ est une application continue, alors il existe une unique application continue $h_{\rm sep} : X_{\rm sep} \to (X')_{\rm sep}$ telle que $h_{\rm sep} \circ \pi_X = \pi_{X'} \circ h$, i.e. tel que le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\pi_X"'] & X' \arrow[d, "\pi_{X'}"] \\ X_{\rm sep} \arrow[r, "h_{\rm sep}"] & (X')_{\rm sep}\,. \end{tikzcd}$$

(viii) Montrer que ${\rm id}_{\rm sep} = {\rm id}$ et $(g \circ f)_{\rm sep} = g_{\rm sep} \circ f_{\rm sep}$.

(ix) Montrer que si $(X_i)_{i\in I}$ est une famille d'espaces topologiques, si X est l'espace topologique produit $\prod_{i\in I} X_i$, si p est l'application produit $\prod_{i\in I} \pi_{X_i} : X = \prod_{i\in I} X_i \to X'_{\rm sep} = \prod_{i\in I}(X_i)_{\rm sep}$, alors il existe un unique homéomorphisme $\varphi : X_{\rm sep} \to X'_{\rm sep}$ tel que $p = \varphi \circ \pi_X$, i.e. tel que le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd} & X = \prod_{i\in I} X_i \arrow[dl, "\pi_X"'] \arrow[dr, "p=\prod_{i\in I}\pi_{X_i}"] & \\ X_{\rm sep} = \big(\prod_{i\in I} X_i\big)_{\rm sep} \arrow[rr, "\varphi"] & & X'_{\rm sep} = \prod_{i\in I}(X_i)_{\rm sep}\,. \end{tikzcd}$$

(2) (i) Soit X un ensemble muni d'une pseudo-distance d (voir l'exemple (v) du paragraphe 1.3). Notons $\mathscr{R}'$ la relation sur X définie par $x \,\mathscr{R}'\, y$ si et seulement si $d(x, y) = 0$. Montrer que $\mathscr{R}'$ est une relation d'équivalence, et que $X_{\rm sep}$ et l'espace topologique quotient $Y = X/\mathscr{R}'$ sont homéomorphes. En déduire que $X_{\rm sep}$ est métrisable.

(ii) En déduire que si E est un espace vectoriel, muni de la topologie définie par une suite de semi-normes $\big(||\cdot||_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$, alors $E_{\rm sep}$ est métrisable. Montrer de plus que si toutes les semi-normes sont égales, alors $E_{\rm sep}$ admet une unique structure d'espace vectoriel topologique telle que $\pi_E : E \to E_{\rm sep}$ soit un morphisme d'espaces vectoriels topologiques.

(iii) Si $p \in [1, +\infty[$, si $(X, \mathscr{A}, \mu)$ est un espace mesuré, et si $E = \mathscr{L}^p(X, \mathscr{A}, \mu)$ est l'espace vectoriel des applications mesurables de X dans $\mathbb{R}$, de puissance p-ème intégrable, muni de la pseudo-distance

$$(f, g) = ||f - g||_p = \Big(\int_{x\in X} |f(x) - g(x)|^p \, d\mu(x)\Big)^{1/p}\,,$$

montrer que les espaces vectoriels topologiques $\mathbb{L}^p(X, \mathscr{A}, \mu)$ et $(\mathscr{L}^p(X, \mathscr{A}, \mu))_{\rm sep}$ sont i
morphes.

(3) (i) Soient G un groupe topologique, H un sous-groupe de G, et $\overline{H}$ l'adhérence
H dans G. Notons $p_H : G \to G/H$ et $p_{\overline{H}} : G \to G/\overline{H}$ les projections canoniques. Mont
qu'il existe un unique homéomorphisme $\phi : (G/H)_{\rm sep} \to (G/\overline{H})$ tel que $\phi \circ \pi_{G/H} \circ p_H = p$

(ii) Soit G un groupe topologique. Montrer qu'il existe une unique structure de grou
topologique sur $G_{\rm sep}$ telle que $\pi_G : G \to G_{\rm sep}$ soit un morphisme de groupes topologiqu

Si N est l'ensemble des éléments g de G tels que $g \,\mathscr{R}_G\, e$, montrer que N est un so
groupe distingué de G, et qu'il existe un isomorphisme φ de groupes topologiques en
le groupe topologique quotient G/N et le groupe topologique $G_{\rm sep}$ tel que $\varphi \circ p_N = \pi_0$

(iii) Soit X un espace topologique muni d'une action continue d'un groupe topologi
G. Montrer qu'il existe une unique action continue de G sur $X_{\rm sep}$ telle que le diagram
suivant soit commutatif :

$$\begin{tikzcd} G \times X \arrow[r] \arrow[d, "{\rm id}_G \times \pi_X"'] & X \arrow[d, "\pi_X"] \\ G \times X_{\rm sep} \arrow[r] & X_{\rm sep}\,. \end{tikzcd}$$

Si G est séparé, montrer que l'homéomorphisme $\phi : (G/H)_{\rm sep} \to (G/\overline{H})$ construit dans
est équivariant pour les actions de G sur $(G/H)_{\rm sep}$ (quotient de l'action par translatio
à gauche de G sur G/H) et (celle par translations à gauche) sur $G/\overline{H}$.

Montrer qu'il existe une unique action continue de $G_{\rm sep}$ sur $X_{\rm sep}$ telle que le diagram
suivant soit commutatif :

$$\begin{tikzcd} G \times X \arrow[r] \arrow[d, "\pi_G \times \pi_X"'] & X \arrow[d, "\pi_X"] \\ G_{\rm sep} \times X_{\rm sep} \arrow[r] & X_{\rm sep}\,. \end{tikzcd}$$

(4) Dans l'espace euclidien usuel $\mathbb{R}^3$, on note Ox, Oy, Oz les axes de coordonn
usuelles, r_x, r_y les rotations d'axes Ox, Oy et d'angles égaux à 1 (modulo 2π), et Γ_x,
les sous-groupes du groupe ${\rm SO}(3)$ des rotations de $\mathbb{R}^3$ engendrés respectivement par
parties $\{r_x\}$ et $\{r_x, r_y\}$.

(i) Montrer que Γ_{xy} est un sous-groupe dense du groupe topologique ${\rm SO}(3)$.

(ii) Montrer que la topologie quotient sur ${\rm SO}(3)/\Gamma_{xy}$ est la topologie grossière.

(iii) Déterminer (à homéomorphisme près) les espaces topologiques $({\rm SO}(3)/\Gamma_{xy})_{\rm sep}$
$({\rm SO}(3)/\Gamma_x)_{\rm sep}$.

Exercice E.95 Notons $\mathbb{R}[X]$ l'algèbre des polynômes réels en une indéterminée X,
pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $\mathbb{R}_n[X]$ son sous-espace vectoriel des polynômes de degré au p
n. Pour tout $k \in \mathbb{Z}$ et tout $P \in \mathbb{R}[X]$, notons

$$||P||_k = |P(k)|\,.$$

(1) a) Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, montrer que $||\cdot||_k$ est une semi-norme sur $\mathbb{R}[X]$. Dans
suite de la question (1), nous munissons $\mathbb{R}[X]$ de la topologie $\mathscr{T}_1$ définie par la famille
semi-normes $\big(||\cdot||_k\big)_{k\in\mathbb{Z}}$.

b) Montrer que l'espace vectoriel topologique $\mathbb{R}[X]$ est métrisable séparable, non
quentiellement complet.

c) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}^{n+1}$ définie par P
$\big(P(0), P(1), \ldots, P(n)\big)$ est continue.

d) Montrer que le sous-espace topologique $\mathbb{R}_n[X]$ est localement compact, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

e) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, considérons l'idéal $Q_n\mathbb{R}[X]$ de $\mathbb{R}[X]$ engendré par le polynôme $Q_n = X(X-1)\dots(X-n)$. Montrer que la topologie quotient sur $\mathbb{R}[X]/Q_n\mathbb{R}[X]$ de la topologie $\mathscr{T}_1$ est la topologie usuelle d'un espace vectoriel réel de dimension finie.

f) Montrer que le sous-ensemble $M = \{P \in \mathbb{R}[X] \ : \ \exists\, a \in \mathbb{R},\ \exists\, m \in \mathbb{N}, \quad P = aX^m\}$ des monômes de $\mathbb{R}[X]$ est fermé pour $\mathscr{T}_1$.

g) Montrer que l'application de multiplication de deux polynômes est continue pour $\mathscr{T}_1$. A quelle condition l'application $P \mapsto P \circ Q$ de composition par un polynôme Q est-elle continue ?

(2) Pour tout $i \in \mathbb{N}$ et tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, notons $a_i(P) \in \mathbb{R}$ le coefficient de X^i dans P (qui est nul si i est strictement supérieur au degré de P). Munissons $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ de la topologie produit, et notons $\mathscr{T}_2$ la topologie sur $\mathbb{R}[X]$ telle que l'application $\Phi : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ définie par $P \mapsto \big(a_i(P)\big)_{i\in\mathbb{N}}$ soit un homéomorphisme sur son image.

a) Montrer qu'il existe une suite dans $\mathbb{R}[X]$ qui converge vers le polynôme nul 0 pour la topologie $\mathscr{T}_2$, mais pas pour la topologie $\mathscr{T}_1$.

b) Montrer qu'il existe une suite dans $\mathbb{R}[X]$ qui converge vers le polynôme nul 0 pour la topologie $\mathscr{T}_1$, mais pas pour la topologie $\mathscr{T}_2$.

c) Montrer que l'image de Φ est dense dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, et que l'adhérence de l'image par Φ du sous-ensemble de $\mathbb{R}[X]$ des polynômes P tels que $|a_i(P)| \leq i$ pour tout $i \in \mathbb{N}$ est compact.

d) Montrer que les applications de multiplication et de composition de deux polynômes sont continues pour $\mathscr{T}_2$.

e) Pour $n \in \mathbb{N}$ et tout $P \in \mathbb{R}[X]$, notons $P \bmod X^{n+1}$ le polynôme $\sum_{i=1}^{n} a_i(P)X^i$. Montrer que l'application de $\mathbb{R}[X]$, muni de la topologie $\mathscr{T}_2$, dans l'espace topologique produit $\prod_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{R}_n[X]$ définie par $P \mapsto \big(P \bmod X^{n+1}\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est un homéomorphisme sur son image.

(3) Notons $\mathscr{T}_3$ l'ensemble des complémentaires des parties F de $\mathbb{R}[X]$ telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intersection $F \cap \mathbb{R}_n[X]$ soit fermée dans $\mathbb{R}_n[X]$ pour la topologie usuelle. Montrer que $\mathscr{T}_3$ est une topologie, et comparer les topologies $\mathscr{T}_1$, $\mathscr{T}_2$ et $\mathscr{T}_3$.

Exercice E.96 (*Topologie de Chabauty*) Soient $N \in \mathbb{N} - \{0\}$ et X l'ensemble des sous-groupes fermés de $\mathbb{R}^N$ (pour l'addition et la topologie usuelle).

(1) Montrer que tout sous-groupe fermé de $\mathbb{R}^N$ est isomorphe (en tant que groupe topologique) à un groupe topologique produit $\mathbb{Z}^p \times \mathbb{R}^q$ où $p, q \in \mathbb{N}$ et $p + q \leq N$.

(2) Pour tout $\epsilon > 0$, notons $B_\epsilon = {}^c B(0, \frac{1}{\epsilon})$ le complémentaire dans $\mathbb{R}^N$ de la boule ouverte de centre 0 et de rayon $\frac{1}{\epsilon}$. Pour tout $\epsilon > 0$, notons $V_\epsilon(A) = \{x \in \mathbb{R}^N \ : \ d(x, A) < \epsilon\}$ le ϵ-voisinage ouvert d'une partie A de $\mathbb{R}^N$. Pour tous $F, F' \in X$, posons

$$\delta(F, F') = \inf\{\epsilon > 0 \ : \ F \ \subset \ V_\epsilon(F' \cup B_\epsilon) \quad \text{et} \quad F' \ \subset \ V_\epsilon(F \cup B_\epsilon)\ \}\ .$$

Montrer que δ est une distance sur X. Dans la suite de cet exercice, on munit X de cette distance, et de la topologie définie par cette distance, appelée *topologie de Chabauty* sur l'ensemble des sous-groupes fermés de $\mathbb{R}^N$.

(3) Soient $F \in X$ et $(F_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite dans X. Montrer que la suite $(F_i)_{i\in\mathbb{N}}$ converge vers F si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

a) pour tout $x \in F$, il existe $x_i \in F_i$ pour tout $i \in \mathbb{N}$ tels que $x_i \underset{i\to+\infty}{\longrightarrow} x$ dans $\mathbb{R}^N$;

b) si $(i_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite strictement croissante dans $\mathbb{N}$, si x_{i_k} est un élément de

pour tout $k \in \mathbb{N}$, si $x \in \mathbb{R}^N$ et si $x_{i_k} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} x$ dans $\mathbb{R}^N$, alors $x \in F$.

(4) Notons G le groupe topologique $\mathrm{GL}_N(\mathbb{R})$ des isomorphismes linéaires de $\mathbb{R}^N$. Mo

trer que l'application de $G \times X$ dans X définie par $(g, F) \mapsto g(F)$ est une action conti

de G sur X.

(5) Si $N = 2$, montrer que le sous-espace Z de X formé des sous-groupes isomorp

à $\mathbb{R}$ est homéomorphe à un cercle.

(6) Montrer que X est compact.

(7) Montrer que le sous-espace Y de X formé des sous-groupes isomorphes à $\mathbb{Z}^N$

ouvert, et homéomorphe à l'espace topologique quotient $\mathrm{GL}_N(\mathbb{R})/\mathrm{GL}_N(\mathbb{Z})$.

(8) Montrer qu'il existe un sous-groupe fermé H de $\mathrm{GL}_N(\mathbb{R})$ tel que le sous-espace

de X formé des sous-groupes isomorphes à $\mathbb{Z}$ soit homéomorphe à $\mathrm{GL}_N(\mathbb{R})/H$.

Chapitre 5.

Exercice E.97 Soient X un ensemble, Y et Z des espaces métriques. Montrer que

$f : Y \to Z$ est une application uniformément continue, alors l'application de $\mathscr{C}(X,$

dans $\mathscr{C}(X, Z)$ définie par $g \mapsto f \circ g$ est continue pour les topologies uniformes. Si

est un espace topologique et si $g : X' \to Y$ est une application continue, montrer

l'application de $\mathscr{C}(Y, Z)$ dans $\mathscr{C}(X', Z)$ définie par $f \mapsto f \circ g$ est 1-lipschitzienne (p

les distances uniformes).

Exercice E.98 (*Espace des applications différentiables, lipschitziennes ou höldérien*

(1) Soient X un espace métrique compact, E un espace de Banach réel ou complexe (

exemple $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), et $\alpha \in\,]0, 1]$. On considère, sur l'espace $\mathscr{C}^\alpha(X, E)$ des applicati

α-höldériennes de X dans E, l'application $f \mapsto ||f||_\alpha$ où

$$||f||_\alpha = \sup_{x\in X} ||f(x)|| + \sup_{x,\, y\in X,\ x\neq y} \frac{||f(y) - f(x)||}{d(x, y)^\alpha}\ .$$

Montrer que $(\mathscr{C}^\alpha(X, E), ||\cdot||_\alpha)$ est un espace de Banach, appelé l'espace de Banach

applications α-höldériennes (lipschitziennes si $\alpha = 1$) de X dans E.

(2) Soient $r \in \mathbb{N} - \{0\}$, Ω un ouvert non vide de $\mathbb{R}^r$, K un compact de Ω, E un esp

de Banach, et $N \in \mathbb{N}$. On note $\mathscr{C}^N_K(\Omega, E)$ l'espace vectoriel des applications de classe

de Ω dans E, à support dans K, et

$$||f||_{N,K} = \sum_{m\in\mathbb{N}^r,\ |m|\leq N}\ \sup_{x\in K} ||\partial^m f(x)||\ .$$

Montrer que $(\mathscr{C}^N_K(\Omega, E), ||\cdot||_{N,K})$ est un espace de Banach.

(3) Soient I un intervalle compact d'intérieur non vide de $\mathbb{R}$, E un espace de Bana

$k \in \mathbb{N}$ et $\alpha \in\,]0, 1]$. On note $\mathscr{C}^{k+\alpha}(I, E)$ l'espace vectoriel des applications de classe de I dans E (en considérant les dérivées à droite ou à gauche aux extrémités de I), de dérivée k-ème α-höldérienne (lipschitzienne si $\alpha = 1$), et

$$||f||_{k+\alpha} = \sum_{0\le i\le k} \sup_{x\in I} ||f^{(i)}(x)|| + \sup_{x,\,y\in I,\,x\neq y} \frac{||f^{(k)}(y) - f^{(k)}(x)||}{|y-x|^{\alpha}}\ .$$

Montrer que $(\mathscr{C}^{k+\alpha}(I,E), ||\cdot||_{k+\alpha})$ est un espace de Banach.

Chapitre 6.

Exercice E.99 Soient E et F deux espaces de Banach réels, et $(f_\alpha)_{\alpha\in\mathscr{A}}$ une famille d'applications linéaires continues de E dans F.

(1) Montrer que l'application g de E dans $[0,+\infty]$ définie par $x \mapsto \sup_{\alpha\in\mathscr{A}}\ ||f_\alpha(x)||$ est semi-continue inférieurement.

