Introduction au domaine de recherche

Sur la cohomologie des espaces de Hilbert ponctuels des surfaces *

Samuel Bach

26 octobre 2012

Table des matières

*sous la direction de Manfred Lehn

Introduction

Étant donné un schéma quasiprojectif X sur $\mathbb{C}$, le schéma de Hilbert associé à X paramètre les sous-schémas de X ([Grothendieck]). Nous nous intéressons plus particulièrement aux sous-schémas ponctuels de X, c'est-à-dire de dimension 0. Le schéma de Hilbert se décompose selon les différents polynômes de Hilbert des sous-schémas, et en particulier, pour tout entier naturel n, on obtient un schéma de Hilbert ponctuel $\mathrm{Hilb}^n(X)$, qui paramètre les sous-schémas de X de longueur n. Ces schémas interviennent naturellement par exemple si on a besoin de compter combien de n-uplets de points de X sont dans une certaine configuration. Souvent, l'ensemble de ces n-uplets s'encode comme le lieu des zéros d'une section d'un fibré vectoriel sur $\mathrm{Hilb}^n(X)$. Cet ensemble est relié aux classes de Chern de ce fibré, qui vivent dans la cohomologie de $\mathrm{Hilb}^n(X)$. Le calcul de la cohomologie des schémas de Hilbert ponctuels peut alors permettre de répondre à ce type de questions. Ces schémas présentent aussi l'intérêt de donner la plupart des exemples connus de variétés symplectiques irréductibles ([Beauville]).

On se place dans le cas où X est lisse. Même dans ce cas, les schémas de Hilbert ponctuels ne sont pas en général lisses. C'est toutefois vrai si X est de dimension 2. On supposera donc aussi par la suite que X est une surface.

Il est apparu qu'il était nécessaire pour calculer les cohomologies des schémas de Hilbert ponctuels de les considérer toutes en même temps, c'est-à-dire d'étudier leur somme directe. On obtient alors un espace vectoriel bigradué $\mathbb{H}$, avec un degré n indiquant dans quelle cohomologie $H^*(\mathrm{Hilb}^n(X))$ on se trouve, et un autre correspondant au degré dans cette cohomologie. Göttsche a donné une formule pour calculer la série de Poincaré de $\mathbb{H}$, qui dépend des nombres de Betti de X ([Göttsche]). En particulier, elle permet de calculer les nombres de Betti des schémas de Hilbert ponctuels de X en fonction des nombres de Betti de X.

Cette formule exprime en réalité une égalité entre la série de Poincaré de $\mathbb{H}$ et la série de Poincaré d'un module irréductible $\mathbb{V}$ sur une super algèbre de Lie de Heisenberg $\mathfrak{h}$, définie à partir de la cohomologie de X. En particulier, $\mathbb{V}$ et $\mathbb{H}$ sont isomorphes en tant qu'espace vectoriels bigradués. La question qui se pose est alors de savoir si on peut réaliser cet isomorphisme naturellement, c'est-à-dire si on peut définir une structure de $\mathfrak{h}$-module sur $\mathbb{H}$ isomorphe à $\mathbb{V}$. Nakajima et Grojnowski ont défini une telle structure ([Nakajima], [Grojnowski]), qui permet de donner une base naturelle, ayant une interprétation géométrique à la cohomologie des schémas de Hilbert ponctuels.

Nous commencerons par expliquer un peu plus ce que sont les schémas de Hilbert, avant d'exposer les idées contenues dans la construction de Nakajima.

1 Les schémas de Hilbert

1.1 Quelques intuitions de géométrie algébrique

Toute notre discussion se place sur le corps algébriquement clos $\mathbb{C}$.

Une variété affine $V(I)$ est le lieu des zéros dans $\mathbb{C}^n$ d'un idéal de polynômes $I \subset \mathbb{C}[X_1, \cdots, X_n]$, muni de la topologie de Zariski, dont les fermés sont par définition les sous-variétés affines. De même que les variétés analytiques s'obtiennent par recollement d'ouverts affines analytiques, les variétés algébriques sont des recollements d'ouverts affines algébriques, i.e de variétés affines. Sous des hypothèses de lissité, on peut donner à une variété algébrique une structure de variété analytique.

