École Normale Supérieure Département de Mathématiques et Applications

Examen d'analyse complexe

Durée : 3h. Aucun document autorisé. On accordera une grande importance à la qualité de la rédaction.

Exercice 1.

0. *Question de cours.* Énoncer et démontrer le théorème de Rouché.

1. Soit $\mathbb{D}$ le disque unité de $\mathbb{C}$, et soit une fonction holomorphe $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$. On suppose que l'image de f est relativement compacte dans $\mathbb{D}$. Montrer que f admet un unique point fixe dans $\mathbb{D}$.

2. La conclusion reste-t-elle vraie sans l'hypothèse que l'image de f soit relativement compacte ?

Exercice 2. Soit $\tau = iy$, où $y \in \mathbb{R}_+^*$, et $\wp$ la fonction de Weierstrass associée au réseau rectangulaire $\Lambda = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\tau$.

1. Soient a et b deux nombres réels. Montrer que si $2a$ ou $2b$ est entier, alors $\wp(a + b\tau)$ est réel. Étudier les variations des fonctions $x \mapsto \wp(x)$ et $x \mapsto \wp(ix)$ sur $\mathbb{R}$.

2. On rappelle l'équation différentielle satisfaite par $\wp$:

$$\wp'^2 = 4\wp^3 - 60\mathrm{G}_2\wp - 140\mathrm{G}_3.$$

Montrer que G_2 et G_3 sont réels et que le polynôme $\mathrm{X}^3 - 15\mathrm{G}_2\mathrm{X} - 35\mathrm{G}_3$ a trois racines réelles distinctes.

3. Soient $a < b < c$ ces racines. Identifier a, b et c en termes de $\wp(\frac{1}{2})$, $\wp(\frac{\tau}{2})$ et $\wp(\frac{1+\tau}{2})$.

4. Calculer $\int_c^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3 - 15\mathrm{G}_2 x - 35\mathrm{G}_3}}$.

Exercice 3.

0. *Question de cours.* Soit $\mathrm{V} \subset \mathbb{C}$ un ouvert connexe, $z_0 \in \mathrm{V}$, et deux nombres complexes $\lambda \neq \mu$. Soit $f_n : \mathrm{V} \to \mathbb{C} \setminus \{\lambda, \mu\}$ une suite de fonctions holomorphes évitant les valeurs λ et μ, telle que la suite $(f_n(z_0))$ soit bornée. Montrer qu'on peut extraire de (f_n) une sous-suite convergeant uniformément sur tout compact.

1. Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$, tel que $\mathbb{C} \setminus \mathrm{U}$ contienne au moins 2 points. Soit $z_0 \in \mathrm{U}$ et $f : \mathrm{U} \to \mathrm{U}$ holomorphe. On suppose que $f(z_0) = z_0$ et $|f'(z_0)| = 1$. Le but de l'exercice est de montrer que f est un automorphisme de U.

On considère la fonction f itérée n fois, $f_n = f \circ f \circ \cdots \circ f$. Montrer qu'il existe une sous-suite $(f_{n'})$ qui converge uniformément sur tout compact vers une limite holomorphe $\varphi : \mathrm{U} \to \mathrm{U}$.

2. Dans le cas où $f'(z_0) = 1$, en déduire que $f(z) = z$ pour tout $z \in \mathrm{U}$.

3. On revient au cas général où on a seulement $|f'(z_0)| = 1$. Montrer qu'on peut extraire la sous-suite $(f_{n'})$ de sorte que la limite φ satisfasse $\varphi'(z_0) = 1$. Qu'en déduit-on sur φ ?

4. Montrer que f est un automorphisme de U.

5. Le résultat s'étend-il aux cas de $\mathrm{U} = \mathbb{C}$ et de $\mathrm{U} = \mathbb{C}^*$?

6. On revient au cas d'un ouvert U dont le complémentaire contient au moins 2 points. Un automorphisme f de U tel que $f(z_0) = z_0$ satisfait-il nécessairement $|f'(z_0)| = 1$?