On suppose dans la suite de cet exercice que $\sup_{\alpha\in\mathscr{A}}\ ||f_\alpha|| = +\infty$.

(2) Pour tout n dans $\mathbb{N}$, montrer que l'intérieur de $F_n = \{x \in E\ :\ g(x) \le n\}$ est vide.

(3) Montrer que $G = \{x \in E\ :\ \sup_{\alpha\in\mathscr{A}}\ ||f_\alpha(x)|| = +\infty\}$ est dense dans E.

Exercice E.100 Soient E un espace de Hilbert réel (séparable, de dimension finie) et $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base hilbertienne de E. Notons A (respectivement B) le plus petit sous-espace vectoriel fermé contenant l'ensemble $\{a_n = e_{2n}\ :\ n\in\mathbb{N}\}$ (respectivement $\{b_n = e_{2n} + \frac{1}{n+1}\,e_{2n+1}\ :\ n\in\mathbb{N}\}$).

(1) Montrer que A et B, munis de la restriction du produit scalaire de E, sont des espaces de Hilbert, dont on déterminera une base hilbertienne. En déduire que $A\cap B = \{0\}$.

(2) Montrer que l'application de l'espace de Banach produit $A\times B$ dans E définie par $(x,y)\mapsto x+y$ n'est pas un homéomorphisme sur son image $A+B$.

(3) Montrer que $A+B$ est un sous-espace vectoriel dense dans E, mais qu'il n'est pas fermé.

Exercice E.101 (*Calcul fonctionnel continu*) Soient E un espace de Banach complexe, $\mathscr{L}(E)$ l'algèbre des endomorphismes linéaires continus de E, muni de la norme d'opérateurs usuelle, et $u\in\mathscr{L}(E)$. Soit $P = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme complexe en une variable. Notons $\overline{P} = \sum_{i=0}^{n} \overline{a_i} X^i \in \mathbb{C}[X]$ et $P(u) = \sum_{i=0}^{n} a_i u^i \in \mathscr{L}(E)$. Remarquons que $(PQ)(u) = P(u)Q(u) = Q(u)P(u)$.

(1) Montrer que la série $\exp(u) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n!}u^n$ converge dans $\mathscr{L}(E)$. Montrer que si $v\in\mathscr{L}(E)$ commute avec u (i.e. si $uv = vu$), alors $\exp(u+v) = (\exp u)(\exp v)$.

(2) Pour tous x_0 dans E et t_0 dans $\mathbb{R}$, montrer que l'unique solution maximale de l'équation différentielle $y' = u(y)$ valant x_0 à l'instant t_0 est l'application de $\mathbb{R}$ dans E définie par $t\mapsto \exp((t-t_0)u)\cdot x_0$.

(3) a) Montrer que si $\lambda\in \mathrm{Sp}(u)$, alors $P(\lambda)\in \mathrm{Sp}(P(u))$.

b) Réciproquement, si $\mu\in\mathrm{Sp}(P(u))$, montrer qu'il existe $\lambda\in\mathrm{Sp}(u)$ tel que $P(\lambda)-\mu = 0$.

Dans la suite de cet exercice, nous supposons que E est un espace de Hilbert compl
et que u est autoadjoint.

(4) Montrer que l'adjoint de $P(u)$ est $\overline{P}(u)$.

(5) Montrer que $||P(u)||^2 = \sup_{\lambda\in\mathrm{Sp}\,((P\overline{P})(u))} |\lambda| = \sup_{\lambda\in\mathrm{Sp}(u)} |P(\lambda)|^2$.

(6) Considérons $\mathscr{C}(\mathrm{Sp}(u),\mathbb{C})$, l'algèbre des applications continues de $\mathrm{Sp}(u)$ dans $\mathbb{C}$, m
de la norme uniforme. Montrer qu'il existe un unique morphisme d'algèbres cont
$\Psi : \mathscr{C}(\mathrm{Sp}(u),\mathbb{C}) \to \mathscr{L}(E)$ tel que $\Psi(P) = P(u)$ pour tout P dans l'algèbre $\mathbb{C}[X]$
polynômes complexes.

(7) Montrer que si $f\in\mathscr{C}(\mathrm{Sp}(u),\mathbb{C})$ et $\lambda\notin f\big(\mathrm{Sp}(u)\big)$, alors $g : t\mapsto \frac{1}{f(t)-\lambda}$ appartien
$\mathscr{C}(\mathrm{Sp}(u),\mathbb{C})$. En déduire que $\mathrm{Sp}(\Psi(f))$ est contenu dans $f(\mathrm{Sp}(u))$.

(8) Soit $f\in\mathscr{C}(\mathrm{Sp}(u),\mathbb{C})$. En déduire que si E est de dimension infinie et si f est à vale
réelles non nulles, alors l'opérateur $\Psi(f)$ est autoadjoint, mais n'est pas compact.

Chapitre 7.

Exercice E.102 Montrer que le sous-ensemble $A = \{(x,|x|)\ :\ x\in\mathbb{R}\}$ de $\mathbb{R}^2$ n'est p
l'image de $\mathbb{R}$ par une immersion C^1.

Donner un exemple d'une application de classe C^1 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$ dont l'image est

Exercice E.103 Soient U,V,W des ouverts d'espaces de Banach E,F,G respectiveme
et $f : U\to V, g : V\to W$ deux applications. Si f et g sont des immersions, submersi
ou applications de rang constant, que peut-on dire de $g\circ f$?

Exercice E.104 Montrer, en dimension finie et en classe de différentiabilité C^1, l'équi
lence entre le théorème 7.13 d'inversion locale et le théorème 7.16 des fonctions implicit

Exercice E.105 Soit $n\in\mathbb{N}$ avec $n\ge 2$. On considère l'application déterminant
définie sur l'espace vectoriel de dimension finie $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices réelles de taille $n\times$
elle est de classe C^∞ car polynomiale.

1. Caractériser les matrices en lesquelles la différentielle de det est non nulle. Mont
que si A est inversible, alors

$$d(\det)_A :\ H\ \mapsto\ \det A\ \ \mathrm{tr}\,A^{-1}H\ .$$

2. Soit $X = \mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) = \{A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})\ :\ \det(A) = 1\}$. Montrer que, pour tout $A\in$
il existe un voisinage ouvert V de A dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, un voisinage ouvert U de 0 d
$\mathbb{R}^{n^2-1}$ et une application $f : U\to V$ de classe C^∞ qui est un homéomorphis
sur son image et possède une différentielle injective en 0, telle que $f(0) = A$
$f(U) = V\cap X$.
3. Montrer le même résultat pour X l'ensemble des matrices de rang $n-1$.
4. Montrer que ce résultat n'est pas valable pour l'ensemble des matrices de ra
$\le n-1$. On pourra par exemple considérer la matrice nulle.

Exercice E.106 1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ une application de classe C^∞. Notons

$$X = \{x(z,\theta) = (f(z)\cos\theta, f(z)\sin\theta, z) \ : \ z \in \mathbb{R}, \theta \in \mathbb{R}\}$$

la *surface de révolution* autour de l'axe Oz engendrée par f. Pour tout $x = x(z,\theta)$ dans X, montrer qu'il existe un voisinage ouvert U de x dans X et un voisinage ouvert V de $(0,0,z)$ dans le plan $\mathbb{R}(-\sin\theta,\cos\theta,0)+\mathbb{R}(0,0,1)$ tels que la projection orthogonale sur V soit un homéomorphisme de U dans V, dont la réciproque soit une immersion.

2. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+^*$ une fonction de classe C^∞. Notons

$$X = \{(f(z)x_1, \dots, f(z)x_p, z) \ : \ x_1, \dots, x_p \in \mathbb{R}, \ \sum x_i^2 = 1, \ z \in \mathbb{R}^n\}$$

(une « surface de révolution en dimension $n+p$ »). Énoncer et démontrer un résultat analogue à celui de la première question.

Exercice E.107 Soit f une application de classe C^1 d'un ouvert V non vide de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$, injective. Montrer que $n \leq m$ et que df_x est injective sur un ouvert dense de V. L'application df_x est-elle nécessairement injective partout ?

Exercice E.108 Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une application de classe C^1 propre, i.e. telle que

$$\lim_{||x|| \to +\infty} |f(x)| = +\infty \ .$$

On suppose que f possède (au moins) deux minima stricts (distincts) a et b. Le but de l'exercice est de montrer que f possède un troisième point critique (i.e. un point où la différentielle de f est la forme linéaire nulle).

1. Montrer que le résultat est évident si $n = 1$, ou si $n \geq 2$ et $f(x) \to -\infty$ quand $||x|| \to +\infty$. Dans la suite, on supposera donc $n \geq 2$ et $f(x) \to +\infty$ quand $||x|| \to +\infty$. On va supposer que f n'admet pas d'autre point critique et aboutir à une contradiction.
2. Pour tout m dans $\mathbb{R}$, soit K_m la réunion des compacts connexes contenant a et b sur lesquels f est majorée par m. Montrer que K_m est fermé. Montrer qu'il existe M dans $\mathbb{R}$ tel que $K_M \neq \emptyset$ et $K_m = \emptyset$ pour tout $m < M$.
3. Montrer en utilisant le théorème des fonctions implicites que l'intérieur de K_M est connexe.
4. Conclure.

Exercice E.109 Dans cet exercice, on fixe un élément n de $\mathbb{N} - \{0\}$.

1. Montrer que $\exp : \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \subset \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est une application C^∞, et calculer sa différentielle. Vérifier en particulier que $d\exp_0 = \mathrm{Id}$.
2. On note $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{R})$ le sous-espace vectoriel des matrices de trace nulle de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, et $\mathfrak{so}(n)$ le sous-espace vectoriel des matrices antisymétriques de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que l'application exponentielle envoie $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ et $\mathfrak{so}(n)$ dans $\mathrm{SO}(n)$.

3. Montrer que $\exp : \mathfrak{so}(n) \to \mathrm{SO}(n)$ est surjective, mais que $\exp : \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}) \to \mathrm{SL}_2($
ne l'est pas (on pourra vérifier qu'une matrice dans l'image de l'exponentielle est
trace au moins -2).
4. Montrer que l'exponentielle est un C^∞-difféomorphisme entre l'espace vectoriel
matrices symétriques réelles et l'ouvert dans cet espace formé des matrices symé
ques réelles définies positives.
5. Pour $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, notons L_M et R_M les opérateurs de multiplication à gauche
à droite par M, agissant sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, et $\operatorname{ad} M = L_M - R_M$. Montrer que $d\exp_M$
$\sum_{p,q \geq 0} \frac{L_M^p R_M^q}{(p+q+1)!}$, puis en déduire que

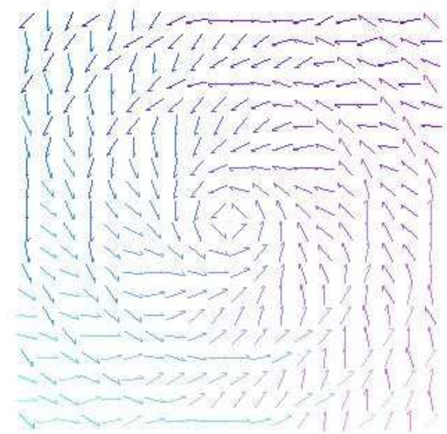
$$\exp(-M)\ d\exp_M = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(\operatorname{ad} M)^k}{(k+1)!}.$$

6. Montrer que $d\exp_M : \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est inversible si et seulement si $\operatorname{ad} M$
pas de valeur propre complexe de la forme $2ik\pi$ avec $k \in \mathbb{Z} - \{0\}$.

Exercice E.110 Identifions le plan euclidien usuel $\mathbb{R}^2$ avec le corps $\mathbb{C}$ des nombres co
plexes, de manière usuelle par $(x,y) \mapsto z = x + iy$. Notons $\mathbb{D}$ le disque unité ouvert
$\mathbb{R}^2$, et fixons $n \in \mathbb{N} - \{0\}$. Définissons l'application $X : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ par

$$X : z \mapsto iz\, e^{\frac{i}{2}\left(1-\cos(2n\pi|z|^2)\right)} \ .$$

Pour tout z dans $\mathbb{R}^2$, soit $t \mapsto \phi_t(z)$ la solution maximale de l'équation différenti
$u' = X(u)$ valant z à l'instant $t = 0$.



$n = 2$

(1) Montrer que pour tout $k = 0, 1, \dots, n$, si $|z| = \sqrt{\frac{k}{n}}$ (et en particulier si $|z| = 1$), alors $\phi_t(z) = e^{it} z$ pour tout t dans $\mathbb{R}$.

(2) Montrer que pour tout z dans $\mathbb{D}$, l'image de l'application $t \mapsto \phi_t(z)$ est contenue dans $\mathbb{D}$. En déduire que l'application $t \mapsto \phi_t(z)$ est définie sur $\mathbb{R}$, pour tout z dans $\mathbb{D}$.

(3) Pour tout $k = 0, 1, \dots, n-1$, si $|z| \in]\sqrt{\frac{k}{n}}, \sqrt{\frac{k+1}{n}}[$, déterminer l'ensemble des valeurs d'adhérence de $\phi_t(z)$ quand t tend vers $+\infty$, et quand t tend vers $-\infty$.

(4) On considère la relation $\mathscr{R}$ sur $\mathbb{D}$ définie par $z \mathscr{R} w$ si et seulement s'il existe t dans $\mathbb{R}$ tel que $w = \phi_t(z)$. Montrer que $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence, et que l'espace topologique quotient $\mathbb{D}/\mathscr{R}$ n'est pas séparé.

(5) Si $n = 1$, montrer que l'espace topologique quotient $\mathbb{D}/\mathscr{R}$ est homéomorphe à l'intervalle $[0, 1]$ dans lequel 0 a été éclaté en deux points $0_-, 0_+$.

Exercice E.111 Soit $\lambda \in]1, +\infty[$. Considérons le système différentiel suivant

$$\begin{cases} \dot{x} = v_1(x, y) = \lambda x - x\, e^{x^2+y^2} \\ \dot{y} = v_2(x, y) = \lambda y - y\, e^{x^2+y^2} . \end{cases}$$

(i) Étudier l'existence, l'unicité et la régularité en (t, x_0, y_0, λ) des solutions maximales de cette équation différentielle, valant (x_0, y_0) à l'instant $t = 0$. On notera $I_{(x_0,y_0)}$ l'intervalle maximal de définition de cette solution. Déterminer les solutions stationnaires (i.e. constantes en temps).

(ii) Montrer que les courbes intégrales du champ de vecteurs de coordonnées (v_1, v_2) sont des segments de droites, et étudier les variations du module des solutions.

(iii) Montrer que le champ de vecteurs de coordonnées (v_1, v_2) est complet sur la boule ouverte de centre 0 et de rayon λ. Montrer que les solutions maximales de position (x_0, y_0) à l'instant $t = 0$ n'appartenant pas à la boule fermée de centre 0 et de rayon λ explosent en temps négatifs (i.e. que $I_{(x_0,y_0)} =]-T, +\infty[$ où $T \geq 0$).

(iv) Quelles sont les valeurs d'adhérence des solutions lorsque le temps converge vers les extrémités de $I_{(x_0,y_0)}$?

(v) Tracer les courbes intégrales.

Exercice E.112 Soit E un espace de Banach réel.

(1) Soient v un vecteur de E non nul, et F_0 un sous-espace vectoriel fermé de E tel que $F_0 \cap \mathbb{R}v = \{0\}$.

Montrer qu'il existe un hyperplan fermé H de E supplémentaire à $\mathbb{R}v$, et contenant F_0. Montrer que l'application de l'espace de Banach produit $\mathbb{R} \times H$ dans E, qui à (t, x) associe $tv + x$, est un homéomorphisme.

Dans la suite du problème, U est un ouvert de E et $X : U \to E$ est une application de classe C^∞. Pour tout x dans U, nous notons $t \mapsto \varphi^t(x)$ (et $t \mapsto \varphi^t_X(x)$ lorsqu'il faut préciser X) la solution maximale de l'équation différentielle $z' = X(z)$ valant x à l'instant $t = 0$.

(2) Soient V un ouvert d'un espace de Banach F, $f : V \to U$ une application C^∞ t
que pour tout y dans V, l'application $df_y : F \to E$ soit une bijection. Notons $f^*X : V \to$
l'application définie par

$$\forall\, y \in V, \quad f^*X(y) = (df_y)^{-1}\Big(X\big(f(y)\big)\Big) .$$

(i) Montrer que f^*X est de classe C^∞.

(ii) Si W est un ouvert d'un espace de Banach G, et $g : W \to V$ une applicat
C^∞ telle que pour tout z dans W, l'application $dg_z : G \to F$ soit une bijection, mont
qu'alors $(f \circ g)^*X = g^*(f^*X)$.

(iii) Pour tout y dans V, montrer que l'application $t \mapsto f \circ \varphi^t_{f^*X}(y)$ est la solut
maximale de l'équation différentielle $z' = X(z)$ valant $f(y)$ à l'instant $t = 0$.

(3) Soit $a \in U$ tel que $X(a) \neq 0$.

(i) Montrer qu'il existe un espace de Banach H et un C^∞-difféomorphisme f de l'esp
de Banach produit $\mathbb{R} \times H$ dans E tel que si $Y = f^*X : f^{-1}(U) \to \mathbb{R} \times H$, alors $Y(0, 0)$
$(1, 0)$.