Un des points de départ de la géométrie algébrique moderne est de considérer, plutôt qu'un espace, l'anneau des fonctions définies sur cet espace, associant ainsi à un objet géométrique (l'espace) un objet algébrique (l'anneau). Par exemple, on va vouloir étudier l'anneau des polynômes complexes à n variables pour comprendre la variété algébrique $\mathbb{C}^n$, notamment quelles sont ses sous-variétés affines, c'est-à-dire quels sont les lieux des zéros de polynômes dans $\mathbb{C}^n$. Le théorème des zéros de Hilbert exprime le fait que cette approche est fructueuse et qu'on peut ramener l'étude des lieux de zéros de polynômes à l'étude des idéaux d'anneaux de polynômes.

Les anneaux de fonctions utilisés sont en rapport avec l'angle sous lequel on veut étudier l'espace, c'est-à-dire que si on considère une variété du point de vue analytique, on utilise l'anneau des fonctions analytiques de la variété vers $\mathbb{C}$, et si on la considère du point de vue algébrique, on utilise un anneau de fonctions « algébriques » de la variété vers $\mathbb{C}$. Dans le cas de $\mathbb{C}^n$, cet anneau est tout simplement l'anneau de polynômes $\mathbb{C}[X_1, \cdots, X_n]$. Dans le cas d'une variété affine $V(I)$, la restriction des fonctions polynomiales définies sur $\mathbb{C}^n$ à $V(I)$ nous donne un anneau de fonctions « algébriques ». Si P est un polynôme nul sur $V(I)$, il correspond alors à la fonction nulle dans cet anneau, et par le théorème des zéros de Hilbert, l'ensemble des polynômes nuls sur $V(I)$ est l'idéal radical de I noté $\sqrt{I}$, donc l'anneau considéré est $\mathbb{C}[X_1, \cdots, X_n]/\sqrt{I}$.

Quand on recolle des variétés affines, on n'a pas a priori de fonctions définies sur l'ensemble du recollement, mais seulement sur chaque ouvert affine. Il se peut néanmoins que deux fonctions définies sur deux ouverts affines s'accordent (prennent les mêmes valeurs) sur l'intersection de ces deux ouverts, définissant ainsi une fonction sur la réunion de ces ouverts. La notion adéquate qui formalise ce phénomène est celle de faisceau.

Les objets considérés sont donc en réalité des faisceaux d'anneaux de fonctions sur un espace topologique. À chaque ouvert U de l'espace topologique X est associé un anneau $F(U)$ correspondant à un anneau de fonctions de U vers $\mathbb{C}$. En particulier, on a pour tout ouvert $V \subset U$ un morphisme $F(U) \to F(V)$ qui correspond à la restriction des fonctions à V ; si une fonction définie sur U se restreint sur tous les ouverts d'un recouvrement de U en la fonction nulle alors est elle nulle ; et la notion de fonction est locale, c'est-à-dire que pour définir une fonction sur U, il suffit de la définir sur chaque ouvert d'un recouvrement de U de façon cohérente (c'est-à-dire que les définitions coïncident sur les intersections d'ouverts du recouvrement).

Pour définir le faisceau associé à la variété $\mathbb{C}^n$, on prend pour anneau de fonctions sur l'ouvert de Zariski U l'anneau des fractions rationnelles définies sur U (dont le dénominateur ne s'annule pas sur U). L'anneau des fonctions définies sur l'espace entier est toujours l'anneau de polynômes $\mathbb{C}[X_1, \cdots, X_n]$. De même que précédemment, pour une variété affine $V(I)$, le faisceau associé s'obtient par restriction du faisceau de fonctions sur $\mathbb{C}^n$ à $V(I)$. Pour une variété algébrique, les faisceaux déjà définis sur les ouverts affines permettent de définir naturellement un faisceau sur la variété, par recollement de fonctions qui coïncident sur les intersections de leurs domaines de définition.

On obtient une nouvelle définition de variété affine, comme faisceau d'anneaux sur l'espace topologique sous-jacent à la variété, et de variété algébrique, comme faisceau d'anneaux recouvert par des variétés affines. On demande en général aussi que le recouvrement soit fini.

