SUR LE GROUPE DE L'ICOSAÈDRE

GIUSEPPE ANCONA & YOHAN BRUNEBARBE

Sujet proposé par Frédéric Paulin

1. Introduction

Notre mémoire s'appuie sur un article de W. Duke [Duk] qui montre l'apport de la connaissance du groupe de l'icosaèdre à l'étude de la fraction continue de Rogers-Ramanujan. Nous ne démontrerons pas la totalité des résultats présents dans cet article, cependant les prérequis à la compréhension de ce mémoire sont plus élémentaires et correspondent aux connaissances d'un étudiant en fin de première année de la FIMFA.

Les trois premiers chapitres ont une cohérence propre. Nous aurons besoin d'admettre dans le quatrième chapitre des connaissances plus avancées :

- les notions de base de la théorie des fonctions modulaires telles qu'elles sont exposées dans le cours d'arithmétique de Serre [Ser],
- un théorème classique de théorie de Galois [Bra],
- des résultats de base sur la fraction continue de Rogers-Ramanujan.

Dans le premier chapitre, nous construirons le polyèdre régulier à 12 sommets, 20 faces et 30 arêtes appelé *icosaèdre* et nous étudierons *le groupe de l'icosaèdre*, i.e. le groupe des rotations qui laissent stable l'icosaèdre.

Nous décrirons ensuite dans le deuxième chapitre un procédé naturel étudié par Klein [Kle] permettant de voir l'icosaèdre comme un sous-ensemble de $\hat{\mathbb{C}}$ et son groupe comme un sous-groupe du groupe des homographies.

Nous pourrons alors nous intéresser dans le troisième chapitre aux fractions rationnelles de $\mathbb{C}(z)$ invariantes sous l'action du sous-groupe ainsi obtenu.

Le quatrième chapitre introduira la fraction continue de Rogers-Ramanujan et démontrera les résultats anticipés.

Nous tenons à remercier Frédéric Paulin pour l'intérêt du sujet qu'il nous a proposé, pour sa grande disponibilité et sa relecture minutieuse.

Date: 26 Juin 2007.

2. Le groupe de l'icosaèdre

Le but de cette partie est de construire explicitement le solide icosaèdre et d'étudier son groupe, c'est-à-dire le sous-groupe de $SO_3(\mathbb{R})$ qui laisse stable ce polyèdre.

Nous allons démontrer qu'il est naturellement isomorphe au groupe $\mathfrak{A}_5$, le groupe des permutations à 5 éléments à signature positive. Pour arriver à ce résultat, certains grands mathématiciens (par exemple Klein [Kle]) ont démontré que le groupe de l'icosaèdre est un groupe simple à 60 éléments, or $\mathfrak{A}_5$ est le seul groupe simple à 60 éléments.

Cette démonstration, certes très élégante, a l'inconvénient de faire appel à des résultats d'algèbre pas vraiment élémentaire et de cacher en partie la géométrie de ce groupe. On a donc préféré suivre une voie plus géométrique qui présente l'avantage d'expliciter les cinq éléments qui sont permutés sous l'action du groupe de l'icosaèdre et d'utiliser des outils d'algèbre de base comme les actions.

Commençons par définir précisèment les notions de solide (ou *polyèdre*) et de *polyèdre régulier*. Nous démontrerons ensuite que l'icosaèdre appartient bien à cette dernière classe.

Définition 2.1. *Un polyèdre est un compact de l'espace euclidien de dimension 3 qui est intersection finie de demi-espaces fermés.*
On appelle écriture admissible d'un polyèdre une collection finie de demi-espaces fermés dont l'intersection est égale au polyèdre.
Une écriture admissible sera dite minimale si aucun demi-espace ne contient l'intersection de tous les autres.

Remarquons qu'une écriture admissible minimale est en fait une écriture admissible qui est minimale pour la relation d'inclusion (ce qui montre au passage l'existence d'une telle écriture). Nous admettrons la proposition suivante dont la démonstration consiste uniquement en une formalisation de notre intuition.

Proposition 2.2. *Tout polyèdre admet une unique écriture admissible minimale.*

Cette proposition permet de définir rigoureusement les notions de sommet, arête et face.

Définition 2.3. *Une face (resp. une arête et resp. un sommet) est l'intersection du polyèdre avec la frontière d'un demiplan (resp. deux distincts et resp. au moins trois distincts deux-à-deux) de son écriture admissible minimale.*

On donne maintenant une définition technique nécessaire pour parler de polyèdre régulier.

Définition 2.4. *Un drapeau (F,A,S) est un triplet composé d'une face, d'une arête et d'un sommet tels que $F \supset A \supset S$.*

Définition 2.5. *Un polyèdre est dit régulier si le groupe des isométries qui le laisse stable agit transitivement sur ses drapeaux.*

Ce n'est pas la définition à laquelle nous sommes habitués (polyèdre dont les faces sont des polygones réguliers congruents et dont les angles dièdres sont congruents). On ne démontrera pas, ce qui est vrai par ailleurs (cf [BER]), qu'elles sont équivalentes. Nous avons choisi la définition la plus adaptée à notre étude, car dans la suite nous allons faire agir des isométries sur l'icosaèdre. Cela dit, cette définition est très naturelle et correspond bien à notre intuition.

À ce stade, nous disposons de toutes les définitions nécessaires pour construire l'icosaèdre et démontrer qu'il s'agit bien d'un polyèdre régulier.

Nous n'avons pas trouvé de construction d'un tel solide a priori, i.e. qui n'utilise pas le fait qu'on a déjà une idée de comment est fait un icosaèdre. D'ailleurs, il est difficile de s'imaginer une telle construction. Cherchons plutôt un solide avec douze sommets doté de symétrie. Pour cela, plaçons sur l'un des axes de $\mathbb{R}^3$, à distance τ (valeur à déterminer) de l'origine, deux segments de longueur 2 qui coupent l'axe considéré en leur milieu et qui sont parallèles à l'un des deux autres. Nous obtenons alors par permutation circulaire deux autres couples de segments, et les extrémités de ces segments forment un ensemble de douze points. Prenons par exemple les douze points de coordonnées $(\pm\tau, \pm 1, 0); (0, \pm\tau, \pm 1); (\pm 1, 0, \pm\tau)$, ce qui correspond au cas où les deux segments qui rencontrent l'axe des x sont parallèles à l'axe des y.
Pour $\tau \geq 1$, l'enveloppe convexe de ces douze points est bien un polyèdre à 20 faces, 30 arêtes (dont 6 sont les segments qu'on a construit) et ayant comme sommets les 12 points précédents. Notre objectif est de démontrer qu'il existe une valeur de τ telle que ce polyèdre soit régulier.

Considèrons le point $P = (\tau, 1, 0)$ et les 5 arêtes qui le rencontrent. On observe que leur longeur est soit 2 (celle qui contient aussi le point $(\tau, -1, 0)$) soit $\sqrt{2\tau^2 - 2\tau + 2}$ (les quatre autres). On impose alors l'égalité entre ces deux quantités et on tombe sur la valeur $\tau = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$, qui est le nombre d'or.

Remarquons d'abord que pour cette valeur il existe une rotation qui fixe notre point P et échange deux sommets quelconques choisis parmi les extrémités (notées $R_1, ..., R_5$) des cinq arêtes dont P est l'autre extrémité. Pour démontrer cela, on considère le plan d'équation $\tau x + y = \tau$. Les cinq points $R_1, ..., R_5$, dont les coordonnées sont $(\tau, -1, 0), (1, 0, \tau), (0, \tau, 1), (0, \tau, -1), (1, 0, -\tau)$, appartiennent à ce plan, et la droite qui passe par l'origine et P est orthogonal à ce plan. On appelle Q leur point d'intersection. Les cinq triangles $\triangle(P, Q, R_i)$ ont un angle droit par construction, un côté en commun et l'hypoténuse de même longueur. En particulier, les points R_i sont tous à la même distance de Q donc sur un même cercle. On vérifie alors que les distances entre deux points consécutifs sont égales, donc ce sont bien les sommets d'un pentagone régulier. Les rotations d'axe $\overline{PQ}$ qui laissent stable ce pentagone conviennent. En outre, ces rotations laissent stable l'ensemble des points $(P, R_1, ..., R_5)$, donc aussi leurs opposés, qui sont les 6 autres sommets de l'icosaèdre. Ce sont donc des isométries qui laissent stables l'icosaèdre.

D'autre part, il est clair que les huit isométries suivantes $(x, y, z) \mapsto (\pm x, \pm y, \pm z)$ et la permutation cyclique des coordonnées laissent stable l'ensemble des sommets de notre polyèdre, et donc aussi le polyèdre.

