MOTIF INTÉRIEUR DES VARIÉTÉS DE SIEGEL

GIUSEPPE ANCONA

Sujet proposé par Jörg Wildeshaus

1. Introduction

Je présente ici le domaine dans lequel se situe mon sujet de thèse.
Quand on étudie une variété lisse et compacte on peut lui associer son motif de Chow qui est un invariant très puissant qui joue le rôle d'une cohomologie universelle. On souhaite pouvoir faire la même chose pour les Variétés de Shimura, qui sont des variétés d'intérêt arithmétique, qui typiquement se présentent comme espaces qui paramètrent des variétés abeliennes. Le problème est que les variétés de Shimura sont lisses mais pas compactes. Wildeshaus dans ses récents articles a trouvé un chemin qui permettrait de résoudre cet inconvénient. Pour l'instant sa méthode s'applique aux cas des variétés dites de Hilbert-Blumenthal, une sous-famille des variétés de Shimura, mais on espère que ses idées puissent s'appliquer ailleurs, typiquement à d'autres variétés de Shimura.
Dans le paragraphe 2 on introduit de manière très intuitive les motifs et on essaie d'expliquer leur intérêt.
Dans le paragraphe 3 on parle de la notion de poids, récemment introduite par Bondarko et qui s'avère très utile dans l'étude des motifs.
Le paragraphe 4 est autour des motifs intérieurs : des motifs de Chow pour des variétés lisses mais pas compactes, cette notion est donc intéressante dans le cadre des variétés de Shimura.
On termine alors avec le paragraphe 5 qui présente les situations connues où on arrive à construire des motifs intérieurs.

La présentation du domaine sera faite de manière élémentaire, accessible à des étudiants en mathématiques qui ne connaissent pas la géométrie algébrique. Le prix sera une certaine absence de détailles techniques. Pour ne pas alourdir ce texte introductif, de temps en temps on évitera de faire certaines précisations, inutiles pour les spécialistes et les débutants (pour deux raisons opposées), du type : le corps de définition du schéma doit être un sous corps de $\mathbb{C}$ pour qu'on puisse parler de cohomologie de Betti...

Je tiens à remercier Jörg Wildeshaus pour l'intérêt du sujet et pour les discussions agréables et éclaircissantes. Je remercie David Hébert pour son "cours particulier" sur les catégories triangulées et pour m'avoir donné ses notes sur lesquelles s'appuie la définition de catégorie triangulée que je donne ici. Merci à Simon Pepin Lehalleur pour les discussions très intéressantes sur la fascinante philosophie de la théorie des motifs et merci à l'équipe de Arithmétique et Géométrie Algébrique de Paris 13 pour l'accueil et l'ambiance détendue.

2. La cohomologie en géométrie

On pourrait s'amuser à voir la géométrie comme l'étude de certaines catégories. Par exemple la topologie est l'étude des espaces topologiques et des applications continues entre eux ou la géométrie différentielle est l'étude des espaces topologiques qui "sont" localement $\mathbb{R}^n$ et les applications qui sont localement différentiables. Pour un corps k donné, la géométrie algébrique étudie les schémas sur k i.e. les espaces qui "sont" localement l'ensemble des solutions d'une famille de polynômes à coefficients dans k, muni d'une topologie dite de Zariski, et les applications qui sont localement rapport de polynômes à coefficients dans k.
Pour mieux comprendre ces catégories il s'avère utile de construire des invariants qui sont plus faciles à comprendre. On peut penser au nombre de composantes connexes d'un espace topologique. C'est un invariant élémentaire qui entraîne des résultats non-triviaux comme le fait que $\mathbb{R}^1$ et $\mathbb{R}^2$ ne sont pas homéomorphes. Mais qu'est-ce que c'est un invariant précisément ? On formalise ce concept disons que c'est un foncteur vers une autre catégorie (à priori plus simple à étudier). L'exemple d'avant pourrait faire penser que l'intérêt d'avoir un invariant I se borne à la propriété : "si $I(X)$ et $I(Y)$ ne sont pas isomorphes alors X et Y ne le sont non plus". Présentons ici un résultat intéressant qui utilise à fond la fonctorialité des invariants.

