Quelques problèmes de géométrie kählérienne

Hugues AUVRAY
ENS Paris - Université Pierre & Marie CURIE

1^er^ décembre 2008

1 Introduction

Ce texte propose une revue des problèmes classiques de la géométrie kählérienne. On essaie dans ces lignes de retracer les diverses avancées dans ce domaine, en évoquant les différentes directions qui ont pu être prises. Ceci nous mènera jusqu'à la résolution par Chen dans [Che] du problème des géodésiques dans l'espace des métriques de Kähler d'une variété kählérienne fixée, résolution cruciale pour les récents progrès qui ont pu être accomplis. On rappellera également le rôle que jouent ces questions vis à vis des liens qui existent entre métriques à courbure scalaire constante et théorie de l'application moment.

Je souhaiterais remercier vivement Olivier Biquard de pour m'avoir initié à ce domaine fascinant au croisement de la géométrie différentielle e de la géométrie algébrique, ainsi que pour sa disponibilité et pour son soutien tout au long de ce travail.

2 Variétés kählériennes

2.1 Métriques kählériennes, métriques de Kähler-Einstein

Soit M une *variété kählérienne*, de dimension complexe m, que nous supposerons toujours connexe, et compacte sauf mention contraire. On entend par *kählérienne* une variété riemannienne, de métrique g, munie d'une structure presque-complexe J intégrable, telles que $\omega = g(J\cdot,\cdot)$ soit une forme fermée, et donc une forme symplectique, appelée *forme de Kähler* ; les variétés projectives en sont un exemple, grâce à la métrique de Fubini-Study sur l'espace projectif. Il est bien connu que la forme de Ricci ρ de cette structure kählérienne, donnée par $\rho = r^g(J\cdot,\cdot)$ où r^g est le tenseur de Ricci associé à g, représente — à un facteur 2π près — la première classe de Chern $c_1(M)$, définie comme première classe de Chern de son fibré en droites complexes anticanonique muni du produit scalaire hermitien induit $\Lambda^m_{\mathbb{C}}((TM,J))$, qui est aussi celle de (TM,J). En 1954, E. Calabi conjectura que réciproquement, toute $(1,1)$-forme représentant $c_1(M)$ est la forme de Ricci d'une métrique kählérienne sur M dont la forme de Kähler est cohomologue à ω — J étant fixée — et démontra l'unicité d'une telle métrique. En 1976, S.T. Yau démontra cette conjecture.

Théorème 2.1 (Calabi-Yau) *Soit (M,g,J,ω) une variété kählérienne compacte connexe. Alors toute $(1,1)$-forme représentant $C_1(M)$ est la forme de Ricci d'une unique métrique kählérienne sur (M,J) dont la forme de Kähler est cohomologue à ω.*

La méthode de résolution, donnée elle aussi par Calabi, et appelée *méthode de continuité*, est instructive à bien des égards ; dans l'article de Chen sur lequel nous nous pencherons, celui-ci a d'ailleurs eu l'occasion d'utiliser une variante de cette méthode, ainsi qu'un des résultats que Yau obtint pour sa démonstration.

D'autre part, Th. Aubin et S.T. Yau répondirent indépendamment à une autre conjecture de Calabi, reliée de près à la précédente, à savoir l'existence d'une métrique de Kähler-Einstein dès que $c_1(M) < 0$, unique à changement d'échelle près. Rappelons que répond à cette appellation une métrique kählérienne g telle que r^g est proportionnel à g, ce qui s'énonce donc également $\omega = k\rho$, où k est un réel — nécessairement égal à la courbure scalaire, constante, divisée par la dimension réelle de M. En outre, G. Tian démontra en 1987 l'existence de telles métriques sur des surfaces complexes à première classe de Chern définie positive, variétés dites *de Fano*, dont le groupe des automorphismes est réductif.

2.2 Métriques à courbure scalaire constante, métriques extrémales

Les métriques de Kähler-Einstein peuvent se traiter du point de vue des *métriques de Kähler extrémales*. Celles-ci sont définies commes les points extrémaux de la *fonctionnelle de Calabi*, qui, pour une classe de Kähler — classe de cohomologie de de Rham de la forme symplectique associée à une métrique de Kähler — donnée, associe à une métrique de cette classe la norme $\mathbf{L}^2$ de sa courbure scalaire, ou de sa courbure scalaire réduite, ce qui, à une constant additive près, ne change rien, la courbure scalaire moyenne étant invariante au sein d'une même classe de Kähler.

En 1970, Calabi démontra l'invariance d'une métrique extrémale sous l'action d'un sous-groupe compact maximal du groupe des transformations holomorphes, ce qui permit à M. Levine de construire une surface de Kähler n'admettant pas de métrique extrémale. En 1992, D. Burns et P. de Bartolomeis donnèrent eux aussi un exemple de non-existence de métrique extrémale, et leur construction semblait de plus indiquer (conjecture de Yau) que ce problème est lié à celui de semi-stabilité des fibrés vectoriels hermitiens, qui est une condition algébrique inscrite dans la théorie géométrique des invariants.

En 1983, Futaki introduisit l'invariant qui porte son nom pour les variété de Fano, invariant dont l'annulation est une condition nécessaire pour l'existence de métrique de Kähler-Einstein. Plus tard, Calabi et Futaki étendirent cet invariant à toute variété kählérienne compacte ; cet invariant généralisé devait alors servir à mesurer l'obstruction d'une variété à admettre une métrique à courbure scalaire constante. Notons que de telles métriques sont extrémales, et qu'il est fréquent que la réciproque soit vraie, en particulier en l'absence de champs de vecteurs holomorphes. Parallèlement, Calabi démontra dans le même article que dès qu'une classe de Kähler admet une métrique à courbure scalaire constante, alors toutes les métriques extrémales de cette même classe sont nécessairement à courbure scalaire constante. Remarquons que les métriques à courbure scalaire constante existent toujours en dimension 1 — surfaces de Riemann compactes —, d'où la motivation à résoudre le problème analogue en dimension supérieure.