La notion de schéma généralise celle de variété, notamment en définissant pour un anneau quelconque une « variété affine » associée. Dans le cas présent, nous n'avons pas besoin de cette notion en toute généralité, mais seulement de définir quelques variétés affines supplémentaires, ce qui nous donne aussi de nouvelles variétés algébriques. Nous illustrons ce besoin par un exemple simple : soit un complexe non nul $a \in \mathbb{C}^*$, considérons sur la droite complexe les deux points opposés a et $-a$. En tant que variété algébrique, ils correspondent à la variété affine $V((X^2 - a^2))$ dont l'anneau de fonctions est $\mathbb{C}[X]/(X^2 - a^2)$, de dimension 2 en tant que $\mathbb{C}$-espace vectoriel. Si on fait tendre a vers 0, à la limite on obtient le point 0, correspondant à la variété affine $V((X))$, dont l'anneau de fonctions est $\mathbb{C}[X]/(X) = \mathbb{C}$. Ainsi, pour une notion raisonnable de déformation continue de sous-variétés, on peut déformer une variété à deux points en une variété à un point, ce qui est problématique. La dimension de l'anneau de fonctions n'est ainsi pas conservée le long d'une déformation continue.

En réalité, on souhaiterait que la limite de $\mathbb{C}[X]/(X^2 - a^2)$ quand a tend vers 0 soit $\mathbb{C}[X]/(X^2)$ et non $\mathbb{C}[X]/(X)$. Si $I \subset \mathbb{C}[X_1, \cdots, X_n]$, on peut effectivement construire un faisceau d'anneaux sur l'espace topologique $V(I)$ tel que l'anneau des fonctions définies sur $V(I)$ tout entier soit $\mathbb{C}[X_1, \cdots, X_n]/I$ et non plus $\mathbb{C}[X_1, \cdots, X_n]/\sqrt{I}$, ce qui nous donne par exemple une nouvelle « variété affine » contenant seulement le point 0 et d'anneau de fonctions $\mathbb{C}[X]/(X^2)$.

Dans notre nouveau contexte, les anciennes variétés affines sont appelées variétés affines réduites ; leur anneau de fonctions ne contient pas d'élément nilpotent. On peut imaginer la variété $V((X^2))$ comme un point double en 0, qu'on peut déformer continûment en deux points simples. Bien entendu, on peut obtenir des points de multiplicités plus grandes, par exemple en considérant $V((X^n))$, voire des sous-variétés quelconques avec des multiplicités (par exemple on peut imaginer que $V((X^2)) \subset \mathbb{C}^2$ est l'axe des ordonnées double).

Dans la suite, on supposera que X est une variété connexe lisse projective sur $\mathbb{C}$ de dimension 2, qu'on peut imaginer comme une variété complexe compacte de dimension 2. Les seules « nouvelles » variétés que l'on utilisera seront de dimension 0, si bien qu'on pourra les imaginer comme des ensembles finis de points x_i avec multiplicités m_i, et au-dessus de chaque point x_i une $\mathbb{C}$-algèbre de dimension m_i. On pourra, si l'on veut, substituer le mot « variété » au mot « schéma » .

1.2 Sous-schémas de dimension 0

Sur la surface X, on veut comprendre les configurations possibles de n-uplets désordonnés de points, pour n un entier naturel. On note $S^n(X)$ le produit symétrique n-ème de X, obtenu par quotient de X^n par l'action du groupe symétrique. C'est une variété, avec des singularités.

D'un point de vue algébrique, on s'intéresse en fait aux sous-variétés de X de dimension 0. En effet, à chaque sous-variété $Z \subset X$ de dimension 0, on peut associer $\rho(Z) \in \sqcup_{n \in \mathbb{N}} S^n(X)$ un tel uplet de points, constitué du support de la sous-variété, avec les multiplicités associées. La somme des multiplicités est appelée la longueur de Z.

L'ensemble des sous-variétés de dimension 0 est a priori plus grand que celui des uplets désordonnés, car pour un uplet contenant un point de multiplicité $m > 1$, il peut y avoir plusieurs $\mathbb{C}$-algèbres de dimension m qui donneront différentes sous-variétés dans l'image réciproque par ρ de ce uplet. En revanche, il existe une seule $\mathbb{C}$-algèbre de dimension 1, qui est $\mathbb{C}$ elle-même, et donc ρ est injective au-dessus des uplets de points deux à deux distincts (quand toutes les multiplicités sont 1).

