

Un théorème d'Adams

Ayoub Bana et Valentine Roos *

12 février 2011

Introduction

L'*orientabilité* est une notion clé dans l'étude des variétés et de leurs diverses propriétés géométriques. Elle présente un intérêt même sur des espaces a priori faciles à visualiser comme des surfaces : en quotientant de deux manières un simple carré, on peut tout aussi bien obtenir une surface orientable (comme le tore) qu'une surface non orientable (comme le ruban de Moebius). Ici, afin d'affiner cette notion rudimentaire, on étudiera une propriété plus forte que l'orientabilité, qui est la *parallélisabilité*.

Définition Dire qu'une variété de dimension n est parallélisable, c'est dire qu'il existe n champs de vecteurs indépendants sur cette variété (à chaque point, on peut associer une base de \mathbb{R}^n de manière continue).

L'orientation de la base formée en chaque point permet alors d'orienter la variété.

Cette notion de parallélisabilité se révèle non triviale même pour des objets très simples comme la sphère unité : c'est sur ce point que se concentrera ce mémoire. Dans toute la suite, on notera \mathbb{S}^n la sphère unité de \mathbb{R}^{n+1} , qui est une variété de dimension n (notons cependant que la propriété de parallélisabilité est indépendante d'un tel plongement).

Théorème d'Adams \mathbb{S}^n est parallélisable si et seulement si $n = 0, 1, 3$ ou 7 .

Pour démontrer ce théorème, il faut introduire des outils efficaces de K-théorie : l'étude des fibrés vectoriels d'une variété révèle une structure algébrique commode sur leur ensemble, qu'on appelle *groupe de K-théorie*. On calculera ensuite le groupe de K-théorie de la sphère unité grâce à un résultat général dû à Bott, qui lie la K-théorie d'une variété compacte à celle de sa suspension double. On attirera l'attention du lecteur sur le fait que tout au long de la preuve, les opérations effectuées sur les vecteurs sont naturelles ainsi que les espaces obtenus, ce qui permet de manipuler les objets *comme on pense*.

Au cours de la preuve, on va montrer entre autres que la parallélisabilité de la sphère lui confère une structure forte - on verra qu'on peut alors la munir d'une *multiplication de H-espace*.

Si $n = 0, 1, 3, 7$, \mathbb{S}^n est alors munie d'une structure qui est proche de celle d'un groupe topologique. On va même montrer que pour $n = 0, 1$ et 3 , \mathbb{S}^n est munie d'une vraie structure de groupe topologique. Il est plus difficile de montrer que ce n'est pas le cas pour \mathbb{S}^7 .

*sous l'égide éclairée de Grégory Ginot

Table des matières

1	Cas simples	3
1.1	La réciproque : étude de $\mathbb{S}^0, \mathbb{S}^1, \mathbb{S}^3$ et \mathbb{S}^7	3
1.2	Le cas pair	4
2	Eléments de K-Théorie	5
2.1	La catégorie des fibrés vectoriels	5
2.2	Structure algébrique des fibrés vectoriels	8
2.3	Périodicité de Bott	10
2.3.1	Fibré tangent à \mathbb{S}^n	10
2.3.2	Classifications des fibrés de la sphère	10
2.3.3	Périodicité de Bott	11
3	Fin de la preuve	13
3.1	Les opérations d'Adams	13
3.2	Démonstration du théorème d'Adams	15

1 Cas simples

1.1 La réciproque : étude de $\mathbb{S}^0, \mathbb{S}^1, \mathbb{S}^3$ et \mathbb{S}^7

- Le cas de \mathbb{S}^0 est trivial (c'est la réunion de deux singletons).

• \mathbb{S}^1 est parallélisable puisqu'il suffit de construire un champ de vecteurs ne s'annulant pas sur le cercle : en chaque point, on associe son vecteur tangent unitaire (celui-ci dépend de l'orientation choisie sur \mathbb{S}^1). On a clairement une structure de groupe sur \mathbb{S}^1 , par exemple en l'identifiant aux complexes de module 1.

• \mathbb{S}^3 est difféomorphe au groupe $SU(2)$ puisqu'un calcul rapide montre que c'est l'ensemble des matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}$ avec a et b des complexes tels que $|a|^2 + |b|^2 = 1$. Cette dernière équation caractérise la sphère de \mathbb{C}^2 qui s'identifie à \mathbb{S}^3 . On vient donc d'exhiber une structure de groupe sur \mathbb{S}^3 .