En ce qui concerne l'unicité, Calabi démontra dans les années 50 l'unicité d'une métrique de Kähler-Einstein dans le cas $C_1 \leq 0$, tandis qu'en 1987, T. Mabuchi et S. Bando en démontrèrent l'unicité à l'action des transformations holomorphes près dans le cas $C_1 > 0$. Plus récemment, Tian et X.H. Zhu démontrèrent l'unicité du soliton de Kähler-Ricci[1] relativement à un champ de vecteurs holomorphe fixe dans le cas Fano.

[1]c'est-à-dire une métrique ω telle que $\omega - \rho = \mathcal{L}_v\omega$ pour un champ de vecteurs holomorphe v

3 Espace des métriques de Kähler

3.1 Géométrie de l'espace des métriques de Kähler : généralités

Un des angles d'attaque pour travailler sur ces questions consiste à considérer l'*espace* $\mathcal{M}_\Omega$ *des métriques kählériennes d'une classe* $\Omega = [\omega]_{dR}$ de Kähler donnée. A ce stade intervient un des plus célèbres théorèmes de la géométrie kählérienne, le dd^c-*lemma*, ou plus exactement un de ses corollaires :

Lemme 3.1 *Soit (M, g, J, ω) une variété kählérienne compacte connexe. Soit ψ une p-forme J-invariante satisfaisant $\psi = d\varphi$ pour une $(p-1)$-forme φ. Alors $\psi = dd^c\tilde{\psi}$ pour une certaine $(p-2)$-forme $\tilde{\psi}$.*

Ce lemme nous dit en substance que deux métriques kählériennes de forme de Kähler cohomologues diffèrent d'un $dd^c\phi$ pour une certaine fonction ϕ de classe C^∞ (déterminée à une constante additive près), d'où l'introduction de l'espace $\tilde{\mathcal{M}}_\Omega$ des potentiels d'une telle classe, *i.e.* $\{\phi \in C^\infty \mid \omega + dd^c\phi > 0\}$, ouvert de l'espace de Fréchet $C^\infty(M)$.

En conséquence, nous pouvons voir $\mathcal{M}_\Omega = \tilde{\mathcal{M}}_\Omega/\mathbb{R}$ comme ouvert dans l'espace de Fréchet $C^\infty(M)/\mathbb{R}$. Si bien qu'il s'agit, tout comme $\tilde{\mathcal{M}}_\Omega$, d'ouverts étoilés (et en particulier connexes), le premier par rapport à ω, le second par rapport à 0 ; en effet, si $\bar{\omega} > 0$ (resp. $\omega + dd^c\varphi > 0$), alors pour tout t de $[0, 1]$, $t\omega + (1-t)\bar{\omega} > 0$ (resp. $\omega + dd^c(1-t)\varphi = t\omega + (1-t)(\omega + dd^c\varphi) > 0$), puisqu'un barycentre de métriques > 0 est > 0.

En outre, il existe une fonctionnelle $\mathbb{R}$-équivariante sur l'espace des potentiels, usuellement notée $\mathbb{I}$, qui permet de voir $\mathcal{M}_\Omega$ comme la sous-variété $\mathbb{I}^{-1}(0)$ de $\tilde{\mathcal{M}}_\Omega$, et telle que de ce point de vue, un vecteur tangent à $\mathcal{M}_\Omega$ en un point $\bar{\omega}$ est une fonction lisse, d'intégrale nulle contre la forme-volume associée à $\bar{\omega}$.

3.2 Métrique de Mabuchi et équation des géodésiques

En 1987, T. Mabuchi définit un produit scalaire naturel sur l'espace $\mathcal{M}_\Omega$ des métriques de Kähler d'une classe Ω fixée, de la manière suivante :

Définition 3.2 *On appelle métrique de Mabuchi, et on note g_Ω, la métrique sur $\mathcal{M}_\Omega$ définie par $g_\Omega(f_1, f_2)_{\bar{\omega}} (= (f_1, f_2)_\varphi) := \frac{1}{V_\Omega}\int_M f_1 f_2 v_{\bar{\omega}}$. On notera g_Ω, ou encore $(.,.)$, la métrique induite sur $\mathcal{M}_\Omega$, appelée également métrique de Mabuchi. On définit une métrique de Mabuchi sur l'espace des potentiels de manière analogue.*

Fait fort remarquable, ce produit scalaire admet une connexion de Levi-Civita — donnée, comme en dimension finie, par la formule de Koszul —, ce qui n'est nullement garanti en dimension infinie, et fait de $\mathcal{M}_\Omega$, du moins formellement, un espace symétrique de courbure négative. De plus, avec ces métriques, $\tilde{\mathcal{M}}_\Omega \ni \varphi \mapsto (\varphi - \mathbb{I}(\varphi), \mathbb{I}(\varphi)) \in \mathcal{M}_\Omega \times \mathbb{R}$ est une isométrie.

On peut encore s'inspirer des méthodes de la géométrie riemannienne de dimension finie pour obtenir une équation des géodésiques sur l'espace des métriques. En particulier, on se sert de la méthode d'Euler-Lagrange, c'est-à-dire que l'on calcule la variation au premier ordre de l'énergie d'un chemin sous l'effet de perturbations laissant inchangées les extrémités. Puisque $\mathcal{M}_\Omega$ est totalement géodésique, grâce à l'isométrie ci-dessus, dans $\tilde{\mathcal{M}}_\Omega$, il suffit de le faire avec un chemin reliant des potentiels. Tous calculs faits, on obtient le résultat suivant :

