Partiel d'analyse complexe

Durée : 2h. Aucun document autorisé. On accordera une grande importance à la qualité de la rédaction.

Exercice 1. Calculer l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{x^{\frac{2}{3}}}{(x+1)^2(x+2)}dx$.

Exercice 2. On rappelle que la fonction ζ admet un prolongement méromorphe sur $\mathbb{C}$, avec un unique pôle en 1, simple avec résidu égal à 1. On définit pour $\operatorname{Re} s > 1$ la fonction

$$\lambda(s) = \sum_{n>0} \frac{(-1)^{n+1}}{n^s}.$$

Montrer que la fonction λ est holomorphe sur le demi-plan $\{\operatorname{Re} s > 1\}$, et qu'elle satisfait l'identité $\frac{1}{2}(\zeta(s) - \lambda(s)) = 2^{-s}\zeta(s)$. En déduire qu'elle se prolonge en une fonction entière, et calculer $\lambda(1)$.

Justifier l'identité, pour $\operatorname{Re} s > 0$,

$$\lambda(s) = \sum_{n>0} \left(\frac{1}{(2n-1)^s} - \frac{1}{(2n)^s}\right).$$

Montrer que $\lambda(s) > 0$ pour $s > 0$. En déduire que la fonction ζ ne s'annule pas sur $(0,1)$.

Exercice 3. Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert $U \supset \overline{\mathbb{D}}$.

Montrer que $\operatorname{Re} f$ satisfait le principe de maximum.

Montrer que, si $f(0) = 0$ et $0 < r < 1$, alors

$$\sup_{D(0,r)} |f| \leqslant \frac{2r}{1-r} \sup_{S^1} \operatorname{Re} f.$$

(On pourra composer f par un biholomorphisme de la région $\{\operatorname{Re} z < c\}$ sur le disque unité $\mathbb{D}$).

Exercice 4. On rappelle que le facteur principal de Weierstrass est la fonction

$$W_n(z) = (1-z)\exp\left(\sum_{j=1}^{n-1} \frac{z^j}{j}\right).$$

Soit f une fonction entière d'ordre $\rho \in \mathbb{R}$, c'est-à-dire telle que pour tout $\varepsilon > 0$, on ait $|f(z)| = O(\exp(|z|^{\rho+\varepsilon}))$ quand $|z| \to \infty$ (et ρ est le plus petit réel ayant cette propriété). On énumère les zéros non nuls de f en une suite $(a_j)_{j\in\mathbb{N}}$, en répétant chaque zéro suivant sa multiplicité, et on suppose donné $\beta \in \mathbb{R}$ tel que

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{|a_j|^\beta} \text{ converge.}$$

(Le lemme de Jensen implique que cette condition est satisfaite dès que $\beta > \rho$).

Montrer le théorème de factorisation de Hadamard :

$$f(z) = e^{g(z)} z^k \prod_{j=0}^{\infty} W_n\left(\frac{z}{a_j}\right),$$

où $k \in \mathbb{N}$, n est le plus petit entier supérieur ou égal à β, et $g \in \mathbb{C}[X]$ a un degré satisfaisant $\deg g \leqslant \sup(\beta, \rho)$. (On pourra établir des minorations de $|W_n(z)|$ sur les régions $|z| \leqslant \frac{1}{2}$ et $|z| \geqslant 2$).

Application. Déduire du théorème de factorisation l'identité

$$\sin(\pi z) = \pi z \prod_{n\in\mathbb{Z}^*} \left(1 - \frac{z}{n}\right)e^{\frac{z}{n}}.$$