

# L'associaèdre

Axel Bacher et Christophe Rose  
proposé par David Bessis

21 juin 2005

## Introduction

L'associaèdre est un objet combinatoire, utile lorsqu'on considère des opérateurs avec la propriété d'« associativité à équivalence près ».

Ses objets sont indexés par l'ensemble des arbres binaires planaires à  $n$  feuilles, et deux arbres sont reliés par une arête si on peut passer de l'un à l'autre en appliquant une fois l'associativité.

Il a été introduit par Stasheff lors de ses études sur les  $H$ -espaces où il considérait des opérations associatives à homotopie près. Le principal résultat établi dans ce mémoire est la réalisation de l'associaèdre comme polytope convexe. La construction présentée ici suit celle proposée récemment par Loday (voir [2]), mais on s'intéressera davantage à la définition combinatoire de l'associaèdre.

La réalisation d'un graphe comme polytope convexe ne va pas de soi. Nous verrons qu'on peut associer à un polytope un ensemble muni d'une structure de treillis, mais la donnée de ce treillis ne suffit pas à garantir l'existence du polytope. Il sera donc nécessaire de le construire explicitement.

Nous commencerons par construire le treillis des cellules de l'associaèdre de manière formelle, puis nous présenterons une construction géométrique de l'associaèdre comme polytope convexe. Dans une troisième partie, nous illustrerons notre propos par un résultat de cohérence des catégories monoïdales utilisant une partie de la structure de l'associaèdre.

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Parenthésages, définition combinatoire de l'associaèdre</b>	<b>3</b>
1.1	Définitions . . . . .	3
1.2	Construction du treillis des parenthésages . . . . .	6
1.3	Orientation des arêtes de l'associaèdre . . . . .	9
<b>2</b>	<b>Une construction géométrique de l'associaèdre</b>	<b>10</b>
2.1	Généralités sur les polytopes . . . . .	10
2.2	Construction de l'associaèdre $K_n$ . . . . .	11
2.3	Propriétés de l'associaèdre . . . . .	15
<b>3</b>	<b>Cohérence des catégories monoïdales</b>	<b>16</b>
3.1	Catégories monoïdales . . . . .	16
3.2	Théorème de cohérence . . . . .	18

# 1 Parenthésages, définition combinatoire de l'associaèdre

## 1.1 Définitions

Le but de cette section est de construire l'associaèdre en tant qu'objet combinatoire, c'est-à-dire en tant que treillis dont les éléments sont indexés par les parenthésages sur le mot  $(x_1 \cdots x_n)$  (ou, de manière équivalente, par les arbres planaires enracinés à  $n$  feuilles).

On commence par expliciter la notion de parenthésage et donner quelques propriétés utiles.

**Définition 1.1.1.** On définit  $P$  l'ensemble des parenthésages comme le langage sur l'alphabet  $\{(\,,\,),\,x\}$  donné par la grammaire suivante :

- $x \in P$ ,
- Pour tout  $r \geq 2$ , pour tous  $w_1, \dots, w_r \in P$ ,  $(w_1 \cdots w_r) \in P$ .

**Définition 1.1.2.** On définit  $Q$  comme le sous-langage de  $P$  où la seconde condition est remplacée par : pour tous  $w_1, w_2 \in Q$ ,  $(w_1 w_2) \in Q$ . Les éléments de  $Q$  seront appelés parenthésages complets.

*Exemple.* Les mots  $(xxx)$ ,  $(x(xx)x)$  sont des parenthésages incomplets, tandis que  $(x((xx)x))$  est un parenthésage complet,  $\varepsilon$ ,  $xx$ ,  $((xx))$ ,  $(x)$  ne sont pas des parenthésages.

On a les propriétés suivantes :

**Proposition 1.1.3.** Un mot  $w \neq x$  est un parenthésage si et seulement si

- il est de la forme  $(w')$ ,
- ses parenthèses forment un mot bien parenthésé, c'est-à-dire qu'il y a autant de parenthèses ouvrantes que fermantes, et quand on prend un préfixe, il y a plus de parenthèses ouvrantes que de parenthèses fermantes<sup>1</sup>,
- chaque paire de parenthèses englobe au moins deux symboles  $x$ ,
- il ne contient pas de facteur de la forme  $((v))$ .

*Démonstration.* Le sens direct est évident. Pour la réciproque, on raisonne par récurrence sur la longueur de  $w$ .

Considérons les paires de parenthèses de  $w'$  maximales pour l'inclusion. Alors les facteurs de  $w'$  englobés par ces parenthèses vérifient encore les mêmes conditions, donc ce sont des parenthésages par hypothèse de récurrence. Tous ces facteurs sont disjoints, et il n'y a que des symboles  $x$  entre eux, donc  $w'$  s'écrit comme une concaténation de parenthésages. Donc  $w$  est un parenthésage. □

---

<sup>1</sup>C'est-à-dire le sens évident, par exemple si on prend les parenthèses dans une expression algébrique du genre  $((1 + 2) - 3) \times (4 + 5)$ .

**Proposition 1.1.4.** *Aucun préfixe strict d'un parenthésage n'est un parenthésage.*

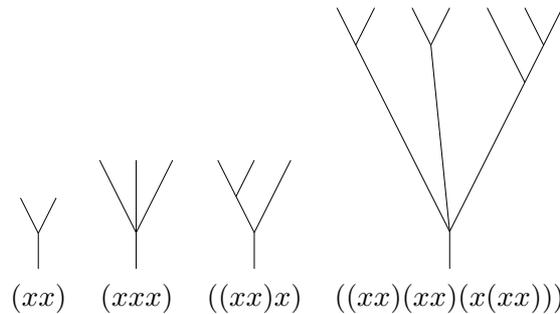
*Démonstration.* Le mot vide  $\varepsilon$  n'est pas un parenthésage. Un préfixe strict non vide de  $(w_1 \cdots w_r)$  comporte plus de parenthèses ouvrantes que de fermantes donc n'est pas un parenthésage. □

On en déduit par récurrence sur  $r$  la proposition suivante :

**Proposition 1.1.5.** *Dans l'écriture  $(w_1 \cdots w_r)$ ,  $r$  et les  $w_i$  sont uniquement déterminés.*

Cette remarque permet d'identifier l'ensemble  $P$  des parenthésages avec l'ensemble des arbres planaires enracinés dont la valence de chaque nœud vaut au moins 2. Les éléments de  $Q$  correspondent alors aux arbres binaires.