Plus particulièrement, on veut étudier les déformations (algébriques) de n-uplets, ou plutôt de sous-variétés de dimension 0.

Le n-ème schéma de Hilbert ponctuel de X (qui est toujours une variété), noté $\mathrm{Hilb}^n(X)$ paramètre tous les sous-schémas de X de longueur n ([Grothendieck]).

Cela signifie que les points de $\mathrm{Hilb}^n(X)$ correspondent aux sous-schémas de X de longueur n, mais cela signifie aussi que « déformer algébriquement » des sous-schémas revient à se déplacer « continûment » dans le schéma de Hilbert.

C'est une variété lisse et connexe de dimension $2n$ ([Fogarty]). La lissité n'est pas valable en général si X est de dimension strictement supérieure à 2.

On peut comprendre facilement de façon heuristique pourquoi la dimension devrait être $2n$. En effet, l'application ρ définit un morphisme de $\mathrm{Hilb}^n(X)$ vers $S^n(X)$ (qui à un sous-schéma associe toujours son support avec multiplicités). Ce morphisme est bijectif au-dessus des n-uplets de points deux à deux distincts, qui forment un ouvert dense de $S^n(X)$. Comme $S^n(X)$ est clairement de même dimension que X^n, c'est-à-dire $2n$, $\mathrm{Hilb}^n(X)$ contient un ouvert (au sens de Zariski) de dimension $2n$, donc est de dimension $2n$ car il est lisse et connexe.

On peut retenir aussi que les cas où un sous-schéma a des points multiples arrivent plus rarement que les cas où tous les points sont deux à deux distincts.

On a vu que $\mathrm{Hilb}^n(X)$ est facile à comprendre au voisinage des sous-schémas sans points multiples. On veut maintenant comprendre ce qui se passe avec des points multiples. On définit la variété de Briançon $B_p^n = \rho^{-1}(np) \subset \mathrm{Hilb}^n(X)$ pour $p \in X$, $n \geq 0$. Elle contient exactement les sous-schémas de X de dimension 0 avec multiplicité maximale en p. Elle paramètre donc en réalité les $\mathbb{C}$-algèbres de dimension n, et ne dépend pas du point p considéré. Elle est de dimension $n-1$ ([Briançon]).

On s'intéressera aussi à la variété $B^n = \cup_{p \in X} B_p^n$, qui est de dimension $n+1$ (car X est de dimension 2).

Considérons ξ un sous-schéma de longueur n, avec $\rho(\xi) = \sum_i m_i x_i$, $x_i \in X$, $0 < m_i < n$, alors $\mathrm{Hilb}^n(X)$ est localement homéomorphe, au voisinage de ξ, à $\prod_i \mathrm{Hilb}^{m_i}(X)$. En effet, on peut voir ξ comme une réunion disjointe de sous-schémas concentrés en x_i, de multiplicités m_i, et pour des déformations petites, déformer ξ revient à déformer indépendamment chacun de ces sous-schémas. Or, par définition, les schémas $\mathrm{Hilb}^{m_i}(X)$ paramètrent localement ces déformations.

On voit donc que ce qui différencie vraiment le schéma $\mathrm{Hilb}^n(X)$ des schémas de Hilbert pour les longueurs inférieures, c'est ce qui se passe au voisinage des variétés de Briançon.

2 Cohomologie des schémas de Hilbert

2.1 Rappels homologiques et cohomologiques

L'homologie et la cohomologie seront toujours à coefficients dans $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{R}$ par la suite. On peut passer des coefficients dans $\mathbb{Q}$ aux coefficients dans $\mathbb{R}$ par tensorisation par $\mathbb{R}$. Dans ce paragraphe, X désigne une variété différentielle orientée de dimension réelle n. On peut considérer l'homologie singulière $H_*(X)$ et la cohomologie singulière $H^*(X)$ de la variété X.

On imaginera une classe en homologie comme la classe d'une sous-variété différentielle de X (même si ce n'est en général pas toujours possible).

On rappelle que sur $\mathbb{R}$, la cohomologie singulière de X est égale à la cohomologie de de Rham de X, ce qui permet d'imaginer une classe de cohomologie comme la classe d'une forme différentielle fermée.

