# Géométrie algébrique énumérative via la géométrie tropicale

François-Régis André,
sous la direction d'Ilia Itenberg.

18 octobre 2012

**Résumé**

La géométrie tropicale est un domaine des mathématiques dont l'essor est très récent et qui permet de rapprocher des problèmes complexes en géométrie algébrique à des problèmes combinatoire. L'idée centrale est de faire correspondre aux objets de la géométrie classique des analogues tropicaux qui seront des objets affines par morceaux. Par exemple, les courbes tropicales qui sont les analogues des courbes algébriques sont des graphes rectilignes.
Le travail consiste alors à faire le lien entre les problèmes de géométrie classique et leurs analogues dans le monde tropical. L'étude dans le monde tropical permet alors de rapprocher les problèmes étudiés à des problèmes combinatoires portant sur les objets tropicaux.
La première partie de ce texte introduit les courbes tropicales et présente un lien avec les courbes algébriques usuelles. La deuxième partie est une introduction aux problèmes énumératifs étudiés.

## Table des matières

# 1 Courbes tropicales

## 1.1 Semi-corps tropical et déquantification des nombres réels

On munit l'ensemble $\mathbb{T} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ d'une structure de semi-corps grâce aux opérations suivantes :

$$x \oplus y = max\,(x, y)$$

$$x \otimes y = x + y$$

Pour $t \geq 1$, l'application logarithme en base $t$ $log_t : \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{T}$ induit les opération suivantes sur $\mathbb{T}$ :

$$x \oplus_t y = log_t\,(t^x + t^y)$$

$$x \otimes_t y = x + y$$

Pour tout $t \geq 1$, l'ensemble $(\mathbb{T}, \oplus_t, \otimes_t)$ est un semi-corps isomorphe à $\mathbb{R}^+$. Cependant, si on fait tendre $t$ vers l'infini, on obtient :

$$\lim_{t \mapsto +\infty} x \oplus_t y = x \oplus y$$

$$\lim_{t \mapsto +\infty} x \otimes_t y = x \otimes y$$

On en déduit que le semi-corps tropical $\mathbb{T}$ peut être vu comme la limite de semi-corps isomorphes à $\mathbb{R}^+$, mais $\mathbb{T}$ n'est pas lui-même isomorphe à $\mathbb{R}^+$.

## 1.2 Courbe tropicale associée à un polynôme

**Définition 1.** Un graphe fini pondéré $\Gamma$ est la donnée de :
- un ensemble fini $\mathcal{V}$ de sommets.
- l'ensemble $\mathcal{E}_b$ des arêtes bornées qui sont des segments dont les extrémités sont des sommets.
- l'ensemble $\mathcal{E}_u$ des arêtes non-bornées qui sont des demi-droites dont l'extrémité est un sommet. On appellera bouts les arêtes non-bornées.
- un poids $w\,(e)$ entier non-nul associé à chaque arête $e$.

**Définition 2.** Une courbe tropicale est la donnée de $(\Gamma, h)$ où :
- $\Gamma$ est un graphe fini pondéré.
- $h : \Gamma \mapsto \mathbb{R}^2$ est une application continue et qui, sur chaque arête, se met sous la forme $h\,(t) = a + tp$ avec $a \in \mathbb{R}^2$ et $p \in \mathbb{Z}^2$.
- pour chaque sommet $V$, la relation suivante, dite condition d'équilibre, est vérifiée :

  $$\sum_{e \in \delta V} w\,(e)\,\overrightarrow{e} = \overrightarrow{0}$$

  où $\delta V$ désigne l'ensemble des arêtes sortant de $V$ et $\overrightarrow{e} \in \mathbb{Z}^2$ désigne le vecteur primitif directeur de la paramétrisation $h\,(e)$ dans la direction issue de $V$.

Soit $P = \sum_{(i,j)\in\Lambda_P} a_{i,j} X^i Y^j \in \mathbb{R}[X,Y]$ un polynôme à deux variables. On note $\Delta_P$ son polygone de Newton, que l'on suppose être le triangle de sommets $(0,0)$, $(0,d)$ et $(d,0)$, où $d$ désigne le degré de $P$. On peut voir $P$ comme polynôme tropical en prenant la même expression avec les opérations tropicales. On obtient la fonction :

$$f_P(x,y) = \max_{(i,j)\in\Lambda_P} (a_{i,j} + ix + jy)$$

Cette fonction est convexe et affine par morceaux. On définit le lieu des coins de $f_P$ comme l'ensemble $T_P$ des points de $\mathbb{R}^2$ en lesquels $f_P$ n'est pas localement affine.