(ii) Montrer qu'il existe des voisinages ouverts W_1, W'_1 de 0 dans $\mathbb{R} \times H$ tels
l'application $\Phi_1 : W_1 \to W'_1$ définie par $(t, x) \mapsto \varphi^t_Y(0, x)$ soit un C^∞-difféomorphisme
que $\Phi_1^* Y$ soit l'application constante valant $(1, 0)$.

(iii) Supposons E de dimension finie. Soient W un voisinage de 0 dans H, et $S : W \to$
une application de classe C^∞ telle que $S(0) = a$, l'application S soit une immersion e
et $X(a)$ n'appartienne pas à l'image de dS_0. Montrer qu'il existe un intervalle ouvert
contenant 0, une boule ouverte W_2 de centre 0 dans H, un voisinage ouvert W'_2 de 0 d
E, et un C^∞-difféomorphisme $\Phi_2 : I_2 \times W_2 \to W'_2$ tel que $\Phi_2^* X$ soit l'application consta
valant $(1, 0)$, et que $\Phi_2\big((\{0\} \times H) \cap W_2\big) = S(W) \cap W'_2$.

(4) Dans toute la suite de ce problème, nous supposons que $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ et que E
l'espace vectoriel euclidien usuel $\mathbb{R}^n$. Soit $a \in U$ tel que $X(a) = 0$. Soient U' un voisin
ouvert de a contenu dans U, et $L : U' \to \mathbb{R}$ une application de classe C^1 telle que a s
un minimum strict de L (i.e. $L(x) > L(a)$ pour tout $x \in U' - \{a\}$), et $dL_x(X(x)) \leq$
pour tout x dans U'. Soit $r > 0$ tel que la boule fermée B de centre a et de rayon r s
contenue dans U'.

(i) Montrer que $dL_a = 0$.

(ii) Montrer que $\big\{V_s = B \cap L^{-1}(]-\infty, s]) \;:\; s > L(a)\big\}$ est un système fondame
de voisinages compacts de a dans E.

(iii) Montrer que si $m = \inf_{x \in S(a,r)} L(x)$, alors $m > L(a)$ et que pour tout $s \in]L(a),$
pour tout x dans V_s, pour tout t dans $[0, +\infty[$, le point $\varphi^t(x)$ existe et appartient à V

(iv) Supposons de plus que $dL_x(X(x)) < 0$ pour tout x dans $U - \{a\}$. Montrer q
existe alors un voisinage W de a dans E tel que pour tout x dans W,

$$\lim_{t \to +\infty} \varphi^t(x) = a .$$

8.2 Indications de résolution

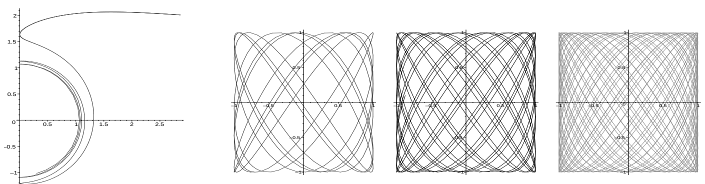
Schème E.77

- Si X est séparé, alors si $(x, y) \notin \Delta$, on a $x \neq y$, donc il existe U, V des voisina
disjoints de x, y respectivement. Alors $U \times V$ est un voisinage de (x, y) ne rencontr
pas Δ. Donc le complémentaire de Δ est ouvert.

Réciproquement, si Δ est ouvert, soient $x \neq y$. Alors $(x, y) \notin \Delta$, donc il existe un voisinage ouvert élémentaire $U \times V$ de (x, y) dans $X \times X$ ne rencontrant pas Δ. Alors U et V sont des voisinages disjoints de x et y respectivement.

- L'application $\varphi : X \to Y \times Y$ définie par $\varphi(x) = (f(x), g(x))$ est continue car ses composantes le sont, et la diagonale Δ de $Y \times Y$ est fermée, car Y est séparé, par le premier point. Donc $\{x \in X \ : \ f(x) = g(x)\} = \varphi^{-1}(\Delta)$ est fermé dans X.
- Par le second point, l'ensemble des points où f et g coïncident est fermé et dense, donc égal à X.
- L'application $\varphi : X \times Y \to Y \times Y$ définie par $\varphi(x, y) = (f(x), y)$ est continue car ses composantes le sont, et la diagonale Δ de $Y \times Y$ est fermée, car Y est séparé, par le premier point. Donc $G = \varphi^{-1}(\Delta)$ est fermé dans X.

Schème E.81 (1) Comme $\mathbb{C}$ est un espace métrique, l'ensemble A des valeurs d'adhérence cherchées est l'ensemble des limites des suites de la forme $\Big((1+t_n)\, e^{\frac{i\pi}{2}\sin\frac{1}{t_n}}\Big)_{n\in\mathbb{N}}$ où $t_n \to 0$. En particulier, comme $1 + t_n$ tend vers 1, l'ensemble A est contenu dans le demi-cercle unité droit $A' = \{e^{i\theta} \ : \ \theta \in [-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}]\}$. Réciproquement, comme tout élément de $[-1, 1]$ est limite d'une suite $\big(\sin\frac{1}{t_n}\big)_{n\in\mathbb{N}}$ quand t_n tend vers 0, et par composition de limites et d'appilcation continues, tout point de ce demi-cercle est valeur d'adhérence. Donc $A = A'$.



$f([0.06, 2.5])$ $\quad$ $g([100, 150])$ $\quad$ $g([100, 200])$ $\quad$ $g([100, 250])$

(2) Montrons que $A = \mathbb{Z} + \sqrt{2}\,\mathbb{Z}$, qui est un sous-groupe de $\mathbb{R}$, est dense dans $\mathbb{R}$. S'il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans A telle que $x_n > 0$ et $x_n \to 0$, alors pour tout t dans $\mathbb{R}$, pour tout $\epsilon > 0$, si $m = E[t/x_n]$, alors $|x - mx_n| \leq x_n$, ce qui, comme $mx_n \in A$, entraîne que A est dense dans $\mathbb{R}$. Sinon, soit $a = \inf\{x \in A \ : \ x > 0\}$, qui est strictement positif. Alors pour tout x dans A, soit $m = E[x/a]$, alors $0 \leq x - ma < a$. Donc $x = ma$. D'où $A = a\mathbb{Z}$. Comme 1 et $\sqrt{2}$ appartiennent à A, il existe donc deux entiers p et q tels que $\sqrt{2} = ap$ et $1 = aq$. Donc $\sqrt{2} = p/q$, ce qui contredit le fait que $\sqrt{2}$ soit irrationnel.

Soit $A' = \mathbb{Z} + \sqrt{2}\,\mathbb{N}$ Pour tout $\epsilon > 0$, soit $x \in A$ tel que $|x| < \epsilon$. Quitte à changer x en $-x$, on peut supposer que $x \in A'$. Tout point t de $[0, +\infty[$ (resp. $]-\infty, 0]$) est à distance au plus ϵ d'un point de $x\mathbb{N}$ si $x > 0$ (resp. $x < 0$) Donc tout point t de $\mathbb{R}$ (en ajoutant un élément de $\mathbb{R}$ pour rendre t positif ou négatif) est à distance au plus ϵ d'un point de $\mathbb{Z} + x\mathbb{N}$, qui est contenu dans A'. Donc A' est aussi dense.

Comme g est à valeurs dans le carré unité $[-1, 1]^2$, qui est compact, toute valeur d'adhérence de g en $+\infty$ appartient à ce carré. Montrons réciproquement que tout point de ce carré est d'adhérence de g en $+\infty$. Soient $(t, t') \in [-1, 1]^2$, $\epsilon > 0$ et $N \in \mathbb{N}$. Comme l'ensemble des valeurs d'adhérence de $\sin t$ quand t tend vers $+\infty$ est $[-1, 1]$, il existe $u, u' \geq N$ tels que $|\sin u - t| < \epsilon/2$ et $|\sin u' - t'| < \epsilon/4$. Posons $u'' = \frac{u' - \sqrt{2}\,u}{2\pi}$. Par densité de $\mathbb{Z} + \sqrt{2}\,\mathbb{N}$, soient $k \in \mathbb{Z}$ et $k' \in \mathbb{N}$ tels que

$$|u'' - (k + \sqrt{2}\,k')| < \frac{\epsilon}{8\pi}\ .$$

Alors soit $v = u + 2\pi k'$, qui est plus grand que N. On a $|\sin v - t| < \epsilon/2$. Comme sin
1-lipschitzienne (sa dérivée est cos, et on applique le théorème des accroissements finis

$$|\sin(\sqrt{2}\,v) - \sin u'| = |\sin(\sqrt{2}\,v + 2\pi k) - \sin u'| \leq |\sqrt{2}\,v + 2\pi k - u'|$$
$$= |\sqrt{2}\,u + 2\pi(k + \sqrt{2}k') - u'| = 2\pi|u'' - (k + \sqrt{2}k')| < \frac{\epsilon}{4}\ .$$

D'où

$$|\sin(\sqrt{2}\,v) - t'| \leq |\sin(\sqrt{2}\,v) - \sin u'| + |\sin u' - t'| < \epsilon/4 + \epsilon/4 = \epsilon/2\ .$$

Le résultat en découle.

Schème E.82 On ne traite que le cas $F = \mathbb{R}$, mais la preuve générale est semblable.

(1) L'application $||\cdot||_k$ est clairement positive, et vérifie $||\lambda x||_k = |\lambda|\ ||\lambda x||_k$ et $||x$
$y||_k \leq ||x||_k + ||y||_k$ pour tous x, y dans E et λ dans $\mathbb{R}$, par les propriétés de la vale
absolue et de la borne supérieure. Si $||(x_n)_{n\in\mathbb{N}}||_k = 0$, alors $(n+1)^k\,|x_n| = 0$ pour tou
dans $\mathbb{N}$, donc $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite nulle.

(2) Pour tous k dans $\mathbb{N}$, et $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans E, on a $(n+1)^k|x_{n+1}| \leq ((n+1)+1)^k|x_{n+}$
donc $||\sigma(x)||_k \leq ||x||_k$. D'où σ, qui est linéaire, est (1-lipschitzienne donc) continue, po
toute norme $||\cdot||_k$. Donc σ est continue sur E.

(3) Comme la topologie de E est définie par une famille dénombrable séparante (chac
semi-norme est une norme !) de semi-normes, il découle du cours que E est métrisable po
la distance

$$d(x, y) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^k} \min\{1, ||x - y||_k\}\ .$$

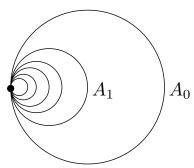
Soit $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans E pour cette distance, et notons $x_{i,n}$ le n-è
terme de la suite réelle x_i. Soit $k \in \mathbb{N}$. Pour tout i dans $\mathbb{N}$, notons y_i la suite ré
$\big((n+1)^k x_{i,n}\big)_{n\in\mathbb{N}}$. Comme $||x - y||_k \leq 2^k d(x, y)$ si $d(x, y) < \frac{1}{2^k}$, la suite $(y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est
Cauchy dans l'espace ℓ_∞, qui est complet par le cours. Donc elle converge vers un élém
$z_k = (z_{k,n})_{n\in\mathbb{N}}$. Comme $\lim_{i\to\infty}\ (n+1)^k x_{i,n} = z_{k,n}$, on en déduit que $z_{k,n} = (n+1)^k z$
Donc $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ converge vers z_0 dans E muni de la topologie définie par les semi-norm
$||\cdot||_k$.

Schème E.92 Notons $A_k = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ \big(x - \frac{1}{k+1}\big)^2 + y^2 = \frac{1}{(k+1)^2}\big\}$, qui est
cercle de centre $(\frac{1}{k+1}, 0)$ et de rayon $\frac{1}{k+1}$, donc en particulier est compact. L'ensemble
est borné, car contenu dans le disque de centre 1 et de rayon 1. Montrons qu'il est ferm
Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite dans A qui converge vers un élément x de $\mathbb{R}^n$. Montrons q
$x \in A$, ce qui conclut. Soit $n_k \in \mathbb{N}$ tel que $x_n \in A_{k_n}$. Quitte à extraire, ou bien à k_n
constant, et alors $x \in A_{k_n} \subset A$. Sinon, $\lim_{n\to+\infty}\ k_n = +\infty$, et alors $x = (0, 0)$, car po
tout $\epsilon > 0$, si k est assez grand, alors A_k est contenu dans le disque de centre 0 et
rayon ϵ.

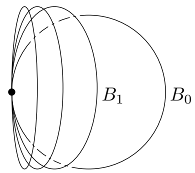
Comme A_k est connexe (par arcs), et que les A_k se rencontrent tous en $(0, 0)$,
sous-espace A est aussi connexe (par arcs). Tout point de $A - \{(0, 0)\}$ admet un systè
fondamental de voisinages homéomorphes à un intervalle, donc connexes. L'intersecti
avec A de la boule de rayon ϵ et de centre $(0, 0)$, qui est un voisinage de $(0, 0)$, est conne
car réunion d'arcs de cercles (connexes) et de cercles (connexes) se rencontrant en $(0,$
Donc A est localement connexe.

(2) Par le théorème de Tychonov, l'espace produit $\overline{\mathbb{B}}^{\mathbb{N}}$ est compact. Comme tout fermé d'un compact est compact, il suffit de montrer que C est fermé, et un raisonnement analogue au précédent conclut, car par les propriétés de la topologie produit, si une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de C converge vers $x \in \overline{\mathbb{B}}^{\mathbb{N}}$, de sorte que $x_n \in C_{k_n}$ où $\lim_{n\to+\infty}\ k_n = +\infty$, alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers la suite constante en x_*, donc $x = x_* \in C$.

Notons que les C_k sont homéomorphes à des cercles, qui ne se rencontrent deux à deux qu'en x_0. Soit f_k un homéomorphisme de A_k sur C_k envoyant $(0,0)$ sur x_*. Soit $f : A \to C$ l'application qui à x associe $f_k(x)$ si $x \in A_k$. Alors f est bien définie, et est une bijection, clairement continue en dehors du point $(0,0)$, et continue en $(0,0)$ aussi par ce qui précède. Comme A est compact et C séparé, on en déduit que f est un homéomorphisme.



anneaux hawaïens



bouquet de cercles

(3) Il est immédiat que $\mathscr{R}$ est bien une relation d'équivalence. Montrons que l'espace topologique quotient $\widetilde{\mathscr{B}}_I/\mathscr{R}$ est séparé. Comme $\widetilde{\mathscr{B}}_I$ est compact si I est fini (comme produit de deux compacts), par continuité (et surjectivité) de la projection canonique de $\widetilde{\mathscr{B}}_I$ dans $\mathscr{B}_I = \widetilde{\mathscr{B}}_I/\mathscr{R}$, ceci montrera que ce dernier espace est aussi compact. Il est facile de montrer que si x et y sont des points non équivalents de $\widetilde{\mathscr{B}}_I$, alors il existe deux ouverts saturés disjoints les contenant (en discutant suivant que x ou y soit égal à x_* ou pas). Donc $\widetilde{\mathscr{B}}_I/\mathscr{R}$ est séparé.

(4) Nous avons déjà vu que A et C sont homéomorphes.

L'espace $\mathscr{B}_{\mathbb{N}}$ n'est pas compact, car si x_n est l'image par la projection canonique $\pi : \widetilde{\mathscr{B}}_{\mathbb{N}} \to \mathscr{B}_{\mathbb{N}} = \mathscr{B}_{\mathbb{N}}/\mathscr{R}$ de $((-1,0),n)$, alors la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de valeur d'adhérence ℓ : on exclut séparément les deux cas $\ell = \pi(x_*,0)$ (la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne rentre pas dans le voisinage ouvert saturé $\{z \in \mathbb{S}_1\ :\ \operatorname{Re} z > 0\} \times \mathbb{N}$) et $\ell \neq \pi(x_*,0)$ (si $\ell = \pi(x_\ell, n_\ell)$, alors pour $n > n_\ell$, x_n n'appartient pas au voisinage ouvert saturé $\big(\mathbb{S}_1 - \{x_*\}\big) \times \{n_\ell\}$ de x_ℓ). Donc A et $\mathscr{B}_{\mathbb{N}}$ ne sont pas homéomorphes.

Schème E.93 (1) La topologie produit sur E^k est la topologie induite par n'importe quelle norme sur l'espace vectoriel de dimension finie E^k, par exemple $||(x_1,\dots,x_n)||_\infty = \max_{1\le i\le k}\ ||x_i||$. Donc il suffit de montrer que $B_k(E)$ est fermé borné. L'ensemble $B_k(E)$ est contenu dans la boule unité de $||\cdot||_\infty$. La fermeture découle de la continuité de la norme et du produit scalaire.

(2) Il est immédiat que l'action $\mathrm{O}(n) \times B_k(E) \to \times B_k(E)$ est à valeurs dans $B_k(E)$, et que c'est une action. Comme l'action est restriction d'une application polynomiale (donc continue) de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \times E^k$ dans E^k, le résultat en découle. Comme $\mathrm{O}(n)$ agit transitivement sur les bases orthonormées de E (et en complétant un k-uplet orthonormé en une base orthonormée, $\mathrm{O}(n)$ agit transitivement sur $B_k(E)$.

(3) Comme H est défini par l'égalité à 1 ou à 0 de certains des coefficients matriciels, H est fermé. Soit $(e_1,\dots,e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Comme H est le stabilisateur

du k-uplet $(e_1,\dots,e_k)$ dans $\mathrm{O}(n)$, l'action continue transitive précédente induit par p
sage au quotient une bijection continue de $\mathrm{O}(n)/H$ sur $B_k(E)$. L'image est séparée (
métrisable). Le but est séparé (car H est fermé), donc compact (car $\mathrm{O}(n)$ est compa
et la projection canonique est continue surjective). Donc cette bijection continue est
homéomorphisme.