Théorème 2.1. *Toute application continue $f : \mathbb{D}^2 \longrightarrow \mathbb{D}^2$ du disque de dimension 2 vers lui-même admet un point fixe.*

Démonstration. Supposons qui f n'a pas de point fixe. En faisant passer une droite par P et $f(P)$ on construit une application continue $g : \mathbb{D}^2 \longrightarrow \mathbb{S}^1$ telle que $g \circ i$ est l'identité sur le cercle unité, où i est l'inclusion de ce dernier dans le disque. En appliquant le foncteur π_1 (le foncteur "groupe fondamental") à la relation $g \circ i = id : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{S}^1$ on obtient $\pi_1(g) \circ \pi_1(i) = id : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$. Or $\pi_1(\mathbb{D}^2)$ est le groupe trivial, donc $\pi_1(i)$ est forcement l'application nulle et $\pi_1(g) \circ \pi_1(i)$ ne peut pas être l'identité. □

Persuadés de l'intérêt de ces foncteurs, les mathématiciens ont construit, pendant les derniers deux siècles, l'homotopie et l'homologie singulière en topologie, la cohomologie de De Rham en géométrie différentielle, la cohomologie de Betti, ou celle ℓ-adique en géométrie algébrique.
Les cohomologies se présentent comme des foncteurs vers la catégorie des complexes de F-espaces vectoriels pour un corps F. Rappelons qu'un tel complexe est une chaîne d'applications linéaires entre F-espaces vectoriels

$$\dots \stackrel{d_{n-1}}{\to} V_{n-1} \stackrel{d_n}{\to} V_n \stackrel{d_{n+1}}{\to} V_{n+1} \stackrel{d_{n+2}}{\to} \dots ,$$

telles que $d_n \circ d_{n-1} = 0$. Le $n-$ième groupe de cohomologie sera alors $Ker(d_{n+1})/Im(d_n)$. Grothendieck pendant les années soixantes remarque que les différentes cohomologies présentes en géométrie algébrique ont des analogies, typiquement elles sont isomorphes après tensorisation par certains anneaux. Il conjecture alors l'existence d'une cohomologie universelle c'est à dire un foncteur $X \mapsto M_{gm}(X)$ tel que pour n'importe quelle cohomologie $X \mapsto H(X)$ on ait une factorisation $H = R_H \circ M_{gm}$. Le foncteur R_H est dit réalisation de la cohomologie H. C'est évident qu'on pourrait prendre comme flèche M_{gm} l'identité des schémas vers eux-mêmes. Le problème est que les schémas sont une catégorie trop dure à étudier typiquement on ne peut pas parler de somme de deux applications et le but de la construction des invariants reste de aboutir dans une catégorie plus simple à étudier. La conjecture de Grothendieck est plus précisément l'existence d'un foncteur $M_{gm} : Sch_{/k} \longrightarrow DM(k)$ de la catégorie des schémas sur k vers une catégorie qui ait des bonnes propriétés comme celle que l'ensemble des applications entre deux objets est un groupe abelien (propriété vérifié pour tout invariant décrit avant). Plus précisément on demande à $DM(k)$ d'être triangulée. L'idée est que dans les catégories d'avant on pouvait parler de Ker et Im et donc de suite exacte. La définition de catégorie triangulée essaie de pouvoir parler d'exactitude et de demander toutes les propriétés lié à elle, vérifiées dans les catégories d'arrivée des cohomologies (les catégories des complexes d'espaces vectoriels), sans demander l'existence de Ker et Im. On conclut ce paragraphe en donnant cette définition et quelques commentaires.

Définition 2.2. *On appelle catégorie triangulée un catégorie satisfaisante les conditions suivantes :*

(i) *Il existe un objet qu'on appelle* 0 *tel que les ensembles* $Hom_{\mathcal{C}}(X,0)$ *et* $Hom_{\mathcal{C}}(0,X)$ *possèdent un seul élément pour tout* $X \in \mathcal{C}$*. Dans ce cas on notera avec* $0 : X \to Y$ *tout morphisme qui se factorise par* 0*.*

(ii) *Pour tout* $X, Y \in \mathcal{C}$ *il existe* $X \oplus Y$ *et* $X \otimes Y$*.*

(iii) *Pour tout* $X, Y \in \mathcal{C}$*, l'ensemble* $Hom_{\mathcal{C}}(X,Y)$ *est muni d'une structure de groupe abelien en sorte que la composition soit distributive par rapport à l'addition.*

(iv) *Il existe un autofoncteur* $[1] : X \mapsto X[1]$*.*

(v) *Il existe une famille de triangles* $(X,Y,Z,f,g,h) := X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} X[1]$ *qu'on appellera triangles exactes et un morphisme entre triangle est une donnée de trois morphismes qui fassent commuter le diagramme naturel.*

(vi) *Un triangle isomorphe à un triangle exacte est exacte.*

(vii) *Le triangle* $(X, X, 0, Id_X, 0, 0)$ *est exacte.*

(viii) *Si le triangle* (X,Y,Z,f,g,h) *est exacte, alors* $(Y, Z, X[1], g, h, -f[1])$ *l'est.*

(ix) *Tout morphisme* $f : X \to Y$ *peut être inclus dans un triangle exacte* (X,Y,Z,f,g,h)*.*

(x) *Si on se donne deux triangles* (X,Y,Z,f,g,h) (X',Y',Z',f',g',h') *et deux flèches* $x : X \to X'$ *et* $y : Y \to Y'$ *qui fassent commuter le diagramme, alors on peut le compléter en un morphisme de triangles.*