**Proposition 1.** *Le lieu des coins $T_P$ est l'image dans $\mathbb{R}^2$ d'une courbe tropicale.*

On dira dans la suite qu'une courbe tropicale est associée à un polynôme de degré $d \geq 1$ est de degré $d$. On construit maintenant une subdivision du polygone de Newton $\Delta_P$ associée à $f_P$ de la façon suivante. On définit le complexe polyédral étendu :

$$\widetilde{\Delta}_P = Conv\{\,(i,j,t)\,|(i,j) \in \Lambda_P, t \geq -a_{i,j}\}$$

La projection sur les deux premières coordonnées envoie $\widetilde{\Delta}_P$ dans $\Delta_P$ et induit un homéomorphisme entre l'union des faces bornées de $\widetilde{\Delta}_P$ et $\Delta_P$. La subdivision $S$ de $\Delta_P$ associée à $f_P$ est donnée par l'image de ces faces bornées dans $\Delta_P$. On note maintenant $\Theta$ la subdivision de $\mathbb{R}^2$ donnée par la courbe tropicale $T_P$. Le théorème suivant permet de se faire une idée de l'allure de la courbe tropicale associée à $P$.

**Théorème 2 (Dualité).** *Il existe une bijection $\phi$ entre les éléments de $S$ et ceux de $\Theta$ telle que :*

- *pour chaque polygone $\Pi$ de $S$, $\phi(\Pi)$ est un sommet de $T_P$,*
- *pour chaque arête $E$ de $S$, $\phi(E)$ est une arête de $T_P$ orthogonale à $E$,*
- *une arête $E$ est contenue dans le bord de $\Delta_P$ si et seulement si $\phi(E)$ est un bout de $T_P$,*
- *les sommets de $S$ correspondent aux régions de $\mathbb{R}^2 - T_P$,*
- *la correspondance $\phi$ renverse la relation d'incidence.*

### 1.3 Amibes

On se donne une variété algébrique $V \in \mathbb{C}^2$ définie par un polynôme $P \in \mathbb{C}[X,Y]$.
On définit une application :

$$Log: \quad (\mathbb{C}^*)^2 \to \mathbb{R}^2 \qquad (z,w) \mapsto (\log|z|, \log|w|)$$

**Définition 3.** On définit l'amibe $\mathcal{A}(V)$ comme l'image de $V$ par l'application $Log$.

Un lien entre amibes et courbes tropicales peut se voir de la façon suivante. On considère à présent un polynôme $P$ dont les coefficients sont des séries de Puiseux $A_{i,j}(t) \in K\{t\}$ :

$$P(z,w) = \sum_{(i,j)\in\Lambda_P} A_{i,j}(t)\, z^i w^j$$

La variété algébrique $V$ est cette fois-ci contenue dans $K\{t\}^2$. L'amibe non-archimédienne $\mathcal{A}_K(V)$ de $P$ est l'image de $V$ par l'application :

$$Log_K : \quad K\{t\}^2 \to \mathbb{R}^2 \qquad (z,w) \mapsto (\,-val(z)\,, -val(w)\,)$$

On note $p$ le polynôme tropical :

$$p(x,y) = \max_{(i,j)\in\Lambda_P} (a_{i,j} + ix + jy)$$

où $a_{i,j} = -valA_{i,j}(t)$

**Théorème 3** (Kapranov)**.** *L'adhérence $\overline{\mathcal{A}_K(V)}$ de l'amibe non-archimédienne coïncide avec la courbe tropicale $T_p$ définie par $p$.*

# 2 Géométrie énumérative

## 2.1 Un problème énumératif simple

Il est bien connu que par deux points distincts passe une unique droite. De même, par cinq points distincts passe une conique, et il y a unicité lorsqu'aucune droite ne passe par 4 des 5 points. En effet, une conique $\mathcal{C}$ est la courbe algébrique associée à un polynôme de degré 2 :

$$P(X,Y) = aX^2 + bY^2 + cXY + dX + eY + f \in \mathbb{R}[X,Y]$$

La condition que $\mathcal{C}$ passe par 5 points distincts $p_i = (x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2$ se traduit par le système de cinq équations linéaires en les coefficients de $P$ :

$$ax_i^2 + by_i^2 + cx_iy_i + dx_i + ey_i + f = 0 \quad pour i \in \{1, \cdots, 5\}$$