On peut maintenant conclure. Prenons d'une part le drapeau (F_0, A_0, S_0) où $S_0 = P$, A_0 est l'arête avec sommets P et $(\tau, -1, 0)$ et F_0 la face qui contient A_0 et $(1, 0, \tau)$ et d'autre part un drapeau générique (F, A, S). Le but est de trouver une isométrie qui laisse stable le polyèdre et qui envoie (F, A, S) sur (F_0, A_0, S_0). En utilisant les isométries de changement de signe et de permutation cyclique des coordonnées que l'on vient de décrire, on peut supposer que $S = S_0$. En utilisant

maintenant les rotations d'ordre 5 dont on a parlé précédemment, on peut supposer de plus que $A = A_0$. Mais chaque arête ne rencontre que deux faces (A_0 est contenue dans F_0 et dans la face qui contient aussi le point $(1, 0, -\tau)$). Quitte à composer par l'isométrie $(x, y, z) \longmapsto (x, y, -z)$, on obtient $F = F_0$.
On a donc démontré le théorème suivant.

Théorème 2.6. *Il existe un polyèdre régulier à 20 faces triangulaires, 30 arêtes et 12 sommets.*

On appelle *icosaèdre* tout polyèdre régulier similaire au polyèdre régulier à 20 faces triangulaires, 30 arêtes et 12 sommets précédemment construit. En fait, il n'existe qu'un polyèdre régulier à 20 faces, à similitude près [Ber], mais nous n'utiliserons pas ce résultat dans la suite.
On a tout de suite le résultat suivant :

Remarque 2.7. *Les rotations qui laissent stable l'icosaèdre agissent transitivement respectivement sur les sommets, les arêtes et les faces.*

Démonstration. Soit S un sommet générique. On peut toujours trouver une isométrie qui envoie un drapeau (F, A, S) sur (F_0, A_0, S_0) et si le déterminant de cette isométrie est -1 en composant avec $(x, y, z) \longmapsto (x, y, -z)$ on trouve une rotation qui envoie S sur S_0. Le raisonnement est similaire pour les arêtes et les faces. □

L'icosaèdre construit, passons à la description du groupe G_I des rotations qui le laisse stable. Pour cela, il sera utile d'avoir vu une construction explicite de l'icosaèdre.

Proposition 2.8. *Le cardinal de G_I est 60.*

Démonstration. Nous venons de voir que l'action de G_I sur les douze sommets est transitive, donc $G_I = 12.\sharp(Stab(S_0))$. Le stabilisateur du point S_0 est au moins d'ordre 5 car il contient l'identité et les quatre rotations d'ordre 5 précédemment décrites. Mais un élément de $Stab(S_0)$ est une rotation d'axe passant par l'origine et S_0, donc il est entièrement déterminé par l'image de l'arête A_0. Comme il y a au plus cinq possibilités, cela donne $\sharp(Stab(S_0)) = 5$, d'où $G_I = 60$. □

On a une connaissance complète des 60 éléments du groupe de l'icosaèdre.

Proposition 2.9. *Le groupe G_I admet comme éléments :*
- *l'identité,*
- *24 rotations d'ordre 5 autour d'un sommet,*
- *15 rotations d'ordre 2 autour du milieu d'une arête,*
- *20 rotations d'ordre 3 autour du barycentre d'une face.*

Démonstration. On connaît les quatre rotations $s_1, ..., s_4$ d'ordre 5 autour du sommet S_0. Si $g \in G_I$ envoie un sommet générique S sur S_0, alors on obtient 4 rotations d'ordre 5 autour de S avec les gs_ig^{-1}. Pour deux sommets donnés, les ensembles de quatre rotations correspondantes coïncident s'ils sont diamétralement opposés et sont d'intersection vide sinon. On trouve donc quatre rotations pour chaque couple de points opposés i.e. 24 rotations d'ordre 5.
On procède de la même façon pour les rotations autour d'une arête ou d'une face en considérant d'abord les cas de A_0 et de F_0. Il est facile de trouver explicitement une rotation dans le premier cas et deux dans le deuxième. Or nous savons qu'il y a 15 couples d'arêtes symétriques par rapport à l'origine et 10 couples de faces. On

trouve donc 15 rotations du premier type et 20 du deuxième.
On sait, enfin, que la liste est bien complète, car on a trouvé 60 éléments différents dans G_I. □

On pourrait alors vérifier que cette liste correspond bien à celle du groupe alterné $\mathfrak{A}_5$, qui est donc un très bon candidat pour être isomorphe à G_I. C'est pourquoi il est naturel de chercher une action du groupe de l'icosaèdre sur un ensemble à 5 éléments.

Dans la construction que l'on vient de faire, les axes cartésiens sont orthogonaux entre eux et chacun coupe deux arêtes en leur milieu. Définissons un tel objet.

Définition 2.10. *Une croix de l'icosaèdre est un ensemble formé de trois droites orthogonales deux à deux, chacune passant par l'origine et coupant deux arêtes en leur milieu.*

Le résultat sur les croix qui nous servira dans la suite est la proposition suivante

Proposition 2.11. *L'icosaèdre possède exactement cinq croix et le groupe de l'icosaèdre préserve cet ensemble.*

Démonstration. Comme tout élément de G_I préserve l'origine et l'orthogonalité et envoie le milieu d'une arête sur le milieu d'une arête, il envoie une croix sur une croix, donc G_I agit naturellement sur l'ensemble des croix.
De plus, dans la constuction qu'on a faite, les seules droites orthogonales à l'axe des x qui passent par le milieu d'une arête sont les autres axes, donc l'arête A_0 possède une seule croix, et, comme le groupe de l'icosaèdre agit transitivement sur les arêtes, on trouve exactement une croix pour chaque arête. On conclut en disant que la même croix passe par exactement 6 arêtes, donc il y a $30/6 = 5$ croix. □

On a une action de G_I sur un ensemble à cinq éléments dont on déduit un morphisme de groupes $\Phi : G_I \to \mathfrak{S}_5$, où $\mathfrak{S}_5$ est le groupe des permutations d'un ensemble à 5 éléments. On va montrer que ce morphisme induit un isomorphisme entre G_I et $\mathfrak{A}_5$. Comme nous l'avions anticipé au début, l'action qui nous donnera cet isomorphisme est définie sur des objets de nature géométrique.
Commençons par un lemme technique nécessaire pour la suite. Le cœur de la démonstration sera dans la proposition qui le suit.

Lemme 2.12. *Pour tout $g \in G_I$, on peut trouver une rotation $O(g) \in G_I$ (non nécessairement unique) d'ordre deux et d'axe orthogonal à l'axe de g.*

Démonstration. Pour la rotation g dont l'axe est la droite s_0 qui passe par S_0 ou la droite a_0 qui passe par le milieu de l'arête A_0, on peut prendre le retournement $D(g)$ d'axe z. Pour la rotation dont l'axe f_0 est la droite qui passe par le barycentre de F_0, on peut choisir le retournement $D(g)$ d'axe y.
L'idée est de se ramener à l'un de ces trois cas. On considère g un élément générique. Il existe une rotation h qui envoie l'axe de g sur un axe parmi s_0, a_0, f_0. Alors hgh^{-1} est dans un des trois cas précédents, donc $O(g) = h^{-1}O(hgh^{-1})h$ convient pour g. □

Lemme 2.13. *L'action Φ de G_I sur l'ensemble des 5 croix est fidèle.*

Démonstration. On considère $g \in Ker\Phi$ d'axe $A(g)$. Elle envoie l'axe de $O(g)$ sur une droite dans le plan orthogonal à $A(g)$. Mais l'axe de $O(g)$ appartient à une croix,

donc il doit être envoyé sur une droite de la même croix, et ce n'est évidemment pas possible pour une rotation d'ordre 3 ou 5 puisque les angles entre les droites d'une croix sont droits.
Il nous reste donc à considérer g d'ordre 2. Comme l'axe de g et le plan orthogonal sont les seuls sous-espaces propres d'une telle rotation, les droites qui ne sont pas contenues dans l'un ou l'autre ne sont pas laissées stables par g. Voyons maintenant comment g agit sur les 5 croix. Une est formée par l'axe et deux droites dans le plan orthogonal, alors que les quatre autres sont composées de droites n'appartenant pas à ces sous-espaces. Ainsi, g, en agissant sur une de ces quatre dernières croix, ne laisse stable aucune de leurs droites. Comme par hypothèses il doit laisser stable les croix, il envoie donc chaque droite sur une autre de la même croix. Cela implique que le groupe $\{e, g\}$, en agissant sur les droites de $\mathbb{R}^3$, admet des orbites d'ordre 3. Or c'est impossible pour un groupe d'ordre 2, car l'ordre d'un groupe est toujours multiple de la cardinalité de ses orbites pour n'importe quelle action.
Comme on a exclu les cas où g était d'ordre 2, 3, 5 et que ce sont les seuls ordres possibles pour un élément non trivial de G_I, on conclut que $Ker\Phi$ est réduit à l'identité. □