(xi) *La catégorie vérifie l'axiome octahédral.*

Remarque 2.3. (a) *Les axiomes* $(i) - (iii)$ *sont les axiomes de la définition de catégorie additive et on les voit comme le minimum à demander à une bonne catégorie.*

(b) *Le foncteur de* (iv) *dans le cas des catégorie de complexes est le foncteur translation qui associe le même complexe mais avec un indice décalé* $(V_n, d_n)[1] = (V_{n-1}, d_{n-1})$*.*

(c) *Les triangles exactes correspondent aux suites exactes de morphismes entre complexes. Les axiomes* $(vi) - (xi)$ *sont naturels à être demandés dans ce cadre.*

(d) *On n'a pas écrit explicitement l'axiome octahédral pour ne pas alourdir la définition et parce qu'on ne s'en servira pas dans ce texte. Il peut être repéré facilement dans le littérature. L'idée est que si on se donne deux morphisme* $f : X \to Y$ *et* $g : Y \to Z$, *on peut compléter* $f, g, g \circ f$ *en trois triangles grâce à* (ix) *et on s'attende que entre ces trois triangles il y a une relation. La prochaine proposition se déduit de l'axiome octahédral et en montre un peu l'esprit. Elle sera utilisée dans la suite.*

Proposition 2.4. *(cf.* [BBD] *prop.* 1.1.11*) On se donne deux triangles* (X, Y, Z, f, g, h) *et* (X', Y', Z', f', g', h') *et une flèche* $y : Y \to Y'$. *Supposons que* $Hom(X, Z') = 0$ *alors le diagramme évident se complète en un diagramme*

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[r] \arrow[d] & Z \arrow[r] \arrow[d] & X[1] \arrow[d] \\
X' \arrow[r] \arrow[d] & Y' \arrow[r] \arrow[d] & Z' \arrow[r] \arrow[d] & Y[1] \arrow[d] \\
X'' \arrow[r] \arrow[d] & Y'' \arrow[r] \arrow[d] & Z'' \arrow[r] \arrow[d] & Z[1] \arrow[d] \\
X[1] \arrow[r] & Y[1] \arrow[r] & Z[1] \arrow[r] & X[2]
\end{tikzcd}$$

tel que toutes les lignes et toutes les colonnes sont des triangles exactes et tous les carrés sont commutatifs sauf au plus celui en bas à à droite.

3. Filtration de Hodge et théorie du poids

L'existence de la catégorie triangulée $DM(k)$ est due à Voevodsky. Il démontre que à n'importe quel schéma X sur k on peut associer $M_{gm}(X), M_{gm}(X)^c \in DM(k)$ telle que pour n'importe quelle "bonne" cohomologie $H^*(\cdot)$ à valeur dans les complexes de $F-$espace vectoriel, il existe un foncteur R_H de $DM(k)$ dans le catégorie de ces complexes en sorte que

$$M_{gm}(X) \mapsto \dots \stackrel{d_{n-1}}{\to} V_{n-1} \stackrel{d_n}{\to} V_n \stackrel{d_{n+1}}{\to} V_{n+1} \stackrel{d_{n+2}}{\to} \dots ,$$

$$M^c_{gm}(X) \mapsto \dots \stackrel{d^c_{n-1}}{\to} V^c_{n-1} \stackrel{d^c_n}{\to} V^c_n \stackrel{d^c_{n+1}}{\to} V^c_{n+1} \stackrel{d^c_{n+2}}{\to} \dots ,$$

et que

$$Ker(d_{n+1})/Im(d_n) = H^n(X) \quad , \quad Ker(d^c_{n+1})/Im(d^c_n) = H^n_c(X)$$

Plus précisément Voevodsky ([Voe]) démontre que ceci est vrai pour toute cohomologie existante et récemment Déglise et Cisinsky ([CiDe]) ont démontré que ceci vaut pour toute cohomologie dite "de Weil". De plus à l'intérieur de la catégorie $DM(k)$ des "motifs géométrique" il y a une sous-catégorie pleine des "motif de Chow" $CHM(k)$ qui sont des motifs qui ont un comportement particulièrement agréable (on en donnera un exemple ici). Quand X est lisse et compacte $M_{gm}(X) = M^c_{gm}(X)$ est de Chow.

On décrit dans ce paragraphe une structure présente dans toutes les cohomologies : la filtration de Hodge. Dans la philosophie que les motifs doivent expliquer les comportements communs aux cohomologies on s'attend que la catégorie $DM(k)$ soit munie, elle aussi, d'une structure supplémentaire liée à la filtration de Hodge.