*Exemple.*



**Définition 1.1.6.** *Un sous-parenthésage de  $w$  est un facteur de  $w$  qui est encore un parenthésage. Cela correspond aux sous-arbres.*

**Définition 1.1.7.** *On appelle  $o(w)$  (l'ordre de  $w$ ) le nombre de symboles  $x$  qu'il contient.*

*On appelle  $P_n$  et  $Q_n$  respectivement les langages constitués des mots de  $P$  et de  $Q$  d'ordre  $n$ . On écrira parfois les mots en numérotant les symboles  $x$  de 1 à  $n$  (exemple :  $(x_1x_2(x_3x_4))$ ). Les ensembles  $P_n$  et  $Q_n$  correspondent donc aux arbres à  $n$  feuilles et aux arbres binaires à  $n$  feuilles.*

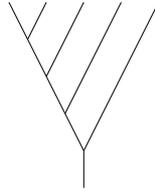
**Définition 1.1.8.** *On appelle  $p(w)$  le nombre de paires de parenthèses de  $w$ . On note  $P_n^k$  l'ensemble des parenthésages d'ordre  $n$  comportant  $k$  paires de parenthèses. Ainsi,  $P_n^1$  est réduit à l'élément  $(x_1 \cdots x_n)$  et on montre par récurrence sur  $n$  que  $P_n^{n-1} = Q_n$ . Les éléments de  $P_n^2$  seront appelés parenthésages simples.*

*L'ensemble  $P_n^k$  correspond aux arbres à  $n$  feuilles et  $k$  nœuds internes.*

**Définition 1.1.9.** *On appelle  $g_n$  et  $d_n$  (parenthésages à gauche et à droite d'ordre  $n$ ) les parenthésages complets définis de la manière suivante :*

- $g_1 := d_1 := x$ ,
- $g_n := (g_{n-1}x)$ ,
- $d_n := (xd_{n-1})$ .

*Exemple.*



$((((xx)x)x)x)$  est un parenthésage à gauche.

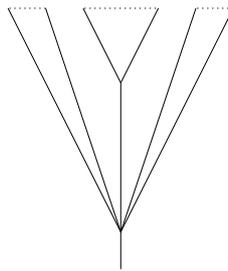
**Proposition 1.1.10.** *Le cardinal de  $Q_n$  est égal au  $n - 1$ -ième nombre de Catalan  $c_{n-1} := \frac{1}{n} \binom{2n-2}{n-1}$ .*

*Démonstration.* On a l'égalité  $Q_1 = c_0 = 1$ , et le cardinal de  $Q_n$  vérifie la relation de récurrence

$$|Q_n| = \sum_{k=1}^{n-1} |Q_k| |Q_{n-k}|$$

qui est la même que celle des nombres de Catalan. □

Soit  $y \in P_n^2$ . Alors  $y$  est de la forme  $(x_1 \dots (x_i \dots x_{j-1}) x_j \dots x_n)$ . On appelle intérieur de  $y$  et on note  $I_y = \{i, \dots, j-1\}$  l'ensemble des indices des symboles  $x$  situés dans la parenthèse intérieure de  $y$ .



On a alors les correspondances suivantes :

parenthésage complet	↔	arbre binaire
symbole $x$	↔	feuille
paire de parenthèses	↔	nœud
sous-parenthésage	↔	sous-arbre

## 1.2 Construction du treillis des parenthésages

**Définition 1.2.1.** On appelle  $\preceq$  l'ordre partiel sur  $P$  défini par «  $w_1 \preceq w_2$  si  $w_1$  est un sous-mot de  $w_2$  obtenu en supprimant des paires de parenthèses complémentaires ». Plus formellement,  $\preceq$  est le plus petit ordre partiel<sup>2</sup> tel que :

- pour tous  $(p, q) \neq (0, 0)$ ,  $r \geq 2$  et pour tous parenthésages  $u_1, \dots, u_p$ ,  $v_1, \dots, v_q, w_1, \dots, w_r$ ,

$$(u_1 \cdots u_p w_1 \cdots w_r v_1 \cdots v_q) \preceq (u_1 \cdots u_p (w_1 \cdots w_r) v_1 \cdots v_q),$$

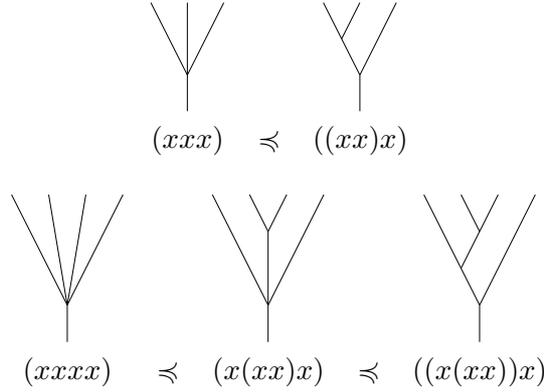
- pour tout  $r \geq 2$  et pour tous parenthésages  $w_1, \dots, w_r, w'_1, \dots, w'_r$ ,

$$(\forall i, w_i \preceq w'_i) \Rightarrow (w_1 \cdots w_r) \preceq (w'_1 \cdots w'_r).$$

Il est clair que, pour  $w \in P_n^k$  et  $w' \in P_{n'}^{k'}$  alors  $w \preceq w'$  implique  $n = n'$  et  $k \leq k'$ . Ainsi les éléments minimaux pour  $\preceq$  sont de la forme  $(x_1 \cdots x_n)$ , les éléments maximaux sont les parenthésages complets.

La relation  $\preceq$  sur les arbres s'appelle relation de *dégénérescence*.

*Exemple.*



Une famille de parenthésages de  $P_n$  sera dite *compatible* si ses éléments possèdent un majorant commun pour  $\preceq$ .

**Proposition 1.2.2.** Pour tout parenthésage  $w$  il existe  $t$  complet tel que  $w \preceq t$ .

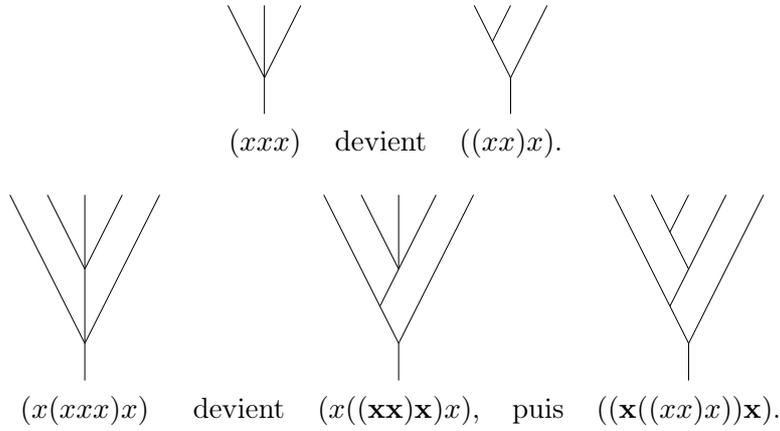
*Démonstration.* Montrons le résultat par récurrence sur l'ordre de  $w$ .

Si  $w = (w_1 \cdots w_r)$ , alors l'hypothèse de récurrence assure l'existence de  $t_1, \dots, t_r$  tels que  $w_i \preceq t_i$  pour tout  $i$ . On pose alors  $t$  le parenthésage à gauche d'ordre  $n$  où on a remplacé  $x_i$  par  $t_i$ , qui convient.

□

<sup>2</sup>Au sens des relations d'inclusion entre ordres sur un même ensemble.

Exemple.