Or $SU(2)$ est un groupe de Lie, et il apparaît alors trois champs de vecteurs indépendants, qui sont les champs de vecteurs invariants à gauche engendrés par une base de l'algèbre de Lie $\mathfrak{su}(2)$ de $SU(2)$. Ici, on peut expliciter l'algèbre de Lie :

$$\mathfrak{su}(2) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & -a \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{C} \right\}.$$

Une base de cette algèbre de Lie est par exemple

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

Si on note ξ_k le champ invariant à gauche engendré par e_k , on a $\xi_k(A) = Ae_k$ pour toute matrice A dans $SU(2)$. Alors Ae_1, Ae_2, Ae_3 sont trois vecteurs du plan tangent en A indépendants car A est inversible. On vient donc de prouver que $SU(2)$ est parallélisable, et par suite \mathbb{S}^3 l'est également.

Remarque : La même preuve montre que tout groupe de Lie est parallélisable.

• Pour étudier \mathbb{S}^7 , on va considérer \mathbb{R}^8 comme l'ensemble des octonions de Cayley, qu'on notera \mathbb{O} . Présentons rapidement cet ensemble.

\mathbb{O} est le \mathbb{R} -espace vectoriel engendré par huit vecteurs unitaires $1, i, j, k, l, li, lj$ et lk qui se multiplient comme suit (le facteur de gauche se lit dans la colonne) :

\cdot	1	i	j	k	l	li	lj	lk
1	1	i	j	k	l	li	lj	lk
i	i	-1	k	$-j$	$-li$	l	$-lk$	lj
j	j	$-k$	-1	i	$-lj$	lk	l	$-li$
k	k	j	$-i$	-1	$-lk$	$-lj$	li	l
l	l	li	lj	lk	-1	$-i$	$-j$	$-k$
li	li	$-l$	$-lk$	lj	i	-1	$-k$	j
lj	lj	lk	$-l$	$-li$	j	k	-1	$-i$
lk	lk	$-lj$	li	$-l$	k	$-j$	i	-1

On note que la multiplication dans \mathbb{O} n'est pas associative. À un élément x de \mathbb{O} , on peut associer son conjugué x^* qui possède la même composante en 1 et les composantes opposées en i, j, \dots, lk , ainsi que sa norme $\|x\| = x.x^*$. Notons que cette norme coïncide avec la norme euclidienne sur \mathbb{R}^8 . On a $y/x = \|x\|^{-2}y.x^*$: la division à droite ainsi définie vérifie bien $(y/x).x = y$ (mais il faut le vérifier par un calcul puisque la multiplication n'est pas associative).

Proposition 1.1 *La sphère \mathbb{S}^7 est parallélisable.*

Preuve. On note V l'espace tangent à en 1 ; V est difféomorphe à \mathbb{R}^7 . Montrons que l'application $(x, y) \in T\mathbb{S}^7 \mapsto (x, y/x)$ est un difféomorphisme de $T\mathbb{S}^7$ dans $\mathbb{S}^7 \times V$. Montrer que y/x est dans V revient à montrer que sa composante en 1 dans la décomposition des octonions est nulle. Ici, comme x est unitaire, $y/x = y.x^*$. Or, comme les seuls produits d'éléments de bases ayant une composante non nulle en 1 sont les carrés, on a $(y.x^*)_1 = \langle y|x \rangle$ en désignant par $\langle \cdot | \cdot \rangle$ le produit scalaire usuel. Mais y est orthogonal à x , donc $(y.x^*)_1 = \langle y|x \rangle = 0$, ce qui prouve que notre application est bien définie. Son inverse est donnée par $(x, z) \in \mathbb{S}^7 \times V \mapsto (x, z.x)$; on a comme précédemment $\langle z.x|x \rangle = ((z.x).x^*)_1 = z_1 = 0$ puisque z appartient à V , et l'application inverse est donc bien définie (notons que l'égalité $(z.x).x^* = z$ provient du même calcul que la vérification de l'expression de y/x). De plus l'application initiale, ainsi que son inverse, sont C^1 puisque la multiplication est bilinéaire. On vient donc de montrer que $T\mathbb{S}^7$ est difféomorphe à $\mathbb{S}^7 \times \mathbb{R}^7$, ce qui signifie que \mathbb{S}^7 est parallélisable. \square

Remarque : La même preuve, modulo les détails techniques, aurait fonctionné pour \mathbb{S}^3 , en identifiant \mathbb{R}^4 au corps des quaternions \mathbb{H} .