(4) a) Ceci découle des propriétés de la distance de Hausdorff sur les fermés de l'
pace métrique $\overline{\mathbb{B}_n}$, avec le fait qu'un sous-espace de dimension k est déterminé par s
intersection avec cette boule.

b) Si $(v_1,\dots,v_k)$ est proche de $(v'_1,\dots,v'_k)$, alors toute combinaison linéraire à coe
cients dans $[-1,1]$ de $(v_1,\dots,v_k)$ est proche de la combinaison linéraire correspondan
de $(v'_1,\dots,v'_k)$, et donc la distance d_H entre les espaces engendrés est petite.

c) La transitivité découle de la transitivité de $\mathrm{O}(n)$ sur $B_k(E)$ en prenant des bas
Deux sous-espaces vectoriels de dimension k de $\mathbb{R}^n$, proches pour d_H, ont des bases proch
donc la continuité de l'action découle de celle sur $B_k(E)$.

d) L'argument est le même que celui pour (3).

Schème E.94 (1) Cette relation $\mathscr{R}$, que nous noterons $\mathscr{R}_X$ lorsque préciser l'espa
X est nécessaire, est clairement symétrique et réflexive. Soient x,y,z dans X tels q
$x\,\mathscr{R}\,y$ et $y\,\mathscr{R}\,z$. Pour tout espace topologique séparé Y et pour toute application contin
$f : X \to Y$, on a $f(x) = f(y)$ car $x\,\mathscr{R}\,y$ et $f(y) = f(z)$ car $y\,\mathscr{R}\,z$, donc $f(x) = f(z)$. Do
$\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence.

(i) Si X est séparé, et si $x \neq y$, alors x n'est pas en relation avec y (car l'ident
$f = \mathrm{id}$ de X dans l'espace topologique séparé $Y = X$ vérifie $f(x) \neq f(y)$). Donc $\mathscr{R}$
réduite à la diagonale de $X \times X$, et π_X est une bijection continue, clairement ouverte (
$\pi^{-1}(\pi(U)) = U$), donc π_X est un homéomorphisme. (Le résultat découle aussi du po
suivant en prenant $g = \mathrm{id} : X \to Y = X$.)

(ii) Soient Z un espace topologique séparé et $g : X \to Z$ une application contin
Si $x\,\mathscr{R}\,y$, alors $g(x) = g(y)$, donc g passe au quotient en une application (continue p
les propriétés du passage au quotient) $g_{\rm sep} : X_{\rm sep} \to Z$ telle que $g_{\rm sep} \circ \pi_X = g$. L'unic
découle de cette formule et de la surjectivité de π_X.

(iii) Montrons que $X_{\rm sep}$ est séparé. Soient $x', y' \in X_{\rm sep}$ deux points distincts. Soi
$x, y \in X$ tels que $\pi_X(x) = x'$ et $\pi_X(y) = y'$. Comme $\pi_X(x) \neq \pi_X(y)$, par définition de
il existe un espace topologique séparé Y et une application continue $f : X \to Y$, telle q
$f(x) \neq f(y)$. Alors les images réciproques par l'application continue $f_{\rm sep} : X_{\rm sep} \to Y$
voisinages ouverts disjoints de $f(x)$ et $f(y)$ sont des voisinages ouverts disjoints de π_X
et $\pi_X(y)$. Donc $X_{\rm sep}$ est séparé.

(iv) Si tout ouvert non vide de X est dense (on sait que c'est le cas si X est l'ensem
$\mathbb{R}^n$ muni de la topologie de Zariski), alors toute paire d'ouverts non vides de X
d'intersection non vide. Si $X_{\rm sep}$ contient au moins deux points, alors puisque $X_{\rm sep}$
séparé, les préimages par π_X de deux voisinages ouverts disjoints de ces deux poi
seront des ouverts non vides disjoints de X, ce qui n'est pas possible. Donc $X_{\rm sep}$ est réd
à un point ou vide (ce dernier cas si et seulement si X est vide).

(v) Supposons que de tout recouvrement ouvert de X, on puisse extraire un sous-reco
vrement fini. Nous venons de voir que $X_{\rm sep}$ est séparé. Soit $\mathscr{U} = (U_i)_{i\in I}$ un recouvreme
ouvert de $X_{\rm sep}$. Alors par continuité et surjectivité de π_X, la famille $\big(\pi_X^{-1}(U_i)\big)_{i\in I}$ est
recouvrement ouvert de X. Si $\big(\pi_X^{-1}(U_j)\big)_{j\in J}$ en est un sous-recouvrement fini, alors (U_j)
est un sous-recouvrement fini de $\mathscr{U}$, par surjectivité de π_X. Donc $X_{\rm sep}$ est compact.

(vi) Si X est connexe, alors $X_{\rm sep}$, comme image d'un connexe par l'application continue π_X, l'est. Réciproquement, si $X_{\rm sep}$ est connexe, pour toute application continue f de X dans l'espace discret (donc séparé) $\{0,1\}$, l'application $f_{\rm sep}$ continue de l'espace connexe $X_{\rm sep}$ dans $\{0,1\}$ est constante, donc f est constante, ce qui montre que X est connexe.

(vii) Si X, X' sont des espaces topologiques, et si $h : X \to X'$ est une application continue, alors $\pi_{X'} \circ h : X \to X'_{\rm sep}$ est une application continue (par composition d'applications continues) à valeurs dans un espace séparé, donc par (ii) passe au quotient en une application (continue par les propriétés du passage au quotient) $h_{\rm sep} : X_{\rm sep} \to X'_{\rm sep}$ telle que $h_{\rm sep} \circ \pi_X = \pi_{X'} \circ h$, unique par surjectivité de π_X. De l'unicité, on déduit en particulier que si $f : X_{\rm sep} \to X_{\rm sep}$ est une application continue telle que $f \circ \pi_X = \pi_X$, alors f est l'identité de $X_{\rm sep}$.

(viii) Il est clair que ${\rm id}_{\rm sep} = {\rm id}$ et si $g : X' \to X''$ est continue, alors l'égalité $(g \circ f)_{\rm sep} = g_{\rm sep} \circ f_{\rm sep}$ découle de l'unicité et du fait que $g_{\rm sep} \circ f_{\rm sep}$ est continue et vérifie $g_{\rm sep} \circ f_{\rm sep} \circ \pi_X = g_{\rm sep} \circ \pi_{X'} \circ f = \pi_{X''} \circ g \circ f$

(ix) Puisqu'un produit d'espaces séparés est séparé, l'application produit

$$p = \prod_{i\in I} \pi_{X_i} : X = \prod_{i\in I} X_i \to X'_{\rm sep} = \prod_{i\in I} (X_i)_{\rm sep}\ ,$$

définie par $(x_i)_{i\in I} \mapsto \big(\pi_{X_i}(x_i)\big)_{i\in I}$, est une application continue, car pour tout $i \in I$, sa i-ème composante est $\pi_{X_i} \circ {\rm pr}_i$, où ${\rm pr}_i$ est la i-ème projection, donc est continue comme composition d'applications continues. De plus, p est à valeurs dans un espace séparé, donc par (ii) induit par passage au quotient une application continue $\varphi = p_{\rm sep}$ de $X_{\rm sep}$ dans $X'_{\rm sep}$, surjective car p l'est, telle que $p = \varphi \circ \pi_X$. Montrons qu'il existe une application continue $q : X'_{\rm sep} \to X_{\rm sep}$ telle que $q \circ p = \pi_X$.

Nous aurons alors $q \circ \varphi \circ \pi_X = \pi_X$, donc par unicité $q \circ \varphi = {\rm id}_{X_{\rm sep}}$. Ceci implique par l'unicité mentionnée en fin de (vii) que φ est injective, donc bijective, et que son inverse est q. Donc φ est l'homéomorphisme cherché.

Il s'agit de montrer que si $(x_i)_{i\in I} \;\mathscr{R}_X\; (y_i)_{i\in I}$, alors pour tout $i \in I$, nous avons $x_i \;\mathscr{R}_{X_i}\; y_i$. Il suffit donc de montrer, pour tout $i \in I$ et pour toute application continue $f_i : X_i \to Y_i$ à valeurs dans un espace séparé Y_i, que nous avons $f_i(x_i) = f_i(y_i)$. Notons Y l'espace topologique produit $\prod_{i\in I} Y_i$, qui est séparé comme produit d'espaces séparés, et $f : \prod_{i\in I} X_i \to Y$ l'application produit $\prod_{i\in I} f_i$, définie par $(z_i)_{i\in I} \mapsto (f_i(z_i))_{i\in I}$. L'application f est continue, car chaque composante $f_i \circ {\rm pr}_i$ l'est. Donc $f((x_i)_{i\in I}) = f((y_i)_{i\in I})$, donc nous avons bien $f_i(x_i) = f_i(y_i)$ pour tout i dans I.

(2) (i) Notons $\mathscr{R}'$ la relation sur X définie par $x \mathscr{R}' y$ si et seulement si $d(x, y) = 0$. Cette relation est clairement réflexive car d est nulle sur la diagonale, symétrique car d l'est. Elle est transitive, par l'inégalité triangulaire : si $d(x, y) = 0$ et $d(y, z) = 0$, alors $0 \le d(x, z) \le d(x, y) + d(y, z) = 0$. Donc $\mathscr{R}'$ est une relation d'équivalence. Notons Y l'espace topologique quotient $X/\mathscr{R}'$. Si $x \mathscr{R}' x'$ et $y \mathscr{R}' y'$, alors ce même argument d'inégalité triangulaire montre que $d(x, y) = d(x', y')$. L'application $d : X \times X \to \mathbb{R}$ passe donc au quotient en une application $\overline{d} : Y \times Y \to [0, +\infty[$, qui est maintenant une distance. Il est facile de vérifier que la topologie quotient sur $Y = X/\mathscr{R}'$ coïncide avec la topologie définie par cette distance, car les préimages des boules ouvertes de centre x et de rayon r pour la distance $\overline{d}$ sont exactement les boules ouvertes pour la pseudo-distance d de centre n'importe quel point de la préimage de x et de rayon r.

En particulier, Y est séparé. Si $p : X \to Y$ est la projection canonique, il existe donc une unique application continue $p_{\rm sep} : X_{\rm sep} \to Y$. Réciproquement, comme π_X est

continue, et $X_{\rm sep}$ est séparé, si $d(x, y) = 0$, alors $\pi_X(x) = \pi_X(y)$ (sinon x et y auraient d
voisinages ouverts disjoints, ce qui n'est pas possible si $d(x, y) = 0$). Donc π_X passe
quotient par $\mathscr{R}'$ en une application $g : Y \to X_{\rm sep}$, continue par les propriétés de passa
au quotient. Il est immédiat que g et $p_{\rm sep}$ sont inverses l'une de l'autre. Donc $X_{\rm sep}$ et
sont homéomorphes. Comme Y est métrisable, il en est de même de $X_{\rm sep}$.

(ii) Pour tous $x, y \in E$, posons $d(x, y) = \sum_{n\in\mathbb{N}} 2^{-n} \min\{1, ||x - y||_n\}$, et rappelo
que d est une pseudo-distance sur E, dont la topologie induite coïncide avec la topolo
définie par la famille de semi-normes. La première assertion de (ii) découle alors de (i

Si E est muni d'une semi-norme $||\cdot||$, de pseudo-distance associée $d(x, y) = ||x -$
si $x, x', y, y' \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ (le corps valué de définition de E), si $x \mathscr{R}_E x'$ et $y \mathscr{R}_E y'$, al
$d(x, x') = 0$ et $d(y, y') = 0$, donc

$$0 \le d(x + \lambda y, x' + \lambda y') = ||x + \lambda y - x' - \lambda y' - y|| \le ||x - x'|| + |\lambda|\, ||y - y'|| \le 0\ .$$

Donc $x + \lambda y \;\mathscr{R}_E\; x' + \lambda y'$. La structure d'espace vectoriel passe donc au quotient
une structure d'espace vectoriel sur $E_{\rm sep}$, qui, par les propriétés de passage au quoti
des applications continues, muni $E_{\rm sep}$ d'une structure d'espace vectoriel topologique t
que $\pi_E : E \to E_{\rm sep}$ soit un morphisme d'espaces vectoriels topologiques. L'unicité
immédiate.

(iii) Comme deux éléments f, g de $E = \mathscr{L}^p(X, \mathscr{A}, \mu)$ coïncident presque partout si
seulement si $||f - g||_p = 0$, le résultat (iii) découle de la définition de $\mathbb{L}^p(X, \mathscr{A}, \mu)$ et
l'assertion (ii).

(3) (i) Puisque $\overline{H}$ contient H, la projection canonique $p_{\overline{H}} : G \to G/\overline{H}$ induit p
passage au quotient une application continue et surjective $f : G/H \to G/\overline{H}$ telle q
$f \circ p_H = p_{\overline{H}}$. Puisque $\overline{H}$ est un sous-groupe (par continuité des opérations) fermé dans
l'espace topologique quotient $G/\overline{H}$ est séparé (voir le corollaire 2.26). L'application con
nue et surjective f induit par passage au quotient (voir (1)(ii)) une application contin
surjective $\phi : (G/H)_{\rm sep} \to G/\overline{H}$ telle que $\phi \circ \pi_{G/H} \circ p_H = f$, donc $\phi \circ \pi_{G/H} = p_{\overline{H}}$. Montro
qu'il existe une application continue $q : G/\overline{H} \to (G/H)_{\rm sep}$ telle que $q \circ f = \pi_{G/H}$. P
l'argument d'unicité déjà employé en (1) (ix), ceci montrera que $q \circ \phi = {\rm id}$, donc que
est un homéomorphisme.

Il suffit de montrer que si $xH \;\mathscr{R}_{G/H}\; yH$, alors $xy^{-1} \in \overline{H}$. Or l'application $f : G/H$
$G/\overline{H}$ est continue à valeurs dans un espace séparé, donc $f(xH) = f(yH)$, ce qui
exactement dire que $xy^{-1} \in \overline{H}$.

(iii) Pour tous $x, y \in X$ et $g \in G$, si $x \mathscr{R} y$, alors pour toute application $f : X \to Y$
valeurs dans un espace séparé, l'application $f \circ L_g : x \mapsto f(gx)$ de X dans Y est contin
(comme composée de deux applications continues), et à valeurs dans un espace sépa
donc $f \circ L_g(x) = f \circ L_g(y)$, c'est-à-dire $f(gx) = f(gy)$. Donc $gx \;\mathscr{R}\; gy$. Le reste d
vérifications est alors immédiat.

(4) (i) L'adhérence de Γ_{xy} est un sous-groupe de $G = {\rm SO}(3)$, qui contient claireme
toutes les rotations d'axe Ox et toutes les rotations d'axe Oy, car 1 et 2π sont ratio
nellement indépendants. Pour toute rotation r, montrons que r appartient à $\overline{\Gamma_{xy}}$ (ce q
montre que Γ_{xy} est dense dans ${\rm SO}(3)$).

Soit A l'axe (orienté) de rotation de r. Quitte à conjuguer par une rotation d'axe O
nous pouvons supposer que A est contenu dans le plan Oyz. Quitte à conjuguer par u
rotation d'axe Ox, nous pouvons supposer que $A = Oy$, et le résultat en découle.

(ii) Soit U un ouvert non vide de ${\rm SO}(3)/\Gamma_{xy}$, et $\pi : {\rm SO}(3) \to {\rm SO}(3)/\Gamma_{xy}$ la project
canonique, qui est continue. Alors $V = \pi^{-1}(U)$ est un ouvert non vide de ${\rm SO}(3)$ invaria

par Γ_{xy}. Si $x \in \mathrm{SO}(3)$, alors l'orbite de x par Γ_{xy} est dense (la multiplication à gauche par x est un homéomorphisme), donc rencontre V, donc $x \in V$. Donc $V = \mathrm{SO}(3)$, et $U = \pi(V) = \mathrm{SO}(3)/\Gamma_{xy}$. Donc la topologie quotient de $\mathrm{SO}(3)/\Gamma_{xy}$ n'a pour ouvert que $\emptyset$ et $\mathrm{SO}(3)/\Gamma_{xy}$, c'est par définition la topologie grossière.

(iii) Par (3), les espaces topologiques $(\mathrm{SO}(3)/\Gamma_{xy})_{\mathrm{sep}}$ et $(\mathrm{SO}(3)/\Gamma_{x})_{\mathrm{sep}}$ sont homéomorphes à $\mathrm{SO}(3)/\overline{\Gamma_{xy}}$ et $\mathrm{SO}(3)/\overline{\Gamma_{x}}$, donc respectivement à un point par (ii), et à la sphère $\mathbb{S}_2$ de dimension 2, par le cours (voir l'exemple (4) précédant le théorème 4.17).

L'espace topologique X_{sep} est appelé *l'espace topologique séparé (canoniquement) associé à* X. Les points (1) (ii),(vii), (viii) disent que l'association à tout espace topologique X de l'espace topologique séparé X_{sep} et à toute application continue $f : X \to Y$ de l'application continue $f_{\mathrm{sep}} : X_{\mathrm{sep}} \to Y_{\mathrm{sep}}$, et un foncteur (covariant) de la catégorie des espaces topologiques dans la catégorie des espaces topologiques séparés. Le point (1) (ii) dit que X_{sep} est « le plus gros quotient » séparé de X.