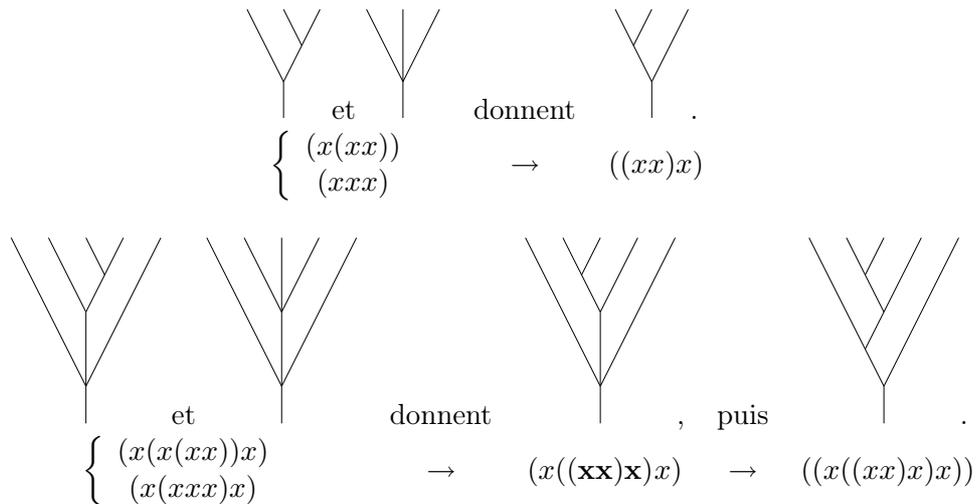
**Proposition 1.2.3.** Pour tous parenthésages  $w$  et  $w'$ , si  $w \neq w'$  il existe  $t$  complet avec  $w \preceq t$  et  $w' \not\preceq t$ , ou l'inverse.

*Démonstration.* Montrons de même le résultat par récurrence sur  $n$ .

- Si  $w = (w_1 \cdots w_r)$  et  $w' = (w'_1 \cdots w'_r)$  avec  $o(w_i) = o(w'_i)$  pour tout  $i$ , alors l'un des  $w_i$  est distinct de  $w'_i$ . On peut donc trouver  $t_i$  tel que (par exemple)  $w_i \preceq t_i$  et  $w'_i \not\preceq t_i$ . Alors on complète  $(w_1 \cdots t_i \cdots w_r)$  en un parenthésage complet.
- Sinon, soit  $j$  l'indice minimal tel que (par exemple)  $o(w_j) < o(w'_j)$ . Alors on complète les  $w_i$  en  $t_i$ , puis on pose encore  $t$  égal au parenthésage à gauche où les  $x_i$  sont remplacés par les  $t_i$ . La parenthèse  $(\cdots t_j)$  coupe la parenthèse extérieure de  $w'_j$ , donc  $w' \not\preceq t$ .

□

Exemple.



On va maintenant donner une condition de compatibilité des parenthésages simples :

**Proposition 1.2.4 (Compatibilité des parenthésages simples).** *Soient  $y_1, \dots, y_k$  des parenthésages simples. Ils sont compatibles si et seulement si pour tous  $i, j$ , l'une des trois conditions suivantes (qui sont exclusives dès que  $y_i \neq y_j$ ) est vérifiée :*

- $I_{y_i} \subseteq I_{y_j}$ ,
- $I_{y_j} \subseteq I_{y_i}$ ,
- $I_{y_i} \cap I_{y_j} = \emptyset$ .

*De plus, si la famille est compatible, alors il existe un unique majorant commun minimal. On le notera  $y_1 \vee \dots \vee y_k$ , quand il existe.*

*Démonstration.* Si la famille  $(y_1, \dots, y_k)$  est compatible, alors il existe  $w$  un majorant commun aux  $y_i$ . En particulier, les parenthèses de  $w$  forment un mot bien parenthésé, donc deux paires de parenthèses de  $w$  sont soit incluses l'une dans l'autre, soit disjointes.

Supposons que les  $y_i$  vérifient la condition : alors on construit  $w$  en « superposant » toutes les parenthèses des  $y_i$ . Ces parenthèses forment un mot bien parenthésé d'après les conditions sur les  $I_{y_i}$ , et les autres conditions de la Proposition 1.1.3 sont vérifiées :  $w$  est donc bien un parenthésage, qui est clairement un majorant minimal.

Il est unique car  $\preceq$  est une relation d'ordre. □

On ajoute au langage un symbole  $\Omega$ , et on pose  $w \preceq \Omega$  pour tout mot  $w$ . On pose  $\overline{P}_n := P_n \cup \{\Omega\}$ , et  $P_n^n := \{\Omega\}$ .

**Théorème 1.2.5.** *L'ensemble  $\overline{P}_n$ , muni de l'ordre partiel  $\preceq$  est un treillis borné gradué de rang  $n - 1$ , c'est-à-dire qu'il contient un élément minimal, un élément maximal, et que toute chaîne maximale compte  $n$  éléments.*

*Démonstration.* On étend la définition de  $\vee$  à tous les parenthésages d'ordre  $n$ , en posant  $w_1 \vee \dots \vee w_k$  égal au mot obtenu en superposant les parenthèses des  $w_i$ , ou  $\Omega$  s'ils sont incompatibles. On définit  $w_1 \wedge \dots \wedge w_k$  comme le parenthésage d'ordre  $n$  ne contenant que les parenthèses communes aux  $w_i$ . Il est facile de vérifier qu'on définit bien des uniques minorant et majorant maximaux, et donc qu'on a un treillis. Les éléments  $(x \cdots x)$  et  $\Omega$  sont respectivement minimal et maximal, donc  $(\overline{P}_n, \preceq)$  est borné.

Soit une chaîne de  $\overline{P}_n$  de  $w$  à  $w'$ . Supposons  $ww' \neq \Omega$ , alors on peut toujours supprimer toutes les parenthèses de  $w$  et compléter le parenthésage  $w'$ , donc on obtient une chaîne de  $(x \cdots x)$  à un parenthésage complet.

On peut maintenant compléter la chaîne avec  $\Omega$ , puis rajouter toutes les étapes intermédiaires. Pour tout  $k$  tel que  $1 \leq k \leq n$  il existera un et un seul élément de  $P_n^k$ , ce qui prouve que toute chaîne maximale possède  $n$  éléments. □

La Proposition 1.2.4 montre que  $\overline{P_n}$  est simplicial et que c'est un complexe de drapeaux (ce qui veut exactement dire que toute famille dont les éléments sont deux à deux compatibles est compatible). Dans la suite, on va montrer que ce treillis (en fait son treillis opposé) est le treillis des cellules de l'associaèdre.

La proposition suivante décrit les segments initiaux de  $P_n$ .

**Proposition 1.2.6.** *Soit  $w \in P_n$  distinct de  $(x \cdots x)$ . Alors il existe  $n_1, \dots, n_k$  des entiers strictement inférieurs à  $n$  tels que*

$$\uparrow w \simeq \prod_{i=1}^k P_{n_i}.$$

*Démonstration.* En remarquant que si  $y \preceq w$ ,  $\uparrow w$  peut être vu comme un segment initial de  $\uparrow y$ , il suffit par récurrence de montrer le résultat pour  $y$  un parenthésage simple.

Soit donc  $y = (x_1 \cdots (x_i \cdots x_{i+r-1}) \cdots x_n)$ . On va montrer que  $\uparrow y \simeq P_r \times P_{n-r+1}$ .

Soient  $w_1 \in P_r$  et  $w_2 \in P_{n-r+1}$ . On considère alors le parenthésage  $w_2[x_i := w_1]$  obtenu en remplaçant le  $i$ -ième  $x$  de  $w_2$  par une copie de  $w_1$ .