1.2 Le cas pair

Proposition 1.2 *Si n non nul est pair, alors \mathbb{S}^n n'est pas parallélisable.*

Preuve. Si \mathbb{S}^n est parallélisable, en particulier, il existe un champ de vecteurs continu ne s'annulant pas sur \mathbb{S}^n . Montrons alors que s'il existe un champ de vecteurs ne s'annulant pas sur la sphère, la dimension est impaire. Pour cela, on va construire une homotopie entre l'identité et l'antipodie sur la sphère.

On note X un champ de vecteurs continu qui ne s'annule pas sur \mathbb{S}^n ; on peut le supposer unitaire quitte à le diviser par sa norme, jamais nulle. On introduit alors :

$$\begin{aligned} \gamma : [0, \pi] \times \mathbb{S}^n &\rightarrow \mathbb{S}^n \\ (t, x) &\mapsto \cos(t)x + \sin(t)X(x) \end{aligned}$$

Comme X est un champ de vecteurs sur la sphère, $X(x)$ et x sont toujours orthogonaux, ce qui prouve que γ est bien à valeurs dans \mathbb{S}^n . L'application γ , qui est continue, réalise donc une homotopie entre l'identité (en $t = 0$) et l'antipodie (en $t = \pi$) de \mathbb{S}^n .

Cela signifie que l'identité et l'antipodie de la sphère agissent de la même manière en cohomologie. Or la dualité de Poincaré nous donne que $H^n(\mathbb{S}^n)$ est difféomorphe à \mathbb{R} via l'intégration des formes différentielles. Cela implique que l'antipodie conserve l'orientation de la sphère, ce qui est faux en dimension paire. \square

2 Eléments de \mathbb{K} -Théorie

Dans cette partie et la suivante, X désigne un espace compact connexe non vide, \mathbb{K} désigne \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

2.1 La catégorie des fibrés vectoriels

• Objets

Intuitivement, un fibré vectoriel sur un espace X est la donnée en tout point d'un espace vectoriel, lequel varie continuellement. De plus, on souhaite que la structure d'espace vectoriel sur chaque fibre soit localement constante. Formellement :

Définition 2.1 *Un fibré vectoriel sur un espace topologique X appelé la base est la donnée d'un triplet (ξ, π, X) où ξ (l'espace total) est un espace topologique et $\pi : \xi \rightarrow X$ (la projection) une application continue telle que :*

- $\xi_x = \pi^{-1}(x)$ est un \mathbb{K} -espace vectoriel
- pour tout $x \in X$, il existe un voisinage U de x , un entier n et un homéomorphisme $h : U \times \mathbb{K}^n \rightarrow \pi^{-1}(U)$ tel que chaque pour tout $y \in U$, $h_y : v \mapsto h(y, v)$ soit un isomorphisme de \mathbb{K} -espace vectoriel.

Lorsqu'il n'y pas d'ambiguïté, on notera simplement ξ le fibré vectoriel.

Remarques :

- L'espace vide n'étant pas un espace vectoriel, π est une surjection.
- Par connexité, l'entier n ne dépend pas de x et est appelé rang de ξ .

Exemples :

- $X \times \mathbb{R}^n$ muni de la projection sur le premier facteur est un fibré vectoriel appelé fibré vectoriel trivial.
- Si $X = \mathbb{S}^n$ et $\xi_x = \{v \in \mathbb{R}^{n+1}, x \perp v\}$ alors $\xi = \bigsqcup_{x \in X} \xi_x$ muni de la topologie induite de $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}^{n+1}$ est un fibré vectoriel, appelé fibré vectoriel tangent à \mathbb{S}^n (on le montrera plus tard).
- Le fibré tangent, le fibré des formes différentielles... sont des fibrés vectoriels.

Définition 2.2 *Une section de ξ est une application continue $s : X \rightarrow \xi$ telle que $\pi \circ s = Id_X$.*

Exemple : L'application $x \mapsto 0_x$ (où 0_x est le vecteur nul de la fibre au-dessus de x) est une section. On l'appelle section nulle.