Schème E.95 (1) a) Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, comme $P \mapsto P(k)$ est une forme linéaire sur l'espace vectoriel réel $\mathbb{R}[X]$, sa valeur absolue est une semi-norme.

b) La famille de semi-normes $\big(||\cdot||_k\big)_{k\in\mathbb{Z}}$ est dénombrable et séparante, car un polynôme non nul n'a qu'un nombre fini de racines. Donc par un résultat du cours, l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$ muni de la topologie $\mathscr{T}_1$ est un espace vectoriel topologique, métrisable par exemple par la distance

$$d(P,Q) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^{-|k|} \min\{1, ||P-Q||_k\} \;.$$

Le sous-ensemble $\mathbb{Q}[X]$ des polynômes à coefficients rationnels est dénombrable, et dense dans cet espace topologique, car pour tous $P = \sum_{i=0}^n a_i X^i \in \mathbb{R}[X]$, $N \in \mathbb{Z}$ et $\epsilon > 0$, il existe $Q = \sum_{i=0}^n b_i X^i \in \mathbb{Q}[X]$ tel que pour tout $k \in \mathbb{Z} \cap [-N, N]$, nous ayons $||P - Q||_k < \epsilon$: il suffit de prendre, pour tout $i \in \mathbb{N} \cap [0, n]$, un b_i dans $\mathbb{Q}$ tel que $|a_i - b_i| < \frac{\epsilon}{(n+1)N^n}$. [Une autre manière d'énoncer cela est que pour tout $P = \sum_{i=0}^n a_i X^i \in \mathbb{R}[X]$, et tout $i \in \mathbb{N} \cap [0, n]$, en choisissant $(a_{i,p})_{p\in\mathbb{N}}$ une suite de rationnels convergeant vers a_i, et en posant $Q_p = \sum_{i=0}^n a_{i,p} X^i \in \mathbb{Q}[X]$, nous avons, pour tout $k \in \mathbb{Z}$ (quelconque, fixé), $||P - Q_p||_k = |P(k) - Q_p(k)|$ qui tend vers 0 quand p tend vers $+\infty$, et donc la suite $(Q_p)_{p\in\mathbb{N}}$ qui converge vers P dans $\mathscr{T}_1$]. Donc $(\mathbb{R}[X], \mathscr{T}_1)$ est séparable.

Si $P_n = \sum_{i=0}^n \frac{X^i}{i!}$, alors l'application $x \mapsto P_n(x)$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ converge simplement (et même uniformément sur les compacts) vers l'application $x \mapsto e^x$. Donc pour tout $k \in \mathbb{N}$, la suite $\big(P_n(k)\big)_{k\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$, donc pour tout $\epsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que si $n, m \geq N$, alors $||P_n - P_m||_k = |P_n(k) - P_m(k)| < \epsilon$. Donc la suite $(P_n)_{k\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $(\mathbb{R}[X], d_1)$. Mais elle ne converge pas dans cet espace, car si elle convergeait vers un polynôme P, alors par continuité pour $\mathscr{T}_1$ de l'évaluation en un élément $k \in \mathbb{Z}$, ce polynôme P prendrait en k la valeur $e^k = \lim_{n\to+\infty} P_n(k)$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$, ce qui n'est pas possible (par exemple parce que $P(k)$ est équivalent, quand $k \to +\infty$, à ck^m, où $m \in \mathbb{N}$ est le degré de P (qui n'est pas le polynôme nul) et où $c \neq 0$ son coefficient dominant, et donc n'est pas équivalent à e^k).

c) Puisque $|P(k) - P_0(k)| = ||P - P_0||_k$ pour tous $k \in \mathbb{Z}$ et $P, P_0 \in \mathbb{R}[X]$, l'application d'évaluation en un élément $k \in \mathbb{Z}$ est continue [cette application étant linéaire, et $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{R}$ des espaces vectoriels topologiques, on pouvait se contenter de vérifier la continuité en $P_0 = 0$, mais c'est aussi long de justifier correctement que de prendre P_0 quelconque]. L'application $P \mapsto \big(P(0), P(1), \dots, P(n)\big)$ est continue car chacune de ses composantes l'est, par les propriétés de la topologie produit.

d) L'application de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}^{n+1}$ définie par $P \mapsto \big(P(0), P(1), \dots, P(n)\big)$ linéaire, injective entre espaces vectoriels réels de même dimension finie, donc est un i morphisme linéaire, continu par c) et par restriction d'application continue. Sa récipro est l'application (utilisant les polynômes d'interpolation de Lagrange)

$$(a_0, a_1, \dots, a_n) \mapsto \sum_{i=0}^n a_i \frac{\prod_{1\leq j\leq n,\, j\neq i}(X-j)}{\prod_{1\leq j\leq n,\, j\neq i}(i-j)} \;,$$

qui est continue par les propriétés des topologies finales, car pour tout $k \in \mathbb{Z}$, l'applicat de $\mathbb{R}^{n+1}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$(a_0, a_1, \dots, a_n) \mapsto \sum_{i=0}^n a_i \frac{\prod_{1\leq j\leq n,\, j\neq i}(k-j)}{\prod_{1\leq j\leq n,\, j\neq i}(i-j)}$$

est continue. La topologie induite par $\mathscr{T}_1$ sur $\mathbb{R}_n[X]$ est donc la topologie usuelle d espace vectoriel réel de dimension finie. Par le théorème de Riesz, celle-ci est localem compacte.

e) L'application ϕ de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}^{n+1}$ définie par $P \mapsto \big(P(0), P(1), \dots, P(n)\big)$ linéaire, surjective, et continue par l'assertion c). Deux polynômes ont la même image Ψ si et seulement si leur différence admet $0, 1, \dots, n$ pour racines, donc, celles-ci étant de à deux distinctes, si et seulement si leur différence est divisible par Q_n. Donc ϕ passe quotient en une application $\overline{\phi} : \mathbb{R}[X]/Q_n\mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}^{n+1}$ linéaire bijective continue entre espaces vectoriels de même dimension $n+1$. Son inverse est la composée de l'applicat de $\mathbb{R}^{n+1}$ dans $\mathbb{R}_n[X]$ inverse de celle considéré en c), donc continue, de l'inclusion $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$, continue par définition de la topologie de sous-espace topologique, de la projection canonique $\mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]/Q_n\mathbb{R}[X]$, continue par définition de la topolo quotient. Donc $\overline{\phi}$ est un homéomorphisme.

f) Montrons que l'ensemble M des monômes est (séquentiellement) fermé. Soit P_n $(a_n X^{m_n})_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans M convergeant vers un polynôme P pour $\mathscr{T}_1$. Par continu de l'évaluation en 1, la suite $(a_n = P_n(1))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $P(1)$. Si la suite $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ constante, égale à N, notons $Q = P(1)X^N$. Alors pour tout $k \in \mathbb{Z}$, par continuité l'évaluation en k, nous avons $Q(k) = \lim_{n\to+\infty} P_n(k) = P(k)$, donc P et Q ayant u infinité de racines en commun, coïncident, et $P = Q \in M$. Sinon, quitte à extraire, no pouvons supposer que la suite $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $+\infty$. Si $P = 0$, alors $P \in M$. Sin il existerait $k \in \mathbb{Z}$ tel que $P(k) \neq 0$. Mais alors, par continuité des évaluations en k $k+1$, la suite des $\left(\frac{k+1}{k}\right)^{m_n} = \frac{P_n(k+1)}{P_n(k)}$ convergerait (vers $\frac{P(k+1)}{P(k)}$), ce qui n'est pas possib

g) Pour montrer que l'application de $\mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$ définie par $(P, Q) \mapsto$ est continue, il suffit de montrer, par les propriétés des topologies initiales, que pour to $R \in \mathbb{R}[X]$ et tout $k \in \mathbb{Z}$, l'application $f : \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}$ définie par $f(P, Q)$ $||PQ - R||_k$ est continue en tout point (P_0, Q_0). Comme $\big|\, ||PQ - R||_k - |P_0Q_0 - R||_k$ $|P(k)Q(k) - P_0(k)Q_0(k)|$, ceci découle de la continuité de l'application d'évaluation en et du produit dans $\mathbb{R}$.

Si $Q \in \mathbb{R}[X]$ prend des valeurs entières sur $\mathbb{Z}$, alors l'application de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}$ définie par $P \mapsto P \circ Q$ est continue, car pour tout $k \in \mathbb{Z}$, l'application d'évaluation $Q(k) \in \mathbb{Z}$ est continue.

Réciproquement, si $Q \in \mathbb{R}[X]$ et $k_0 \in \mathbb{Z}$ sont tels que $Q(k_0)$ n'appartienne pas à alors en notant P_n le polynôme d'interpolation de Lagrange de degré $2n+1$ valant 0 tout point de $\mathbb{Z}\cap[-n,+n]$ et 1 en $Q(k_0)$, alors $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 pour $\mathscr{T}_1$ (car, pour tout $k\in\mathbb{Z}$, $P_n(k)$ vaut 0 si n est assez grand, donc converge vers 0). Mais la suite $(P_n\circ Q)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers $0\circ Q=0$, car $P_n\circ Q(k_0)=1$ pour tout n. Donc l'application de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$ définie par $P\mapsto P\circ Q$ n'est pas continue.

(2) a) Soit $P_n=X^n$. Pour tout $i\in\mathbb{N}$, si n est assez grand ($n>i$), alors $a_i(P)=0$. Donc par les propriétés de la topologie produit, la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers le polynôme nul pour la topologie $\mathscr{T}_2$. Mais $P_n(1)=1$ ne converge pas vers 0 quand n tend vers l'infini, donc par continuité de l'évaluation en 1 pour la topologie $\mathscr{T}_1$, la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers le polynôme nul pour la topologie $\mathscr{T}_1$.

b) Soit $P_n=\prod_{i=-n}^{n}(X-i)$. Pour tout $k\in\mathbb{Z}$, si n est assez grand ($n>|k|$), alors $||P_n||_k=|P_n(k)|=0$. Donc par définition de la topologie $\mathscr{T}_1$, la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers le polynôme nul pour $\mathscr{T}_1$. Mais $a_1(P_n)=(-1)^n(n!)^2$ ne converge pas vers 0 quand n tend vers l'infini, donc par continuité des projections pour la topologie produit, la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers le polynôme nul pour la topologie $\mathscr{T}_2$.

c) Si A est l'ensemble des $P\in\mathbb{R}[X]$ tels que $|a_i(P)|\leq i$ pour tout $i\in\mathbb{N}$, alors $\Phi(A)$ est contenu dans $\prod_{i\in\mathbb{N}}[-i,i]$. Comme $\prod_{i\in\mathbb{N}}[-i,i]$ est compact par le théorème de Tychonov, donc fermé car $\mathbb{R}\mathbb{N}$ est séparé, l'adhérence de $\Phi(A)$ est contenue dans $\prod_{i\in\mathbb{N}}[-i,i]$. Comme tout fermé d'un compat est compact, le résultat s'en déduit.

[En fait, on peut montrer, même si c'est inutile, que $\overline{\Phi(A)}=\prod_{i\in\mathbb{N}}[-i,i]$. En effet, pour tout $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, l'image par l'application Φ de la suite de polynômes $(P_n=\sum_{i=0}^{n}a_iX^i)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$, car pour tout $i\in\mathbb{N}$, si n est assez grand ($n\geq i$), alors $a_i(P)=a_i$. Ceci montre aussi que l'image de Φ est dense.]

d) Comme les coefficients de PQ et de $P\circ Q$ sont des polynômes en les coefficients de P et de Q, et par les propriétés des topologies produits, les applications de multiplication et de composition de deux polynômes sont continues pour $\mathscr{T}_2$.

Schème E.96 (1) Soit F un sous-groupe fermé de $\mathbb{R}^N$. Soit F_1 un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^N$, contenu dans F, de dimension maximale (éventuellement nulle). En particulier, F_1 est isomorphe (en tant que groupe topologique additif) à $\mathbb{R}^q$, pour un $q\in\mathbb{N}$. Soit F_2 l'intersection de F et de l'orthogonal de F_1 (pour le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^N$). Alors F_2 est un sous-groupe de F, et F est isomorphe (en tant que groupe topologique) au groupe produit $F_1\times F_2$, par l'application, où $\pi:\mathbb{R}^N\to F_1$ est la projection orthogonale (qui est linéaire), définie par $x\mapsto(\pi(x),x-\pi(x))$.

Montrons que F_2 est discret. Sinon, il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans F_2 tendant vers 0. Quitte à extraire, $\big(x_n/||x_n||\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un vecteur v non nul, et la droite vectorielle D passant par v est contenue dans l'adhérence de F (chacun des points de D étant limite de multiples entiers de x_n). Donc F_1+D serait un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^N$, contenu dans F, de dimension strictement supérieure à celle de F_1, contradiction.

Montrons que le groupe F_2 est isomorphe à $\mathbb{Z}^p$ avec $p\in\mathbb{N}\cap[0,N-q]$, ce qui conclut. Si $F=F_1$, le résultat est clair. Si $F\neq F_1$, soit e_1 un élément non nul de norme minimale dans F_2 (qui existe, car l'intersection d'un compact de $\mathbb{R}^n$ et d'une partie discrète de $\mathbb{R}^n$ est finie). Construisons par récurrence sur $i\in\mathbb{N}-\{0\}$, tant que c'est possible, un vecteur e_i, tel que $e_1,\dots,e_i$ soient linéairement indépendants et que $\mathbb{Z}e_1+\dots+\mathbb{Z}e_i$ soit contenu dans F_2 (donc en particulier i est au plus la dimension de l'orthogonal de F_1, c'est-à-dire $N-q$). Supposons $e_1,\dots,e_i$ construits. Soit V_i le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^N$ engendré par $e_1,\dots,e_i$.

Si F_2 n'est pas contenu dans V_i, soit e_{i+1} un élément de F_2, n'appartenant pas à
tel que

$$||e_{i+1}||=\min_{x\in F_2-V_i}\min_{v\in V_i}||x+v||\ .$$

Ceci existe, car l'application $f:x\mapsto d(v,V_i)=\min_{v\in V_i}||x-v||$ est continue, strictem
positive en dehors de V_i qui est fermé, et sa borne inférieure sur F_2-V_i est à cherc
dans une partie finie de F_2-V_i, par discrétude de F_2 et par invariance par $\mathbb{Z}e_1+\dots+$
de F_2-V_i. Alors e_{i+1} convient.

Si F_2 est contenu dans V_i, montrons que $F_2=\mathbb{Z}e_1+\dots+\mathbb{Z}e_i$, ce qui termine
récurrence, et montre le résultat. Sinon, soit $x\in F_2$ tel que $x\notin\mathbb{Z}e_1+\dots+\mathbb{Z}e_i$. Al
quitte à enlever à x un élément de $\mathbb{Z}e_1+\dots+\mathbb{Z}e_i$, il existe $\lambda_1,\dots,\lambda_i\in\mathbb{R}$ tels
$x=\lambda_1e_1+\dots+\lambda_ke_k$ et $\lambda_k\neq0$, $|\lambda_k|\leq\frac{1}{2}$. Mais alors $x\in F_2-V_{k-1}$ (en posant
convention $V_0=\{0\}$), et $\min_{v\in V_{k-1}}||x+v||\leq||\lambda_ke_k||<||e_k||$, ce qui contredit la propri
de minimalité de e_k.

(2) Notons que δ est bien définie, car pour $\epsilon>1$, $V_\epsilon(B_\epsilon)=\mathbb{R}^N$ (et en particulier $\delta\leq$
L'application $\delta:X\times X\to\mathbb{R}$ est clairement positive ou nulle, nulle sur la diagonale
symétrique. Elle s'annule seulement sur la diagonale : si $\delta(F,F')=0$, alors pour t
$x\in F$, pour tout $\epsilon>0$ suffisamment petit, $d(x,F')\leq\epsilon$, donc $x\in F'$ puisque F'
fermé, et $F\subset F'$; d'où, par symétrie, si $\delta(F,F')=0$, alors $F=F'$.

Soient A,B des parties de $\mathbb{R}^N$ et $\epsilon,\eta>0$; remarquons que

$$V_\epsilon(A)=\{x\in\mathbb{R}^N\ :\ \exists\,y\in A,\ d(x,y)<\epsilon\}\ ,$$

donc $V_\epsilon(V_\eta(A))\subset V_{\epsilon+\eta}(A)$, par inégalité triangulaire dans $\mathbb{R}^N$ [si $x\in V_\epsilon(V_\eta(A))$, alor
existe $y\in V_\eta(A)$ tel que $d(x,y)<\epsilon$, donc il existe $z\in A$ tel que $d(y,z)<\epsilon$, d'où $d(x,z$
$\epsilon+\eta$ et $x\in V_{\epsilon+\eta}(A)$] ; de plus, si $\epsilon\leq\eta$ et $A\subset A'$, alors $B_\epsilon\subset B_\eta$ et $V_\epsilon(A)\subset V_\eta(B)$; en
$V_\epsilon(A\cup B)=V_\epsilon(A)\cup V_\epsilon(B)$.