Il est clair que ce parenthésage est dans  $\uparrow y$ , et on vérifie sans peine que cette application est un isomorphisme. □

### 1.3 Orientation des arêtes de l'associaèdre

On va maintenant construire un graphe orienté dont les sommets seront les parenthésages complets et dont les arêtes sont indexées par les éléments de  $P_n^{n-2}$ .

**Définition 1.3.1.** *On appelle  $G_n$  le graphe orienté dont les sommets sont les éléments de  $Q_n$  et dont les arêtes sont définies de la manière suivante : on relie par une arête les parenthésages complets  $t_1$  et  $t_2$ , si et seulement si  $t_2$  s'obtient à partir de  $t_1$  en remplaçant un sous-parenthésage  $((u_1 u_2) u_3)$  par  $(u_1 (u_2 u_3))$ .*

Soit  $w$  le parenthésage où ce sous-parenthésage devient  $(u_1 u_2 u_3)$ . Alors  $w$  est dans  $P_n^{n-2}$  et les seuls parenthésages vérifiant  $w \preceq t$  sont  $t_1$  et  $t_2$ .

Les arêtes de  $G_n$  sont donc bien indexées par  $P_n^{n-2}$  et sont les mêmes que celles de l'associaèdre.

**Définition 1.3.2.** *On appelle rang la fonction  $r : Q_n \rightarrow \mathbb{N}$  définie comme suit :*

- $r(x) := 0$ ,
- $r(t_1 t_2) := r(t_1) + r(t_2) + o(t_2) - 1$ .

On remarque alors que si il existe une arête de  $t_1$  à  $t_2$ , on a nécessairement  $r(t_1) < r(t_2)$ , car  $r(((u_1u_2)u_3)) = r((u_1(u_2u_3))) + o(u_2)$ . Notons de plus que  $r(g_n) = 0$ .

On en déduit la proposition suivante :

**Proposition 1.3.3.** *Les arêtes de  $G_n$  définissent une relation d'ordre partiel sur  $Q_n$ , telle que les parenthésages à gauche et à droite  $g_n$  et  $d_n$  soient respectivement minimal et maximal.*

*On notera  $\leq$  cette relation d'ordre.*

*Démonstration.* Le graphe  $G_n$  est sans cycle, puisque le rang est strictement croissant. On définit donc bien une relation d'ordre.

Soit  $t \in Q_n$ . On va montrer qu'on a toujours  $g_n \leq t$ , l'inégalité  $t \leq d_n$  venant symétriquement. Raisonnons par récurrence double sur  $(n, r(t))$ . Le parenthésage  $t$  s'écrit  $(t_1t_2)$ . On a deux cas :

- si  $t_2 = x$  alors on peut appliquer l'hypothèse de récurrence à  $t_1$ .
- si  $t_2 = (t_3t_4)$ , alors  $t \leq t' := ((t_1t_3)t_4)$ . On a  $r(t') < r(t)$ , donc on peut appliquer l'hypothèse de récurrence à  $t'$ .

□

## 2 Une construction géométrique de l'associaèdre

### 2.1 Généralités sur les polytopes

On donne ici des éléments de base sur la théorie des polytopes. On ne donnera aucune démonstration, pour plus de détails se référer à [3]. Un polytope se définit, de manière équivalente, comme l'enveloppe convexe d'un nombre finis de points, ou comme une intersection finie bornée de demi-espaces. C'est la seconde manière qu'on adoptera pour définir l'associaèdre.

Soit  $\mathcal{P}$  un polytope,  $l$  une forme linéaire et  $c$  un réel. Alors, si pour tout  $x$  dans  $\mathcal{P}$ ,  $l(x) \leq c$ , on dira que  $\{x \in \mathcal{P}, l(x) = c\}$  est une *cellule* de  $\mathcal{P}$ . On appelle dimension d'une cellule la dimension de son enveloppe affine. Les cellules de dimension 0 sont les sommets, les cellules de dimension 1 les arêtes, et les cellules de dimension  $\dim(\mathcal{P}) - 1$  sont les faces de  $\mathcal{P}$ .

L'ensemble des cellules d'un polytope est partiellement ordonné par l'inclusion. On peut montrer que cet ordre partiel définit une structure de treillis, appelé *treillis des cellules* du polytope.

On utilisera sans démonstration les propriétés suivantes :

- Toute cellule d'un polytope est un polytope de dimension strictement inférieure si la cellule est non pleine.
- Le treillis des cellules est gradué de rang  $\dim(\mathcal{P}) + 1$ , et le rang de toute cellule  $\mathcal{C}$  est  $\dim(\mathcal{C}) + 1$ .
- La borne inférieure de cellules coïncide avec leur intersection. En particulier, toute intersection de cellules est une cellule.

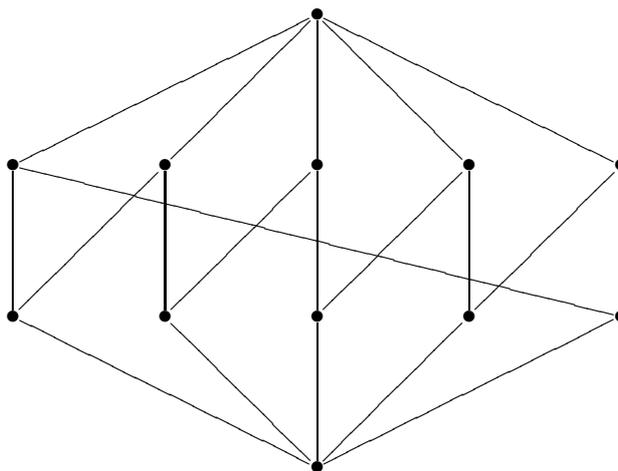
- Le treillis des cellules est atomique, i.e. toute cellule est caractérisée par les sommets qu'elle contient.
- Le treillis des faces est coatomique, i.e. toute cellule peut s'écrire comme intersection de faces.
- Si  $\mathcal{P}$  s'écrit comme intersection de demi-espaces, alors toutes les faces de  $\mathcal{P}$  s'écrivent comme intersection de  $\mathcal{P}$  avec un hyperplan correspondant.
- Si  $\mathcal{P}$  s'écrit comme enveloppe convexe de points, alors tout sommet de  $\mathcal{P}$  est l'un de ces points.
- Supposons que  $0 \in \mathcal{P}$  et que  $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{R}^n$  soit de dimension  $n$ . Le polytope dual  $\mathcal{P}^\Delta$  définit comme

$$\mathcal{P}^\Delta := \{l \in (\mathbb{R}^n)^* \mid \forall x \in \mathcal{P}, l(x) \leq 1\}$$

a pour treillis des cellules le treillis opposé de celui de  $\mathcal{P}$ .

Deux polytopes seront dits *combinatoirement équivalents* si leurs treillis des cellules respectifs sont isomorphes.

*Exemple.* Voici le treillis des cellules d'un pentagone :



## 2.2 Construction de l'associaèdre $K_n$

Nous allons maintenant donner une construction explicite d'un polytope dont le treillis des cellules est l'opposé de  $(\overline{\mathcal{P}_n}, \preceq)$ . Celle-ci présente la particularité que les coordonnées des sommets sont des entiers strictement positifs.