Définition 2.3 *Si s_1, \dots, s_n sont n sections de ξ , on dit qu'elles sont indépendantes si pour tout $x \in X$, la famille $(s_1(x), \dots, s_n(x))$ est libre dans ξ_x .*

• **Flèches**

Définition 2.4 Soit (ξ, π, X) et (ξ', π', X') deux fibrés vectoriels. Un morphisme de fibrés vectoriels entre ξ et ξ' est la donnée de deux applications continues $(\bar{f}, f) : (\xi, X) \rightarrow (\xi', X')$ telles que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} \xi & \xrightarrow{\bar{f}} & \xi' \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi' \\ X & \xrightarrow{f} & X' \end{array}$$

Si de plus $X = X'$, on imposera $f = Id_X$.

Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté, notamment lorsque la base est la même, on note simplement f le morphisme de fibré vectoriel. On définit de même la notion d'endomorphisme, d'isomorphisme et d'automorphisme de fibrés vectoriels (à base fixée!).

Définition 2.5 Un fibré vectoriel isomorphe au fibré trivial est dit *trivialisable*.

Proposition 2.6 Un fibré vectoriel de rang n est *trivialisable* si et seulement s'il admet n sections indépendantes.

Preuve. Si n telles sections existent alors pour tout $x \in \xi$, il existe un unique n -uplet $(\lambda_1(x), \dots, \lambda_n(x))$ de scalaires dépendant continuellement de x telle que $x = \sum_{k=1}^n \lambda_k(x) s_k(\pi(x))$. Alors $x \mapsto (\pi(x), \lambda_1(x), \dots, \lambda_n(x))$ définit un isomorphisme $\xi \rightarrow X \times \mathbb{R}^n$.

Réciproquement, si $f : \xi \rightarrow X \times \mathbb{R}^n$ est un isomorphisme, alors en posant $s_i(x) = f^{-1}(x, e_i)$ (où e_i est le i -ième vecteur de la base canonique) pour $1 \leq i \leq n$ on obtient clairement n sections indépendantes. □

• **Quelques foncteurs**

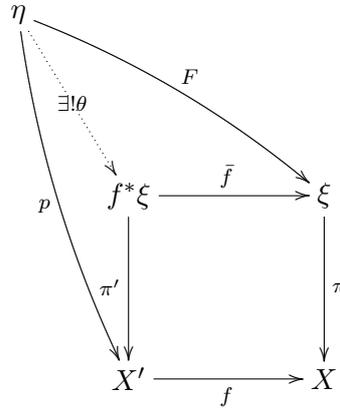
Il s'agit de définir quelques opérations naturelles sur les fibrés vectoriels (somme directe, produit tensoriel, puissance extérieur, tiré en arrière par une fonction...).

Pour définir ces opérations naturelles sur les fibrés, on se ramène aux fibres. Moralement, pour le cas de la somme directe par exemple, on somme les fibres au dessus de chaque point de la base et on considère la réunion disjointe de tous les espaces alors obtenus. Il en est de même pour le produit tensoriel et externe. On obtient formellement les résultats suivants :

Théorème 2.7 (Fibré image réciproque) Soit ξ un fibré sur X d'application π et f une application $X' \rightarrow X$.

Il existe un fibré $f^*\xi$ sur X' d'applications π' tel que pour tout fibré η sur X' et morphisme $(F, f) : (\eta, X') \rightarrow (\xi, X)$ il existe un unique morphisme θ tel que le diagramme suivant

commute :



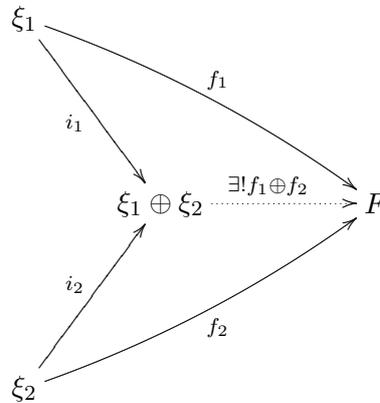
De plus, $f^*\xi$ est unique à isomorphisme près. On l'appelle "fibré image réciproque de ξ par f ".

Remarque : On a que $f^*\xi = \{(x', v) \in X' \times \xi, f(x') = \pi(x)\}$.

Définition 2.8 Soit ξ_1, ξ_2 deux fibrés sur X . On définit la somme directe $\xi_1 \oplus \xi_2$ de ces deux fibrés par $\xi_1 \oplus \xi_2 := \Delta^*(\xi_1 \times \xi_2)$ où $\Delta : X \rightarrow X \times X$ est l'application diagonale.