La matrice de ce système est de rang 5 lorsque les points $p_i$ vérifient la condition qu'aucune droite ne passe par 4 d'entre eux. Dans ce cas, l'espace des solutions de ce système est une droite de solutions qui correspondent à des polynômes tous proportionnels entre eux et qui définissent donc la même conique. On généralise aisément cette propriété au degré $d \geq 1$ quelconque :

**Proposition 4.** *Il existe exactement une courbe algébrique définie par un polynôme de degré d qui passe par une configuration générique de* $\frac{d(d+3)}{2}$ *points.*

Il s'agit d'un argument dimensionnel. L'espace $\mathbb{C}_d[X,Y]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à $d$ est de dimension $1+2+\cdots+d=\frac{d(d-1)}{2}$. La condition qu'une courbe algébrique par $P\in\mathbb{C}_d[X,Y]$ passe par $\frac{d(d+3)}{2}$ points se traduit par un système linéaire de $\frac{d(d+3)}{2}$ équations sur les coefficients de $P$. Pour un choix générique de ces points, le système obtenu est de rang $\frac{d(d+3)}{2}$, on trouve donc comme dans le cas précédent une droite de solutions qui correspondent à une unique courbe algébrique qui passe par ces points.

### 2.2 Invariants de Gromov-Witten

L'espace dans lequel on a travaillé pour le problème précédent est celui des courbes algébriques de degré $d$, qui s'identifie à l'espace projectif associé à celui des polynômes de degré $d$. Cet espace est de dimension $\frac{d(d+3)}{2}$ et la condition d'incidence à une configuration générique de $\frac{d(d+3)}{2}$ points a défini une sous-variété de dimension 0, qui dans le cas précédent était réduite à un seul point. En choisissant une configuration générique des points dans le problème précédent, on obtient une courbe irréductible et non-singulière. Le problème énumératif qui nous intéresse fait intervenir des courbes singulières. Les courbes qui interviendront dans la suite seront des courbes irréductibles et nodales, c'est-à-dire des courbes dont les seules singularités sont des points doubles. La partie de l'espace des courbes de degré $d$ constituée des courbes nodales irréductibles ayant $n$ points doubles est une sous-variété. Plutôt que d'utiliser le nombre $n$ de points doubles d'une courbe nodale, on préfère utiliser son genre $g$ qui est relié à $n$ par la relation :

$$g=\frac{(d-1)(d-2)}{2}-n$$

**Proposition 5.** *La dimension de l'espace des courbes de degré d, irréductibles et nodales de genre g est* $3d-1+g$*.*

On se donne une une configuration générique $\omega$ de $3d-1+g$ points. Le nombre de courbes de degré $d$, irréductibles et nodales de genre $g$ qui passent par $\omega$ est fini, et on le note $N(d,g)$. Les nombres $N(d,g)$ sont des cas particuliers d'invariants de Gromov-Witten. Le problème étudié est de déterminer ces nombres.

## 3 Calculs des invariants

### 3.1 Le théorème de correspondance

La notation $N(d,g)$ est justifiée par la proposition suivante :

**Proposition 6.** *$N(d,g)$ ne dépend pas de la configuration $\omega$ générique choisie.*

Nous avons présenté ces résultats dans le cadre des courbes algébriques complexes. On peut faire exactement le même travail avec les mêmes résultats en travaillant avec des courbes définies sur le corps $K = \mathbb{C}\{t\}$ des séries de Puiseux et on obtient les mêmes invariants. On se place maintenant dans le cas des courbes sur $K$ et on applique la fonction $Log_K$ pour se ramener dans le monde tropical. Supposons que la configuration choisie $p_1, \ldots, p_{3d-1+g} \in K$ se projette par la valuation sur une configuration $\mathcal{U}$ générique de points $x_1, \ldots, x_{3d-1+g} \in \mathbb{Q}^2 \subset \mathbb{R}^2$. La fonction $Log_K$ envoie donc les courbes de degré $d$ et de genre $g$ qui passe par les $p_i$ sur des courbes tropicales qui passent par les $x_i$. Le théorème de correspondance décrit quelles sont les courbes tropicales qui sont obtenues par ce procédé appelé tropicalisation et combien de courbes algébriques sont associées à chacune des courbes tropicales obtenues.