En fait, il est raisonnable de chercher à construire ce polytope ainsi, puisqu'un théorème affirme que tout polytope simple possède un polytope combinatoirement équivalent dont les sommets sont à coordonnées entières (voir [3], page 66).

Soit  $n \geq 1$ . On pose  $S(n) := \frac{n(n-1)}{2}$ , et on définit  $H_n^*$  comme l'hyperplan affine de  $\mathbb{R}^n$  d'équation

$$x_1 + \cdots + x_{n-1} = S(n)$$

et  $E_n^*$  le demi-espace caractérisé par

$$x_1 + \cdots + x_{n-1} \geq S(n).$$

On appelle  $\pi_n$  la projection canonique de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^{n-1}$  identifié à  $\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$ .

Soit  $w \in P$ , d'ordre  $n$ . Alors on construit récursivement un sous-espace affine  $C_w^*$  de  $\mathbb{R}^n$  de la manière suivante :

- $C_x^* = \mathbb{R}$ ,
- si  $w = (w_1 \cdots w_r)$  alors  $C_w^*$  est donné par :

$$C_w^* := \left( \prod_{i=1}^r C_{w_i}^* \right) \cap H_n^*.$$

On définit  $D_w^*$  de la même manière, en remplaçant  $H_n^*$  par  $E_n^*$ .

**Proposition 2.2.1.** *On a les propriétés suivantes :*

- si  $w \in P_n^k$ , alors  $\dim(C_w^*) = n - k$ ,
- si  $w \preceq w'$  alors  $C_{w'}^* \subseteq C_w^*$  et  $D_{w'}^* \subseteq D_w^*$ .

*Démonstration.* Par récurrence sur  $n$ .

- Le résultat est clair pour  $n = 1$ . Soit maintenant  $w = (w_1 \cdots w_r)$ . Seule la définition de  $H_n^*$  fait intervenir la coordonnée  $x_{o(w_1)}$  (car  $r \geq 2$ ), donc  $H_n^*$  est de direction linéairement indépendante à  $\prod_{i=1}^r C_{w_i}^*$ . On en déduit que  $\dim(C_w^*) = \sum_{i=1}^r \dim(C_{w_i}^*) - 1$ , ce qui donne bien le résultat.
- Le second résultat découle immédiatement de la définition de  $\preceq$ . □

On définit maintenant  $H_n := \pi_n(H_n^*)$ ,  $C_w := \pi_n(C_w^*)$  et  $D_w := \pi_n(D_w^*)$ . Les définitions de  $C_w^*$  et de  $D_w^*$  ne fait jamais intervenir la dernière coordonnée, donc les propriétés de la Proposition 2.2.1 restent valables, avec la perte d'une dimension.

On remarque que si  $t$  est complet, alors  $C_t$  se réduit à un point, qu'on appellera  $M_t$ .

On définit l'associaèdre  $K_n$  comme :

$$K_n := H_n \cap \bigcap_{y \in P_n^2} D_y.$$

On va maintenant montrer le théorème suivant :

**Théorème 2.2.2.** *L'associaèdre  $K_n$  est un polytope dont les cellules de dimension  $n - 1 - k$  sont exactement les  $C_w \cap K_n$  pour  $w \in P_n^k$ .*

En particulier, les parenthésages complets correspondent aux sommets de l'associaèdre, alors que les parenthésages simples correspondent aux faces.

On introduit, pour  $y$  un parenthésage simple, la forme linéaire  $l_y$  telle que  $C_y$  soit défini par

$$l_y(M) = S(|I_y|).$$

On a donc

$$l_y(x_1, \dots, x_{n-1}) = \sum_{i \in I_y \setminus \max(I_y)} x_i.$$

Pour prouver le théorème, on aura besoin des deux lemmes suivants. Le premier montre que les points  $M_t$  sont bien dans  $K_n$  et ne sont que dans les faces voulues ; le second donne une condition pour que deux faces aient une intersection dans  $K_n$ .

**Lemme 2.2.3.** *Pour  $t \in Q_n$  et  $y \in P_n^2$ , on a*

- $M_t \in D_y$ ,
- $M_t \in C_y$  si et seulement si  $y \preceq t$ .

*Démonstration.* On va montrer que si  $t = (t_1 t_2)$ , avec  $o(t_1) = p$ , alors le point  $M_t$  est donné par

$$M_t = (M_{t_1}, p(n-p), M_{t_2}).$$

Les  $p - 1$  premières coordonnées et les  $n - p - 1$  dernières vérifient les mêmes relations que  $M_{t_1}$  et  $M_{t_2}$  respectivement, et la  $p$ -ième coordonnée est donnée par les relations  $M_{t_1} \in H_p$ ,  $M_{t_2} \in H_{n-p}$ , et  $M_t \in H_n$  ; en effet, on a

$$\begin{aligned} S(n) - S(p) - S(n-p) &= \frac{1}{2}(n(n-1) - p(p-1) - (n-p)(n-p-1)) \\ &= p(n-p). \end{aligned}$$

Soit maintenant  $y \in P_n^2$ , montrons le lemme par récurrence sur  $n$ .

- si  $x_p$  n'intervient pas dans la définition de  $D_y$ , on peut appliquer l'hypothèse de récurrence.
- sinon, alors on a nécessairement  $y \not\preceq t$  et l'équation de  $D_y$  s'écrit

$$x_{i+1} + \dots + x_p + \dots + x_{j-1} \geq S(j-i).$$

L'hypothèse de récurrence assure que  $x_{i+1} + \dots + x_{p-1} \geq S(p-i)$  et que  $x_{p+1} + \dots + x_{j-1} \geq S(j-p)$ . On obtient donc

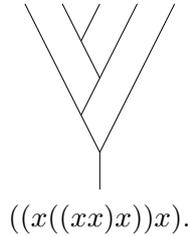
$$\begin{aligned} l_y(M_t) &\geq S(p-i) + S(j-p) + p(n-p) \\ l_y(M_t) &> S(p-i) + S(j-p) + (p-i)(j-p) \\ l_y(M_t) &> S(j-i). \end{aligned}$$

□

On peut comprendre facilement la construction de  $M_t$ , en voyant  $t$  comme un arbre binaire. En effet, soit  $i$  tel que  $1 \leq i \leq n - 1$ . On appelle  $a_i$  et  $b_i$  le nombre de feuilles situées respectivement à gauche et à droite du  $i$ -ième nœud (situé entre la  $i$ -ième et la  $i + 1$ -ième feuille). La quantité  $a_i b_i$  s'appelle le *poids* du nœud. Alors  $M_t$  s'écrit :

$$M_t = (a_1 b_1, \dots, a_{n-1} b_{n-1}).$$

*Exemple.* Soit  $t \in P_5$  :



Alors  $M_t = (3, 1, 2, 4)$ .

**Lemme 2.2.4.** *Soient  $y$  et  $z$  des parenthésages simples incompatibles. Alors  $C_y \cap C_z \cap K_n = \emptyset$ .*

*Démonstration.* Par l'absurde, supposons que  $M$  appartienne à l'intersection. Les intérieurs de  $z$  et de  $y$  ne peuvent pas être disjoints. Soient  $u$  et  $v$  les parenthésages simples d'intérieurs  $I_z \cup I_y$  et  $I_z \cap I_y$  respectivement. On a donc  $l_u(M) + l_v(M) = l_y(M) + l_z(M)$ .