Théorème 2.14. *Le groupe G_I est isomorphe au groupe alterné $\mathfrak{A}_5$.*

Démonstration. En utilisant les notations de la proposition précédente, on peut déduire que $G_I \cong \operatorname{Im}\Phi$, où $\operatorname{Im}\Phi$ est un sous-groupe de $\mathfrak{S}_5$ d'ordre 60. Il est donc distingué dans $\mathfrak{S}_5$, car d'indice 2. Comme on sait que les sous-groupes distingués de $\mathfrak{S}_5$ sont $\{e\}$, $\mathfrak{A}_5$ et $\mathfrak{S}_5$, on peut en déduire le résultat. □

3. Projection stéréographique

Un problème que l'on rencontre souvent lorsqu'on étudie un groupe est celui des polynômes laissés invariants par une action donnée de ce groupe sur un anneau de polynômes. Nous allons nous poser ce problème dans le cas du groupe de l'icosaèdre. Comme $G_I \cong \mathfrak{A}_5$, on pourrait le faire agir sur les polynômes en 5 variables et étudier les invariants dans ce cadre. Ce point de vue est purement algébrique. Mais de façon cohérente avec ce que l'on a fait jusqu'à présent, nous allons plutôt emprunter une voie géométrique, qui nous rappelle que les éléments de G_I sont des transformations géométriques.

La projection stéréographique définit un homéomorphisme conforme (i.e. préservant les angles) entre la sphère unité $\mathbb{S}_2$ de $\mathbb{R}^3$ et la sphère de Riemann (i.e. le plan complexe auquel on rajoute l'infini). Par cette application, le groupe de l'icosaèdre considéré comme sous-groupe de $SO_3(\mathbb{R})$ agit sur la sphère de Riemann. Le but de cette partie est de déterminer explicitement les transformations ainsi obtenues. En particulier, nous verrons que cette action s'identifie à l'action d'un sous-groupe $\tilde{G_I}$ de $PSL_2(\mathbb{C})$ par homographie.

Nous nous intéresserons donc aux invariants du corps des fractions rationnelles de $\mathbb{C}(z)$ sous l'action de $\widetilde{G}_I$ donné par la substitution $g(f) = f(g^{-1}(z))$.

On définit la projection stéréographique p_N à partir du pôle nord N (point de coordonnées $(0, 0, 1)$) comme l'application qui envoie un point M (distinct de N) de la sphère $\mathbb{S}_2$ sur l'unique point P du plan équatorial, identifié au plan complexe, tel que les points N, M et P soient alignés. On convient que le pôle nord P est envoyé sur le point ∞ de $\widehat{\mathbb{C}}$. On a les formules explicites :

$$\begin{aligned} \mathbb{S}_2 &\longleftrightarrow \widehat{\mathbb{C}} \\ (\xi,\eta,\zeta) &\longmapsto \frac{\xi+i\eta}{1-\zeta} \\ \left(\frac{2x}{1+x^2+y^2}, \frac{2y}{1+x^2+y^2}, \frac{-1+x^2+y^2}{1+x^2+y^2}\right) &\longleftarrow z = x+iy. \end{aligned}$$

La prochaine étape consiste alors à calculer explicitement les transformations de la sphère de Riemann qui sont images des rotations par la projection stéréographique (à la rotation R on associe la transformation $p_N R p_N^{-1}$). Comme nous disposons de formules explicites, nous pourrions en théorie résoudre ce problème par des calculs directs. Mais ceux-ci risquent d'être inextricables. Nous suivrons donc un chemin en plusieurs étapes qui évitera beaucoup de calculs.

Il est intéréssant au point de vue théorique, et il sera utile pour la suite de savoir que, *a priori*, ces images ne sont pas n'importe quelles applications de la sphère de Riemann dans elle-même.

Proposition 3.1. *Les images des rotations de la sphère sont des homographies du plan complexe.*

Démonstration. Démontrons d'abord qu'une telle application est bien holomorphe sur $\mathbb{C}$, sauf éventuellement au point P d'image l'infini.
En effet, une rotation R de $\mathbb{R}^3$ est C^∞ et induit donc par restriction une fonction C^∞ sur la variété réelle $\mathbb{S}_2$. La projection stéréographique étant un C^∞-difféomorphisme entre $\mathbb{S}_2 - N$ et $\mathbb{R}^2$, $p_N R p_N^{-1}$ est bien C^∞ sur $\mathbb{C} - P$. Pour conclure qu'elle est holomorphe, on remarque qu'elle est conforme car les rotations conservent les angles. Démontrons maintenant que c'est bien une homographie. Comme dans la suite le résultat pour les rotations d'axe orthogonal à la droite $(0;\infty)$ nous suffira pour calculer explicitement les images de toutes les rotations (et on vérifie alors qu'il s'agit bien d'homographies), nous ne démontrerons le résultat que pour ces rotations particulières. Dans ce cas, le plan orthogonal π à l'axe qui passe par l'origine passe aussi par l'infini. Considèrons D une des deux demi-sphères ouvertes de $\mathbb{S}_2 - \pi$. La rotation R laisse stable D, donc son image f laisse stable H' un demi-plan ouvert. Donc on a bien une fonction holomorphe bijective sur une partie de $\mathbb{C}$. L'idée est alors de se ramener au cas du disque unité, dont on sait bien que les applications biholomorphes sont de la forme $e^{i\theta}\frac{z+a}{1+\bar{a}z}$ avec θ réel et a de module plus petit que 1. En particulier, ce sont donc des homographies. Soient alors α un complexe tel que la multiplication λ par α soit une application biholomorphe qui envoie H' sur le demi-plan de Poincaré et μ l'application $z \mapsto \frac{z-i}{z+i}$ qui est une biholomorphie entre le demi-plan de Poincaré et le disque unité. L'application $\mu\lambda f \mu^{-1}\lambda^{-1}$ est alors une application biholomorphe du disque unité, donc f doit être une homographie car les homographies forment un groupe. Finalement, f est bien une homographie sur un demi-plan et donc, par le principe du prolongement analytique, elle est de cette forme partout. □

Remarque 3.2. *On a une preuve plus théorique de ce résultat mais qui présente l'inconvénient de faire appel à des connaissances plus avancées : les rotations sont des applications biholomorphes de la sphère de Riemann, or ces dernières sont exactement les homographies.*

Par convention, on oriente le plan complexe de façon que la rotation d'angle α soit donnée par la multiplication par $\exp i\alpha$. Il existe alors une unique orientation de l'espace qui soit compatible avec celle-ci.

Déterminons maintenant l'image de la rotation d'axe nord-sud et d'angle α.

Lemme 3.3. *L'image de la rotation R d'axe nord-sud et d'angle α est la fonction $\phi_\alpha : z \longmapsto \exp i\alpha \cdot z$.*

Démonstration. Un instant de réflexion sur ce qui se passe géométriquement suffit pour se convaincre que le résultat est évident. On pourrait d'ailleurs le démontrer avec un petit calcul direct utilisant les formules explicites, calcul qui dans ce cas n'est pas compliqué. Donnons plutôt une démonstration plus théorique.

Comme la projection stéréographique coïncide avec l'identité sur le cercle équatorial, en restriction à ce sous-ensemble on a $p_N R p_N^{-1} = R$, donc l'image de R coïncide bien avec la multiplication par $\exp i\alpha$ sur le cercle unité. Or on sait que sur le plan complexe tout entier la réponse est donnée par une fonction holomorphe. On conclut alors par le principe du prolongement analytique. □

Passons maintenant au cas général.

Lemme 3.4. *L'image de la rotation R d'axe la droite passant par (ξ, η, ζ) et $(-\xi, -\eta, -\zeta)$ et d'angle α est la fonction*

$$z \longmapsto \frac{(d + ic)z - (b - ia)}{(b + ia)z + (d - ic)}$$

où l'on a posé $a = \xi \sin \frac{\alpha}{2}, b = \eta \sin \frac{\alpha}{2}, c = \zeta \sin \frac{\alpha}{2}, d = \cos \frac{\alpha}{2}$.