Pendant les année soixantes Grothendieck démontre que si on se donne un schéma défini sur un corps fini F_q, le Frobenius du groupe de Galois absolu sur F_q, agit sur les groupes de cohomologie ℓ-adique à support compacte (des espaces vectoriels sur $\mathbb{Q}_\ell$) et que la connaissance des valeurs propres de cette action est équivalente à l'hypothèse de Riemann pour les variétés sur un corps fini.
En 1973 Deligne démontre que ces valeurs propres, à priori algébrique sur $\mathbb{Q}_\ell$, le sont en fait sur $\mathbb{Q}$. Dans le cas compacte et lisse, si on prend n'importe quel leur plongement σ des nombres algébriques dans $\mathbb{C}$ et α une valeur propre de l'action du Frobenius sur $H^n_c(X, \mathbb{Q}_\ell)$ alors $|\sigma(\alpha)| = q^{-n/2}$. Dans le cas générale on a $|\sigma(\alpha)| = q^{-i/2}$, où i est un entier entre 0 et n. On a ici un phénomène "pure" pour le cas lisse et compacte et "mixte" pour le cas générale.
Ce phénomène se présente en générale : pour n'importe quel schéma défini sur un corps k et n'importe quelle cohomologie, le groupe de Galois absolu sur k agit sur les groupe $H^n(X)$ et cette action permet de définir une filtration

$$\ldots \subset W_{k-1}(H^n(X)) \subset W_k(H^n(X)) \subset W_{k+1}(H^n(X)) \subset \ldots$$

De plus toute application entre groupes de cohomologie respecte cette structure.
Dans le cas de la cohomologie ℓ-adique, W_k est le sous-espace où le Frobenius agit avec des valeurs propres du type $|\sigma(\alpha)| = q^{-i/2}$, où i est un entier entre 0 et k. En particulier dans le cas où X est lisse et compacte $W_{n-1}(H^n_c(X, \mathbb{Q}_\ell)) = 0$ et $W_n(H^n_c(X, \mathbb{Q}_\ell)) = H^n_c(X, \mathbb{Q}_\ell)$. Ces dernières formules sont vraies pour toute cohomologie dans le cas lisse et compacte. On dit que le cas lisse et compacte est pure, dans le sens où la filtration de Hodge se concentre sur un seul indice (à savoir n quand c'est le n-ième groupe de cohomologie). Ce phénomène s'explique avec les motifs : on démontre que n'importe quelle réalisation d'un motif de Chow possède une filtration pure, or on a dit que le motif d'une variété lisse et compacte est un motif de Chow.
On souhaite maintenant comprendre si, donnée une variété X qui n'est pas forcement lisse et compacte, on peut prévoir la structure mixte présente dans ses cohomologies, en regardant son motif $M_{gm}(X)$ et son motif à support compacte $M^c_{gm}(X)$. Typiquement on aimerait avoir pour chaque élément de $DM(k)$ une filtration à lui associée, en sorte que la réalisation de cette filtration soit la filtration de Hodge. En particulier les motifs de Chow devraient avoir une filtration triviale. On n'arrive pas à pouvoir définir sur $DM(k)$ une structure avec des propriétés si belles, mais on essaie de l'imiter avec la définition suivante.

Définition 3.1. *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie triangulée. Une structure de poids sur $\mathcal{C}$ est une paire $w = (\mathcal{C}_{w\leq 0}, \mathcal{C}_{w\geq 0})$ de sous-catégories pleines de $\mathcal{C}$, telles que les conditions suivantes soient satisfaites :*

(i) *Les categories $\mathcal{C}_{w\leq 0}$ et $\mathcal{C}_{w\geq 0}$ sont closes sous formation de facteurs directs dans $\mathcal{C}$.*

(ii) *On pose $\mathcal{C}_{w\leq 0}[N] = \mathcal{C}_{w\leq N}$ et $\mathcal{C}_{w\geq 0}[N] = \mathcal{C}_{w\geq N}$ On a les inclusions*

$$\mathcal{C}_{w\leq -1} \subset \mathcal{C}_{w\leq 0} \quad , \quad \mathcal{C}_{w\geq 1} \subset \mathcal{C}_{w\geq 0} \, .$$

(iii) *Pour toute paire d'objets $X \in \mathcal{C}_{w\leq 0}$ et $Y \in \mathcal{C}_{w\geq 1}$, on a*

$$Hom_{\mathcal{C}}(X, Y) = 0 \, .$$

(iv) *Filtration par le poids. Pour tout $X \in \mathcal{C}$, il existe un triangle exact*

$$A \longrightarrow X \longrightarrow B \longrightarrow A[1]$$

dans $\mathcal{C}$, tel que $B \in \mathcal{C}_{w \geq 1}$ et $A \in \mathcal{C}_{w \leq 0}$.

Quand la catégorie $\mathcal{C}$ possède une structure de poids, la sous-catégorie pleine $\mathcal{C}_{\leq 0} \cap \mathcal{C}_{\geq 0}$ est dite le coeur de la catégorie et est notée avec $\mathcal{C}_{=0}$. Egalement on note $\mathcal{C}_{a \leq w \leq b} = \mathcal{C}_{\leq b} \cap \mathcal{C}_{\geq a}$.