La somme directe $\xi_1 \oplus \xi_2$ vérifie la propriété universelle suivante :

Théorème 2.9 (Propriété universelle de la somme directe) Soit ξ_1, ξ_2 deux fibrés vectoriels sur X . Il existe un fibré $\xi_1 \oplus \xi_2$ sur X , des morphismes $i_k : \xi_k \rightarrow \xi_1 \oplus \xi_2$ tels que pour tous fibré F et morphismes $f_k : \xi_k \rightarrow F$, il existe un unique $f_1 \oplus f_2$ tel que le diagramme suivant commute :



De plus, $\xi_1 \oplus \xi_2$ est unique à isomorphisme près. On l'appelle "somme directe de ξ_1 et de ξ_2 ".

On peut définir de la même façon le produit tensoriel $\xi_1 \otimes \xi_2$ (ses fibres sont les $\xi_{1,x} \otimes \xi_{2,x}$), la i -ième puissance extérieure $\Lambda^i(\xi)$ d'un fibré ξ (ses fibres sont les $\Lambda^i(\xi_x)$)...

On termine cette section avec des relations entre ces opérateurs (liste non exhaustive évidemment, l'idée étant de montrer que *tout marche bien*).

Proposition 2.10 Soit ξ, ξ', ξ'' trois fibrés sur X et $f : X \rightarrow Y$.

$$\begin{aligned} \xi \oplus \xi' &= \xi' \oplus \xi ; \xi \otimes \xi' = \xi' \otimes \xi \\ \Lambda^n(\xi \oplus \xi') &= \bigoplus_{i+j=n} \Lambda^i(\xi) \otimes \Lambda^j(\xi') \\ f^*(\xi \oplus \xi') &= f^*\xi \oplus f^*\xi' ; f^*(\xi \otimes \xi') = f^*\xi \otimes f^*\xi' ; f^*(\Lambda(\xi)) = \Lambda(f^*\xi) \\ (\xi \oplus \xi') \otimes \xi'' &= (\xi \otimes \xi') \oplus (\xi' \otimes \xi'') \end{aligned}$$

2.2 Structure algébrique des fibrés vectoriels

On souhaite étudier la structure algébrique des fibrés vectoriels. Pour s'éviter des problèmes liés à la (non)-existence des ensembles qu'on considère, on raisonnera toujours à isomorphisme près. On introduit également les relations d'équivalence suivantes :

$$\xi_1 \mathfrak{R} \xi_2 \iff \exists n \in \mathbb{N}, \xi_1 \oplus \epsilon^n = \xi_2 \oplus \epsilon^n$$

et

$$\xi_1 \tilde{\mathfrak{R}} \xi_2 \iff \exists (n, m) \in \mathbb{N}^2, \xi_1 \oplus \epsilon^n = \xi_2 \oplus \epsilon^m$$

où ϵ^ℓ est le fibré trivial de dimension ℓ . On note alors $\tilde{K}(X)$ l'ensemble des classes d'équivalence pour cette dernière relation. On a alors :

Proposition 2.11 $(\tilde{K}(X), \oplus)$ est un groupe commutatif.

Preuve. Seule l'existence d'un inverse est à vérifier. Soit donc ξ un fibré sur X . Il nous suffit de montrer qu'il existe un fibré η et un entier n tels que $\xi \oplus \eta = \epsilon^n$. On commence par un lemme :

Lemme 2.12 Soit ξ un fibré sur X . Il existe un entier N tel que ξ soit un sous-fibré de ϵ^N .

Preuve. Pour tout x dans X , on considère (U_x, h_x) une trivialisatation locale au-dessus de x . Par Urysohn, il existe ϕ_x continue à support dans U_x et valant 1 sur un voisinage de x . Les $\phi_x^{-1}([0, 1])$ forment un recouvrement ouvert de X . Par compacité, on peut en extraire un sous-recouvrement fini de $(\phi_i([0, 1]) \subset U_i)_{1 \leq i \leq m}$. On définit alors

$$\begin{aligned} g_i : \quad \xi &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ v &\mapsto \phi_i(\pi(v))[\pi_i(h_i(v))] \end{aligned}$$

où π_i est la projection $U_i \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Remarquons alors que g_i est une injection linéaire au-dessus de chaque fibre de $\phi_i^{-1}([0, 1])$. Donc

$$\begin{aligned} f : \quad \xi &\rightarrow \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n \\ v &\mapsto (\pi(v), g_1(v), \dots, g_m(v)) \end{aligned}$$

est une injection linéaire au dessus de chaque fibre de X , ce qui permet d'identifier ξ à un sous-fibré du fibré trivial de rang $N := mn$.