Théorème 3.3 *Les géodésiques de l'espace des potentiels, si elles existent, vérifient l'équation*

$$\varphi''(t) - |d\varphi'(t)|^2_{\varphi(t)} = 0. \tag{1}$$

3.3 Equation de Monge-Ampère et solution de Chen

S. Semmes a démontré dans [Sem] que cette équation était équivalente à une équation de Monge-Ampère complexe homogène. Pour ce faire, au lieu de voir une géodésique comme une fonction de $C^\infty(M \times [0,1])$, nous déclarons que c'est une fonction de $C^\infty(M \times [0,1] \times S^1)$ indépendante de la variable du dernier facteur, disons s. Ce choix n'est pas anodin. En effet, $[0,1] \times S^1$, que nous noterons désormais Σ, est une couronne incluse dans le plan complexe *via* la paramétrisation $(t,s) \mapsto e^{t+is}, t \in [0,1], s \in S^1 = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, ce qui en fait une surface de Riemann compacte à bord, et ainsi, $M \times \Sigma$ est une variété complexe de dimension $m+1$, et même kählérienne, en prenant par exemple $\omega_{M\times\Sigma} := pr_M^*\omega + \frac{i}{2} dw \wedge d\bar{w}$, où $w = \frac{i}{2}(t+is)$ est la coordonnée holomorphe locale sur le produit $[0,1] \times S^1$, vu comme tel, ou comme facteur de $M \times \Sigma$, tandis que z dénote la variable de M. Cela dit, nous posons $\Phi(z,t,s) = \varphi(z,t)$. Le résultat de Semmes est le suivant :

Théorème 3.4 *Le chemin $\varphi(t)$ est une géodésique si et seulement si $(pr_M^*\omega + dd^c\Phi)^{m+1} \equiv 0$ (les opérateurs d et d^c sont ceux de $M \times \Sigma$)*[2].

L'article de Chen cité en introduction est alors centré sur la résolution de cette EDP. Pour cela, il utilise une *méthode de continuité*. Elle consiste (après quelques aménagements destinés à lever la dégénérescence de $pr_M^*\omega$) à ne plus vouloir résoudre directement cette équation homogène, mais, en partant d'une équation similaire, déjà résolue, et en faisant « disparaître » progressivement le membre de droite, à obtenir la solution de l'équation homogène comme limite des solutions des équations à membre de droite non nul. Plus explicitement, cela revient à résoudre, pour tout $r \in]0,1]$ et pour une certaine fonction S^1-invariante θ sur $M \times \Sigma$ et en tout point strictement croissante en r telle que $\theta(1) = 1$ et $\theta(0) = 0$ (typiquement, $\theta(r) = r$, mais nous allons voir qu'il est judicieux de modifier légèrement cette fonction), l'équation

$$(E_r) \begin{cases} (\omega + dd^c\phi)^{m+1} = \theta(r)(\omega + dd^c\phi^{(1)})^{m+1} \\ \phi|_{\partial(M\times\Sigma)} = \phi^{(1)}|_{\partial(M\times\Sigma)} \text{ (conditions au bord)} \\ \omega + dd^c\phi > 0 \text{ (positivité)} \end{cases}$$

sur $M \times \Sigma$, où ω est une forme de Kähler sur $M \times \Sigma$ construite à partir de celle de M, et où $\phi^{(1)}$ est elle-même solution du problème pour $r = 1$, ce qui signifie $\omega + dd^c\phi^{(1)} > 0$. On peut en effet construire une telle fonction, qui de plus gardera la trace du problème initial de géodésiques, trace qui sera conservée grâce aux conditions de bord.

Cela dit, quelle est la stratégie pour démontrer que (E_r) admet une solution pour tout $r \in]0,1]$? Usuellement, elle consiste à démontrer que l'ensemble des r au voisinage desquels (E_r) admet une solution, qui est certainement un ouvert de $]0,1]$, en est aussi un fermé, ce qui, puisque cet ensemble est non vide par un argument d'ellipticité, permet de conclure. C'est ce que nous allons faire, de manière un peu déguisée ; en effet, nous allons, en suivant Chen, nous pencher sur le plus petit r_0 tel que (E_r) admette une unique solution pour tout r dans $]r_0,1]$, et montrer par l'absurde que $r_0 = 0$.

Nous résumons son raisonnement en nous focalisant sur les théorèmes clés de celui-ci. Tout d'abord, grâce à des estimées de Yau et au principe du maximum, Chen obtient :

Théorème 3.5 (1) *Il existe une constante $C > 0$ qui dépend seulement de $(M \times \Sigma, \omega)$ telle que si ϕ est une solution de (E_r),*

$$\max_{M\times\Sigma}(m+1-\Delta\phi) \leq C(1 + \max_{\partial(M\times\Sigma)}(m+1-\Delta\phi))$$

[2]Autrement dit, la donnée d'une géodésique sur l'espace des potentiels de Kähler est équivalente à la donnée d'une fonction Φ de $C^\infty(M \times \Sigma)$ qui est S^1-invariante, qui vérifie l'équation ci-dessus, et telle que pour tous t, s, $\Phi(.,t,s)$ est un potentiel de Kähler sur M.

Ensuite, grâce à une utilisation intensive de ce même principe du maximum et par des constructions raffinées, il démontre l'estimée C^2 :

Théorème 3.6 (2) *Sous les mêmes hypothèses, il existe une constante $C > 0$ qui dépend seulement de $(M \times \Sigma, \omega)$ telle que*

$$\max_{\partial(M\times\Sigma)} (m + 1 - \Delta\phi) \leq C(1 + \max_{M\times\Sigma} |d\phi|^2)$$

Puis, se servant d'une technique qu'il nomme « blowing-up analysis » à base de changement d'échelle, il parvient à l'estimée C^2 uniforme :

Théorème 3.7 (3) *Si ϕ est une solution de (E_r), $0 < r \leq 1$, alors $\max_{M\times\Sigma} |d\phi|_g$ est majoré indépendamment de r.*

Finalement, grâce à ces estimées ainsi qu'aux propriétés d'ellipticité l'opérateur intervenant dans cette équation, Chen démontre le :

Théorème 3.8 *L'équation (E_r) possède une unique solution pour tout r de $]0, 1]$, et à extraction près, ces solutions convergent faiblement lorsque r tend vers 0 vers une fonction $C^{1,1}$ sur $M \times \Sigma$.*

3.4 Unicité

Dans son article, Chen montre que si deux suites de fonctions lisses (ϕ_i) et (ψ_i) telles que pour tout i, $\omega + dd^c\phi_i$ et $\omega + dd^c\psi_i$ sont > 0, $(\omega + dd^c\phi_i)^{m+1}$ et $(\omega + dd^c\psi_i)^{m+1}$ tendent vers 0 et (ϕ_i), (ψ_i) convergent uniformément, alors la limite C^0 — que Chen appelle « solution faible C^0 » — est la même. Toutefois, puisqu'on ne sait pas si toute solution à l'équation de Monge-Ampère dégénérée (disons C^2 pour l'instant, on va voir que l'on peut affaiblir la régularité) est limite d'une telle suite, cela ne nous donne pas l'unicité d'une telle solution.