Théorème 3.2. [Bo] *La catégorie $DM(k)$ possède une structure de poids pour laquelle $CHM(k)$ est le coeur. Quand X est de dimension d, $M^c_{gm}(X) \in DM_{0 \leq w \leq d}$ et si de plus X est lisse $M_{gm}(X) \in DM_{-d \leq w \leq 0}$.*

Quelques commentaires pour mieux comprendre la notion de poids et sa liaison avec la filtration de Hodge. Intuitivement on peut imaginer les éléments M de $DM(k)$ décomposés avec le poids en

$$M = \oplus_{w \in \mathbb{Z}} M_w$$

où tout M_w est un motif de Chow translaté de $[w]$. On dit tout de suite que ceci n'est pas vrai. En tout cas cette intuition est utile. Les sous-catégories $DM_{w \leq a}, DM_{a \leq w \leq b}, \ldots$ correspondent intuitivement aux motifs M tel que M_w est nul pour $w > a, \ldots$
Ceci peut aider à comprendre pourquoi on demande certains axiomes et quel type de résultats on s'attend.
De plus, vu le comportement des réalisations cohomologique des motifs de Chow et des réalisation des motifs à support compact exposées avant, il est naturel d'imaginer qu'après réalisation notre fantôme M_w se comporte selon la formule

$$H^n(M_w) = W_{n-w}H^n / W_{n-w-1}H^n.$$

On verra dans la suite des résultats qui confirment cette intuition. En particulier on verra que quand on peut parler de M_0 la formule qu'on vient d'écrire est vraie. L'obstacle à l'existence d'un objet canonique M_0 est dû au fait que la filtration de poids n'est pas canonique. Ceci se voit intuitivement de la manière suivante : si on décompose

$$A \longrightarrow X \longrightarrow B \longrightarrow A[1]$$

en A_w, B_w, X_w on s'aperçoit facilement que le X_0 et X_1 ne se déduisent pas directement des A_w, B_w mais plutôt on a la suite exacte $0 \to X_1 \to B_1 \to A_0 \to X_0 \to 0$. Donc même en présence d'une filtration de ce type on n'arrive pas à décrire un $X_{w \leq 0}$ et $X_{w \geq 1}$ en fonction de A et B. Cependant on a l'impression que, si un entre A_0 et B_1 est nul, ceci est possible. On a alors intérêt à introduire la définition suivante.

Définition 3.3. *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie qui possède une structure de poids, et $\mathcal{D}$ une sous-catégorie pleine, on note par $\mathcal{D}_{w \neq a}$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{D}$, des objets qui sautent le poids a c'est-à-dire les objets X pour qu'il existe une filtration*

$$A \longrightarrow X \longrightarrow B \longrightarrow A[1]$$

avec $A \in \mathcal{C}_{w \leq a-1}$ et $B \in \mathcal{C}_{w \geq a+1}$.

On peut démontrer que dans ce cas les objet A et B sont canoniques, chose qui confirme notre intuition. On a alors l'espoir d'utiliser cette canonicité pour construire ce X_0. Ceci est l'objet du résultat suivant.

Théorème 3.4. [Wild2]

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie qui possède une structure de poids. Ils existent deux foncteurs

$$Gr_0^+ : \mathcal{C}_{w\geq 0\,,\,w\neq +1} \to \mathcal{C}_{w=0}$$

et

$$Gr_0^- : \mathcal{C}_{w\leq 0\,,\,w\neq -1} \to \mathcal{C}_{w=0}$$

qui sont adjoints respectivement à droite et à gauche de, respectivement

$$i_0^+ : \mathcal{C}_{w=0} \to \mathcal{C}_{w\geq 0\,,\,w\neq +1}$$

et

$$i_0^- : \mathcal{C}_{w=0} \to \mathcal{C}_{w\leq 0\,,\,w\neq -1}$$

et avec la propriété que $Gr_0^- \circ i_0^- = Gr_0^+ \circ i_0^+ = id_{\mathcal{C}_{w=0}}$. De plus pour n'importe quel objet C de $\mathcal{C}_{w\geq 0\,,\,w\neq +1}$ (resp. $\mathcal{C}_{w\leq 0\,,\,w\neq -1}$), n'importe quelle filtration qui saute le poids $+1$ (resp. -1) a comme objet à poids négatif (resp. positif) un objet isomorphe à $Gr_0^+(C)$ (resp. $Gr_0^-(C)$).

L'intuition qu'on a sur la relation entre structure de poids et filtration de Hodge est confirmée par la proposition suivante. Par analogie à la structure de poids on dira que H^n (ou H_c^n) saute le poids α quand $W_\alpha H^n / W_{\alpha-1} H^n = 0$.