Montrons que δ vérifie l'inégalité triangulaire. Soient $F,F',F''\in X$ et $\epsilon,\eta>0$ tels
$F\subset V_\epsilon(F'\cup B_\epsilon)$, $F'\subset V_\epsilon(F\cup B_\epsilon)$, $F'\subset V_\eta(F''\cup B_\eta)$ et $F''\subset V_\eta(F'\cup B_\eta)$. Donc

$$\begin{aligned}F\subset V_\epsilon(F'\cup B_\epsilon)&=V_\epsilon(F')\cup V_\epsilon(B_\epsilon)\subset V_\epsilon(V_\eta(F''\cup B_\eta)\cup V_\epsilon(B_\epsilon)\\&\subset V_{\epsilon+\eta}(F'')\cup V_{\epsilon+\eta}(B_\eta)\cup V_\epsilon(B_\epsilon)\subset V_{\epsilon+\eta}(F''\cup B_{\epsilon+\eta})\ .\end{aligned}$$

De manière symétrique, $F''\subset V_{\epsilon+\eta}(F\cup B_{\epsilon+\eta})$. Donc $\delta(F,F'')\leq\epsilon+\eta$. En prenant la bo
inférieure sur tous les tels ϵ et η, nous avons donc bien

$$\delta(F,F'')\leq\delta(F,F')+\delta(F',F'')\ .$$

(3) Supposons tout d'abord que $(F_i)_{i\in\mathbb{N}}$ converge vers F pour la distance δ.

a) Soit $x\in F$. Par définition de la distance δ, pour tout $p\in\mathbb{N}$, il existe $N_p\in\mathbb{N}$
que pour tout $i\geq N_p$, il existe $x_{i,p}\in F_i$ tel que $d(x,x_{i,p})<\frac{1}{p+1}$. Nous pouvons suppo
que la suite $(N_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante, et nous posons alors $x_i=0$ si $i<N_0$,
$x_i=x_{i,p}$ si $N_p\leq i<N_{p+1}$. Alors clairement $x_i\in F_i$ et $x_i\to_{i\to+\infty}x$.

b) Soit $(i_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite strictement croissante dans $\mathbb{N}$, soit x_{i_k} un élément de F_{i_k} po
tout $k\in\mathbb{N}$. Supposons que x_{i_k} converge vers un élément x de $\mathbb{R}^N$ quand $k\to+\infty$.
particulier, la suite $(x_{i_k})_{k\in\mathbb{N}}$ reste bornée, donc pour tout $\epsilon>0$, pour k assez grand
existe par définition de δ un point $x_{k,\epsilon}$ dans F tel que $d(x_{i_k},x_{k,\epsilon})\leq\epsilon$. Donc x est lim
de points de F. Mais comme F est fermé, ceci implique que $x\in F$.

Maintenant, supposons que les assertions a) et b) soient vérifiées, et montrons que $(F_i)_{i\in\mathbb{N}}$ converge vers F pour la distance δ.

Fixons $\epsilon > 0$. Puisque $K = F \cap \overline{B}(0, \frac{1}{\epsilon})$ est fermé dans un compact, donc est compact et métrisable, il existe une suite finie $(x_j)_{1\leq j\leq m}$ dans K telle que pour tout x dans K, nous ayons $d(x, x_j) < \frac{\epsilon}{2}$. Par l'assertion a), pour tout $j \in \mathbb{N} \cap [1, m]$, il existe une suite $(x_{i,j})_{i\in\mathbb{N}}$ telle que $x_{i,j} \in F_i$ et $x_{i,j} \to_{i\to\infty} x_j$. Par finitude de m, il existe $N' \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $i \geq N'$, pour tout $j \in \mathbb{N} \cap [1, m]$, nous ayons $d(x_{i,j}, x_j) \leq \frac{\epsilon}{2}$. Donc par inégalité triangulaire, $K \subset V_\epsilon(F_i)$, et donc, pour tout $i \geq N$, nous avons $F \subset V_\epsilon(F_i \cup B_\epsilon)$.

Montrons par l'absurde qu'il existe aussi $N'' \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $i \geq N''$, nous avons $F_i \subset V_\epsilon(F \cup B_\epsilon)$, ce qui conclut. Sinon, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $i_n \geq n$ et $x_{i_n} \in F_{i_n}$ tel que $x_{i_n} \notin V_\epsilon(F \cup B_\epsilon)$. Nous pouvons supposer que la suite $(i_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante. En particulier, la suite $(x_{i_n})_{n\in\mathbb{N}}$ reste dans le compact $\overline{B}(0, \frac{1}{\epsilon})$, donc converge quitte à extraire vers $x \in \mathbb{R}^N$. Mais $d(x_{i_n}, F) \geq \epsilon$, et donc par passage à la limite, $d(x, F) \geq \epsilon > 0$, et x n'appartient pas à F, ce qui contredit l'assertion b).

(4) Puisque tout est métrisable, nous pouvons utiliser des suites pour montrer la continuité. Soit donc (g_i, F_i) une suite convergeant vers (g, F) dans $G \times X$. Montrons que g_iF_i converge vers gF en utilisant la question 3).

Pour tout $y \in gF$, posons $x = g^{-1}y \in F$. Alors puisque F_i converge vers F et par a), il existe x_i dans F_i convergeant vers x. Posons $y_i = g_ix_i \in g_iF_i$. Alors par continuité de l'action de $\mathrm{GL}_N(\mathbb{R})$ sur $\mathbb{R}^N$, nous avons $y_i = g_ix_i \to gx = y$, ce qui montre a).

Soit y_{i_k} un élément de $g_{i_k}F_{i_k}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, convergeant vers $y \in \mathbb{R}^N$. Posons $x_{i_k} = g_{i_k}^{-1}y_{i_k} \in F_{i_k}$, qui converge vers $x = g^{-1}y$ par continuité de l'inverse et de l'action de $\mathrm{GL}_N(\mathbb{R})$ sur $\mathbb{R}^N$. Puisque F_i converge vers F et par b), nous avons $x \in F$, et donc $y = gx \in gF$, ce qui montre b).

(5) Si $N = 2$, le groupe $\mathrm{SO}(2)$, compact, homéomorphe à un cercle, agit transitivement sur le sous-espace Z de X formé des sous-groupes isomorphes à $\mathbb{R}$, car ce sont les droites vectorielles de $\mathbb{R}^2$. Le noyau de l'action est $\{\pm\mathrm{Id}\}$. L'application orbitale $\mathrm{SO}(2) \to Z$ définie par $g \mapsto g(\mathbb{R} \times \{0\})$, continue, surjective, induit par passage au quotient une application $\mathrm{SO}(2)/\{\pm\mathrm{Id}\}$, continue, bijective, de source compacte (car $\{\pm\mathrm{Id}\}$ est un sous-groupe fermé de $\mathrm{SO}(2)$, donc $\mathrm{SO}(2)/\{\pm\mathrm{Id}\}$ est séparé et image d'un compact par une application continue) et de but séparé, donc est un homéomorphisme. De plus, l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathrm{SO}(2)$ qui à $\theta \in \mathbb{R}$ associe la rotation d'angle θ, induit un homéomorphisme de $\mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$ dans $\mathrm{SO}(2)/\{\pm\mathrm{Id}\}$. Donc Z est homéomorphe à un cercle.

(6) Rappelons que par le théorème de Bolzano-Weierstrass, pour tout $\epsilon > 0$, tout espace métrique compact X admet une partie A finie ϵ-dense (i.e. telle que tout point de X soit à distance au plus ϵ d'un point de A). Comme X est un espace métrique, montrons que de toute suite $(F_i)_{i\in\mathbb{N}}$ dans X, on peut extraire une sous-suite convergente.

Nous pouvons supposer que F_i est non nul, donc infini, pour tout i. Pour tous $i, k \in \mathbb{N}$, soit $K_{i,k}$ une partie finie $\frac{1}{k+1}$-dense de $F_i \cap \overline{B}(0, k)$. Nous pouvons supposer que $K_{i,k} \subset K_{i,k+1}$. Numérotons $(x_{i,j})_{j\in\mathbb{N}}$ les éléments de $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} K_{i,k}$, de manière à ce que les éléments de $K_{i,k+1} - K_{i,k}$ soient de numéro supérieurs à ceux de $K_{i,k}$. Ainsi, pour tout $j \in \mathbb{N}$, la suite $(x_{i,j})_{i\in\mathbb{N}}$ reste dans un compact de $\mathbb{R}^N$, donc converge quitte à extraire. Par extraction diagonale, nous pouvons supposer que pour tout $j \in \mathbb{N}$, la suite $(x_{i,j})_{i\in\mathbb{N}}$ converge vers $x_j \in \mathbb{R}^N$. Notons F l'adhérence de $\{x_j \ : \ j \in \mathbb{N}\}$. Alors F est un fermé de $\mathbb{R}^N$. De plus, pour tout $y \in F$, il existe $y_i \in F_i$ tel que y_i converge vers y. Et si $y_{i_n} \in F_{i_n}$ converge vers y, alors les y_{i_n} restent dans un compact, donc sont proches d'éléments $x_{i_n,j}$ avec j borné, donc y appartient à F (qui est fermé). Enfin, si $y, z \in F$, alors soient $y_i, z_i \in F_i$

tels que y_i converge vers y et z_i converge vers z. Alors $y_i - z_i \in F_i$ converge vers y –
donc $y - z \in F$, et F est un sous-groupe. Par 3), la suite $(F_i)_{i\in\mathbb{N}}$ converge donc vers
dans X.

(7) Soit Y l'ensemble des sous-groupes fermés de $\mathbb{R}^N$ isomorphes à $\mathbb{Z}^N$. La preuve
(1) montre de plus qu'un élément de Y est discret, et engendré (comme groupe abéli
par des vecteurs $(e_1, \dots, e_N)$ linéairement indépendants. Considérons l'application orbit
$\widetilde{\Theta} : G \to Y$ définie par $g \mapsto g(\mathbb{Z}^N)$. Cette application est continue, surjective par ce
précède, et passe au quotient en une application continue $\Theta : G/\mathrm{GL}_N(\mathbb{Z}) \to X$ qui
bijective, car le stabilisateur de $\mathbb{Z}^N$ sous l'action de G est exactement $\mathrm{GL}_N(\mathbb{Z})$. Si F est
élément de Y, engendré (comme groupe abélien) par des vecteurs $(e_1, \dots, e_N)$ linéaireme
indépendants, et si $F' \in Y$ est suffisamment proche de F pour la distance δ, alors
prenant des vecteurs $e'_1, \dots, e'_N$ de F' proches de $e_1, \dots, e_N$, la suite $(e'_1, \dots, e'_N)$ s
linéairement indépendante, et engendre F', ce qui montre que Y est ouvert. La matr
de passage de la base vectorielle $(e_1, \dots, e_N)$ à la base vectorielle $(e'_1, \dots, e'_N)$ est d
proche de l'identité. Donc par continuité de la projection canonique $G \to G/\mathrm{GL}_N($
cela montre la continuité de la réciproque de Θ.

Schème E.99 (1) Pour tout α dans $\mathscr{A}$, l'application $x \mapsto ||f_\alpha(x)||$ est continue, com
composée des applications continues f_α et $y \mapsto ||y||$. Comme toute borne supérieure
fonctions (semi-)continues inférieurement est semi-continue inférieurement, le résultat
découle.

(2) Supposons par l'absurde que l'intérieur de F_n soit non vide. Soient $x_0 \in E$ et ϵ >
tels que $B(x_0, 2\epsilon) \subset F_n$. Alors tout α dans $\mathscr{A}$, pour tout x dans E tel que $||x|| = 1$, p
inégalité triangulaire et puisque x_0 et $x_0 + \epsilon x$ appartiennent à $B(x_0, 2\epsilon)$, nous avons

$$||f_\alpha(x)|| = \frac{1}{\epsilon}||f_\alpha(\epsilon x + x_0 - x_0)|| \leq \frac{1}{\epsilon}\big(||f_\alpha(x_0 + \epsilon x)|| + ||f_\alpha(x_0)||\big) \leq \frac{2n}{\epsilon} \,.$$

Donc $\sup_{\alpha\in\mathscr{A}} ||f_\alpha|| \leq \frac{2n}{\epsilon} < +\infty$, ce qui contredit l'hypothèse.

(3) Le sous-espace $F_n = \{x \in E \ : \ g(x) \leq n\}$ est fermé, car g est semi-continue in
rieurement (voir la proposition 5.27). Donc ${}^cF_n$ est un ouvert dense de l'espace métric
complet E. Par le théorème 5.45 de Baire, $G = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} {}^cF_n$ est donc dense.

[Voici une autre méthode pour montrer directement le résultat final. Par l'absur
supposons qu'il existe x_0 dans $E - \overline{G}$. Cet ensemble étant ouvert, il existe $\epsilon > 0$
que $B(x_0, 2\epsilon) \subset E - G$. En particulier, $\lambda_y = \sup_{\alpha\in\mathscr{A}} ||f_\alpha(y)|| < +\infty$, pour tout y da
$B(X_0, 2\epsilon)$. Pour tout x non nul dans E, pour tout $\alpha \in \mathscr{A}$, nous avons

$$\sup_{\alpha\in\mathscr{A}} ||f_\alpha(x)|| = \sup_{\alpha\in\mathscr{A}} \frac{||x||}{\epsilon}||f_\alpha(x_0 + \frac{\epsilon}{||x||}x) - f_\alpha(x_0)|| \leq \frac{||x||}{\epsilon}(\lambda_{x_0 + \frac{\epsilon}{||x||}x} + \lambda_{x_0}) < +\infty$$

Le théorème 6.25 de Banach-Steinhaus, qui dit qu'alors $\sup_{\alpha\in\mathscr{A}} ||f_\alpha|| < +\infty$, contre
l'hypothèse centrale de l'énoncé.]

Schème E.100 Le but de cet exercice est de montrer, dans un exemple très simple, c
la somme directe de deux sous-espaces vectoriels fermés d'un espace vectoriel topologic
n'est pas forcément fermée.

(1) Commençons par une remarque générale (qui implique que A et B existent bie

Lemme 8.1 *Si E est un espace vectoriel topologique, et A une partie de E, alors il existe un (et un seul) plus petit (pour l'inclusion) sous-espace vectoriel fermé contenant A. C'est l'intersection de tous les sous-espaces vectoriels fermés contenant A, ainsi que l'adhérence du sous-espace-vectoriel engendré par A.*

Preuve. L'ensemble des sous-espaces vectoriels fermés contenant A est clairement stable par intersection (quelconque). Donc son intersection est l'unique plus petit sous-espace vectoriel fermé contenant A. Celui-ci contient bien sur l'adhérence du sous-espace-vectoriel engendré par A. Nous avons vu que l'adhérence d'un sous-espace vectoriel est un sous-espace vectoriel (fermé). Le résultat en découle. □

Tout sous-espace vectoriel fermé d'un espace de Hilbert est complet, donc un espace de Hilbert, et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (respectivement $(b_n/||b_n||)_{n\in\mathbb{N}}$) est une suite orthonormée, dont l'espace vectoriel engendré est dense dans A (respectivement B), donc est une base hilbertienne de A (respectivement B).

Si $(\alpha_i)_{i\in\mathbb{N}}$ et $(\beta_i)_{i\in\mathbb{N}}$ sont deux suites de carré sommable telles que $\sum_{i\in\mathbb{N}} \alpha_i\, a_i = \sum_{i\in\mathbb{N}} \beta_i\, b_i/||b_i||$, alors

$$\sum_{i\in\mathbb{N}}(\alpha_i - \big(1+\frac{1}{(i+1)^2}\big)^{-1/2}\beta_i)\, e_{2i} - \sum_{i\in\mathbb{N}} \big(1+(i+1)^2\big)^{-1/2}\beta_i\, e_{2i+1} = 0\ .$$

Comme $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de E, et par sommabilité des carrés de la suite de n-ème terme $\big(1+(\frac{n+1}{2})^2\big)^{-1/2}\beta_{\frac{n-1}{2}}$ si n est impair, et $\alpha_{\frac{n}{2}} - \big(1+\frac{1}{(\frac{n}{2}+1)^2}\big)^{-1/2}\beta_{\frac{n}{2}}$ si n est pair, il en découle (par unicité de l'écriture en base hilbertienne) que $\beta_i = 0$ pour tout i, et donc que $\alpha_i = 0$ pour tout i. Donc $A\cap B = \{0\}$.

(2) Posons $f : (x,y)\mapsto x+y$ et $x_n = (-a_n, b_n)\in A\times B$ (muni par exemple de la norme produit du maximum). Alors $||x_n||\geq 1$ et $||f(x_n)|| = \frac{1}{n}$ converge vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Donc la bijection réciproque de $f : A\times B\to A+B$ n'est pas continue.

(3) L'espace vectoriel engendré par la réunion des bases hilbertiennes de A et B ci-dessus est égal à l'espace vectoriel engendré par la base hilbertienne $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$, donc est dense dans E. Si $A+B$ est fermé, alors il est complet, donc l'application $(x,y)\mapsto x+y$ de $A\times B$ dans $A+B$ est une application linéaire bijective continue, entre deux espaces de Banach, donc est un homéomorphisme par le théorème de Banach (voir le corollaire 6.27), ce qui contredit (2). On peut aussi trouver explicitement un élément de $\overline{A\times B} - A\times B$: l'élement

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n - a_n = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n+1}\, e_{2n+1}$$

de E existe, car $(\frac{1}{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est de carré sommable, mais il n'appartient pas à $A+B$. En effet, supposons que $(\alpha_i)_{i\in\mathbb{N}}$ et $(\beta_i)_{i\in\mathbb{N}}$ soient deux suites de carré sommable telles que

$$\sum_{i\in\mathbb{N}}\alpha_i\, a_i + \sum_{i\in\mathbb{N}}\beta_i\, b_i/||b_i|| = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n+1}\, e_{2n+1}\ .$$

Comme $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base hilbertienne, par unicité de l'écriture en base hilbertienne, on devrait avoir alors $\alpha_i = \frac{\beta_i}{||b_i||}$ et $\frac{\beta_i}{(n+1)||b_i||} = \frac{1}{n+1}$ pour tout i, donc en particulier $\alpha_i = 1$ pour tout i, ce qui contredit le fait que $(\alpha_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est de carré sommable.