Démonstration. Soit g une rotation qui envoie (ξ, η, ζ) sur N. Alors $R' = gRg^{-1}$ est une rotation d'axe nord-sud donc de la forme précédente. En fait, on peut choisir g dont l'axe est contenu dans le plan d'équation $\zeta = 0$. On sait alors que l'image de g est une homographie. L'image de g est donc nécessairement de la forme :

$$z \longmapsto C.\frac{z + \frac{\xi + i\eta}{1+\zeta}}{z - \frac{\xi + i\eta}{1-\zeta}},$$

(où C est une constante non nulle) en observant que toute homographie qui s'annule en $p_N(-\xi, -\eta, -\zeta)$ et vaut ∞ en $p_N(\xi, \eta, \zeta)$ est de cette forme.
Si on passe aux images dans l'égalité $gR = R'g$, on obtient après simplification par C :

$$\frac{z' + \frac{\xi + i\eta}{1+\zeta}}{z' - \frac{\xi + i\eta}{1-\zeta}} = \exp i\alpha \frac{z + \frac{\xi + i\eta}{1+\zeta}}{z - \frac{\xi + i\eta}{1-\zeta}},$$

où z' est l'image de z par $p_N R p_N^{-1}$.

Après résolution (ce qui revient à inverser une matrice), on trouve le résultat. □

Déterminons maintenant les expressions des homographies associées aux rotations du groupe de l'icosaèdre.

Pour simplifier les calculs, disposons l'icosaèdre dans une autre position de l'espace. Faisons agir une rotation d'axe y qui tourne le plan d'équation $y = 0$ d'un angle tel que le sommet de l'icosaèdre $(1, 0, \tau)$ soit sur l'axe des z. Une fois que l'on a placé l'icosaèdre dans cette position, on identifie les axes des coordonnées (x, y, z) aux axes des coordonnées (ξ, η, ζ). Projetons alors radialement sur la sphère $\mathbb{S}_2$ les sommets, les milieux des arêtes et les barycentres des faces. Les points obtenus après projection stéréographique seront toujours appelés sommets, milieux des arêtes et barycentres des faces. Par exemple, les points 0 et l'infini sont des sommets tandis que les point i et $-i$ sont des milieux d'arêtes. Alors, la rotation U d'axe $(i;-i)$ et d'angle π et la rotation S d'axe $(\infty;0)$ et d'angle $2\pi/5$ désignent sans ambiguïté des éléments du groupe de l'icosaèdre.

Nous allons calculer les homographies images de ces rotations. Nous ferons l'abus de désigner par la même lettre une rotation et l'homographie qui lui est associée. Nous noterons ϵ la racine cinquième de l'unité $\exp \frac{2i\pi}{5}$.

Lemme 3.5. *Les homographies associées aux rotations S et U sont :*

$$S : z \longmapsto \epsilon z$$

et

$$U : z \longmapsto -\frac{1}{z}.$$

Démonstration. L'expression de S découle immédiatement des calculs précédents. D'autre part, la rotation U peut être vue comme la composition de $-id$ avec la symétrie par rapport au plan $(\xi;\zeta)$. Or cette dernière application après composition avec p_N est évidemment la conjugaison complexe. Il nous reste donc à calculer $-id$. Si (ξ,η,ζ) est envoyé sur $x+iy$ et $(-\xi,-\eta,-\zeta)$ sur $x'+iy'$, alors on vérifie avec la formule explicite de p_N qu'on a

$$(x+iy)(x'-iy') = \frac{\xi+i\eta}{1-\zeta} \cdot \frac{-\xi+i\eta}{1+\zeta} = -1.$$

À la symétrie de centre l'origine correspond donc l'application $z \longmapsto -\frac{1}{\bar{z}}$, ce qui donne le résultat aussi pour U. □

Nous allons décrire et calculer explicitement un dernier élément du groupe de l'icosaèdre que nous appellerons T. Nous démontrerons ensuite que S et T engendrent tout le groupe, ce qui sera utile pour la suite. Il est intéréssant de remarquer qu'en composant astucieusement S, U et T, nous pouvons obtenir tous les éléments du groupe. Par exemple Klein [Kle] calcule $S^a, S^aU, S^aTS^b, S^aTS^bU$ pour $a,b = 0,...,4$ et observe qu'il obtient ainsi 60 éléments différents qui sont donc les éléments du groupe. Mais ces calculs laborieux ne seront pas utiles pour la suite, nous ne les ferons donc pas.

Dans la description que l'on faite de l'icosaèdre dans le premier chapitre, le point de coordonnées $(0,0,1)$ était le milieu d'une arête. Après les transformations de l'espace précédemment décrites, ce point est envoyé en position $(-\sin\gamma, 0, \cos\gamma)$, où γ est l'angle entre l'axe des ζ et la droite qui passe par ce point et l'origine. On appelle T la rotation autour du milieu de cette arête d'angle π.

Lemme 3.6. *L'homographie associée à T est*

$$T : z \longmapsto \frac{(\epsilon-\epsilon^4)z + (\epsilon^3-\epsilon^2)}{(\epsilon^3-\epsilon^2)z - (\epsilon-\epsilon^4)}$$

Démonstration. Pour calculer $\cos\gamma$, nous allons calculer le coefficient d de $S \circ T$ de deux manières différentes. D'une part, les lois de composition des matrices donnent $d = \cos\gamma . \sin\frac{\pi}{5}$. Mais d'autre part, on constate aisément que $S \circ T$ est d'ordre trois (par exemple en regardant l'orbite d'un sommet adjacent au pôle nord). Cela impose $d = \cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$. Or $(\epsilon^2 - \epsilon^3)(\epsilon^4 - \epsilon) = \epsilon + \epsilon^4 - \epsilon^2 - \epsilon^3 = \sqrt{5}$ (pour le voir, élever les deux termes au carré), donc $\cos\gamma = \frac{\epsilon - \epsilon^4}{i\sqrt{5}}$ et $\sin\gamma = \frac{\epsilon^2-\epsilon^3}{i\sqrt{5}}$. □

Démontrons alors le résultat promis.

Proposition 3.7. *Le groupe de l'icosaèdre est engendré par S et T.*

Démonstration. L'ordre du groupe engendré par S et T est un multiple de 5 (par la présence de S), de 2 (par T) et de 3 (par $S \circ T$). Alors, soit il est d'ordre 30, soit c'est $\mathfrak{A}_5$. Mais dans le premier cas, il serait d'indice 2 dans $\mathfrak{A}_5$, donc distingué, ce qui est impossible car $\mathfrak{A}_5$ ne possède pas de sous-groupe distingué non trivial. □

Pour la suite, il sera utile d'obtenir le groupe de l'icosaèdre comme sous-groupe de $PSL_2(\mathbb{C})$, ce qui résulte de l'identification suivante du groupe des homographies $Moeb_+(\mathbb{C})$ de $\mathbb{C}$ avec le groupe $PSL_2(\mathbb{C})$.

Proposition 3.8. *$Moeb_+(\mathbb{C})$ est isomorphe à $PSL_2(\mathbb{C})$.*

Démonstration. Il est naturel d'associer à une matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de $SL_2(\mathbb{C})$ l'homographie $\frac{az+b}{cz+d}$, et on vérifie que cela définit un morphisme de groupes. D'autre part, deux homographies $\frac{az+b}{cz+d}$ et $\frac{a'z+b'}{c'z+d'}$ sont égales si et seulement si on obtient le numérateur et le dénominateur de la deuxième homographie en multipliant le numérateur et le dénominateur de la première par la même constante. On en déduit que, en divisant le numérateur et le dénominateur de $\frac{az+b}{cz+d}$ par la racine carré du déterminant de $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ (non nulle car l'homographie n'est pas constante), on peut écrire n'importe quelle homographie comme image d'une matrice de $SL_2(\mathbb{C})$ selon l'application naturelle définie plus haut. Cet homomorphisme est donc surjectif et de noyau $\pm Id$, ce qui permet de conclure. □

Nous ferons toujours cette identification dans la suite. On obtient donc naturellement $\tilde{G_I}$ comme sous-groupe de $PSL_2(\mathbb{C})$. On définit alors *le groupe binaire de l'icosaèdre* $\mathbb{H}_{120} < SL_2(\mathbb{C})$ comme la préimage de $\tilde{G_I}$ par la projection canonique $\pi : SL_2(\mathbb{C}) \longrightarrow PSL_2(\mathbb{C})$. On peut alors calculer les préimages de S, U, T par cette application et on obtient $\pi^{-1}(S) = \pm \begin{pmatrix} \epsilon^3 & 0 \\ 0 & \epsilon^2 \end{pmatrix}$, $\pi^{-1}(U) = \pm \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et

$$\pi^{-1}(T) = \pm \begin{pmatrix} \frac{(\epsilon-\epsilon^4)}{\sqrt{5}} & \frac{(\epsilon^3-\epsilon^2)}{\sqrt{5}} \\ \frac{(\epsilon^3-\epsilon^2)}{\sqrt{5}} & \frac{(\epsilon^4-\epsilon)}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

L'utilité d'avoir calculé explicitement les générateurs de $\tilde{G_I}$ se trouve dans la proposition suivante, qui sera utilisée dans les derniers chapitres.