Soit  $M \in C_y \cap C_z \cap K_n$ . Alors on doit avoir

$$l_u(M) + l_v(M) \geq S(|I_u|) + S(|I_v|).$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} l_u(M) + l_v(M) &= l_y(M) + l_z(M) \\ l_u(M) + l_v(M) &= S(|I_y|) + S(|I_z|). \end{aligned}$$

On obtient donc  $S(|I_y|) + S(|I_z|) \geq S(|I_u|) + S(|I_v|)$ , ce qui est absurde car  $|I_y| + |I_z| = |I_u| + |I_v|$  et  $u > \max(|I_y|, |I_z|)$ , étant donné que  $I_y$  et  $I_z$  ne sont pas inclus l'un dans l'autre.

□

*Preuve du Théorème 2.2.2.* Tout d'abord prouvons que  $K_n$  est bien un polytope, donc est borné.

Pour  $M := (x_1, \dots, x_{n-1}) \in K_n$ , le fait que  $M \in D_y$  pour  $y$  parenthésage simple dont l'intérieur se réduit à deux éléments montre que  $x_i \geq 1$  pour tout  $i$ . La condition  $M \in H_n$  assure alors que  $K_n$  est borné.

Montrons maintenant que les cellules de  $K_n$  sont bien celles annoncées. Par définition de  $K_n$ , les faces de  $K_n$  sont toutes de la forme  $C_y \cap K_n$ , avec  $y \in P_n^2$ . De plus, pour  $y \in P_n^2$ ,  $C_y \cap K_n$  est une cellule. Soit  $w \in P_n$ . Alors  $C_w$  s'écrit comme intersection de cellules, donc c'est une cellule.

Pour prouver que  $\dim(C_w \cap K_n) = n - 1 - k$ , on va prouver que si  $w \preceq w'$  alors  $C_{w'} \cap K_n \subsetneq C_w \cap K_n$ . Pour cela, il suffit de choisir  $t \in Q_n$  tel que  $w \preceq t$  mais  $w' \not\preceq t$ . Alors  $M_t \in C_w \cap K_n$  mais  $M_t \notin C_{w'} \cap K_n$ , d'après le Lemme 2.2.3. Pour montrer que les  $C_w \cap K_n$  sont deux à deux distincts, on prend  $w$  et  $w'$  dans  $P_n$  et  $t$  tel que (par exemple)  $w \preceq t$  et  $w' \not\preceq t$ . Alors  $M_t \in (C_w \cap K_n) \setminus (C_{w'} \cap K_n)$ .

Reste à voir que toutes les cellules sont de cette forme. Toute cellule s'écrit comme intersection de faces, donc est de la forme  $C_{y_1} \cap \dots \cap C_{y_k} \cap K_n$ . Mais le Lemme 2.2.4 sur les intersections de cellules et la Proposition 1.2.4 sur la compatibilité des parenthésages simples impliquent que la famille  $(y_1, \dots, y_k)$  est compatible. Donc  $C_{y_1} \cap \dots \cap C_{y_k} \cap K_n = C_{y_1 \vee \dots \vee y_k} \cap K_n$ .  $\square$

### 2.3 Propriétés de l'associaèdre

Les propriétés du treillis  $\overline{P}_n$  que nous avons montrées dans la première partie entraînent des propriétés remarquables de l'associaèdre  $K_n$ .

**Proposition 2.3.1.** *Le polytope  $K_n$  est simple, c'est-à-dire que chaque sommet appartient à exactement  $n - 2$  arêtes.*

*Démonstration.* Chaque parenthésage complet comporte  $n - 2$  paires de parenthèses intérieures. Les parenthésages de  $P_n^{n-2}$  qui lui sont inférieurs sont obtenus en supprimant une telle paire de parenthèses, donc il y en a bien  $n - 2$ .  $\square$

La simplicité de  $K_n$  implique que chaque figure de sommet (c'est-à-dire, un polytope obtenu en coupant  $K_n$  en deux de manière à isoler un sommet) est un simplexe.

On en déduit que le polytope dual  $K_n^\Delta$  (après changement de repère pour que  $K_n$  contienne le vecteur nul), dont le treillis des cellules est  $(\overline{P}_n, \preceq)$ , est simplicial, c'est-à-dire que chacune de ses faces est un simplexe.

De plus, on peut donner un équivalent combinatoire de chacune des cellules de  $K_n$ .

**Proposition 2.3.2.** *Soit  $C$  une cellule non pleine de  $K_n$ , alors  $C$  est combinatoirement équivalente à un produit d'associaèdres.*

*Démonstration.* La cellule  $C$  correspond à un certain parenthésage  $w$ , et son treillis des cellules est isomorphe à  $\uparrow w$  dans  $\overline{P}_n$ .

La Proposition 1.2.6 implique que l'ensemble des sous-cellules non vides de  $C$  est isomorphe à l'ensemble des cellules non vides d'un produit d'associaèdres, d'où l'équivalence combinatoire.  $\square$

*Exemple.*

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Alors toute 2-cellule de  $K_n$  est isomorphe à un produit d'associaèdres. Pour des raisons de dimension, il y a deux possibilités,  $K_3 \times K_3$  (un quadrilatère) et  $K_4$  (un pentagone). Ce résultat nous sera utile par la suite.

Enfin, la proposition suivante dit que la définition de  $M_t$  est compatible avec l'ordre  $\leq$  sur  $Q_n$  :

**Proposition 2.3.3.** *Munissons  $\mathbb{R}^{n-1}$  de l'ordre lexicographique. Alors la fonction  $t \mapsto M_t$  de  $(Q_n, \leq)$  dans  $\mathbb{R}^{n-1}$  est strictement croissante.*

*Démonstration.* Si  $t_1$  est relié à  $t_2$  dans  $G_n$ , alors un facteur de  $t_1$  est de la forme  $((u_1 u_2) u_3)$  et le facteur de  $t_2$  correspondant est  $u_1 (u_2 u_3)$ .

Les points  $M_{t_1}$  et  $M_{t_2}$  ne diffèrent que par deux coordonnées, qui sont pour  $t_1$   $(o(u_1)o(u_2), (o(u_1)+o(u_2))o(u_3))$  et pour  $t_2$   $(o(u_1)(o(u_2)+o(u_3)), o(u_2)o(u_3))$ . Le point  $M_{t_1}$  est bien lexicographiquement strictement inférieur à  $M_{t_2}$ .  $\square$

### 3 Cohérence des catégories monoïdales

On supposera connues les notions de catégorie, de foncteur et d'isomorphisme naturel. On pourra se référer à [4] pour les définitions.