**Définition 4.** Une courbe tropicale de degré $d$ est dite nodale si la subdivision de $\Delta$ associée est composée uniquement de triangles et de parallélogrammes. Elle est dite simple si de plus tous les points du bord de $\Delta$ font partie de la subdivision $S$.

**Définition 5.** Le genre $g(T)$ d'une courbe tropicale $T$ nodale est défini par :

$$g(T) = \frac{k - 3d + 2}{2}$$

où $k$ désigne le nombre de sommets trivalents de $T$, ou de façon équivalente le nombre de triangles de $S$.

**Définition 6.** La multiplicité $\mu(T)$ de Mikhalkin d'une courbe tropicale simple $T$ est égale au produit des aires des triangles qui apparaissent dans la subdivision $S$. L'aire est normalisée de sorte qu'un triangle à sommets entiers sans point entier intérieur soit d'aire 1.

**Théorème 7** (**Théorème de correspondance**, Mikhalkin)**.** *On obtient dans ce contexte les relations suivantes :*

$$N(d,g) = \sum_{T \in \mathcal{T}_{g,d}(\mathcal{U})} \mu(T)$$

*où $\mathcal{T}_{g,d}(\mathcal{U})$ désigne l'ensemble des courbes tropicales simples passant par $\mathcal{U}$ et de genre $g$.*

## 3.2 Diagrammes en étages

Dans cette partie, nous présentons une manière de calculer les invariants de Gromov-Witten $N(d,g)$ à l'aide des diagrammes en étage. On considère une courbe tropicale $C$ dans $\mathbb{R}^2$.

**Définition 7.** Un étage de $C$ est une composante connexe de $C$ privée de l'intérieur de ses arêtes verticales.

**Définition 8.** Un ascenseur est une composante connexe de l'adhérence de $C$ privée de ses étages.

L'idée exposée dans cette partie est la suivante. On se donne $d$ et $g$. Le nombre $N(d,g)$ de courbes nodales de degré $d$ et de genre $g$ qui passent par une configuration $\omega$ de $3d+1-g$ points ne dépend pas de $\omega$. On va donc choisir une configuration simple pour laquelle le calcul est plus facile. On va donc les disposer sur une même bande verticale étroite, très espacés les uns des autres pour qu'ils se répartissent de façon simple entre les étages et les ascenseurs des différentes courbes de genre $g$ et de degré $d$ qui passent par $\omega$. Ce travail repose sur le lemme suivant :

**Lemme 8.** *Soient $u \leq v$ des réels. Si tous les points de $\omega$ sont dans $[u,v]\times\mathbb{R}$, alors toute courbe tropicale $C$ de degré $d$ de genre $g$ qui passe par $\omega$ a aussi tous ses sommets dans $[u,v]\times\mathbb{R}$.*

On en déduit, pour une courbe tropicale $C$ de degré $d$ de genre $g$ qui passe par $\omega$, les propriétés suivantes :

**Corollaire 9.** *Pour tout segment $[u,v]$, il existe une constante $A \geq 0$ telle que si $\omega \subset [u,v]\times\mathbb{R}$ avec $|y_i - y_j| \geq A$ pour toute paire $(x_i,y_i)$ et $(x_j,y_j)$ de $\omega$, alors chaque étage de $C$ contient exactement un point de $\omega$.*

**Corollaire 10.** *Sous les mêmes hypothèses, $C$ a exactement $d$ étages et $2d-1+g$ ascenseurs. Chaque étage et chaque ascenseur contient exactement un point de $\omega$. Enfin, toute arête d'un étage de $C$ est de vecteur directeur de la forme $(1,\alpha)$, où $\alpha\in\mathbb{Z}$ et de poids $1$.*

On en déduit que sous ces hypothèses, $C$ est déterminée par la répartition des points de $\omega$ entre ses étages et ses ascenseurs. On va coder cette répartition à l'aide de diagrammes en étages marqués. Un diagramme en étages sera défini à l'aide d'un graphe $G$.