Proposition 3.9. *Les éléments du groupe $\mathbb{H}_{120}$ sont bien définis sur tout corps qui contient $\mathbb{Q}(\epsilon)$.*

Démonstration. Il suffit de regarder les expressions de $\pi^{-1}(S)$ et $\pi^{-1}(T)$ car ils engendrent $\mathbb{H}_{120}$. Or il n'apparaît que des nombres rationnels, ϵ et $\sqrt{5} = \epsilon + \epsilon^4 - \epsilon^2 - \epsilon^3 \in \mathbb{Q}(\epsilon)$. □

4. Invariants polynomiaux

Considérons maintenant l'action du groupe $\tilde{G_I}$ sur $\mathbb{C}(z)$ définie par $g.P(z) = P(g^{-1}(z))$ et posons-nous le problème de déterminer les fractions rationnelles fixées par cette action.
À cette action est associé un morphisme Φ de $\tilde{G_I}$ dans $Bij(\mathbb{C}(z)) : g \mapsto \phi_g$. Remarquons qu'en fait ϕ_g est un automorphisme de corps (en effet, les automorphismes de $\mathbb{C}(z)$ sont les homographies).
Soit $P(z) \in \mathbb{C}(z)$. La fraction rationnelle P définit une fonction méromorphe sur la sphère de Riemann $\hat{\mathbb{C}}$. On rappelle que le degré d'une fraction rationnelle est le maximum du degré du numérateur et du degré du dénominateur lorsque celle-ci est écrite sous forme irréductible. Si n est le degré de $P(z)$, elle possède exactement n racines et n pôles, comptés avec leurs multiplicités. Comme g définit une application biholomorphe de $\hat{\mathbb{C}}$, $P(g^{-1}(z))$ possède exactement n racines et n pôles, qui sont les images par g des racines et des pôles de P. Une condition nécessaire pour que $P(z)$ soit invariante est donc que l'ensemble de ses racines et l'ensemble de ses pôles soient invariants sous l'action de $\tilde{G_I}$. Les racines et les pôles d'une fraction rationnelle invariante doivent donc être réunion d'orbites de points de $\hat{\mathbb{C}}$, sous l'action de $\tilde{G_I}$.
Réciproquement, soit $P(z)$ une fraction rationnelle de ce type. Comme il est connu [Laz] qu'une fonction méromorphe sur la sphère de Riemann est déterminée à une constante près par ses racines et ses pôles comptés avec leurs multiplicités, on peut écrire $\phi_g(P(z)) = \lambda_g.P(z)$ pour un unique λ_g dans $\mathbb{C}^*$. De plus, la fonction $g \mapsto \lambda_g$ est un morphisme de groupes de $\tilde{G_I}$ dans $\mathbb{C}^*$, donc un caractère de $\tilde{G_I}$. Or on a le lemme suivant :

Lemme 4.1. *Les caractères de $\tilde{G_I}$ sont triviaux.*

Démonstration. Comme $\mathbb{C}^*$ est commutatif, le noyau d'un caractère contient au moins le sous-groupe dérivé de $\tilde{G_I}$. Or $\tilde{G_I}$ est isomorphe à $\mathfrak{A}_5$, donc son sous-groupe dérivé est égal au groupe tout entier. □

On a donc démontré le théorème suivant :

Théorème 4.2. *Les fractions rationnelles invariantes sous l'action de $\tilde{G_I}$ sont exactement celles dont les racines et les pôles comptés avec leurs multiplicités sont des réunions d'orbites de points de $\mathbb{C}^*$ sous l'action de $\tilde{G_I}$.*

Étudions donc les orbites de points de $\mathbb{C}^*$ sous l'action de $\tilde{G_I}$.
Nous savons déjà que les sommets (respectivement les milieux des arêtes, les barycentres des faces) forment une orbite de cardinal 12 (respectivement 30, 20). Comme les rotations non triviales du groupe de l'icosaèdre possèdent exactement deux points fixes, les éléments non triviaux de $\tilde{G_I}$ possèdent exactement deux points fixes, qui correspondent aux images des précédents par projection stéréographique. Les points précédents sont donc les seuls dont le stabilisateur est non trivial. Les autres orbites sont alors de cardinal 60. Nous les appellerons *orbites génériques*.
Considérons J l'unique fraction rationnelle de degré 60 de coefficient dominant -1 (rapport du coefficient dominant du numérateur sur celui du dénominateur) dont les racines sont les barycentres des faces avec multiplicités 3 et les pôles sont les sommets (y compris l'infini) avec multiplicité 5.

Nous sommes maintenant en mesure de caractériser le sous-corps $\mathbb{C}(z)^{\tilde{G_I}}$ des fractions rationnelles invariantes sous l'action de $\tilde{G_I}$. On a en fait le résultat suivant :

Théorème 4.3. *Le sous-corps $\mathbb{C}(z)^{\tilde{G_I}}$ des fractions rationnelles invariantes sous l'action de $\tilde{G_I}$ est égal à $\mathbb{C}(J(z))$ le corps des fractions rationnelles en $J(z)$ et l'extension $\mathbb{C}(z) \supset \mathbb{C}(J(z))$ est galoisienne de groupe de Galois $\tilde{G_I}$.*

Démonstration. D'après le théorème 4.2, J est une fraction rationnelle invariante. Elle engendre donc un sous-corps de $\mathbb{C}(z)^{\tilde{G_I}}$. De plus, comme J est de degré 60, l'extension $\mathbb{C}(z) \supset \mathbb{C}(J(z))$ est de degré 60 d'après le théorème de Lüroth [Kel]. Or le lemme d'Artin [Kel] implique que l'extension $\mathbb{C}(z) \supset \mathbb{C}(z)^{\tilde{G_I}}$ est galoisienne de degré 60 et de groupe de Galois $\tilde{G_I}$, donc on doit nécessairement avoir $\mathbb{C}(z)^{\tilde{G_I}} = \mathbb{C}(J(z))$. □

Nous aimerions maintenant obtenir une expression explicite de J. Pour cela, nous pourrions continuer la théorie dans ce cadre mais le fait que l'infini soit un sommet induit des difficultés techniques. Nous allons donc plutôt exposer le chemin suivi par Klein [Kle] qui présente l'avantage de ne pas distinguer l'infini des autres points.
Il est donc naturel de considérer l'algèbre des polynômes homogènes en deux variables $\mathbb{C}[z:w]$, sur laquelle $SL_2(\mathbb{C})$ agit par :

$$\forall M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{C}),\ \forall P \in \mathbb{C}[z:w],\ M.P = P(az+bw, cz+dw)$$

Notre étude portera alors sur l'ensemble $\mathbb{C}[z:w]^{\mathbb{H}_{120}}$, les polynômes homogènes en deux variables fixés par $\mathbb{H}_{120}$, car on a l'espoir d'obtenir ainsi des informations sur $\tilde{G_I}$.

Pour commencer, remarquons que tout polynôme homogène en deux variables s'écrit sous la forme $\prod_\nu(\lambda_\nu z + \mu_\nu w)$. Ses racines dans la droite projective complexe sont les points de coordonnées $[-\mu_\nu : \lambda_\nu]$. De façon analogue à ce qui précéde, un tel polynôme est invariant si et seulement si l'ensemble de ces racines est réunion d'orbites de points sous l'action de $\mathbb{H}_{120}$.

Comme les orbites des points de la droite projective complexe sous l'action de $\mathbb{H}_{120}$ sont les mêmes que celles sous l'action de $\tilde{G_I}$, on trouve, hormis les orbites génériques, trois autres orbites qui correspondent respectivement aux sommets, aux milieux des arêtes, aux barycentres des faces de l'icosaèdre.