Proposition 3.5. *Si $M_{gm}(X)$ (resp. $M_{gm}^c(X)$) saute le poids α alors pour toute réalisation cohomologique H, $H^n(X)$ (resp. $H_c^n(X)$) saute le poids $n-\alpha$. Plus généralement pour tout $M \in DM(k)$, s'il saute le poids α alors pour toute réalisation cohomologique H, $H^n(M)$ saute le poids $n-\alpha$.*

Dans le prochain paragraphe on aura un autre résultat qui nous confirme la relation entre filtration de poids et filtration de Hodge.

4. Motif bord et motif intérieur

On fixe dorénavant X, un schéma lisse. Le théorème 3.4 s'applique aux motifs $M_{gm}(X)$ et $M_{gm}^c(X)$ à condition que le premier saute le poids -1 et deuxième $+1$. Ceci nous donnerait une bonne approximation de ces motifs en motifs de Chow. Ce paragraphe nous donne un critère pour que la condition soit vérifiée.

Entre $M_{gm}(X)$ et $M_{gm}^c(X)$ il y a une flèche canonique, et grâce aux axiomes de catégorie triangulée on peut insérer cette flèche en un triangle exacte :

$$\partial M_{gm}(X) \longrightarrow M_{gm}(X) \longrightarrow M_{gm}^c(X) \longrightarrow \partial M_{gm}(X)[1]\ .$$

et on appelle $\partial M_{gm}(X)$ le motif bord de X. Jörg Wildeshaus dans [Wild1] trouve des méthodes pour pouvoir mieux connaître un tel motif. L'utilité d'introduire ce motif est qu'on s'attend qu'il soit à priori plus facile à "calculer" que le motif de X ou le motif de X à support compacte. La prochaine proposition montre comme une certaine condition sur le motif bord entraîne celles demandées dans le théorème 3.4.

Proposition 4.1. *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie qui possède une structure de poids. On se donne $M^- \in \mathcal{C}_{\leq 0}$ et $M^+ \in \mathcal{C}_{\geq 0}$ et une flèche entre eux qu'on complète en un triangle*

$$C \longrightarrow M^- \longrightarrow M^+ \longrightarrow \partial C[1]\ .$$

Si C saute les poids -1 et 0 alors M^- saute -1 et M^+ saute $+1$ et $Gr_0^-(M^-) \cong Gr_0^+(M^+)$.

Démonstration. Nous avons le diagramme

$$\begin{tikzcd} & C_{\leq -2} \arrow[d] & \\ M^+[-1] \arrow[r] & C \arrow[r] \arrow[d] & M^- \\ & C_{\geq 1} & \end{tikzcd}$$

avec $C_{\leq -2} \in \mathcal{C}_{\leq -2}$ et $C_{\geq 1} \in \mathcal{C}_{\geq 1}$ (en fait la définition de sauter deux poids est plutôt qu'il existe deux filtrations telles que... mais quand les poids sont consécutifs on peut voir que ceci revient à une seule filtration comme celle en vertical). On utilise le lemme suivant

Lemme 4.2. *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie qui possède une structure de poids. On se donne un diagramme*

$$\begin{tikzcd} & D_{\leq d} \arrow[d] & \\ A_{\leq a} \arrow[r] & C \arrow[r] \arrow[d] & B_{\geq b} \\ & E_{\geq e} & \end{tikzcd}$$

avec $A_{\leq a} \in \mathcal{C}_{\leq a}$, $B_{\geq b} \in \mathcal{C}_{\geq b}$, $D_{\leq d} \in \mathcal{C}_{\leq d}$, $E_{\geq e} \in \mathcal{C}_{\geq e}$. Alors les flèches $A_{\leq a} \to E_{\geq e}$ et $D_{\leq d} \to B_{\geq b}$ se complètent en deux triangles exactes

$$A_{\leq a} \to E_{\geq e} \to Y$$

$$D_{\leq d} \to B_{\geq b} \to Y$$

pour un même Y qui appartient à $\mathcal{C}_{min(e,a+1) \leq w \leq max(b,d+1)}$

Démonstration. On complète le diagramme en

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[d] & D_{\leq d} \arrow[d] & \\ A_{\leq a} \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[r] \arrow[d] & B_{\geq b} \\ A_{\leq a} & E_{\geq e} & \end{tikzcd}$$

et comme $Hom(0, E_{\geq e}) = 0$ grâce aux lemme 2.4 on l'étende en un diagramme où tous les triangles verticaux et horizontaux sont exactes et les carrés sont commutatifs

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] \arrow[d] & D_{\leq d} \arrow[r] \arrow[d] & D_{\leq d} \arrow[d] \\
A_{\leq a} \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[r] \arrow[d] & B_{\geq b} \arrow[d] \\
A_{\leq a} \arrow[r] & E_{\geq e} \arrow[r] & Y
\end{tikzcd}$$