Schème E.101 (1) La série $\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{1}{n!}u^n$ est normalement convergente, par les propriétés de la norme d'opérateur, donc elle converge dans l'espace de Banach $\mathscr{L}(E)$. Si u et v

commutent, alors $(u+v)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} u^k v^{n-k}$ par récurrence, donc le fait que exp$(u+v$
$(\exp u)(\exp v)$ se démontre comme pour l'exponentielle réelle, en utilisant le théorème
Fubini pour permuter les sommes.

(2) Notons $f : \mathbb{R}\to E$ l'application $t\mapsto \exp((t-t_0)u)\cdot x_0$, qui vérifie $f(t_0) =$
Pour montrer que f est solution, il s'agit de montrer que f est dérivable et que $f'(t$
$u(f(t))$ pour tout t dans $\mathbb{R}$. L'application d'évaluation en x_0 étant linéaire continue,
le théorème de dérivation des fonctions composées, il suffit de vérifier que si $g : \mathbb{R}\to E$
l'application $t\mapsto\exp(tu)$, alors g est dérivable et $g'(t) = u\circ g(t)$. Pour tout $h\in\,]-1,$

$$g(t+h) = \big(\exp(hu)\big)\big(\exp(tu)\big) = \big(\operatorname{id} + hu + h^2\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{h^{n-2}}{n!}\,u^n\big)\circ g(t)\ .$$

Or $||\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{h^{n-2}}{n!}\,u^n||$ est borné uniformément en h par $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n!}\,||u||^n < +\infty$. Donc $g($
$h) = g(t) + h\,u\circ g(t) + o(h)$, ce qui montre le résultat.

[On peut aussi utiliser, en en vérifiant toutes les hypothèses, le théorème 7.5 de de
vation terme à terme des séries.]

Comme le domaine de définition de f est $\mathbb{R}$, la solution f est maximale.

(3) a) Soient $\lambda\in\mathrm{Sp}(u)$ et $Q\in\mathbb{C}[X]$ tels que $P - P(\lambda) = (X-\lambda)Q$. Alors $P(u$
$P(\lambda)\operatorname{id} = (u-\lambda\operatorname{id})\circ Q(u) = Q(u)\circ(u-\lambda\operatorname{id})$. Comme $u-\lambda\operatorname{id}$ est non surjective ou n
injective, $P(u)-P(\lambda)\operatorname{id}$ l'est aussi, et donc $P(\lambda)\in\mathrm{Sp}(P(u))$.

b) Par le théorème de d'Alembert, il existe n dans $\mathbb{N}$ et $a,\lambda_1,\dots,\lambda_n$ dans $\mathbb{C}$ tels q
$P(X)-\mu = a\prod_{k=1}^n (X-\lambda_k)$, donc $P(u)-\mu\operatorname{id} = a(u-\lambda_1\operatorname{id})\circ\cdots\circ(u-\lambda_n\operatorname{id})$. Si aucun
n'est dans $\mathrm{Sp}(u)$, alors $P(u)-\mu\operatorname{id}$ est inversible, ce qui contredit le fait que $\mu\in\mathrm{Sp}(P(u$
Donc, par exemple, $\lambda_1\in\mathrm{Sp}(u)$, et $P(\lambda_1)-\mu = 0$. Nous avons montré que

$$P(\mathrm{Sp}(u)) = \mathrm{Sp}(P(u))\ .$$

(4) Il est immédiat que toute puissance d'un opérateur autoadjoint est encore a
toadjoint, et que l'adjoint d'une combinaison linéaire d'opérateurs autoadjoints est
combinaison linéaire à coefficients conjugués de ces opérateurs (en particulier, toute co
binaison linéaire à coefficients réels d'opérateurs autoadjoints est encore autoadjoint).
résultat en découle.

(5) En utilisant, pour la seconde égalité, le fait que le rayon spectral d'un opérateur a
toadjoint est égal à sa norme ; pour la troisième égalité, l'assertion (1) ; pour la quatriè
égalité, l'assertion (3) ; et pour la dernière égalité, le fait que le spectre d'un opérat
autoadjoint soit réel, nous avons

$$||P(u)||^2 = ||P(u)P(u)^*|| = \sup_{\lambda\in\mathrm{Sp}(P(u)P(u)^*)}|\lambda| = \sup_{\lambda\in\mathrm{Sp}\,\left((P\overline{P})(u)\right)}|\lambda| = \sup_{\lambda\in\mathrm{Sp}(u)}|(P\,\overline{P})(\lambda)|$$
$$= \sup_{\lambda\in\mathrm{Sp}(u)}|P(\lambda)|^2\ .$$

(6) Notons $\mathscr{A}$ l'algèbre des restrictions des polynômes complexes au compact $\mathrm{Sp}(u)$
$\mathbb{C}$, qui sépare les points et est stable par passage à la partie réelle et à la partie comple
L'application de $\mathscr{A}$ dans $\mathscr{L}(E)$ définie par $P\mapsto P(u)$ est un morphisme d'algèbres, qui
1-lipschitzien par la question (5). Par le théorème de Stone-Weiertrass, $\mathscr{A}$ est dense da
$\mathscr{C}(\mathrm{Sp}(u),\mathbb{C})$. Par le théorème de prolongement, puisque $\mathscr{L}(E)$ est complet, l'applicat
uniformément continue $P\mapsto P(u)$ s'étend de manière unique en un morphisme d'algèb
continu $\Psi : \mathscr{C}(\mathrm{Sp}(u),\mathbb{C})\to\mathscr{L}(E)$.

(7) Si $\lambda \notin f\big(\mathrm{Sp}(u)\big)$, alors l'application continue $t \mapsto f(t) - \lambda$ ne s'annule pas sur $\mathrm{Sp}(u)$, donc son inverse g appartient à $\mathscr{C}(\mathrm{Sp}(u), \mathbb{C})$. Comme $g(t)(f(t) - \lambda) = (f(t) - \lambda)g(t) = 1$ pour tout $t \in \mathrm{Sp}(u)$, et puisque Ψ est un morphisme d'algèbres, nous avons $\Psi(g) \circ (\Psi(f) - \lambda\,\mathrm{id}) = (\Psi(f) - \lambda\,\mathrm{id}) \circ \Psi(g) = \mathrm{id}$, donc $\Psi(f) - \lambda\,\mathrm{id}$ est inversible, et $\lambda \notin \mathrm{Sp}\big(\Psi(f)\big)$. Le résultat en découle, par contraposée.

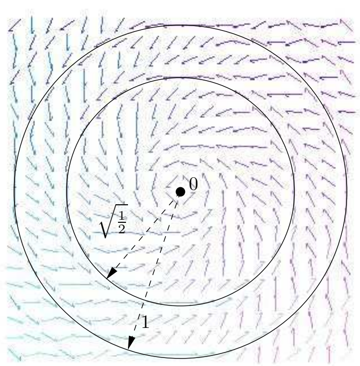
(8) Par continuité du produit scalaire, l'ensemble des opérateurs autoadjoints est fermé. Par (1) et puisque f est limite uniforme de polynômes réels, $\Psi(f)$ est autoadjoint.

Il découle du cours que si E est de dimension infinie, alors 0 est une valeur spectrale de tout opérateur autoadjoint compact. Comme 0 n'est pas dans l'image de f, le résultat découle donc de la question (7).

[Autre solution : Si $\Psi(f)$ est compact, alors son spectre consiste, outre éventuellement 0, en une suite (infinie car E est de dimension infinie et $\Psi(f)$ n'est pas l'opérateur nul) $(\lambda_i)_{i\in\mathbb{N}}$ d'éléments non nuls (ce sont en fait des valeurs propres de multiplicités finies, réelles car $\Psi(f)$ est autoadjoint, mais ceci n'est pas utile) convergeant vers 0. Par la question (7), $\lambda_i = f(\mu_i)$, avec μ_i une valeur spectrale de u. Or λ_i tendant vers 0, ceci contredit le fait que $f(\mathrm{Sp}(u))$ est fermé (par compacité de $\mathrm{Sp}(u)$ et continuité de f) et ne contient pas 0.]

Schème E.110 Notons tout d'abord que le champ de vecteurs X est défini et de classe C^∞ (car $|z|^2 = x^2 + y^2$) sur $\mathbb{R}^2$, donc satisfait les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz.

(1) Si z est comme dans l'énoncé, l'application $f : t \mapsto e^{it}z$ est définie sur $\mathbb{R}$, dérivable, vérifie $f(0) = z$, et sa dérivée vaut $f'(t) = ie^{it}z = if(t) = X(f(t))$ car $\cos(2n\pi|f(t)|^2) = \cos(2k\pi) = 1$. Par unicité locale dans le théorème de Cauchy-Lipschitz, nous avons donc $\phi_t(z) = f(t)$ dès que ces applications sont définies en t, et par maximalité, $\phi_t(z)$ est défini, et vérifie cette propriété, pour tout $t \in \mathbb{R}$.



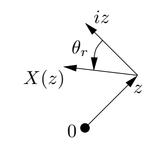
(2) Le champ de vecteurs X, étant continu sur $\mathbb{R}^2$, est en particulier borné sur un voisinage d'adhérence compacte U de $\overline{\mathbb{D}}$. Montrons que toute courbe intégrale maximale γ de X, de position initiale (au temps $t = 0$) dans $\mathbb{D}$, reste dans $\mathbb{D}$ aussi longtemps que définie. En effet, le cercle unité $\mathbb{S}_1$ de $\mathbb{R}^2$, qui est le bord de $\mathbb{D}$, est l'image d'une courbe

intégrale par (1). Par le théorème des valeurs intermédiaires, si γ sortait de $\mathbb{D}$, alors devrait rencontrer $\mathbb{S}_1$ en au moins un point. Mais par unicité des solutions maximales d'u équation différentielle autonome, deux courbes intégrales maximales, dont les images rencontrent en un point, diffèrent par translation du temps. Donc l'image de γ devr être contenue dans $\mathbb{S}_1$, et la position initiale de γ ne pourrait pas être dans $\mathbb{D}$.

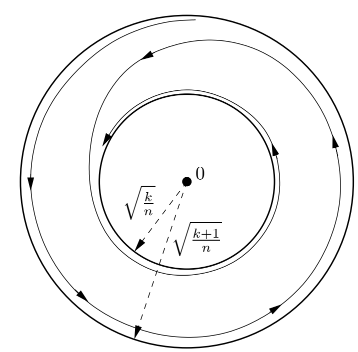
Toute valeur d'adhérence du graphe d'une courbe intégrale de position initiale da $\mathbb{D}$ est donc contenue dans $\overline{\mathbb{D}}$, donc dans U. Par le théorème d'explosion en temps fini d solutions maximales d'une équation différentielle, ceci implique que toute courbe intégr de position initiale dans $\mathbb{D}$ est définie sur $\mathbb{R}$, ce qui montre le résultat.

(3) Pour $k = 0, \dots, n-1$, notons C_k la couronne ouverte $\{z \in \mathbb{C} \;:\; \sqrt{\frac{k}{n}} < |z| < \sqrt{\frac{k+}{n}}$ et $\overline{C}_k$ son adhérence. Comme les deux cercles du bord de $\overline{C}_k$ sont des images de courb intégrales de X par la question (1), par le même raisonnement que pour la question (toute courbe intégrale de X de position initiale z dans C_k reste dans C_k, donc toute vale d'adhérence de $\phi_t(z)$ en $\pm\infty$ appartient au compact $\overline{C}_k$.

Pour tout $r \in \left]\sqrt{\frac{k}{n}}, \sqrt{\frac{k+1}{n}}\right[$, si $|z| = r$, alors l'angle orienté θ_r entre iz et $X(z)$ ne dépend que de r et vaut $\frac{1}{2}\big(1 - \cos(2n\pi r^2)\big) \in [0, 1] \subset \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.



On a
$$\frac{d}{dt}\,|\phi_t(z)|^2 = 2\,\mathrm{Re}\left(\varphi_t(z)\overline{X(\varphi_t(z))}\right) = 2\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta_{|\phi_t(z)|}\right) < 0\;.$$
Donc si $z \in C_k$, alors l'application $t \mapsto |\phi_t(z)|$ est strictement décroissante. Elle bornée inférieurement par $\sqrt{\frac{k}{n}}$, et supérieurement par $\sqrt{\frac{k+1}{n}}$. Donc $|\phi_t(z)|$ converge v une limite $\ell_\pm \in \left[\sqrt{\frac{k}{n}}, \sqrt{\frac{k+1}{n}}\right]$ quand t tend vers $\pm\infty$. Comme $\theta_r \neq 0$ si $r \in \left]\sqrt{\frac{k}{n}}, \sqrt{\frac{k+}{n}}\right.$ nous avons nécessairement $\ell_- = \sqrt{\frac{k+1}{n}}$ et $\ell_+ = \sqrt{\frac{k}{n}}$.



Par continuité et la propriété de flot, si w est une valeur d'adhérence de $\phi_t(z)$ qua t tend vers $\pm\infty$, alors $\phi_s(w)$ est aussi une valeur d'adhérence pour tout s dans $\mathbb{R}$. Do l'ensemble des valeurs d'adhérence de $\phi_t(z)$ quand t tend vers $+\infty$ (respectivement $-$ est le cercle de centre 0 et de rayon $\sqrt{\frac{k}{n}}$, réduit à un point si $k = 0$, (respectiveme $\sqrt{\frac{k+1}{n}}$). Les courbes intégrales dans la couronne C_k spiralent donc entre ces deux cercl en s'en rapprochant à l'infini. En particulier, quand le temps converge vers $+\infty$, toute courbe intégrale de position initiale dans C_0 converge vers 0.

(4) Le fait que $\mathscr{R}$ soit une relation d'équivalence découle, en utilisant le fait que le champ de vecteurs X soit complet dans $\mathbb{D}$, des propriétés de flot : la propriété $\phi_0 = \mathrm{id}$ implique la réflexivité, $(\phi_t)^{-1} = \phi_{-t}$ implique la symétrie, et $\phi_s \circ \phi_t = \phi_{s+t}$ implique la transitivité de $\mathscr{R}$.

[Une autre manière de dire cela est que, par les propriétés du flot d'un champ de vecteurs complet, l'application de $\mathbb{R}\times\mathbb{D}$ dans $\mathbb{D}$, définie par $(t,z)\mapsto\phi_t(z)$, est une action du groupe $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{D}$; puisque $\mathscr{R}$ est la relation « être dans la même orbite » pour cette action, $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence.]

Notons $p : \mathbb{D}\to\mathbb{D}/\mathscr{R}$ la projection canonique. Remarquons que la courbe intégrale d'image $\{0\}$ et celle de position initiale $\frac{1}{2\sqrt{n}}$ sont d'images disjointes, donc les images par p de ces trajectoires sont des points u et v distincts de $\mathbb{D}/\mathscr{R}$. Comme $\phi_t(\frac{1}{2\sqrt{n}})$ converge vers 0 quand t tend vers $+\infty$, et par continuité de p, $v = p\big(\phi_t(\frac{1}{2\sqrt{n}})\big)$ converge vers $p(0)=u$. Donc $u\in\overline{\{v\}}$, et $\mathbb{D}/\mathscr{R}$ n'est pas séparé.

[Une autre manière de raisonner est de dire, par cet argument de convergence, que $\mathscr{R}$ n'est pas fermé dans $\mathbb{D}\times\mathbb{D}$, donc $\mathbb{D}/\mathscr{R}$ ne peut être séparé.]

Schème E.112 (1) La forme linéaire $\ell : F+\mathbb{R}v\to\mathbb{R}$ définie par $y\mapsto\lambda$, où λ est l'unique réel tel qu'il existe $x\in F$ avec $y = x+\lambda v$, est continue. C'est immédiat si E est de dimension finie. Mais si l'on suppose seulement que F est fermé, alors soit $d = d(v,F)$, qui est strictement positif, car F est fermé, et $v\notin F$. Pour tout $\lambda\in\mathbb{R}^*$, pour tout $x\in F$, nous avons $-\frac{x}{\lambda}\in F$, donc

$$||v+\frac{x}{\lambda}||\geq d(v,F) = d\ ,$$

et donc $|\lambda|\leq\frac{1}{d}||\lambda v+x||$. Par conséquent, la forme linéaire ℓ est continue, de norme au plus $\frac{1}{d}$.

Par le théorème de Hahn-Banach, il existe une forme linéaire continue sur E prolongeant ℓ. Son noyau H, qui est un hyperplan fermé de E ne contenant pas $\mathbb{R}v$, donc suppplémentaire à $\mathbb{R}v$, contient alors $\ell^{-1}(0) = F$. L'application $(\lambda,x)\mapsto\lambda v+x$ de $\mathbb{R}\times H$ dans E est continue, car E est un espace vectoriel topologique, et bijective, d'application réciproque $z\mapsto(\ell(y), y-\ell(y)v)$, qui est continue.