**Définition 9.** On appelle graphe orienté $G$ la donnée d'un ensemble fini $\mathcal{V}$ de sommets, d'une liste finie $\mathcal{E}_b$ de couples (orientés) de sommets, les arêtes bornées, et d'une liste finie $\mathcal{E}_u$ de sommets, les bouts.

**Définition 10.** Soit $d\geq 1$ et $g \geq 0$. Un diagramme en étages $\mathcal{D}$ de degré $d$ et de genre $g$ est la donnée d'un graphe orienté $G$ acyclique muni d'une application poids $w : \mathcal{E}_b \cup \mathcal{E}_u \to \mathbb{N}^*$ tels que :

– le graphe $G$ a exactement $d$ sommets, $d-1+g$ arêtes bornées et $d$ bouts.

– pour tout sommet $s$ de $G$, on a la relation :

$$\sum_{i=1}^{k} w\left(a_i\right) - \sum_{i=1}^{l} w\left(b_i\right) = 1$$

où les $a_i$ (resp. $b_i$) désignent les arêtes entrantes (resp. sortantes) adjacentes à $s$.

En particulier, les bouts d'un diagramme en étages sont de poids 1. On munit un diagramme en étages $\mathcal{D}$ d'un ordre sur $\mathcal{V} \cup \mathcal{E}_b \cup \mathcal{E}_u$ en posant que $p \geq q$ s'il existe un chemin orienté de $p$ à $q$.

**Définition 11.** Un diagramme en étages marqué est un diagramme en étage $\mathcal{D}$ muni d'une bijection croissante entre $\mathcal{V} \cup \mathcal{E}_b \cup \mathcal{E}_u$ et $\{1, \ldots, 3d-1+g\}$.

**Définition 12.** La multiplicité d'un diagramme en étages marqué $\mathcal{D}$ est définie par :

$$\mu\left(\mathcal{D}\right) = \prod_{e \in \mathcal{E}_b} w\left(e\right)^2$$

Le théorème de correspondance se traduit alors dans ce contexte par :

**Théorème 11** (Brugallé et Mikhalkin)**.** *Pour tous $d \geq 1$ et $g \geq 0$, on a :*

$$N\left(d, g\right) = \sum_{\mathcal{D}} \mu\left(\mathcal{D}\right)$$

*où la somme est prise sur tous les diagrammes en étages marqués de degré $d$ et de genre $g$.*

## 3.3 Ouverture : formule récursive et invariants de Welschinger

Les problèmes présentés ici ont leur analogue avec des courbes algébriques réelles. On trouve cependant que les nombres de Gromov-Witten dépendent de la configuration choisie dans le cas réel. Une idée fondamentale due à Welschinger est dans ce contexte de compter les courbes algébriques réelles avec multiplicité $+1$ ou $-1$. Un résultat important est que le nombre obtenu ne dépend à nouveau plus de la configuration obtenue dans le cas des courbes de genre 0. De plus, ce nombre fournit une borne inférieure au nombre de Gromov-Witten pour n'importe quelle configuration de points. Il est alors possible de faire l'analogie avec les invariants de Welschinger en géométrie tropicale.
La méthode utilisant les diagrammes d'étage présentée ici ramène le calcul des invariants de Gromov-Witten au dénombrement d'objets combinatoires plus simples. Il est alors possible d'obtenir une formule, dite formule de Caporaso-Harris. Dans mon mémoire de M2, je présente une méthode pour

obtenir une telle formule qui fait intervenir de nouvelles courbes tropicales, les courbes broccoli.
Dans ma thèse, j'étudierai les invariants de Welschinger dans le cadre plus général de la géométrie symplectique et m'intéresserai plus particulièrement à l'optimalité de la borne inférieure que constitue l'invariant de Welschinger au nombre de Gromov-Witten.

## Références


[1] E. Brugallé, **Géométries complexes, réelles et tropicales**, Notes pour les journées mathématiques X-UPS 2008

[2] I. Itenberg, **Introduction à la géométrie tropicale**, Notes pour les journées mathématiques X-UPS 2008

[3] I.Itenberg, G. Mikhalkin et E. Shustin **Tropical Algebraic Geometry**, Birkhäuser, 2007

[4] E. Shustin, **A tropical calculation of the Welschinger invariants of real toric Del Pezzo surfaces**, arXiv : math/0406099

[5] G. Mikhalkin, **Enumerative tropical algebraic geometry in** $\mathbb{R}^2$, arXiv : math/0312530v4