Définition 4.4. *On appelle forme fondamentale un polynôme homogène en deux variables dont les racines forment une orbite la droite projective complexe sous l'action de $\mathbb{H}_{120}$. On parlera de forme fondamentale spéciale lorsque l'orbite n'est pas générique.*

Aux trois orbites non génériques correspondent donc trois classes de formes fondamentales spéciales de degré respectivement 12, 30 et 20. On notera V, A et F les représentants correspondants, unitaires en la variable z. On peut maintenant énoncer le :

Théorème 4.5 (Théorème de décomposition des invariants polynomiaux)**.** *Soit (P,Q) un couple de polynômes distincts pris parmi $\{V^5, F^3, A^2\}$. Alors tout élément de $\mathbb{C}[z:w]^{\mathbb{H}_{120}}$ s'écrit de manière unique comme produit d'une constante, de formes fondamentales spéciales et de facteurs de la forme $P + \lambda \cdot Q$.*

Démonstration. Comme l'ensemble des racines d'un polynôme homogène invariant est une réunion d'orbites de points sous l'action de $\mathbb{H}_{120}$, il suffit de démontrer que toute forme fondamentale non spéciale peut s'écrire comme produit d'une constante et d'un facteur de la forme $P + \lambda.Q$. Soit donc Z une forme fondamentale non spéciale. Comme les racines de Z sont distinctes des racines de Q, on peut alors choisir λ tel que Z et $P + \lambda.Q$ aient une racine commune α. Comme $P + \lambda.Q$ est invariant, les 60 points de l'orbite de α sont des racines de Z et de $P + \lambda \cdot Q$. Comme ce sont des polynômes de degré 60, ils sont égaux à une constante près. L'unicité ne présente pas de difficulté. □

Corollaire 4.6 (La syzygie)**.** *Il existe une relation non triviale (appelée syzygie) $\lambda_V \cdot V^5 + \lambda_F \cdot F^3 + \lambda_A \cdot A^2 = 0$, unique à multiplication par une constante non nulle près.*

Démonstration. Le polynôme homogène $V^5 + F^3$ est une forme fondamentale, donc peut s'écrire sous la forme $\alpha.V^5 + \beta.A^2$, ce qui donne l'existence. Pour l'unicité, on remarque que la famille $\left\{V^5, F^3, A^2\right\}$ ne peut être de rang un car les ensembles de racines de ces polynômes sont distincts. □

Il nous reste donc à calculer explicitement les trois formes fondamentales spéciales unitaires et les coefficients de la syzygie.

Commençons par celle qui correspond aux sommets. Pour cela, calculons d'abord les coordonnées des sommets. En faisant agir T sur 0, on obtient un sommet adjacent à 0, de coordonnées $\epsilon + \epsilon^4$ par le lemme 3.6. Puis, en faisant agir S successivement, on obtient les coordonnées des quatre autres sommets adjacents à 0 : $\epsilon^\nu(\epsilon + \epsilon^4)$ pour ν allant de 1 à 4. Enfin, l'image par U de ces cinq sommets donnent les coordonnées des cinq derniers sommets. On a donc :

$$\begin{aligned} S(z,w) &= zw \prod_{\nu=0}^{4}(z - \epsilon^\nu(\epsilon + \epsilon^4)w) \prod_{\nu=0}^{4}(z - \epsilon^\nu(\epsilon^2 + \epsilon^3)w) \\ &= zw(z^5 - (\epsilon + \epsilon^4)^5 w^5)(z^5 - (\epsilon^2 + \epsilon^3)^5 w^5) \\ &= zw(z^{10} + 11 z^5 w^5 - w^{10}). \end{aligned}$$

Pour obtenir les expressions de F et A, nous pourrions calculer explicitement les coordonnées des milieux des arêtes et des barycentres des faces (nous disposons à ce stade de tous les outils nécessaires) puis raisonner de la même façon que pour S. On risque cependant de tomber sur des calculs inextricables. En fait, nous allons obtenir les expressions de F et A par des moyens théoriques. Pour cela, il nous faut développer des éléments de la théorie des invariants.

L'idée est de fabriquer de nouveaux invariants à partir d'un polynôme invariant donné. Soient $P(z,w)$ et $Q(z,w)$ deux polynômes homogènes en deux variables. On définit :

$$H_P(z,w) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 P}{\partial z^2}(z,w) & \frac{\partial^2 P}{\partial z \partial w}(z,w) \\ \frac{\partial^2 P}{\partial w \partial z}(z,w) & \frac{\partial^2 P}{\partial w^2}(z,w) \end{vmatrix} \ et\ J_{P,Q}(z,w) = \begin{vmatrix} \frac{\partial P}{\partial z}(z,w) & \frac{\partial P}{\partial w}(z,w) \\ \frac{\partial Q}{\partial z}(z,w) & \frac{\partial Q}{\partial w}(z,w) \end{vmatrix}.$$

On a alors le résultat suivant.

Lemme 4.7. *Soient P et Q deux fonctions C^2 de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ et $A \in L(\mathbb{R}^2)$. Alors $H_{P\circ A}(z,w) = det(A)^2.H_P(A.(z,w))$ et $J_{P\circ A, Q\circ A}(z,w) = det(A).J_{P,Q}(A.(z,w))$.*

Démonstration. Si on pose $\tilde{H}_P(z,w) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 P}{\partial z^2}(z,w) & \frac{\partial^2 P}{\partial z \partial w}(z,w) \\ \frac{\partial^2 P}{\partial w \partial z}(z,w) & \frac{\partial^2 P}{\partial w^2}(z,w) \end{pmatrix}$, on obtient après deux dérivations successives de $P \circ A$ que $\tilde{H}_{P\circ A}(z,w) = \tilde{H}_P A(z,w) \cdot A^2$, ce qui donne la première égalité en prenant les déterminants des deux membres. La deuxième égalité s'obtient de manière analogue. □

Corollaire 4.8. *Si P et Q sont des polynômes homogènes invariants, alors H_P et $J_{P,Q}$ sont des polynômes homogènes invariants.*

Démonstration. Si P est polynôme homogène invariant, alors $P \circ g = P$ pour tout g dans $\mathbb{H}_{120}$, donc, d'après le lemme, on a $H_P(z,w) = H_{P\circ g}(z,w) = det(g)^2 \cdot H_P(g \cdot (z,w)) = H_P(g.(z,w))$, où la dernière égalité découle du fait que $\mathbb{H}_{120}$ est dans $SL_2(\mathbb{C})$. La deuxième assertion se montre de manière analogue. □

Le polynôme H_V est donc un polynôme invariant de degré 20. D'après le théorème de décomposition, on peut le décomposer en un produit de formes fondamentales qui sont de degré 12, 20, 30 et 60, ce qui force H_V à être proportionnel à F. On sait alors que $J_{V,F}$ est un polynôme invariant de degré 30 qui doit donc nécessairement être proportionnel à A. Les calculs explicites fournissent :

$$F(z,w) = z^{20} - 228z^{15}w^5 + 494z^{10}w^{10} + 228z^5w^{15} + w^{20},$$

$$A(z,w) = z^{30} + 522.(z^{25}w^5 - z^5w^{25}) - 10005.(z^{20}w^{10} + z^{10}w^{20}) + w^{30}.$$

Finalement, nous pouvons expliciter les coefficients numériques de la syzygie :

$$A^2 - F^3 = 1728 \cdot V^5.$$

La théorie des polynômes homogènes invariants nous a donc permis d'obtenir les valeurs numériques souhaitées. Nous sommes donc maintenant en mesure de revenir à notre problème initial.

Déshomogénéisons V, A et F en faisant $w = 1$. Nous ferons l'abus de désigner par les mêmes lettres les polynômes déshomogénéisés. Nous avons alors l'expression de la fraction rationnelle J précédemment introduite :

$$J(z) = -\frac{F(z)^3}{S(z)^5} = -\frac{(z^{20} - 228z^{15} + 494z^{10} + 228z^5 + 1)^3}{z^5(z^{10} + 11z^5 - 1)^5}.$$

Soit $\mathbb{K} \subset \mathbb{C}$ un corps qui contient ϵ. On peut alors définir l'action de $\tilde{G_I}$ sur $\mathbb{K}(z)$ (se reporter au lemme qui conclut le chapitre précédent). Comme J est à coefficients entiers, J appartient à $\mathbb{K}(z)$. On peut généraliser à ce cadre le théorème 2 :

Théorème 4.9. *Soit $\mathbb{K} \subset \mathbb{C}$ un corps qui contient ϵ. Alors le sous-corps $\mathbb{K}(z)^{\tilde{G_I}}$ des fractions rationnelles invariantes sous l'action de $\tilde{G_I}$ est égal à $\mathbb{K}(J(z))$ et l'extension $\mathbb{K}(z) \supset \mathbb{K}(J(z))$ est galoisienne de groupe de Galois $\tilde{G_I}$.*

Démonstration. La fraction rationnelle J considérée comme élément de $\mathbb{C}(z)$ est une fraction rationnelle invariante. Comme $\mathbb{K} \subset \mathbb{C}$, J considérée comme élément de $\mathbb{K}(z)$ est encore une fraction rationnelle invariante. On peut alors suivre la même démonstration que précédemment. □

5. La fraction continue de Rogers-Ramanujan

De manière inattendue, la connaissance du groupe de l'icosaèdre et de ses invariants polynomiaux va nous permettre de démontrer des résultats de théorie des nombres. Introduisons la fraction continue de Rogers-Ramanujan. Pour tout $\tau \in \mathbb{C}$ et pour tout n, posons,

$$r_n(\tau) = \frac{q^{1/5}}{1+} \frac{q}{1+} \frac{q^2}{1+} \frac{q^3}{1+} \cdots \frac{q^n}{1} ,$$

et, si la limite existe,

$$r(\tau) = \lim_{n\to\infty} r_n(\tau) = \cfrac{q^{1/5}}{1 + \cfrac{q}{1+\cfrac{q^2}{1+\cfrac{q^3}{1+\dots}}}} = \frac{q^{1/5}}{1+} \frac{q}{1+} \frac{q^2}{1+} \frac{q^3}{1+\dots} ,$$

où nous posons $q = \exp(2i\pi\tau)$.