A première vue, l'équation $(\omega + dd^c\phi)^{m+1} = 0$ est définie lorsque ϕ est au moins deux fois dérivable. Mais nous allons voir que l'on peut donner un sens à cette équation pour ϕ *localement bornée*, du point de vue des courants. Rappelons succinctement qu'un *courant* de degré $n-k$ sur une variété de dimension n est une forme linéaire sur l'espace des k-formes à support compact de cette variété. Dans le cadre complexe (dimension complexe égale à n), on parle aussi de courant de bidegré $(n-p, n-q)$ s'il s'agit d'une forme linéaire agissant sur les $(p+q)$-formes de type (p, q). On peut aussi voir un courant de degré $n - k$ comme une k-forme à coefficients distributions. Nous renvoyons à [Dem] pour la définition des opérations usuelles (dérivation, produit extérieur avec une forme lisse) sur les courants, qui se définissent essentiellement comme leurs analogues pour les distributions, ainsi que pour les notions de *courant fermé* et de *courant positif.* Notons toutefois le fait suivant :

Proposition 3.9 *Un courant positif de bidegré $(n - p, n - p)$ est réel et est d'ordre 0, i.e. est à coefficients mesures.*

Venons-en au fait. Dans notre contexte, soit u une fonction pluri-sous-harmonique (*i.e.* $dd^cu \geq 0$ au sens des courants — on écrira *psh*) localement bornée, et soit T un courant fermé positif de bidegré $(m + 1 - p, m + 1 - p)$. Alors uT est bien défini et suivant [Be-Ta], nous définissons $dd^cu \wedge T$ par :

$$dd^cu \wedge T := dd^c(uT).$$

On a la propriété remarquable suivante :

Proposition 3.10 *Avec les hypothèses ci-dessus, $dd^c u \wedge T$ est encore un courant positif et fermé. Il est de bidegré $(m-p, m-p)$.*

Bien sûr, cette définition coïncide avec la définition usuelle lorsque T ou $dd^c u$ est lisse. Dès lors, si $u_1, \ldots, u_q$, $q \leq p$ sont psh, on définit par récurrence $dd^c u_1 \wedge \ldots \wedge dd^c u_q \wedge T$ comme étant $dd^c(u_1 dd^c u_2 \wedge \ldots \wedge dd^c u_q \wedge T)$. De même, puisque si u est psh, $dd^c u \geq 0$ est de bidegré (m, m), on définit $(dd^c u)^2$ comme étant $dd^c(u dd^c u)$, puis $(dd^c u)^q$ comme $dd^c(u(dd^c u)^{q-1})$ — et on peut aussi le faire avec $u_1, \ldots, u_q$.

Par ailleurs, on sait que ω admet des potentiels locaux ; soit donc Ψ un potentiel de ω sur un ouvert U ; on dira que ϕ est ω-psh sur U si $\omega + dd^c\phi \geq 0$ sur U, c'est-à dire si $dd^c(\Psi + \phi) \geq 0$ sur U — et ceci ne dépend pas du potentiel. Pour une telle fonction localement bornée, on peut donc définir $(\omega + dd^c\phi)^{m+1} = (dd^c(\Psi + \phi))^{m+1}$ sur U, puis sur toute la variété en utilisant d'autres potentiels locaux, dès que ϕ est globalement ω-psh et globalement bornée. On a donc donné un sens à l'équation $(\omega + dd^c\phi)^{m+1} = 0$.

Grâce alors au théorème de monotonie de Bedford-Taylor[3][Be-Ta], qui en premier lieu nous dit que la solution $C^{1,1}$ de Chen est bien solution de l'équation de Monge-Ampère complexe homogène au sens des courants, D. H. Phong et J. Sturm démontrent dans [Ph-St] l'unicité de la solution continue à l'équation de Monge-Ampère dégénérée. En utilisant encore le théorème de monotonie, on parvient finalement au résultat plus général suivant :

Théorème 3.11 *L'équation de Monge-Ampère dégénérée au sens des courants admet une unique solution C^0, qui est $C^{1,1}$, et vers laquelle tend uniformément toute suite de fonctions lisses (ϕ_i) ω-psh telle que $(\omega + dd^c\phi_i)^{m+1}$ tend vers 0 uniformément.*

4 Métriques à courbure scalaire constante et stabilité

Il s'agit à présent de réinterpréter ces résultats en termes de géodésiques sur l'espace des potentiels. Considérons la solution $\phi^{(r)}$ de (E_r). Par la transformation réciproque de celle du début de la section 3.3 qui, rappelons-le, nous a permis de travailler avec une métrique non dégénérée sur $M \times \Sigma$, nous lui associons un chemin de φ_0 à φ_1 dans $\tilde{\mathcal{M}}_\Omega$. De plus, $\varphi_t^{(r)}$ est bien un potentiel de Kähler pour tout t ; ceci car $(\omega_M + d_M d_M^c \varphi_t^{(r)})(\cdot, J_M \cdot)$ est la restriction à TM de la métrique $\omega_{\phi^{(r)}}(\cdot, J_{M\times\Sigma}\cdot)$, et est donc bien définie positive.