Pour conclure, il nous suffit donc de prouver :

Lemme 2.13 Soit ξ un sous-fibré de ϵ^m . Alors il existe ξ' sous-fibré de ϵ^m tel que $\xi \oplus \xi' = \epsilon^m$.

Preuve. On commence par un petit aparté.

Définition 2.14 Un produit scalaire sur un fibré ξ est une application $\xi \oplus \xi \rightarrow \mathbb{R}$ qui se restreint sur chaque fibre en un produit scalaire.

Proposition 2.15 Soit ξ un fibré sur X . Il existe un produit scalaire sur ξ .

Preuve. On peut en construire un de la manière suivante : on considère un nombre fini de trivialisations locales $h_i : \pi^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times \mathbb{R}^n$ dont les ouverts distingués recouvrent X (c'est possible car X est compact) et on tire en arrière le produit scalaire sur \mathbb{R}^n en en produit scalaire $(\cdot, \cdot)_i$ sur U_i . On pose alors $(v, w) = \sum_{\beta} \phi_{\beta}(\pi(v))(v, w)_{i(\beta)}$ où $\{\phi_{\beta}\}$ est une partition de l'unité telle que $\text{supp}(\phi_{\beta}) \subset U_{i(\beta)}$.

Considérons un produit scalaire sur ϵ^m et ξ' le sous-fibré de ϵ^m dont la fibre en x est l'orthogonal de ξ_x . Si ξ' est un fibré vectoriel, on a l'isomorphisme voulu par $(v, w) \mapsto v + w$. Il reste donc à vérifier que ξ' admet bien des trivialisations locales en chaque point.

Soit $x_0 \in X$. Il existe un voisinage de x_0 sur lequel ξ admet n sections indépendantes $x \mapsto (x, s_i(x))$. On peut étendre ces sections à m sections indépendantes de ϵ^m de la manière suivante : on complète $(s_1(x_0), \dots, s_n(x_0))$ en une base de $\epsilon_{x_0}^m$, disons $s_{n+1}(x_0), \dots, s_m(x_0)$. La famille $(s_1(x), \dots, s_n(x), s_{n+1}(x_0), \dots, s_m(x_0))$ reste une base de ϵ_x^m au voisinage de x_0 . En utilisant l'algorithme de Gram-Schmidt on obtient, dans un voisinage U_0 de x_0 , m nouvelles sections s'_1, \dots, s'_m qui forment une base orthonormée en tout point et dont les n premiers éléments sont toujours des sections de ξ . En définissant $h : \pi^{-1}(U_0) \rightarrow U_0 \times \mathbb{R}^m$ tel que $h : (x, s_i(x)) \mapsto (x, e_i)$, il vient que $h|_{\xi'_{U_0}}$ réalise un homéomorphisme $\xi'_{U_0} \rightarrow U_0 \times \mathbb{R}^m$. Ce qu'il fallait démontrer.

On a donc bien démontré que pour tout fibré ξ sur X , il existe un fibré ξ' et un entier m tel que $\xi \oplus \xi' = \epsilon^m$. Et donc, $\tilde{K}(X)$ est bien un groupe abélien. \square

Pendant, les classes d'équivalence pour la relation \mathfrak{R} ne forment pas un groupe, seulement un monoïde. Et pour cause, seuls les fibrés de dimension 0 sont inversibles pour \oplus . On inverse donc formellement les classes d'équivalence et on pose $K(X)$ l'ensemble des différences formelles $\xi_1 - \xi_2$ entre fibrés muni de la relation d'équivalence :

$$\xi_1 - \xi_2 = \xi'_1 - \xi'_2 \iff \xi_1 \oplus \xi'_2 \mathfrak{R} \xi'_1 \oplus \xi_2.$$

On a alors :

Proposition 2.16 $K(X)$ est un groupe abélien isomorphe à $\mathbb{Z} \times \tilde{K}(X)$.