Pour la définition et les propriétés de base des fractions continues, on se reportera à [Per] et à [BC]. Pour la suite, il nous suffira de connaître les résultats suivants :

Proposition 5.1. *La fraction continue $r(\tau)$ converge pour τ dans $\mathbb{H}$, le demi-plan de Poincaré. On définit ainsi une fonction holomorphe en τ jamais nulle sur $\mathbb{H}$.*

Explicitons alors les liens entre le groupe de l'icosaèdre et la fraction continue de Rogers-Ramanujan, ce qui nous permettra d'une part de calculer des valeurs explicites et d'autre part de donner un critère permettant de savoir quand $r(\tau)$ est exprimable sous forme de radicaux sur $\mathbb{Q}$.

On introduit une définition nécessaire pour la suite.

Définition 5.2. *Soient $s \in PSL_2(\mathbb{Z})$ l'application donnée par $s : \tau \mapsto \tau + 1$ et $t \in PSL_2(\mathbb{Z})$ l'application donnée par $t : \tau \mapsto \frac{-1}{\tau}$. Pour tout n, on définit le morphisme de $PSL_2(\mathbb{Z})$ dans $PSL_2(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ donné par la réduction modulo n, et on appelle $\Gamma(n)$ le noyau de ce morphisme.*

On admet le théorème suivant [Wat2] qui motive l'introduction du groupe de l'icosaèdre dans l'étude la fraction continue de Rogers-Ramanujan.

Théorème 5.3. *Soit $\tau \in \mathbb{H}$. Alors on a :*

$$r(s(\tau)) = r(\tau + 1) = Sr(\tau) = \epsilon.r(\tau)$$

$$r(t(\tau)) = r(\frac{-1}{\tau}) = Tr(\tau) = \frac{-(1+\sqrt{5}).r(\tau) + 2}{2.r(\tau) + 1 + \sqrt{5}}.$$

De plus, $\forall g \in \Gamma(5),\ r(g(\tau)) = r(\tau)$.

On peut déduire de ce théorème un corollaire qui n'interviendra pas dans la suite de notre exposé mais qui présente un intérêt propre.

Corollaire 5.4.

$$\Gamma(1)/\,\Gamma(5) \cong G_I \cong \mathfrak{A}_5.$$

Démonstration. Pour tout $M \in PSL_2(\mathbb{Z})$, il existe $g \in tildeG_I$ tel que $r(M(\tau)) = g \cdot r(\tau)$ pour tout $\tau \in \mathbb{H}$. Un tel g est en fait unique. Pour le montrer, remarquons que $g \cdot r(\tau) = h \cdot r(\tau)$ pour tout $\tau \in \mathbb{H}$ implique $h^{-1}g \cdot r(\tau) = r(\tau)$ pour tout $\tau \in \mathbb{H}$. L'image de r est donc incluse dans l'ensemble des points fixes de $h^{-1}g$, d'où $h = g$

car les rotations non triviales ont deux points fixes et nous montrerons dans la suite que l'image de r est composée d'au moins 3 valeurs distinctes.

On obtient ainsi une application Φ de $\Gamma(1) = PSL_2(\mathbb{Z})$ vers $tildeG_I$ qui est un morphisme surjectif de groupe. Comme $\forall g \in \Gamma(5),\ r(g(\tau)) = r(\tau)$, le morphisme passe au quotient. D'autre part, si on considère le morphisme naturel de $\Gamma(1)$ dans $PSL_2(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})$ dont le noyau est $\Gamma(5)$, on voit que $\sharp\, \Gamma(1)/\,\Gamma(5) \leq\ \sharp\, PSL_2(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}) = 60$. On conclut alors par cardinalité que Φ est un isomorphisme. $\square$

Le théorème suivant nous dit que la fraction continue de Rogers-Ramanujan fournit une paramétrisation des points remarquables de l'icosaèdre vu dans le plan complexe.

Théorème 5.5. *Lorsque* $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *parcourt* $PSL_2(\mathbb{Z})$,

- $r(\frac{ai+b}{ci+d})$ *parcourt les milieux des arêtes,*
- $r(\frac{a\rho+b}{c\rho+d})$ *parcourt les barycentres des faces.*

Démonstration. Remarquons que d'après le théorème précédent, on a $T(r(i)) = r(i)$, donc $r(i)$ est un point fixe de T, i.e. le milieu d'une arête. Mais S et T engendrent $tildeG_I$ qui est transitif sur les milieux des arêtes, donc on obtient tous les milieux des arêtes en faisant agir S et T sur $r(i)$. Or, comme s et t engendrent $PSL_2(\mathbb{Z})$ [Ser], en appliquant à nouveau le théorème précédent, on obtient la première assertion.
Pour la deuxième assertion, on remarque que $TS(r(\rho)) = r(\rho)$, ce qui montre que $r(\rho)$ est le barycentre d'une face puisque TS est une rotation d'ordre 3. On conclut alors de la même façon que précédemment. $\square$

Corollaire 5.6.

$$r(i) = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}} - \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$r(\rho) = \exp\frac{-i\pi}{5}.\frac{\sqrt{30+6\sqrt{5}}-3-\sqrt{5}}{4}.$$

Démonstration. Nous avons vu précédemment que $r(i)$ est un point fixe de T. Mais nous savons que T possède deux points fixes, que l'on peut calculer à l'aide de l'expression explicite de la matrice de T : $\pm\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}} - \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Mais $r_n(i) = \frac{\exp\frac{-2\pi}{5}}{1+}\frac{\exp -2\pi}{1+}\frac{\exp -4\pi}{1+}\frac{\exp -6\pi}{1+}\dots\frac{\exp -2n\pi}{1+0}$ est positif pour tout n, donc $r(i)$ est positif, ce qui force $r(i) = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}} - \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.
De même, comme $r(\rho)$ est un point fixe de TS, c'est l'un des points de la forme $\exp\frac{-i\pi}{5}.\frac{\pm\sqrt{30+6\sqrt{5}}-3-\sqrt{5}}{4}$. Mais $r_n(\rho)\exp\frac{i\pi}{5} = \frac{\exp\frac{-\pi\sqrt{3}}{5}}{1-}\frac{\exp -\pi\sqrt{3}}{1+}\frac{\exp -2\pi\sqrt{3}}{1-}\frac{\exp -3\pi\sqrt{3}}{1+}\dots\frac{\exp -n\pi\sqrt{3}}{1}$ est positif pour tout n, donc $r(\rho)$ est positif, ce qui force : $r(\rho) = \exp\frac{-i\pi}{5}.\frac{\sqrt{30+6\sqrt{5}}-3-\sqrt{5}}{4}$. $\square$

En appliquant le théorème admis, il est alors possible de calculer les valeurs de $r(M\cdot i)$ et $r(M\cdot\rho)$ pour M parcourant $SL_2(\mathbb{Z})$, car s et t engendrent $SL_2(\mathbb{Z})$. Par exemple, cherchons $\tau \in \mathbb{H}$ tel que $r(\tau) = i$. Pour cela, il suffit de trouver une rotation de l'icosaèdre qui envoie le point milieu d'une arête $r(i)$ sur le point milieu d'une arête i. On constate géométriquement que la rotation STS^3 convient. On a donc : $i = STS^3 r(i) = r(sts^3(i)) = r(\frac{7+i}{10})$. De la même manière, on trouve que $r(\frac{-7+i}{5}) = -i$.

Les liens entre le groupe de l'icosaèdre et la fraction continue de Rogers-Ramanujan nous ont permis de calculer certaines valeurs de r en des points remarquables de $\mathbb{H}$. Ils vont aussi nous permettre d'obtenir des informations de nature plus générale sur r, mais cette fois-ci sur $\mathbb{H}$ tout entier. L'étape essentielle est dans le théorème suivant, où j est l'invariant modulaire de la théorie des formes modulaires. On rappelle que j est une fonction modulaire de poids zéro dont l'infini est un pôle simple, qui s'annule en ρ et vaut 1728 en i [Ser].

Théorème 5.7. *Pour tout τ in $\mathbb{H}$ on a $J(r(\tau)) = j(\tau)$*

Démonstration. La démonstration se fait en plusieurs étapes, la première étant de montrer que la fonction $\tau \mapsto J(r(\tau))$ est une fonction modulaire.