La cohomologie est duale de l'homologie, et on peut voir une k-forme différentielle ω comme une forme linéaire sur l'homologie, associant à une sous-variété Y de dimension k l'intégrale $\int_Y \omega$ de la forme sur la sous-variété. On peut de la même manière imaginer une sous-variété comme une forme linéaire sur la cohomologie.

La cohomologie forme un anneau pour le produit cup $\cup$, qui correspond au produit extérieur des formes différentielles.

On a aussi un produit cap $\cap : H^l(X) \times H_k(X) \to H_{k-l}(X)$, plus difficile à expliciter en termes différentiels.

Comme X est compacte et orientée, la dualité de Poincaré établit un isomorphisme renversant les degrés entre la cohomologie et l'homologie :

$$H^{n-k}(X) \cong H_k(X).$$

Cela vient du fait qu'une $n-k$ forme ω peut elle-même être considérée comme une forme linéaire sur les k-formes, associant à une k-forme η le réel $\int_X \omega \wedge \eta$. Cette forme linéaire sur les k-formes correspond alors à la classe d'une sous-variété de dimension k. En d'autres termes, cet isomorphisme envoie la classe d'une $n-k$-forme ω sur la classe d'une sous-variété $DP(\omega) = Y$ de dimension k de façon à vérifier la propriété suivante : $\forall \eta \in H^k(X), \int_X \omega \wedge \eta = \int_Y \eta$.

On peut considérer en quelque sorte que ω est un Dirac en Y, car appliquer ω à η revient à « évaluer » η en Y. On peut avoir l'image suivante en tête : ω est concentrée sur Y (son support est juste un peu plus épais que Y), et « normale » à Y, c'est-à-dire vaut 0 quand on l'applique à un uplet de vecteurs contenant un vecteur tangent à Y. Par exemple, si ω de dimension réelle 1, Y est de codimension 1, et on peut dessiner w comme un champ de vecteur normal à Y épaissi, w valant 1 sur le vecteur normal et 0 sur l'espace tangent à Y.

Imaginons maintenant une autre sous-variété Z, de codimension k, intersectant Y transversalement. Alors comme w est concentrée sur Y, elle est nulle en dehors d'un petit voisinage de $Y \cap Z$. En particulier, si Y et Z ne s'intersectent pas, $\int_Z \omega = 0$. Comme ω est normale à Y, intersectée transversalement par Z, ω est en revanche « grande » en restriction à Z au voisinage de $Y \cap Z$. De même que l'intégrale d'un Dirac au voisinage de 0 vaut 1, l'intégrale de ω sur Z au voisinage d'un point de $Y \cap Z$ vaut ± 1, selon l'orientation de l'intersection. Ces heuristiques floues mènent à la conclusion, qui peut être rendue précise, que la dualité de Poincaré permet de considérer la classe de certaines formes fermée ω de codimension k comme une forme linéaire sur les classes d'homologie de codimension k, associant à une sous-variété de codimension k son nombre d'intersection avec la variété $DP(\omega)$.

Il est utile de garder en tête l'intuition selon laquelle, schématiquement, une forme différentielle correspond, par dualité de Poincaré, à une sous-variété, dont elle calcule par intégration les nombres d'intersections avec les sous-variétés de dimension complémentaire. Le produit extérieur des formes correspond alors à l'intersection des sous-variétés. Le produit cap correspond aussi à l'intersection des sous-variétés.

Étant donné une application continue $X \xrightarrow{f} Y$ entre deux telles variétés, on a deux morphismes gradués de degré 0 : $H_*(X) \xrightarrow{f_*} H_*(Y)$ et $H^*(Y) \xrightarrow{f^*} H^*(X)$. Le premier consiste à prendre l'image des sous-variétés, et le second, à tirer en arrière les formes différentielles, ou en utilisant l'intuition donnée par la dualité de Poincaré, à prendre l'image réciproque des sous-variétés (vrai sous conditions). Par dualité de Poincaré, on a donc deux morphismes en sens inverses entre les cohomologies de X et de Y, à savoir $H^*(X) \xrightarrow{f_*} H^*(Y)$ et $H^*(Y) \xrightarrow{f^*} H^*(X)$ (noter que le premier conserve la codimension et le second la dimension).