Mais que se passe-t-il pour l'équation des géodésiques ? En effet, (E_r) est une déformation de l'équation de Monge-Ampère complexe homogène, laquelle était équivalente à l'équation des géodésiques $\varphi_t'' - |d\varphi_t'|^2_{\varphi_t} = 0$. Dans quelle mesure le chemin $\varphi^{(r)}$ est-il alors la déformation d'une géodésique ? En d'autres termes, que vaut la quantité $\varphi_t^{(r)''} - |d\varphi_t^{(r)'}|^2_{\varphi_t^{(r)}}$? On parvient, en faisant le raisonnement inverse de celui qui nous a menés de l'équation des géodésiques à l'équation de Monge-Ampère, à l'égalité

$$(\varphi_t^{(r)''} - |d\varphi_t^{(r)'}|^2_{\varphi_t^{(r)}})\omega^m_{\varphi_t^{(r)}} = \theta(r) f \omega_M^m \tag{2}$$

— où f est une fonction lisse > 0, reliquât de la construction de $\phi^{(1)}$ —, ce qui vaut pour r assez petit $cr\omega_M^m$ en choisissant judicieusement θ, et ceci tend uniformément à tout ordre vers 0. De plus, comme seuls nous intéressent les r petits, on peut quitte à réindexer supposer $c = 1$. On parle alors de $\varphi^{(r)}$ comme *r-géodésique*.

[3]Soient $u_1, \ldots, u_q$ q fonctions psh localement bornées sur U, et soient $(u_{1,j}), \ldots, (u_{q,j})$ q suites décroissantes de fonctions psh localement bornées sur U, convergeant respectivement vers $u_1, \ldots, u_q$ ponctuellement. Alors, lorsque $j \to +\infty$,

$$dd^c u_{1,j} \wedge \ldots \wedge dd^c u_{q,j} \rightharpoonup dd^c u_1 \wedge \ldots \wedge dd^c u_q.$$

(au sens des courants d'ordre 0).

4.1 K-énergie de Mabuchi

Nous voulons définir, suivant [Mab2], une nouvelle fonctionnelle sur $\mathcal{M}_\Omega$ et $\tilde{\mathcal{M}}_\Omega$, dont les points extrémaux seront les (potentiels associés aux) métriques à courbure scalaire constante. Pour ce faire, on regarde la courbure scalaire réduite — à laquelle on a retranché sa moyenne — comme une forme sur les vecteurs tangents, soit :

$$\varphi \mapsto \tilde{s}_\varphi : \{f \mapsto \int_M f(s_\varphi - \bar{s}_\varphi)v_\varphi\}$$

Il s'avère que cette 1-forme est fermée, ainsi bien sûr que sa restriction à $T\mathcal{M}_\Omega$,

$$g \mapsto \mathring{s}_g : \{f \mapsto \int_M f(s_g - \bar{s}_g)v_g = \int_M f s_g v_g\},$$

d'où la définition, en se rappelant que $\tilde{\mathcal{M}}_\Omega$ et $\mathcal{M}_\Omega$ sont étoilés :

Définition 4.1 *On appelle K-énergie de Mabuchi, et on note E_Ω (resp. $\tilde{E}_\Omega$), la fonctionnelle sur $\mathcal{M}_\Omega$ (resp. $\tilde{\mathcal{M}}_\Omega$) s'annulant au point-base et telle que $dE_\Omega = -\mathring{s}$ (resp. $d\tilde{E}_\Omega = -\tilde{s}$).*

Ces fonctionnelles ne sont définies qu'à une constante près, mais cette incertitude est levée dès que l'on choisit un point-base dans les espaces considérés. Indépendamment de cela, il est clair que puisque $dE_\Omega = -\mathring{s}$ (resp. $d\tilde{E}_\Omega = -\tilde{s}$), les points critiques de E_Ω sont les métriques à courbure scalaire constante (resp. les potentiels associés à de telles métriques).

4.2 Unicité des métriques à courbure scalaire constante dans les cas $C_1 = 0$ et $C_1 < 0$

Supposons qu'entre deux potentiels nous ayons une géodésique lisse (φ_t), $t \in [0, 1]$. Posons $E(t) = \tilde{E}_\Omega(\varphi_t)$. Alors

$$\frac{dE}{dt} = d_{\varphi_t}\tilde{E}_\Omega(\varphi'_t) = -\tilde{s}_{\varphi_t}(\varphi'_t)$$

et tous calculs faits, on trouve pour dérivée seconde

$$\frac{d^2E}{dt^2} = \int_M \varphi'_t[\Delta^2_{\varphi_t}\varphi'_t + 2(dd^c\varphi'_t, \rho_\varphi) + (ds_{\varphi_t}, d\varphi'_t)]v_{\varphi_t} - \int_M (\varphi''_t - |d\varphi'_t|^2_{\varphi_t})(s_{\varphi_t} - s_\Omega)v_{\varphi_t}.$$

Mais puisqu'on a une géodésique, la seconde intégrale est nulle, tandis que la première vaut[4]

$$2\int_M \varphi'_t \mathbb{L}_{\varphi'_t}\varphi'_t = 2\|D^-_{\varphi_t}d\varphi'_t\|^2_{\mathbf{L}^2_{\varphi_t}} v_{\varphi_t} \tag{3}$$

ce qui en particulier est toujours ≥ 0.

A présent, dans le cas où l'extrémité φ_0 est à courbure scalaire constante, $\frac{dE}{dt}|_{t=0} = 0$, donc $E(1) - E(0) = \int_0^1 ds \int_0^s \frac{d^2E}{dt^2}dt \geq 0$; autrement dit, dès que l'on sait relier les potentiels par de géodésiques lisses, on peut affirmer que les métriques à courbure scalaire constante réalisent les minima absolus de la K-énergie, et que réciproquement, de tels potentiels sont reliés par un chemin dont la dérivée a un gradient holomorphe. Ceci permet de conclure quant l'unicité de l'éventuelle métrique à courbure scalaire constante dans les cas où l'espace des champs de vecteurs holomorphes est réduit à 0, comme par exemple lorsque $C_1 = 0$ ou $C_1 < 0$. Dans le

[4] $\mathbb{L}$ est l'opérateur de Lichnerowicz au point φ, dont une définition possible est $\mathbb{L}_\varphi(f) = \frac{1}{2}\Delta^2_\varphi f + \frac{1}{2}(df, ds_\varphi) + (dd^c f, \rho_\varphi)$

cas où toutefois il y a des champs de vecteurs holomorphes, vecteurs qui agissent de manière infinitésimale relativement aux transformations holomorphes, on conclut que deux métriques à courbure scalaire constante sont image l'une de l'autre par transformation holomorphe.