Ceci nous donne les triangles voulus. Pour avoir les estimations sur le poids de Y de l'énoncé on utilise la fait suivant dû à Bondarko (cf.[Bo] Prop 1.3.3.3) : si on a un triangle exacte $A \to B \to C$ avec A et C de poids au plus (resp. au moins) n alors B est de poids au plus (resp. au moins) n. $\square$

Dans notre cas on en déduit que Y est forcement pur de poids 0. On a les filtrations :

$$Y \to M^+ \to C_{\geq 1}[1]$$

$$C_{\leq 2} \to M^- \to Y$$

donc M^+ saute $+1$ et M^- saute -1. De plus grâce au théorème 3.4 on a que $Gr_0^+(M^+) \cong Y \cong Gr_0^-(M^-)$ $\square$

Grâce à ce résultat et au théorème 3.4 on dispose d'un motif de Chow associé à X, qu'on notera $Gr_0(M_{gm}(X))$. Vu l'intuition qu'on a sur le poids (voir paragraphe précédent) on s'attend que ce motif, après réalisation, représent le degré $n-$ième de la filtration de Hodge associée aux groupes cohomologiques $H^n(X)$ et $H_c^n(X)$. Voici l'énoncé précis.

Théorème 4.3. *([Wild2] thm 4.7 et 4.8) Soit X une variété lisse telle que son motif bord évite les poids $-1, 0$. Alors pour toute réalisation cohomologique H on a :*

(a) $H^n(Gr_0(M_{gm}(X))) = W_n H^n(X)$
(b) $H^n(Gr_0(M_{gm}(X))) = W_n H_c^n(X)/W_{n-1}H_c^n(X)$
(c) la flèche canonique $H_c^n(X) \to H^n(X)$ a comme image $H^n(Gr_0(M_{gm}(X)))$.

Vu la partie (c) de ce théorème on appellera $Gr_0(M_{gm}(X))$ le motif intérieur de la variété X. Ce motif de Chow représent une information précieuse sur la variété, vues ses réalisations. On se demande alors pour quelles variétés lisses le motif bord saute les poids $-1, 0$. Le prochain paragraphe donne quelques résultats et conjectures là-dessus.

5. Résultats et conjectures sur le motif intérieur

On fixe maintenant un schéma X lisse. On cherche des situations où le motif bord de X saute les poids $-1, 0$.
On généralise légèrement la cadre : on peut définir une algèbre $\overline{c_{1,2}}(X, X)$ (voir [Wild2]) qui agit sur le triangle $\partial M_{gm}(X) \longrightarrow M_{gm}(X) \longrightarrow M_{gm}^c(X) \longrightarrow \partial M_{gm}(X)[1]$ au sens que chaque élément de l'algèbre correspond à un endomorphisme de $\partial M_{gm}(X), M_{gm}(X)$

et $M_{gm}^c(X)$ dans la catégorie $DM(k)$ en sorte que ces trois endomorphismes commutent avec les morphismes structurels du triangle. En général, comme on a souligné avant, on ne peut pas parler d'image d'un morphisme dans la catégorie $DM(k)$ mais si $e \in \overline{c_{1,2}}(X,X)$ est un projecteur, au sens que $e^2 = e$ alors l'image peut se définir et elle est un facteur direct de l'objet de départ. L'action de e projecteur induit alors un triangle exact

$$\partial M_{gm}(X)^e \longrightarrow M_{gm}(X)^e \longrightarrow M_{gm}^c(X)^e \longrightarrow \partial M_{gm}(X)^e[1]\,,$$

où M^e indique l'image de M par e.
L'intérêt de ceci et qu'on peut appliquer la proposition 4.1 à ce triangle et que, s'il est rare que le motif bord en entier saute le poids -1 et 0, il est plus probable que ces facteurs directs le fassent.
Le problème devient maintenant de pouvoir trouver des $e \in \overline{c_{1,2}}(X,X)$ tels que $e^2 = e$. Ceci est plus facile dans des algèbre du type $\overline{c_{1,2}}(X,X) \otimes_{\mathbb{Z}} F$ où F est n'importe quelle $\mathbb{Z}-$algèbre sans torsion. Cette algèbre-là agit toujours sur notre triangle mais à l'intérieur d'une autre catégorie : DM_F, c'est à dire que les morphismes associés aux éléments de cette algèbre ne sont pas définit dans $DM(k)$ mais dans DM_F. Cette catégorie reste intéressante pour l'étude de la cohomologie. Ils existent toujours des foncteurs de réalisation vers les catégories cohomologiques et l'algèbre $\overline{c_{1,2}}(X,X) \otimes_{\mathbb{Z}} F$ agit aussi sur les groupes de cohomologie. On a un résultat analogue au théorème 4.3 dans ce cadre tordu par les projecteurs.