Exercice 4. Si f est une fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$, on définit sa transformée de Mellin f^* par

$$f^*(s) = \int_0^{+\infty} f(x)x^{s-1}dx.$$

1. Supposons f continue, et

$$f(x) = \begin{cases} O(x^{-a}) & \text{quand } x \to 0, \\ O(x^{-b}) & \text{quand } x \to +\infty. \end{cases} \tag{*}$$

Si $a < b$, montrer que f^* est une fonction holomorphe définie sur la région $\{a < \operatorname{Re} s < b\}$, et que $|f^*|$ est majorée sur toute région $\{a + \varepsilon \leqslant \operatorname{Re} s \leqslant b - \varepsilon\}$ pour $\varepsilon > 0$. Montrer que $(x^\nu f)^* = f^*(s+\nu)$. Si f est C^1 et $x\frac{df}{dx}$ satisfait aussi (*), montrer que $(x\frac{df}{dx})^* = -sf^*(s)$. Quelle est la transformée de Mellin de la dérivée f' ? de la fonction e^{-x} ?

2. *Formule d'inversion.* On suppose que f est de classe C^2 et que f, $x\frac{df}{dx}$ et $(x\frac{d}{dx})^2 f$ satisfont (*). Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, montrer que l'intégrale

$$F(x) = \frac{1}{2i\pi}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} f^*(s)x^{-s}ds$$

ne dépend pas du choix de $c \in]a, b[$. Montrer que $F = f$ (se ramener à une transformée de Fourier inverse).

3. Soit f de classe C^2, telle que f, $x\frac{df}{dx}$ et $(x\frac{d}{dx})^2 f$ satisfassent (*) avec $b = 0$. Supposons que pour un $B > 0$ la fonction f^* s'étende en une fonction méromorphe pour $a < \operatorname{Re} s < B$, holomorphe en dehors de 0, et avec un pôle d'ordre n en 0. On suppose qu'on a une majoration $|f^*(s)| \leqslant \frac{M}{|\operatorname{Im} s|^2}$ quand $|\operatorname{Im} s| > 1$ et $\operatorname{Re} s \in [a+\varepsilon, B-\varepsilon]$. Montrer que pour tout $N < B$ on a quand $x \to +\infty$ un développement

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k (\operatorname{Log} x)^k + O(x^{-N}).$$

Exprimer les coefficients α_k en termes des coefficients du développement de f^* en 0.

4. Soit $\Phi(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(1 - e^{-\frac{x}{2^n}})$. Montrer que la transformée de Mellin est définie pour $-1 < \operatorname{Re} s < 0$, et $\Phi^*(s) = -\frac{\Gamma(s)}{1-2^s}$. Montrer que, quand $x \to +\infty$, on a pour tout $N > 0$ le développement asymptotique

$$\Phi(x) = \frac{\operatorname{Log} x}{\operatorname{Log} 2} + \frac{\gamma}{\operatorname{Log} 2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{\operatorname{Log} 2}\sum_{\mathbb{Z}^*}\Gamma\left(\frac{2ik\pi}{\operatorname{Log} 2}\right)e^{-2ik\pi\frac{\operatorname{Log} x}{\operatorname{Log} 2}} + O(x^{-N}).$$

On rappelle la factorisation $\frac{1}{\Gamma(z)} = e^{\gamma z} z \prod_1^\infty (1 + \frac{z}{n})e^{-\frac{z}{n}}$.

5. *Cette question ne fait pas partie de l'examen et ne sera pas notée. Traitez la plus tard si vous voulez.* De manière similaire, en prenant $L(x) = \sum_{n=1}^\infty \operatorname{Log}(1 + \frac{x}{n}) - \frac{x}{n}$, montrer que $L^*(s) = \frac{\pi}{s\sin(\pi s)}\zeta(-s)$, et déduire le développement quand $x \to +\infty$, pour tout $N \geqslant 0$:

$$\operatorname{Log}\Gamma(x+1) = \operatorname{Log}(x^x e^{-x}\sqrt{2\pi x}) + \sum_{n=1}^{N} \frac{b_{2n}}{2n(2n-1)} x^{1-2n} + O(x^{-1-2N}).$$

(Le début du développement, en faisant $N = 0$, redonne la formule de Stirling).