Le problème est que nous n'avons pas de vraies géodésiques, mais que nous savons les approcher comme expliqué au début de cette section. Tout le travail va donc consister à reprendre le calcul de la dérivée seconde de l'énergie le long d'un chemin approchant une géodésique, et à voir dans quelle mesure on peut faire tendre ce chemin vers la géodésique envisagée pour retrouver les résultats escomptés. Autre obstacle : on n'a une convergence faible $C^{1,1}$, tandis que l'opérateur $\mathbb{L}$ est d'ordre 4... Néanmoins, Chen parvient tout de même dans [Che] à démontrer le

Théorème 4.2 (Chen) *Dans les cas $C_1 = 0$ et $C_1 < 0$, l'éventuelle métrique à courbure scalaire constante est unique au sein de sa classe de Kähler.*

Bien que le cas $c_1 = 0$ soit compris par le théorème de Calabi-Yau, la démonstration qu'utilise Chen pour y parvenir ouvre un chemin crucial pour le cas $c_1 < 0$, d'où notre choix de le faire figurer ici. L'ingrédient de départ de ces démonstrations est la formule applicable à toute r-géodésique φ_r joignant une métrique à courbure scalaire constante g_0 à une éventuelle autre métrique de ce type g_1 :

$$2\int_{M\times[0,1]} |\mathcal{D}_r\varphi_r'|_r^2 v_r dt + \int_{M\times[0,1]} \left[|d\ln(u_r)|_r^2 - \mathrm{tr}_r(r^h)\right] u_r v_r dt = -r s_\Omega \int_{M\times[0,1]} v_h dt$$

où h est la métrique de base fixée par rapport à laquelle sont pris les potentiels, métrique que l'on peut choisir telle que $\rho^h < 0$ si $C_1 < 0$ (resp. telle que $\rho^h = 0$ si $C_1 = 0$)

Quelque temps plus tard, Donaldson [Don1] parvenait, dans le cas polarisé avec groupe des automorphismes du fibré en droites L modulo $\mathbb{C}^*$ discret à démontrer que si la classe de Kähler admet une métrique à courbure scalaire constante, alors cette métrique est unique dans la classe de Kähler, et que les plongements de Kodaira dans $\mathbb{P}H^0(M, L^k)$ sont stables au sens de Chow-Mumford. Ce résultat a ensuite finalement été étendu par Mabuchi [Mab3], et Chen-Tian [Ch-Ti] qui suppriment la condition d'une classe de Kähler entière, qui ont démontré que deux métriques extrémales d'une même classe de Kähler diffèrent toujours d'un automorphisme holomorphe.

4.3 Minimum de la K-énergie dans le cas $C_1 \leq 0$

En guise de conclusion à notre étude de [Che], nous terminons par une courte démonstration, celle du

Théorème 4.3 (Chen) *Si $c_1 \leq 0$, alors une métrique à courbure scalaire constante réalise le minimum global de la K-énergie. Si la K-énergie n'a pas de borne inférieure, il n'y a donc pas de métrique à courbure scalaire constante dans la classe de Kähler considérée.*

Démonstration. En prenant pour métrique de référence une métrique h telle que $\rho^h \leq 0$, pour point de départ une métrique g_0 (de potentiel φ_0 par rapport à h) à courbure scalaire constante, il suffit pour voir que $E(1) \geq E(0)$ de montrer que $\frac{d^2E_r}{dt^2} \geq -Cr$ pour tout $r > 0$, pour une certaine constante $C \geq 0$. Or, on a vu que

$$\begin{aligned}
\frac{d^2E_r}{dt^2} &= 2\int_M |\mathcal{D}_{\varphi_t^{(r)}}\varphi_t^{(r)\prime}|^2_{\varphi_t^{(r)}} v_{\varphi_t^{(r)}} - \int_M s_{\varphi_t^{(r)}}(\varphi_t^{(r)\prime\prime} - |d\varphi_t^{(r)\prime}|^2_{\varphi_t^{(r)}})v_{\varphi_t^{(r)}} + r s_\Omega \int_M v_h \\
&= \int_M |\mathcal{D}_{\varphi_t^{(r)}}\varphi_t^{(r)\prime}|^2_{\varphi_t^{(r)}} v_{\varphi_t^{(r)}} + \int_M \left[|d\ln(u_r)|_r^2 - \mathrm{tr}_r(r^h)\right] r v_h + r s_\Omega \int_M v_h \\
&\geq -2rC
\end{aligned}$$

avec $C \geq 0$, puisque s_Ω et $\mathrm{tr}_r(r^h)$ sont ≤ 0. Ainsi, comme $\frac{dE_r}{dt}(0) = 0$, puisqu'on part d'une métrique à courbure scalaire constante, $\frac{dE_r}{dt}(t) \geq -2rCt$, et donc $E_r(t) - E_r(0) \geq -rCt^2$, d'où $E(1) - E(0) = E_r(1) - E_r(0) \geq -rC$ pour tout $r > 0$. Il ne reste plus qu'à faire tendre r vers 0, et le tour est joué. $\square$

4.4 Liens avec la théorie de l'application moment

Action hamiltonienne

Soit (M, ω) une variété symplectique sur laquelle agit un groupe de Lie G (connexe, compact), d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, de manière symplectique, c'est-à-dire :

$$\gamma^*\omega = \omega \quad \forall \gamma \in G.$$

Notant $\hat{a}$ le champ de vecteurs sur M canoniquement associé à $a \in \mathfrak{g}$ (action infinitésimale, $\hat{a}(x) = \frac{d}{dt}|_{t=0} \exp(ta)(x)$), on parle d'action hamiltonnienne si :

— tout champ est hamiltonien, *i.e.* $\hat{a} \lrcorner \omega = -d\mu^a$

— il existe une application $\mu : M \to \mathfrak{g}^*$ équivariante pour l'action de G, Une telle fonction μ, unique à l'addition près d'un élément de $(\mathfrak{g}^*)^G$, est appelée *application moment*.