#### 3.1 Catégories monoïdales

**Définition 3.1.1.** *Une catégorie monoïdale est la donnée d'une catégorie  $\mathcal{A}$ , d'un bifoncteur  $\otimes$  de  $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$  dans  $\mathcal{A}$  et d'un isomorphisme naturel  $\alpha$  entre  $\otimes(\otimes \times 1)$  et  $\otimes(1 \times \otimes)$ , c'est-à-dire que  $\alpha_{x,y,z}$  est un isomorphisme de  $(x \otimes y) \otimes z$  dans  $x \otimes (y \otimes z)$  et que pour tous objets  $x, y, z, x', y', z'$  et toutes flèches*

$$x \xrightarrow{f} x', y \xrightarrow{g} y', z \xrightarrow{h} z',$$

le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} (x \otimes y) \otimes z & \xrightarrow{\alpha_{x,y,z}} & x \otimes (y \otimes z) \\ \downarrow (f \otimes g) \otimes h & & \downarrow f \otimes (g \otimes h) \\ (x' \otimes y') \otimes z' & \xrightarrow{\alpha_{x',y',z'}} & x' \otimes (y' \otimes z') \end{array}$$

On demande de plus que pour tous objets  $x, y, z, t$  de  $\mathcal{A}$  le diagramme suivant soit commutatif (règle du pentagone) :

$$\begin{array}{ccc}
 ((x \otimes y) \otimes z) \otimes t & \xrightarrow{\alpha} & (x \otimes y) \otimes (z \otimes t) \xrightarrow{\alpha} x \otimes (y \otimes (z \otimes t)) \\
 \downarrow \alpha \otimes 1 & & \uparrow 1 \otimes \alpha \\
 (x \otimes (y \otimes z)) \otimes t & \xrightarrow{\alpha} & x \otimes ((y \otimes z) \otimes t)
 \end{array}$$

Contrairement à ce que l'on pourrait penser, la seule naturalité de  $\alpha$  n'implique pas la règle du pentagone. Ainsi, il peut être impossible d'identifier les différentes manières de calculer  $x \otimes y \otimes z \otimes t$ . En revanche, nous allons montrer que la règle du pentagone suffit à montrer la cohérence à un ordre quelconque.

*Remarque.* En réalité, la définition d'une catégorie monoïdale inclut un objet  $e$  (l'élément neutre) et deux isomorphismes naturels supplémentaires, entre  $x \otimes e$  et  $x$  et entre  $e \otimes x$  et  $x$ . Nous nous limiterons ici à la propriété d'associativité à isomorphisme naturel près, par souci de simplification.

*Exemple.* Soit  $A$  un anneau. Alors la catégorie des  $A$ -modules, munie du produit tensoriel, est une catégorie monoïdale.

*Exemple.* Soit  $E$  un espace topologique et  $x \in E$ . Alors la catégorie des lacets de  $E$  en  $x$  (dont les flèches sont les homotopies de lacets), munie de la composition, est une catégorie monoïdale.

**Définition 3.1.2.** Un morphisme de catégories monoïdales de  $(\mathcal{A}, \otimes, \alpha)$  dans  $(\mathcal{B}, \otimes, \beta)$  est un foncteur  $T : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  tel que pour tous objets  $x, y, z$  et toutes flèches  $f, g$  de  $\mathcal{A}$  :

$$\begin{aligned}
 T(x \otimes y) &= T(x) \otimes T(y), \\
 T(f \otimes g) &= T(f) \otimes T(g), \\
 T(\alpha_{x,y,z}) &= \beta_{T(x), T(y), T(z)}.
 \end{aligned}$$

**Proposition 3.1.3.** L'ensemble  $Q$  des parenthésages complets peut être muni d'une structure de catégorie monoïdale naturelle.

*Démonstration.* On considère la catégorie dont les objets sont les éléments de  $Q$ , et telle qu'il existe une unique flèche de  $u$  à  $v$  si et seulement si  $o(u) = o(v)$ . On considère le foncteur  $u \otimes v := (uv)$ , la multiplication des flèches étant définie par unicité des flèches, et parce que la composition est compatible avec l'ordre.

Pour  $u, v, w$  dans  $Q$  on définit  $\alpha_{u,v,w}$  comme l'unique flèche

$$((uv)w) \xrightarrow{\alpha_{u,v,w}} (u(vw)).$$

L'unicité des flèches montre encore que  $\alpha$  est naturel et vérifie la règle du pentagone. □

### 3.2 Théorème de cohérence

Soit  $(\mathcal{A}, \otimes, \alpha)$  une catégorie monoïdale. On souhaite définir, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , un  $n$ -foncteur qui associe aux objets  $x_1, \dots, x_n$  l'élément  $x_1 \otimes \dots \otimes x_n$ . Mais on a vu qu'il existe  $c_{n-1}$  manières différentes de le calculer. On doit donc prouver qu'elles sont toutes *canoniquement* isomorphes (la simple isomorphie ne suffit pas).

Soit  $G_n$  le 1-squelette (orienté) de l'associaèdre  $K_n$ , dont les sommets sont étiquetés par les  $n$ -foncteurs correspondants. Alors pour chaque arête  $u \rightarrow v$  il existe un isomorphisme naturel entre  $u$  et  $v$ , obtenu en multipliant  $\alpha$  avec des isomorphismes naturels identité.

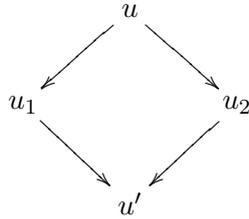
*Exemple.* Des exemples sont donnés dans le diagramme de la règle du pentagone. Ainsi, l'isomorphisme naturel canonique entre  $\otimes(1 \times \otimes(\otimes \times 1))$  et  $\otimes(1 \times \otimes(1 \times \otimes))$ , qui associe à  $(x, y, z, t)$  respectivement  $x \otimes ((y \otimes z) \otimes t)$  et  $x \otimes (y \otimes (z \otimes t))$  est  $1 \otimes \alpha$ .

On va montrer que ces isomorphismes naturels forment un système transitif, autrement dit :

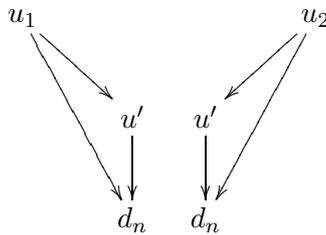
**Théorème 3.2.1 (Théorème de cohérence).** *Le diagramme  $G_n$  est commutatif.*

*Démonstration.* Soient  $u$  et  $v$  des mots de  $Q_n$ . Supposons qu'on ait deux chemins de  $u$  à  $v$ , montrons qu'ils sont égaux. Tout d'abord, quitte à prolonger les deux chemins, on peut supposer que  $v$  est le parenthésage à droite  $d_n$ , qui majore  $v$  d'après la Proposition 1.3.3.

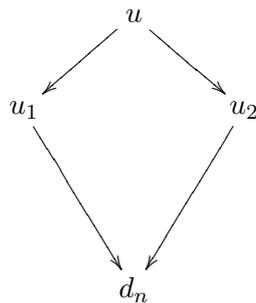
On raisonne ensuite par récurrence descendante sur le rang de  $u$ . Si les deux chemins commencent par  $u \rightarrow u_1$  et  $u \rightarrow u_2$ , la simplicité de  $K_n$  prouve que  $u, u_1$  et  $u_2$  sont contenus dans une même 2-cellule. Toute 2-cellule est soit isomorphe à  $K_4$  soit à  $K_3 \times K_3$  d'après la Proposition 2.3.2 décrivant les cellules de l'associaèdre. Les diagrammes  $K_3$  et  $K_4$  sont commutatifs, donc il existe  $u'$  un parenthésage tel que l'on ait le diagramme commutatif



Maintenant, on sait qu'il existe un chemin de  $u'$  à  $d_n$ . L'hypothèse de récurrence appliquée à  $u_1$  et  $u_2$  montre que les deux diagrammes suivants sont commutatifs :



On en déduit la commutativité du diagramme



□

Grâce à ce théorème, on pourra parler de l'objet  $x_1 \otimes \cdots \otimes x_n$  (ou du foncteur qui associe aux  $x_i$  ce produit) sans problème de cohérence, puisqu'on a explicité un système transitif d'isomorphismes entre les différentes manières de le calculer.