Preuve. Soit $x_0 \in X$. On a une suite exacte courte :

$$0 \longrightarrow \tilde{K}(X) \longrightarrow K(X) \begin{array}{c} \xrightarrow{i^*} \\ \xleftarrow{p^*} \end{array} K(x_0) \longrightarrow 0$$

où i (respectivement p) est l'injection (respectivement la surjection) canonique $\{x_0\} \rightarrow X$ (respectivement $X \rightarrow \{x_0\}$). On a bien $i \circ p = id$ et la suite est scindée. \square

On peut également considérer une multiplication dans $K(X)$ en posant :

$$(\xi_1 - \xi_2)(\eta_1 - \eta_2) = \xi_1 \otimes \eta_1 - \xi_1 \otimes \eta_2 - \xi_2 \otimes \eta_1 + \xi_2 \otimes \eta_2.$$

On obtient alors :

Théorème 2.17 $K(X)$ est un anneau commutatif d'unité ϵ^0 .

Preuve. Il n'y a évidemment plus rien à faire.

2.3 Périodicité de Bott

On souhaite calculer le groupe de K-théorie de certains objets un tant soit peu plus attrayants que des points. Principalement, on déterminera $\tilde{K}(\mathbb{S}^n)$ pour tout n . Désormais, et sauf mention explicite du contraire, on ne considérera que des fibrés sur \mathbb{C} .

2.3.1 Fibré tangent à \mathbb{S}^n

On rappelle un résultat énoncé ci-dessus :

Proposition 2.18 *Posons pour tout $x \in \mathbb{S}^n$, $\xi_x := \{v \in \mathbb{R}^{n+1}, v \perp x\}$. Alors $\xi := \sqcup_{x \in \mathbb{S}^n} \xi_x$ muni de la topologie induite par $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}^{n+1}$ est un fibré, appelé fibré tangent à \mathbb{S}^n et noté $T\mathbb{S}^n$.*

Preuve. Seule l'existence de trivialisations locales est à vérifier. Soit donc $x \in \mathbb{S}^n$. Posons $U_x := \{y \in \mathbb{S}^n, (x, y) > 0\}$ la demi-sphère de pôle x , et $h_x : TS|_{U_x}^n \rightarrow U_x \times \text{Vect}(x)^\perp$ tel que $(y, v) \mapsto (y, w)$, où $w := v - (v, x)x$ est la projection orthogonale de v sur $\text{Vect}(x)^\perp$. L'application h_x est clairement continue d'inverse $(u, w) \rightarrow (u, w - \frac{(y, w)}{(x, y)}x)$ également continu. Donc h_x est un homéomorphisme, ce qui termine la démonstration. \square

La preuve du résultat incite à penser que, les trivialisations locales étant des demi-sphères entières, la caractérisation d'un fibré sur la sphère ne dépend essentiellement que de ce qui se passe à l'équateur. Cela est vrai dans un sens qu'on précise tout de suite.

2.3.2 Classifications des fibrés de la sphère

Soit $f : \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow GL(m, \mathbb{C})$. On construit un fibré de rang m sur \mathbb{S}^n de la manière suivante : on identifie les fibrés triviaux des deux hémisphères fermées (i.e. $\mathbb{S}_+ \times \mathbb{C}^m$ et $\mathbb{S}_- \times \mathbb{C}^m$) par $(x, v) \in (\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{C}^m) \sim (x, f(x)(v)) \in (\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{C}^m)$. On note ξ_f un tel fibré. On a alors :

Proposition 2.19 (Invariance par homotopie) *Soit ξ un fibré sur $[0, 1] \times X$. Alors les restrictions de ξ à $\{0\} \times X$ et à $\{1\} \times X$ sont isomorphes.*

Remarque : En particulier, si f et g sont homotopes alors $\xi_f = \xi_g$.

Preuve. Notons ξ_t la restriction de ξ à $\{t\} \times X$. Alors pour t' suffisamment proche de t , on a $\xi_{t'}$ isomorphe à ξ_t . En effet, si on note η le fibré induit sur $[0, 1] \times X$ par la projection $[0, 1] \times X \rightarrow X$ alors id_{ξ_t} se prolonge en une section continue de $\text{Hom}(\eta, \xi)$, les morphismes de η dans ξ , définie sur un voisinage de $\{t\} \times X$ (en utilisant une partition de l'unité) qui est un isomorphisme sur un voisinage.