(2) (i) Puisque $f : V\to E$ est C^∞, l'application $y\mapsto df_y$ de V dans l'espace de Banach $\mathscr{L}(F,E)$ est C^∞. L'inverse est une application C^∞ de $\mathscr{L}(F,E)$ dans $\mathscr{L}(E,F)$. Comme la fonction d'évaluation d'une application linéaire en un point est une application bilinéaire continue, donc C^∞, le fait que f^*X soit de classe C^∞ découle du théorème de dérivation des applications composées.

(ii) Pour tout z dans W, si $y = g(z)$, nous avons

$$\begin{aligned}(f\circ g)^*X(z) &= (d(f\circ g)_z)^{-1}\Big(X\big(f\circ g(z)\big)\Big) = (dg_z)^{-1}\circ(df_y)^{-1}\Big(X\big(f(y)\big)\Big)\\ &= (dg_z)^{-1}\Big(f^*X\big(g(z)\big)\Big) = g^*(f^*X)(z)\ .\end{aligned}$$

(iii) L'application $v : t\mapsto f\circ\varphi^t_{f^*X}(y)$ est bien définie sur l'intervalle ouvert contenant 0, qui est le domaine maximal de définition de la solution de l'équation différentielle $z' = f^*X(z)$ valant y en $t=0$. De plus, par le théorème de dérivation des applications

composées,

$$\begin{aligned}v'(t) &= df_{\varphi^t_{f^*X}(y)}\Big(\frac{d}{dt}\varphi^t_{f^*X}(y)\Big) = df_{\varphi^t_{f^*X}(y)}\Big(f^*X\big(\varphi^t_{f^*X}(y)\big)\Big) = X\Big(f\big(\varphi^t_{f^*X}(y)\big)\Big)\\ &= X\big(v(t)\big)\ .\end{aligned}$$

On montre que v est même la solution maximale de l'équation différentielle $z' = X$ valant $f(y)$ à l'instant $t=0$, en utilisant le fait que f soit un difféomorphisme lo (par le théorème d'inversion locale), et la formule $f^*(g^*X) = X$, si $g = f^{-1}$, étant vr localement, par (ii).

(3) (i) Soient H un hyperplan fermé supplémentaire à $\mathbb{R}X(a)$, et ℓ une forme linéa continue sur E de noyau H telle que $\ell(X(a)) = 1$ (qui existent par la question (I)). Note $f : (\mathbb{R}\times H)\to E$ l'application $(\lambda,x)\mapsto\lambda X(a)+x+a$, qui est un C^∞-difféomorphism car son inverse est $z\mapsto(\ell(z-a), z-\ell(z-a)X(a))$ dont les composantes sont affin donc C^∞. Notons que $f(0,0) = a$ et que $(df_{(0,0)})^{-1} = d(f^{-1})_{f(0,0)}$ est l'application linéa $z\mapsto(\ell(z), z-\ell(z)X(a))$ Nous avons donc

$$f^*X(0,0) = (df_{(0,0)})^{-1}\Big(X\big(f(0,0)\big)\Big) = \big(\ell(X(a)), X(a)-\ell(X(a))X(a)\big) = (1,0)\ .$$

(ii) Notons que $\Phi_1(t,x) = \varphi^t_Y(0,x)$ est bien défini, et de classe C^∞ (car C^∞ en chac variable) si $|t|$ et $||\,x\,||$ sont suffisamment petits. De plus,

$$\partial_1(\Phi_1)_{(0,0)} = \frac{d}{dt}_{|t=0}\varphi^t_Y(0,0) = Y(0,0) = (1,0)\ ,$$

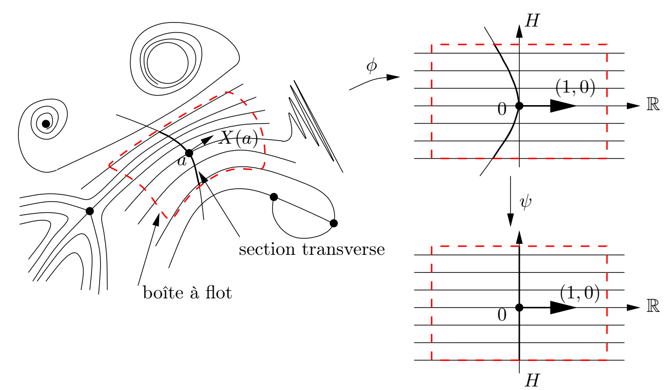
et, puisque $\varphi^0_Y(0,x) = (0,x)$,

$$\forall\, h\in H,\quad \partial_2(\Phi_1)_{(0,0)}(h) = (0,h)\ .$$

Donc $d(\Phi_1)_{(0,0)}$ est l'identité de $\mathbb{R}\times H$. Par le théorème d'inversion locale, il existe voisinages ouverts W_1, W_1' de $(0,0)$ dans $\mathbb{R}\times H$ tels que $\Phi_1 : W_1\to W_1'$ soit un C difféomorphisme. De plus,

$$d(\Phi_1)_{(t,x)}(1,0) = \partial_1(\Phi_1)_{(t,x)} = \frac{d}{dt}\varphi^t_Y(0,x) = Y(\varphi^t_Y(0,x)) = Y(\Phi_1(t,x))\ ,$$

ce qui montre le résultat, en appliquant l'inverse de $d(\Phi_1)_{(t,x)}$ aux deux membres de ce équation.



(iii) Par l'assertion (ii) précédente, considérons un intervalle ouvert I'_2 contenant 0, une boule ouverte W_2 de centre 0 dans $\mathscr{H}$, un voisinage ouvert W'_2 de 0 dans E, et $\phi : W'_2 \to I'_2 \times W_2$ un C^∞-difféomorphisme tel que $\phi(a) = (0,0)$ et

$$\left(\phi^{-1}\right)^* X = Z \ ,$$

où $Z : (W'_2 \times I'_2) \to (\mathbb{R} \times H)$ est l'application constante valant $(1,0)$. L'application $\phi \circ S : W \to \mathbb{R} \times H$ est de classe C^∞, c'est une immersion en 0 telle que $\phi \circ S(0) = (0,0)$ et l'image de $d(\phi \circ S)_0$ ne contienne pas $\mathbb{R} \times \{0\}$. Notons $\pi_1 : \mathbb{R} \times H \to \mathbb{R}$ et $\pi_2 : \mathbb{R} \times H \to H$ les projections sur le premier et le second facteur, qui sont linéaires continues, donc C^∞. L'application $\pi_2 \circ \phi \circ S : W \to H$ est donc, par composition, une application C^∞ d'un ouvert de H dans H, qui est une immersion en 0 (car le noyau de π_2 est $\mathbb{R} \times \{0\}$, qui ne rencontre l'image de $d(\phi \circ S)_0$ qu'en $(0,0)$), d'image de 0 égale à 0. Puisque H est de dimension finie, l'application linéaire injective $d(\pi_2 \circ \phi \circ S)_0 : H \to H$ est une bijection. Donc par le théorème d'inversion locale, quitte à restreindre W et W_2 (et donc W'_2), l'application $\pi_2 \circ \phi \circ S : W \to W_2$ est un C^∞-difféomorphisme. Posons

$$f = (\pi_1 \circ \phi \circ S) \circ (\pi_2 \circ \phi \circ S)^{-1} : W_2 \to \mathbb{R}$$

qui est de classe C^∞, et $\psi : (I'_2 \times W_2) \to (\mathbb{R} \times W_2)$ l'application définie par

$$(t,x) \mapsto (t - f(x), x) \ .$$

Alors, quitte à réduire I'_2 et W_2 (et donc W, W'_2), il existe un intervalle ouvert I_2 contenant 0 tel que l'application $\psi : (I'_2 \times W_2) \to (I_2 \times W_2)$ soit un C^∞-difféomorphisme, d'inverse $(t,x) \mapsto (t + f(x), x)$. De plus, par construction, ψ envoie $\phi \circ S(W)$ sur $\{0\} \times W_2$.

Remarquons que $\left(\psi^{-1}\right)^* Z = Z$, car si $y = \psi(x)$, alors

$$\left(\psi^{-1}\right)^* Z(y) = \left(d(\psi^{-1})_y\right)^{-1}\left(Z(\psi^{-1}(y))\right) = d\psi_x(1,0) = \partial_1 \Psi_x = (1,0) \ ,$$

puisque $\psi(t,0) = (t,0)$. En posant $\Phi_2 = \psi \circ \phi$, le résultat découle alors de (1) (ii).

(4) (i) Pour tout h dans E, nous avons

$$dL_a(h) = \lim_{t \to 0,\, t>0} \frac{L(a+th) - L(a)}{t} \geq 0 \ ,$$

par passage à la limite des inégalités. Comme $-dL_a(h) = dL_a(-h) \geq 0$, on en déduit que $dL_a(h) = 0$.

(ii) La partie V_s est un fermé (comme intersection de fermés) borné dans un espace vectoriel réel normé de dimension finie, donc est compact. Par continuité de L et puisque $L(a) < s$, la partie V_s, contenant l'ouvert $B(a,r) \cap L^{-1}(]-\infty, s[)$ contenant a, est un voisinage de a. Pour tout $\epsilon \in \,]0,r]$, l'application continue L, restreinte au compact $B - B(a,\epsilon)$, atteint son minimum m_ϵ, qui en particulier est strictement supérieur à $L(a)$. Si $s \in \,]L(a), m_\epsilon[$, alors $V_s \subset B(a,\epsilon)$. Donc tout voisinage de a contient un V_s.

(iii) Par continuité de L en restriction au compact $S(a,r)$, nous avons

$$m = \min_{x \in S(a,r)} > L(a) \ .$$

Soient $s \in \,]L(a), m[$ et x dans V_s. L'application $t \mapsto L \circ \varphi^t(x)$ (définie sur l'intervalle maximal $I = \,]\delta_-, \delta_+[$ contenant 0 tel que $L \circ \varphi^t(x)$ existe) est décroissante, car, par le théorème

de dérivation des fonctions composées, sa dérivée à l'instant t est $dL_{\varphi^t(x)}\big(X(\varphi^t(x))\big)$,
est négatif ou nul par hypothèse. Donc pour tout $t \in \,]0, \delta_+[$, nous avons $L \circ \varphi^t(x)$
$L \circ \varphi^0(x) = L(x) < s$. En particulier, $\varphi^t(x)$ appartient au compact V_s, sur laquelle l'app
cation X est bornée et de différentielle bornée. De plus, V_s est un fermé contenu dans
domaine de définition de L et de l'équation différentielle $z' = X(z)$. Par la propriété d'
plosion des solutions maximales d'une équation différentielle, nous avons donc $\delta_+ = +$
et $\varphi^t(x) \in V_s$ pour tout $t \geq 0$.

(iv) Soient $s \in \,]L(a), m[$ et x dans V_s. Par (iii), l'application $t \mapsto L(\varphi^t(x))$ est u
application décroissante de $]0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$, minorée par $L(a)$, donc est convergente v
$\ell \in \mathbb{R}$ quand t tend vers $+\infty$.

Montrons par l'absurde que la seule valeur d'adhérence de $t \mapsto \varphi^t(x)$ quand t te
vers $+\infty$ est a. Par compacité de V_s, dans lequel reste la courbe $t \mapsto \varphi^t(x)$ par (iii), c
concluera. Supposons donc qu'il existe $y \neq a$ dans V_s et $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels posi
tendant vers $+\infty$ telle que la suite $\left(\varphi^{t_n}(x)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers y. En particulier, $L(y) =$
Pour tout $\tau > 0$, on a $L(\varphi^\tau(y)) < L(y)$, donc par continuité, $\ell = \lim_{k\to+\infty} L(\varphi^{\tau+t_k}(x))$
$L(y) = \ell$, contradiction.

Index

Références

[Ave] A. Avez, *Calcul différentiel*, Masson, 1983.

[BBB] L. Bessières, G. Besson, M. Boileau, *La preuve de la conjecture de Poincaré d'après Perelman*, Image des maths 2006, Publications du CNRS.

[Bre] H. Brezis, *Analyse fonctionelle*, Masson, 1983.

[BH] M.R. Bridson, A. Haefliger, *Metric spaces with non-positive curvat* Grund. math. Wiss. bf 319, Springer Verlag (1998).

[Bou1] N. Bourbaki, *Topologie générale*, Chap. 1-4, Masson, 1990.

[Bou2] N. Bourbaki, *Topologie générale*, Chap. 5-8, Hermann, 1974.

[Bou3] N. Bourbaki, *Espaces vectoriels topologiques*, Chap. 1-5, Masson, 1981.

[Car] H. Cartan, *Cours de calcul différentiel*, Hermann, 2nde éd. 1977.

[Cha] M. Chaperon, *Calcul différentiel et calcul intégral*, Dunod, 2003.

[Chi] I. Chiswell, *Introduction to Λ-trees*, World Scientific, 2001.

[Coh] D. Cohn, *Measure theory*, Birkhäuser, 1980.

[Con] A. Connes, *Géométrie non commutative*, InterEditions, 1990 ; *Noncommutative geome* Academic Press, 1994.

[DeL] R. DeVore, G. Lorentz, *Constructive approximation*, Grund. math. Wiss.**303**, Sprin Verlag, 1993.

[Die1] J. Dieudonné, *Éléments d'analyse t. 1 : fondements de l'analyse moderne*, Gauth Villars, 1971.

[Die2] J. Dieudonné, *Éléments d'analyse t. 2 : chapitres XII à XV*, Gauthier-Villars, 1974.

[Dix] J. Dixmier, *Topologie générale*, PUF, 1981.

[Dug] J. Dugundji, *Topology*, Wm. C. Brown, 1989.

[Fal] K.J. Falconer, *The geometry of fractal sets*, CTM **85**, Cambridge Univ. Press, 1985.

[GO] B. Gelbaum, J. Olmsted, *Counterexamples in analysis*, Holden-Day, 1964.

[Godb] C. Godbillon, *Eléments de topologie algébrique*, Hermann 1971.

[God] R. Godement, *Topologie algébrique et théorie des faisceaux*, Hermann, 1958.

[Gra] A. Gramain, *Topologie des surfaces*, Presse Univ. France 1971.

[Gro1] M. Gromov, *Structures métriques pour les variétés riemanniennes*, rédigé par J. Laf taine and P. Pansu, Cedic/Fernand Nathan, Paris, 1981. (Version anglaise enrichie fameux chapitre $3\,\frac{1}{2}$)

[Gro2] M. Gromov, *Carnot-Carathéodory spaces seen from within*, in "Sub-Riemannian geo try", 79–323, Progr. Math. **144**, Birkhäuser, 1996.

[Hat] A. Hatcher, *Algebraic topology*, Cambridge Univ. Press, 2002, *http ://www.math.cornell.edu/∼hatcher*.

[KR] R. Kadison, J. Ringrose, *Fundamentals of the theory of operator algebra*, I Element theory, Academic Press, 1983 ; II Advanced theory, Academic Press, 1986 ; III Spe topics, Birkhäuser, 1991 ; IV Special topics, Birkhäuser, 1992.

[KS] J.-P. Kahane, R. Salem, *Ensembles parfaits et séries trigonométriques*, Hermann, 19

[Kha] S. Khaleelulla, *Counterexamples in topological vector spaces*, Lect. Notes Maths **9** Springer Verlag, 1982.

[Kri] J.L. Krivine, *Théorie axiomatique des ensembles* PUF, 1969.

[LT1] J. Lindenstrauss, L. Tzafriri, *On the complemented subspace theorem*, Israel J. Math. **9** (1971) 263-269.

[LT2] J. Lindenstrauss, L. Tzafriri, *Classical Banach spaces*, I Sequence spaces, Ergeb. Math. **92**, Springer-Verlag, 1977 ; II Function spaces, Ergeb. Math. **97**, Springer-Verlag, 1979.

[Man] B. Mandelbrot, *Les Objets fractals : forme, hasard et dimension*, Flammarion, 1984.

[Mat] P. Mattila, *Geometry of sets and measures in Euclidean spaces*, Camb. Stud. Avd. Math. **44**, Camb. Univ. Press, 1995.

[MT] N. Mneimné, F. Testard, *Introduction à la théorie des groupes de Lie classiques*, Hermann, 1986.

[Pau] F. Paulin, *Topologie algébrique élémentaire*, Notes de cours de magistère, 2002. *http ://www.dma.ens.fr*

[Per] D. Perrin, *Géométrie algébrique : une introduction*, Intereditions/CNRS editions, 1995.

[Par] K. R. Parthasarathy, *Probability measures on metric spaces*, Academic Press, 1967.

[Rey] E. Reyssat, *Quelques aspects des surfaces de Riemann*, Prog. in Math. **77**, Birkhauser, 1989.

[Rud] W. Rudin, *Real and complex analysis*, 3rd ed., Mc Graw-Hill (1990).

[Sch] L. Schwartz, *Théorie des distributions*, Hermann 1978.

[Spa] E. Spanier, *Algebraic topology*, Tata McGraw-Hill, 1981.

[Ste] L. Steen, *Counterexamples in topology*, Dover, 1995.

[Tak] M. Takesaki, *Theory of operator algebras*, Encyc. Math. Sciences **124, 125, 127**, Springer Verlag, 2001-2002

[Vil] C. Villani, *Optimal transport, old and new*, Springer Verlag, 2007.

Département de Mathématique et Applications, UMR 8553 CNRS
Ecole Normale Supérieure
45 rue d'Ulm
75230 PARIS Cedex 05, FRANCE
e-mail : Frederic.Paulin@ens.fr