Théorème 5.1. *(*[Wild2] *thm 4.7 et 4.8) Soit X une variété lisse telle que le facteur directe de son motif bord $\partial M_{gm}(X)^e$ évite les poids $-1, 0$. Alors grâce au théorème 4.1 on peut définir le motif $Gr_0(M_{gm}(X)^e) \cong Gr_0(M_{gm}^c(X)^e)$. Pour toute réalisation cohomologique H on a :*
(a) $H^n(Gr_0(M_{gm}(X)^e)) = (W_n H^n(X))^e$
(b) $H^n(Gr_0(M_{gm}(X)^e)) = (W_n H_c^n(X))^e / (W_{n-1} H_c^n(X))^e$
(c) la flèche canonique $(H_c^n(X))^e \to (H^n(X))^e$ a comme image $H^n(Gr_0(M_{gm}(X)^e))$, où, quand e agit sur un espace vectoriel E, on note par E^e son image.

Ici aussi, vu la partie (c) de ce théorème, on appellera $Gr_0(M_{gm}(X)^e$ la $e-$ième partie du motif intérieur de la variété X, et encore ce motif représent une information précieuse sur la variété, vues ses réalisations.

Il y a lieu d'espérer que $\partial M_{gm}(X)^e$ évite les poids $-1, 0$ quand X est une variété de Shimura, pour beaucoup de e projecteur. Une telle variété est un espace qui paramètre des variétés abeliennes (c'est à dire des variétés compacte qui sont aussi un groupe). Les variétés de Shimura ont un intérêt arithmétique, elles sont strictement liées aux formes modulaires. Elles sont toujours lisses, mais pas compactes et sont munies de l'action d'une algèbre, dite algèbre d'Hecke. Historiquement on cherche des motifs de Chow munis de l'action de cette algèbre (voir [Sch]) et ceci a toujours été fait via une compactification lisse de la variété de Shimura qui soit muni de l'action de l'algèbre de Hecke (on rappelle que le motif d'une variété lisse et compacte est directement de Chow). Le problème est que cette compactification existe rarement, alors que le motif de Chow $Gr_0(M_{gm}(X)^e)$ est muni naturellement de l'action de l'algèbre de Hecke via l'action du centralisateur de e dans $\overline{c_{1,2}}(X,X) \otimes_{\mathbb{Z}} F$. Ceci montre l'intérêt de poursuivre plutôt ce chemin.
Wildeshaus dans [Wild3] construit une famille de projecteurs e pour des variétés dites de Hilbert-Blumenthal qui sont une sous-famille des variétés de Shimura, tels

que $\partial M_{gm}(X)^e$ évite les poids $-1, 0$. On espère de pouvoir étendre sa méthode à d'autres sous-familles des variétés de Shimura typiquement les variétés de Picard ou les variétés de Siegel. Ici le calcul de $\partial M_{gm}(X)^e$ sera peut être plus compliqué. Ce qui marche très bien dans le cas des variétés de Hilbert Blumenthal est que le motif bord est un motif de Artin-Tate. Ceci implique qu'on peut savoir si le motif saute des poids juste en regardant ses réalisation, c'est-à-dire, on a une réciproque de la proposition 3.5 :

Proposition 5.2. *(*[Wild3]*, théorème 6.2) Pour tout $M \in DM(k)$ qui est un motif d'Artin-Tate et pour toute réalisation cohomologique H, M saute le poids α si et seulement si $H^n(M)$ saute le poids $n - \alpha$ pour tout n.*

Références

[BBD] Beilinson, A.A., Bernstein, J., Deligne, P. : *Faisceaux pervers*, dans Teissier, B., Verdier, J.L. : *Analyse et topologie sur les espace singuliers (I)*, Asterique **100** (1982).

[Bo] Bondarko, M.-V. : *Weight structures vs. t-structures ; weight filtrations, spectral sequences, and complexes*, `http ://arxiv.org/abs/0704.4003` , 116 pages.

[CiDe] Cisinski, D.-C., Déglise, F. : *Mixes Weil Cohomologies*, `http ://www-math.univ-paris13.fr/ cisinski/mwc.pdf`.

[Sch] Scholl, A.-J. : *Motives for modular forms*, Invent. Math. **100** (1990), 419–430.

[Voe] V. Voevodsky, A. Suslin, E.M. Friedlander : *Cycles, Transfers, and Motivic Homology Theories*, Ann. of Math. Studies **143**, Princeton Univ. Press 2000.

[Wild1] Wildeshaus, J. : *The boundary motive : definition and basic properties*, Compos. Math. **142** (2006), 631–656.

[Wild2] Wildeshaus, J. : *Chow motives without projectivity*, 38 pages, à par. dans Compos. Math.

[Wild3] Wildeshaus, J. : *On the interior motive of certain Shimura varities : the case of Hilbert-Blumenthal varieties*, Arxiv 2 Jul 2009