2.2 Les opérateurs de Nakajima sur la cohomologie des schémas de Hilbert

On adopte la notation $X^{[n]} = \mathrm{Hilb}^n(X)$.
Soit $\mathbb{H} = \bigoplus_{l\in\mathbb{N}} \mathbb{H}^l$ où $\mathbb{H}^l = H^*(X^{[l]})[-2l]$. On décale la graduation de la cohomologie de $X^{[l]}$, de dimension complexe $2l$ donc réelle $4l$, de façon à la centrer : elle varie de $-2l$ à $2l$. L'espace vectoriel $\mathbb{H}$ est bigradué, de façon à ce que le bidegré d'une classe de degré d dans $\mathbb{H}^l$ soit (l,d). On appelle d le degré et l le poids.

Pour tout $\alpha \in \mathbb{H}^1$, $n \in \mathbb{Z}$, on va définir un opérateur $\alpha_{-n} : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$, de bidegré (n,d) où d est le degré de α.

Soit $n, l \geq 0$. On définit dans la variété produit $X^{[l+n]} \times X \times X^{[l]}$ la variété d'incidence :

$$Z = Z^{l,n+l} := \{(\xi', x, \xi) | \xi \subset \xi', \rho(\xi') = \rho(\xi) + nx\}.$$

Elle encode, étant donné un sous-schéma ξ de longueur l et un point $x \in X$, toutes les différentes façons d'ajouter le point x avec multiplicité n à ξ'. On imaginera que la variété Z transforme le sous-schéma ξ en un ensemble de sous-schémas plus grands.
La variété Z donne un cycle $[Z]$ dans l'homologie de $X^{[l+n]} \times X \times X^{[l]}$.

Soit p_i la projection de $X^{[l+n]} \times X \times X^{[l]}$ sur son i-ème facteur. Pour $\alpha \in \mathbb{H}^1$, on définit alors $\alpha_{-n} : \mathbb{H}^l \to \mathbb{H}^{l+n}$ par :

$$\alpha_{-n}(y) := DP^{-1} p_{1*}((p_2^*(\alpha) \cup p_3^*(y)) \cap [Z]).$$

Interprétons cette définition en homologie, c'est-à-dire en imaginant des sous-variétés. Si α est un point de X et y un sous-schéma de longueur l, $\alpha_{-n}(y)$ correspond simplement à l'ensemble des sous-schémas de longueur $l+n$ obtenus en ajoutant α à y avec multiplicité n. Si α et y sont des sous-variétés de dimensions supérieures, on a la même interprétation en remplaçant α et y par « un point de α » et « un point de y » .

Pour n négatif, la définition est similaire, et l'opérateur agit cette fois en soustrayant y avec multiplicité n. Par définition, quand n est nul, l'opérateur est nul.

Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{H}^1$ de degrés respectifs d, d', on note

$$[\alpha_n, \beta_m] = \alpha_n\beta_m + (-1)^{dd'+1}\beta_m\alpha_n.$$

Nakajima a montré que si $n+m \neq 0$, pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{H}^1$, $[\alpha_n, \beta_m] = 0$ ([Nakajima]). Si n et m sont opposés, on a aussi la relation suivante :

$$[\alpha_n, \beta_{-n}] = n(\int_X \alpha \wedge \beta)\mathrm{id}_{\mathbb{H}}.$$

Expliquons un peu d'où proviennent ces relations, en imaginant que α et β sont des points, et en faisant agir sur un sous-schéma (donc un point de $X^{[l]}$).

L'opérateur $\alpha_{-n}\beta_{-m}$ ajoute ou soustrait successivement deux points avec multiplicités d'abord m puis n. Pour le calculer, on a juste besoin de savoir comment $Z^{l,n+l}$ et $Z^{n+l,n+m+l}$ transforment successivement un sous-schéma ξ de longueur l. On ne se préoccupe pas des problèmes de signes liés aux degrés de α et β.

Si n et m sont de mêmes signes, on ajoute successivement deux points, ou on les soustrait successivement, mais le résultat ne dépend clairement pas de l'ordre dans lequel on a opéré.