Notons que si la forme symplectique provient de la courbure d'un fibré en droites complexes L, soit $\omega = iF_L \in 2\pi C_1(L)$, le choix d'une telle application moment nous autorise à faire agir G sur L, en écrivant

$$\hat{a}_L = \tilde{a} + \langle \mu(x), a \rangle \frac{d}{d\theta}$$

où $\tilde{a}$ est le remonté horizontal de $\hat{a}$ sur L *via* une connexion de courbure $-i\omega$.

Réduction de Mardsen-Weinstein

Soit ζ, $Ad^*_\gamma \zeta = 0$ pour tout γ, où Ad^* dénote l'action coadjointe $\langle Ad^*_\gamma \zeta, a \rangle = \langle \zeta, Ad_{\gamma^{-1}} a \rangle$. ζ est appelée valeur régulière de μ si pour tout x de $\mu^{-1}(\zeta)$, $d_x\mu : T_xM \to T_{\mu(x)}\mathfrak{g}^*$ est surjective, c'est-à-dire l'algèbre d'isotropie de x est nulle. $\mu^{-1}(\zeta)$ est G-invariante, et l'action de G sur $\mu^{-1}(\zeta)$ est localement libre. On note $\hat{M}$ le *quotient symplectique* $\mu^{-1}(\zeta)/G$, et si $\hat{\omega}$ est induite par ω sur $\hat{M}$, alors $(\hat{M}, \hat{\omega})$ est symplectique. On a donc le diagramme :

$$\begin{tikzcd} (M,\omega) & \mu^{-1}(\zeta) \arrow[l, hook', "i"'] \arrow[d, "\pi"] \\ & \mu^{-1}(\zeta)/G \end{tikzcd}$$

avec $i^*\omega = \pi^*\hat{\omega}$.

Si de plus $\hat{J}$ est la structure presque-complexe induite sur $\hat{M}$ par une structure presque-complexe J (G-invariante ω, pas nécessairement intégrable, mais compatible à ω au sens où $\omega(\cdot, J\cdot)$ est une métrique riemennienne) sur M, on a de plus $(\hat{M}, \hat{J}) \cong (M^{ss}, J)/G^{\mathbb{C}}$ (avec $G^{\mathbb{C}}$ le complexifié du groupe de Lie compact G et M^{ss} l'ensemble des points semi-stables sous l'action de G, points dont l'orbite sous l'action de $G^{\mathbb{C}}$ est fermée).

Cas kählérien

Dans le même cadre que ci-dessus, on suppose de plus que M est munie d'une structure kählérienne (g, J, ω) préservée par l'action de G (*i.e.* on suppose en plus J intégrable par rapport au paragraphe précédent). Alors g « descend » elle aussi sur $\hat{M}$, et fait de $(\hat{M}, \hat{g}, \hat{J}, \hat{\omega})$ une variété kählérienne.

L'action de G sur L elle aussi se complexifie, de sorte que les $G^{\mathbb{C}}$-orbites dans L se projettent sur des $G^{\mathbb{C}}$-orbites dans M. Si alors Z est la fonction sur L G-invariante $z \mapsto -\log|z|^2$, on obtient un potentiel pour $\pi^*\omega$ (avec π la projection $L - \{\text{section nulle}\} \to M$), *i.e.* $\frac{1}{2}dd^cZ = \pi^*\omega$.

Par ailleurs, on montre que si $p \in L$ est au-dessus de $x \in M$, et si $a \in \mathfrak{g}$, on a :

$$\frac{d}{dt}Z(e^{ita}p) = \langle \mu(e^{ita}x), a\rangle$$

et

$$\frac{d^2}{dt^2}Z(e^{ita}p) = |\hat{a}(e^{ita}x)|^2.$$

Les points critiques de Z sont donc les zéros de μ, et Z est convexe, ou plutôt la tirée-en-arrière de Z sur $G^{\mathbb{C}}/G$ est convexe le long des géodésiques de cet espace symétrique, qui sont données par l'action infinitésimale de $i\mathfrak{g}$.

Finalement, on en déduit le résultat général d'unicité de cette théorie : dans M, une $G^{\mathbb{C}}$-orbite rencontre $\mu^{-1}(\zeta)$ en au plus un point, point dont l'existence s'énonce : il existe $\gamma \in G^{\mathbb{C}}$ tel que $\mu(\gamma x) = \zeta$, condition équivalente premièrement à la propreté de la fonctionnelle Z relative à x, et deuxièmement au fait que $G^{\mathbb{C}}p$ soit fermée, avec G_x (le groupe d'isotropie) fini. Notons que cette dernière condition est appelée condition de *stabilité* dans le cadre de la théorie géométrique des invariants.

La courbure scalaire comme application moment

Pour exprimer notre problème en termes d'application moment, on change de point de vue ; en effet, nous avons fixé la structure complexe, et nous analysons l'espace des métriques de Kähler dans une classe donnée. On peut aussi, une fois choisie la structure kählérienne de base (g, J, ω), fixer ω et faire varier J dans l'espace $\mathcal{J}$ des structures presque-complexes compatibles à ω, *i.e.* telles que $\omega(J\cdot, J\cdot) = \omega$ et $\omega(\cdot, J\cdot)$ est une métrique riemannienne.

$\mathcal{J}$ est en fait formellement une variété kählérienne de dimension infinie, sur laquelle agit le groupe G des symplectomorphismes de M, en préservant cette structure kählérienne.

De plus, l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G se voit comme l'espace $C^\infty_\omega(M)$ des fonctions d'intégrale nulle pour la forme volume associée à ω, *via* l'isomorphisme $f \leftrightarrow X_f = \sharp_\omega df$. En outre, on peut aussi définir une courbure scalaire relative à une structure presque-complexe sans que celle-ci soit intégrable ; l'opérateur $\bar\partial$ s'étend en une connexion de Chern sue $\Omega^{0,1}M$, donc sur le fibré anticanonique K_M, et donne une courbure $i\rho_J$; on pose ensuite $s_J = 2\Lambda\rho_J$.