À noter que le théorème n'utilise que le 2-squelette de l'associaèdre. Il existe des résultats qui se servent de la structure complète, mais ils sont plus complexes.

**Corollaire 3.2.2.** *Soit  $x$  un objet de  $\mathcal{A}$ . Alors il existe un unique morphisme  $\Phi$  de catégories monoïdales de  $Q$  dans  $\mathcal{A}$  tel que  $\Phi(x) = x$ .*

*Démonstration.* L'existence de  $\Phi$  est claire d'après le théorème précédent : si  $u$  et  $v$  sont des mots de  $Q_n$ , alors l'image par  $\Phi$  de la flèche  $u \rightarrow v$  est l'instance en  $(x, \dots, x)$  de l'unique isomorphisme naturel fourni par le théorème.

On va maintenant montrer l'unicité de  $\Phi$ . D'après la définition de  $Q$  et le fait que  $\Phi$  respecte le produit, on a l'unicité des images des objets. Il est toujours possible de passer d'un parenthésage à un autre grâce à des instances de  $\alpha$  et  $\alpha^{-1}$ , éventuellement multipliées par des flèches identité. Les deux conditions sur les images des flèches assurent l'unicité de  $\Phi$ .

□

## Références

- [1] J. D. Stasheff, *Homotopy associativity of H-spaces*, I, II. Trans. Amer. Math. Soc. 108 (1963), 275-292, *ibid.* 293.312.
- [2] J.-L. Loday, *Realization of the Stasheff polytope*, Archiv der Mathematik 83 (2004), 267-278. [ArXiv: math.CO/0212126]
- [3] G. Ziegler, *Lectures on polytopes*, Springer-Verlag, 1995, Lectures 1, 2.
- [4] S. Mac Lane, *Categories for the working mathematician*, Springer-Verlag, 1971, Chapitre 7.

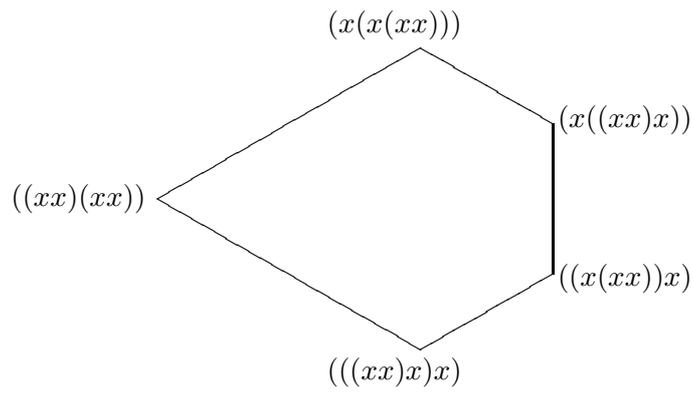
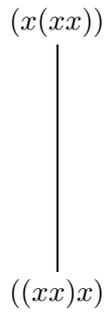


FIG. 1 – Les associaèdres  $K_3$  et  $K_4$ .

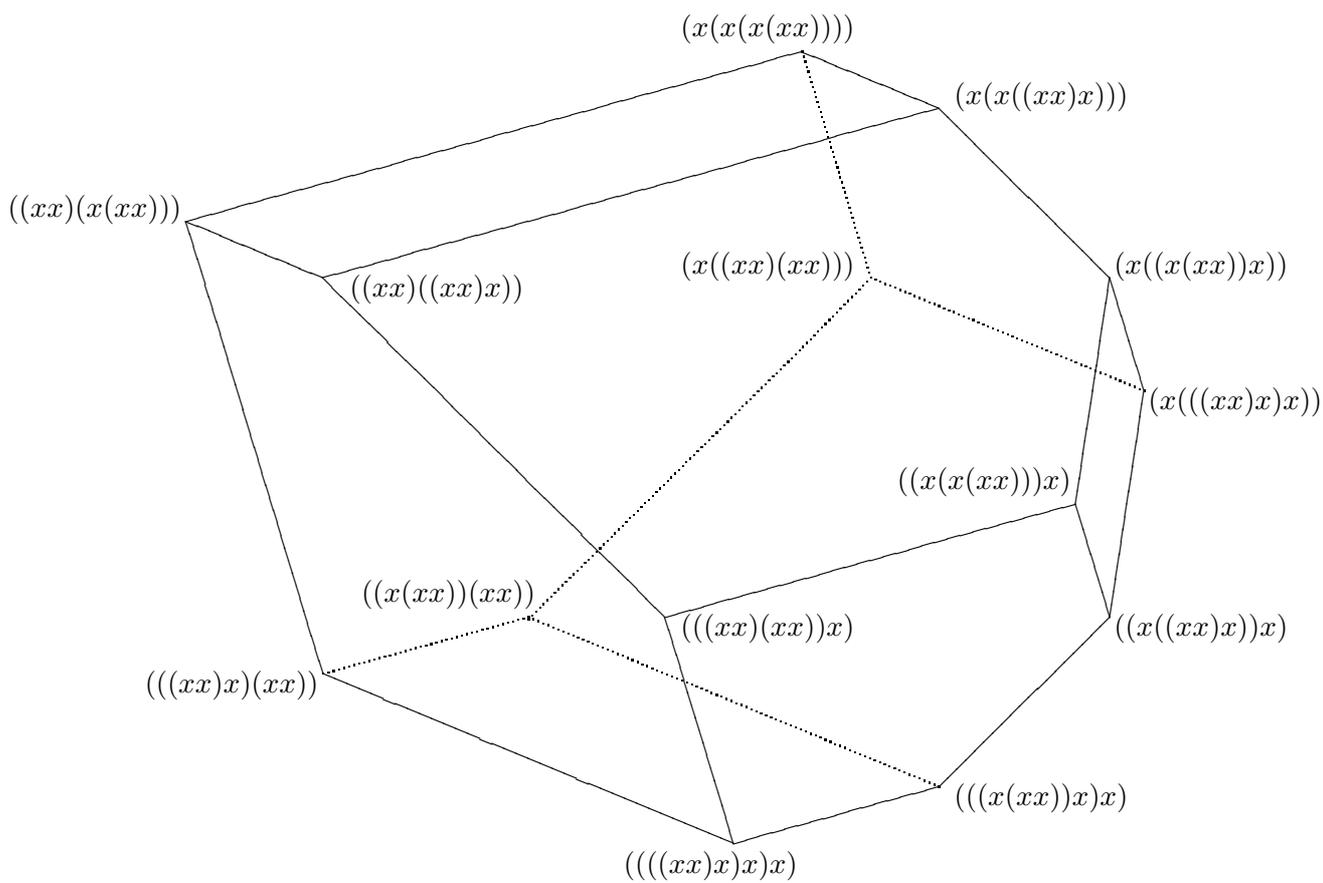


FIG. 2 – Une projection de l'associaèdre  $K_5$ .