S'ils sont de signes opposés, ce n'est pas aussi simple, car la soustraction peut échouer (si le point n'est pas présent avec une multiplicité suffisante) dans un sens, mais pas dans l'autre, si on vient d'ajouter le point que l'on veut soustraire. Le cas simple arrive quand les points qu'on ajoute et soustrait sont distincts et hors du support du sous-schéma que l'on transforme. Dans ce cas, on peut ajouter ou soustraire les points dans n'importe quel ordre.

Quand $n+m \neq 0$, il se trouve que les autres cas sont de dimensions strictement plus petites, c'est-à-dire qu'ils arrivent trop rarement pour influer sur le calcul, et on a bien $[\alpha_{-n}, \beta_{-m}] = 0$.

En revanche, il se passe quelque chose de nouveau quand $n = -m$. En effet, en composant dans un sens, on soustrait un point puis on ajoute un point, et le calcul de dimension intervenant plus haut montre en réalité que seul le cas simple importe. Dans l'autre sens, on ajoute un point, puis on soustrait un point, mais on peut toujours soustraire le point que l'on vient d'ajouter, et ce cas est de dimension maximale. Dans ce cas, on a transformé ξ en lui-même, ce qui explique le $\mathrm{id}_{\mathbb{H}}$ dans la formule.

Le facteur n n'est pas évident, et provient de l'égalité $[B^n] \cap [B_p^n] = (-1)^{n-1}n$ ([Ellingsrud]).

Les relations de Nakajima munissent $\mathbb{H}$ d'une structure de module sur une super algèbre de Lie $\mathfrak{h}$ engendrée par les α_i, et c représentant l'identité. Le terme super provient du fait que le crochet n'est pas défini comme un vrai crochet de Lie, et sa définition dépend de la parité des degrés des éléments dans le crochet.

Göttsche a donné une formule calculant les nombres de Betti des schémas de Hilbert, donc la dimension des composantes bigraduées de $\mathbb{H}$ ([Göttsche]). On peut construire un $\mathfrak{h}$-module irréductible $\mathbb{V}$ engendré par un élément $\mathbf{1}$, dont les composantes bigraduées ont même dimension que celles de $\mathbb{H}$. On vérifie facilement qu'il existe un morphisme de modules de $\mathbb{V}$ dans $\mathbb{H}$ envoyant $\mathbf{1}$ sur l'unique classe de cohomologie de $\mathrm{Hilb}^0(X) = \{\emptyset\}$, injectif par irréductibilité de $\mathbb{V}$, et bijectif par égalité des dimensions bigraduées.

On prouve ainsi que $\mathbb{H}$ est engendré par l'action de $\mathfrak{h}$, via les opérateurs de Nakajima, sur $\mathbf{1}$, ce qui permet assez facilement d'expliciter une base naturelle de $\mathbb{H}$, c'est-à-dire une base de la cohomologie des schémas de Hilbert.

Références

[Beauville] A. Beauville – « Variétés kählériennes dont la première classe de Chern est nulle ». J. Differ. Geom. 18 (1983), 755–782.

[Briançon] J.Briançon – « Description de $\mathrm{Hilb}^n\mathbb{C}\{x, y\}$ ». Inventiones math. (1977), 41, 45-89.

[Ellingsrud] G. Ellingsrud et S. A. Stromme – « An intersection number for the punctual Hilbert scheme ». Trans. AMS. 350 (1998), 2547-2552.

[Fogarty] J. Fogarty – « Algebraic Families on an Algebraic Surface ». Amer. J. Math. 10 (1968), 511-521.

[Göttsche] L. Göttsche – « The Betti numbers of the Hilbert scheme of points on a smooth projective surface ». Math. Ann. 286 (1990), 193-207.

[Grojnowski] I. Grojnowski – « Instantons and affine algebras. I. The Hilbert scheme and vertex operators ». Math. Res. Lett. 3 (1996), 275-291.

[Grothendieck] A. Grothendieck – « Techniques de construction et théorèmes d'existence en géométrie algébrique ». IV. Les schémas de Hilbert. Séminaire Bourbaki (1960/61), Vol. 6, Exp. No. 221, 249-276.

[Lehn] M. Lehn – « Geometry of Hilbert schemes ». CRM Proceedings and Lecture Notes Volume 38, 2004, 1-30.

[Nakajima] H. Nakajima – « Heisenberg algebra and Hilbert schemes of points on projective surfaces ». Ann. Math. 145 (1997), 379-388.