On a donc un élément de $\mathfrak{g}^*$ définie par $f \mapsto \int_M s_J f v_\omega$, que l'on note encore s_j, et donc en ce sens une application $\mathcal{J} \to \mathfrak{g}^*$ définie par $J \mapsto s_J$. Le lien avec le début de cette section est donné par le

Théorème 4.4 (Donaldson) *L'application $J \mapsto \frac{1}{4}s_J$ est une application moment pour l'action des symplectomorphismes sur $\mathcal{J}$. En particulier, le lieu d'annulation de l'application moment est exactement l'espace des structures presque-complexes à courbure scalaire constante.*

Par ailleurs, bien que le groupe des symplectomorphismes, non compact, n'admette pas de complexification, on peut commplexifier l'action infinitésimale de $\mathfrak{g}$ puisque $\mathcal{J}$ est complexe ; if agira donc sur J par $J\mathcal{L}_{X_f}J$. Les $\mathcal{L}_{X_f}J$ et les $J\mathcal{L}_{X_f}J$ engendrent alors une distribution involutive, dont les feuilles maximales jouent le rôle d'orbites sous l'action du groupe complexifié.

Si de plus J est intégrable, l'annulation du tenseur de Nijenhuis donne $J\mathcal{L}_{X_f}J = \mathcal{L}_{JX_f}J$ (en fait, elle est équivalente à $J\mathcal{L}_XJ = \mathcal{L}_{JX}J$ pour tout vecteur X), donc l'action complexifiée infinitésimale est une action infinitésimale par difféomorphismes sur J. Il est alors équivalent de faire agir les difféomorphismes sur ω (par $-\mathcal{L}_{JX_f} = -dd^cf$), et de fixer J. Plus précisément, il y a un difféomorphisme naturel entre $\mathcal{J}$ modulo les symplectomorphismes relatifs à la forme de Kähler d'origine (ou plutôt à la composante connexe de l'identité dans ce groupe), et $\mathcal{M}_\Omega$ modulo les transformations holomorphes relatives à la structure complexe de départ. En particulier, si d'un côté on a une courbure scalaire constante, on récupère automatiquement une courbure scalaire constante de l'autre. Et il apparaît que le rôle de l'espace symétrique $G^{\mathbb{C}}/G$ est joué par $\mathcal{M}_\Omega$, où $\Omega = [\omega]_{dR}$.

La K-énergie joue alors le rôle de la fonctionnelle Z, et la théorie de l'application moment prévoit donc que *si $\mathcal{M}_\Omega$ est géodésiquement convexe*, les métriques à courbure scalaire constante réalisent le minimum global de la K-énergie, et que celle-ci est convexe le long des géodésiques de $\mathcal{M}_\Omega$. On pourra consulter [Don2] pour plus détails à ce sujet.

Cette analogie a donc donné en un mot de bonnes raisons de formuler la conjecture de l'unicité des métriques à courbure scalaire constante à l'action près des transformations holomorphes, ainsi que la conjecture portant sur l'existence de ces métriques, formulée ainsi : il existe une métrique à courbure scalaire constante si et seulement s'il y a K-stabilité, au sujet de laquelle nous renvoyons à [Yau2]. Cette conjecture a d'ailleurs récemment été démontrée dans le cas des surfaces toriques, voir [Don3].

Références

[Be-Ta] E. D. Bedford, T. A. Taylor, *The Dirichlet problem for the complex Monge-Ampère operator*, Invent. Math. 37 (1976) 1-44.

[Biq] O. Biquard, *Métriques kählériennes à courbure scalaire constante : unicité, stabilité.* Séminaire Bourbaki, Vol. 2004/2005 Astérisque No. 307 (2006), Exp. no. 938, vii, 1-31.

[Che] X. X. Chen, *The Space of Kähler Metrics*, J. Differential Gometry 56 (2000), no. 2, p. 189-234.

[Ch-Ti] X. X. Chen, G. Tian, *Geometry of Kähler Metrics and Foliations by Holomorphic Discs*, arXiv : math.DG/0507148 v1.

[Dem] J. P. Demailly, *Complex Analytic and Differential Geometry*, disponible sur la page web de l'auteur.

[Don1] S. K. Donaldson, *Scalar curvature and projective embeddings. I*, J. Differential Geom. 59 (2001), no.3, p 479-522.

[Don2] S. K. Donaldson, *Symmetric spaces, Kähler geometry and Hamiltonian dynamics*, Northern California symplectic geometry seminar, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, vol. 196, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999, p. 13-33.

[Don3] S. K. Donaldson, *Scalar curvature and stability of toric varieties*, J. Differential Geom. 62 (2002), no.2, p 289-349.

[Do-Kr] S. K. Donaldson, P. B. Kronheimer, *The Geometry of four-Manifolds*, Oxford Mathematical Monographs, The Clarendon Press, New York, 1990, Oxford Science Publications.

[Mab1] T. Mabuchi, *K-energy map integrating Futaki invariants*, Tohoku Math. J. (2) 38 (1986), no.4, p 575-593.

[Mab2] T. Mabuchi, *Some symplectic geometry on compact Kähler manifolds. I*, Osaka J. Math. 24 (1987), no.2, p 227-252.

[Mab3] T. Mabuchi, *Stability of extremal Kähler metrics*, Osaka J. Math. 41 (2004), no.3.

[Ph-St] D. H. Phong, J. Sturm, *The Monge-Ampère operator and geodesics in the space of Kähler potentials*, arXiv : math.DG/0504157

[Sem] S. Semmes, *Complex Monge-Ampère and symplectic manifolds*, Amer. J. Math., 114 (1992), no. 3, p. 495-550.

[Ti-Yau] G. Tian, S. T. Yau, *Existence of Kähler-Einstein metrics on complete Kähler manifolds and their application to algebraic geometry*, Mathematical aspects of String Theory, Proceedings of the conference held at the university of California, Sans Diego, California, 1986, Edited by S. T. Yau, Advanced Series in Math. Physics, 1.

[Yau1] S. T. Yau, *On the Ricci curvature of a compact Kähler manifold and the complex Monge-Ampère equation*, I^*, Comm. Pre Appl. Math. 31 (1978) 339-441.

[Yau2] S. T. Yau, *Open problem in geometry*, Differential geometry : partial differential equations on manifolds (Los Angeles, CA, 1990), Proc. Sympos. Pure Math., vol. 54, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1993, p. 1-28.