Pour commencer, remarquons que $V(r(\tau))$ ne s'annule pas sur $\mathbb{H}$. En effet, cela revient à montrer que $r(\tau)$ n'est jamais un sommet, et par le théorème 5.3 que r ne s'annule pas sur $\mathbb{H}$ (par transitivité de G sur les sommets, on peut envoyer tout sommet sur 0). La fonction $\tau \mapsto J(r(\tau))$ est donc holomorphe sur $\mathbb{H}$ (car $\tau \mapsto r(\tau)$ est holomorphe sur $\mathbb{H}$ et $J(r(\tau))$ est une fraction rationnelle en $r(\tau)$ dont le dénominateur ne s'annule pas). Mais d'autre part, il résulte des théorèmes 4.2 et 5.3 que $\tau \mapsto J(r(\tau))$ est invariante sous l'action de $SL_2(\mathbb{Z})$. Enfin, on voit sans peine à partir de la formule explicite de J que l'infini est un pôle simple de $\tau \mapsto J(r(\tau))$. On a donc montré qu'il s'agit bien d'une fonction modulaire.

Montrons maintenant qu'elle est égale à j. D'après la théorie des formes modulaires, on sait que $\tau \mapsto J(r(\tau))$ peut s'écrire comme une fraction rationnelle en j. De plus, comme j est surjective et $\tau \mapsto J(r(\tau))$ est partout définie, il s'agit en fait d'un polynôme en j (car sinon le dénominateur s'annulerait), et même d'une fonction affine car l'infini est un pôle simple. Pour conclure, remarquons que j et $\tau \mapsto J(r(\tau))$ coïncident en i et en ρ. En effet, $r(\rho)$ est le barycentre d'une face donc $J(r(\rho)) = 0 = j(\rho)$. D'autre part, $r(i)$ est le milieu d'une arête, ce qui donne grâce à la syzygie $J(r(i)) = 1728 = j(i)$. Elles sont donc égales sur tout $\mathbb{H}$.

□

Le théorème que nous venons de montrer permet de lier r et j à travers *l'équation icosaèdrale* :

$$(z^{20} - 228z^{15} + 494z^{10} + 228z^5 + 1)^3 + J(z) \cdot z^5(z^{10} + 11z^5 - 1)^5 = 0,$$

qui par spécialisation $z = r(\tau)$ nous donne :

$$(r^{20} - 228r^{15} + 494r^{10} + 228r^5 + 1)^3 + j \cdot r^5(r^{10} + 11r^5 - 1)^5 = 0.$$

Rappelons alors le résultat classique de théorie de Galois [Bra] :

Théorème 5.8. *Soit A un anneau intègre intégralement clos dans son corps de fraction $\mathbb{E}$. Soit θ une spécialisation de A, i.e. un morphisme de A vers un corps $\mathbb{F}$. On considère le polynôme $P(X) = \sum_{i=0}^n a_i X^i$ à coefficients a_i dans A tel que le polynôme qui lui correspond $Q(Y) = \sum_{i=0}^n \theta(a_i) Y^i$ soit séparable. Alors le groupe de Galois $Gal_{\mathbb{F}}(Q)$ est isomorphe à un sous-groupe de $Gal_{\mathbb{E}}(P)$.*

En appliquant ce résultat à l'équation icosaèdrale, nous obtenons le théorème suivant.

Théorème 5.9. *Soient* $\mathbb{K} \subset \mathbb{C}$ *un corps qui contient* ϵ *et* $\tau \in \mathbb{H}$ *tel que* $j(\tau) \notin \{0, 1728\}$*. Alors* $\mathbb{K}(r(\tau))$ *est une extension galoisienne de* $\mathbb{K}(j(\tau))$ *dont le groupe de Galois est un sous-groupe de* $\mathfrak{A}_5$*. Ce sous-groupe est propre si et seulement si l'équation de l'icosaèdre est réductible sur* $\mathbb{K}(j(\tau))$*.*

Démonstration. Dans les hypothèses du théorème précédent, on prend $A = \mathbb{E} = \mathbb{K}(J(z))$, $\mathbb{F} = \mathbb{K}(j(\tau))$, $P(X) = (X^{20} - 228X^{15} + 494X^{10} + 228X^5 + 1)^3 + J(z) \cdot X^5(X^{10} + 11X^5 - 1)^5 = 0$ et θ la spécialisation induite par la substitution $z = r(\tau)$. Comme le discriminant de P vaut $5^{785}J(z)^{40}(J(z) - 1728)^{30}$, la première assertion découle de l'application du théorème pour $j(\tau) \notin \{0, 1728\}$.

Montrons la deuxième assertion. Le corps de décomposition de P sur $\mathbb{K}(J(z))$ est engendré par z. De plus , comme on peut étendre la spécialisation à $\mathbb{K}(z)$, le corps de décomposition de $Q(X) = (X^{20} - 228X^{15} + 494X^{10} + 228X^5 + 1)^3 + j(\tau) \cdot X^5(X^{10} + 11X^5 - 1)^5$ sur $\mathbb{K}(j(\tau))$ est engendré par $r(\tau)$. Le degré de l'extension $\mathbb{K}(r(\tau)) \supset \mathbb{K}(j(\tau))$ est donc égal au degré du polynôme minimal de $r(\tau)$ sur $\mathbb{K}(j(\tau))$. La deuxième assertion en découle. $\square$

Nous pouvons maintenant démontrer le résultat promis.

Théorème 5.10. *La valeur de* $r(\tau)$ *est exprimable sous forme de radicaux sur* $\mathbb{Q}$ *si et seulement si* $j(\tau)$ *l'est et l'équation icosaèdrale est réductible sur* $\mathbb{Q}(\epsilon, j(\tau))$*.*

Démonstration. Démontrons l'implication dans le sens direct. Comme $j(\tau)$ appartient à $\mathbb{Q}(r(\tau))$, il est bien exprimable sous forme de radicaux sur $\mathbb{Q}$. De plus, l'extension $\mathbb{Q}(\epsilon, r(\tau)) \supset \mathbb{Q}(\epsilon, j(\tau))$ est résoluble car l'extension $\mathbb{Q}(\epsilon, r(\tau)) \supset \mathbb{Q}$ l'est, donc son groupe de Galois est résoluble. Ainsi, il ne peut être égal à $\mathfrak{A}_5$ tout entier, ce qui implique d'après le théorème précédent que l'équation icosaèdrale est réductible sur $\mathbb{Q}(\epsilon, j(\tau))$.

Montrons maintenant la réciproque. Comme $j(\tau)$ et ϵ sont exprimables sous forme de radicaux sur $\mathbb{Q}$, il suffit de démontrer que $r(\tau)$ est exprimable sous forme de radicaux sur $\mathbb{Q}(\epsilon, j(\tau))$. Cela revient donc à démontrer que le sous-groupe de Galois de l'extension $\mathbb{Q}(\epsilon, r(\tau)) \supset \mathbb{Q}(\epsilon, j(\tau))$ est résoluble. Par le théorème précédent, ce groupe est un sous-groupe propre de $\mathfrak{A}_5$. Or il est connu que les sous-groupes propres de $\mathfrak{A}_5$ sont résolubles. $\square$

Références

[BC] Barnar, S. et Child J.M. : *Advanced Algebra*, Macmillan, London, 1939, 237-261.

[Ber] Berger, M. : *Géométrie*, Nathan, Paris, 1990.

[Bra] Brauer, R. : *Galois theory*, Cambridge MA : Harvard University, 1964.

[Dick] Dickson, L. E. : *Modern Algebraic Theories*, Sanborn, New York, 1926.

[Duk] Duke, W. : *Continued fractions and modular functions*, Bulletin of American Mathematical Society, janvier 2005, 137-162.

[Kel] Keller, B. : *Notes du cours d'algèbre*, cours de la FIMFA, 2006-2007, http ://www.math.jussieu.fr/ keller/algebre2/.

[Kle] Klein, F. : *Lectures on the icosahedron and the solution of equations of the fifth degree*, Second and revised edition, Dover publications, Inc., New York, 1956.

[Laz] Lazzeri, F. : *Appunti del corso di Analisi Complessa e Topologia Algebrica*, corso dell'università di Pisa, 2004-2005, http ://www.dm.unipi.it/pages/lazzeri/.

[Per] Perron, O. : *Die Lehre von den Kettenbrüchen*, Chelsea, New York, 1950, 237-261.

[Rog] Rogers, L. J. : *Second memoir of the expanation of certain infinite products*, Proc. London Math. Soc.25, 1894, 318-343.

[Ser] Serre, J.-P. : *Cours d'arithmétique*, Presses Universitaires de France, Paris, 1995, 237-261.

[Wat1] Watson, G. N. : *Theorems stated by Ramanujan (VII) theorems on continued fractions*, Journal London Math. Soc. 4, 1929, 39-48.

[Wat2] Watson, G. N. : *Theorems stated by Ramanujan (IX) to continued fractions*, Journal London Math. Soc. 4, 1929, 231-237.