Ainsi, la relation d'isomorphisme entre les ξ_t est une relation ouverte. Il n'y en a donc qu'une seule par connexité. \square

Proposition 2.20 *Tout fibré sur la sphère est de la forme ξ_f pour un certain f .*

Preuve. Soit ξ un fibré de rang m sur \mathbb{S}^n , notons ξ_+ (resp. ξ_-) sa restriction à l'hémisphère fermée \mathbb{D}_+^n (respectivement \mathbb{D}_-^n). Comme \mathbb{D}_\pm^n sont triviaux, il existe $h_\pm : \xi_\pm \rightarrow \mathbb{D}_\pm^n \times \mathbb{C}^m$ des trivialisations locales. Alors $h := h_+ h_-^{-1}$ définit une fonction $\mathbb{S}^{n-1} \rightarrow GL(m, \mathbb{C})$ qui convient.

Corollaire 2.21 *L'application
$$\{\mathbb{S}^{n-1} \rightarrow GL(m, \mathbb{C})\}_{/\sim} \xrightarrow{f} \{\text{fibrés de rang } m \text{ sur } \mathbb{S}^n\}_{/\sim'} \xrightarrow{\xi_f} \text{est}$$
 une bijection (où \sim (respectivement \sim') est la relation "être homotope à" (respectivement "être isomorphe à").*

Preuve. La surjectivité découle immédiatement de ce qui précède. Pour l'injectivité, on prend f et g deux fonctions $\mathbb{S}^{n-1} \rightarrow GL(m, \mathbb{C})$ telles que ξ_f soit isomorphe à ξ_g . Notons φ l'isomorphisme. Cela revient à se donner deux applications $\varphi_{\pm} : \mathbb{S}^{n-1} \times GL(m, \mathbb{C})$ avec la relation de compatibilité :

$$\forall b \in \mathbb{S}^{n-1}, g(b)\varphi_+(b) = \varphi_-(b)f(b)$$

Mais φ_{\pm} vues comme des fonctions $\mathbb{S}_{\pm} \rightarrow GL(m, \mathbb{C})$ sont homotopes à l'identité (par connexité de $GL(m, \mathbb{C})$). Par conséquent, f est homotope à g . \square

Exemple important 2.22

Notons H le fibré en droites canonique de \mathbb{S}^2 (la fibre au dessus de x est la droite vectorielle de \mathbb{R}^3 passant par x). Alors $(H \otimes H) \oplus 1 = \xi_{f_1}$ et $H \oplus H = \xi_{f_2}$ où

$$f_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{S}^1 & \rightarrow & GL(2, \mathbb{C}) \\ z & \mapsto & \begin{pmatrix} z^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \text{ et } f_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{S}^1 & \rightarrow & GL(2, \mathbb{C}) \\ z & \mapsto & \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix} \end{array}$$

Or f_1 et f_2 sont homotopes (par exemple par $\Theta : (t, z) \mapsto \begin{pmatrix} z^{2-t} & 0 \\ 0 & z^t \end{pmatrix}$), donc

$$(H \otimes H) \oplus 1 = H \oplus H$$

2.3.3 Périodicité de Bott

Les résultats de cette section ne seront pas démontrés. Le lecteur pourra se rapporter à [2] pour de plus amples informations.

On désire calculer $K(X \times \mathbb{S}^2)$ en fonction de $K(X)$. Pour cela, on se sert des résultats précédents. D'après l'exemple ci-dessus, H vérifie $(H - 1)^2 = 0$ dans $K(\mathbb{S}^2)$. Il vient donc qu'on a une injection naturelle : $\mathbb{Z}[H]/(H - 1)^2 \rightarrow K(\mathbb{S}^2)$.

On peut donc définir un morphisme (de groupes) :

$$\mu : K(X) \otimes \mathbb{Z}[H]/(H - 1)^2 \rightarrow K(X) \otimes K(\mathbb{S}^2) \rightarrow K(X \times \mathbb{S}^2)$$

où la deuxième flèche est le produit externe : concrètement, X et \mathbb{S}^2 étant des sous-espaces de $X \times \mathbb{S}^2$, tout fibré ξ sur X (respectivement ξ' sur \mathbb{S}^2) s'identifie canoniquement à un fibré de $X \times \mathbb{S}^2$ qu'on notera encore ξ (respectivement ξ'). Le produit externe de ξ et ξ' , c'est le produit dans $K(X \times \mathbb{S}^2)$ de ces deux fibrés.

On a alors le résultat fondamental suivant :

Théorème 2.23 (Théorème produit fondamental) *L'application μ est un isomorphisme de groupes.*

Preuve. Énonçons quand même les idées de la preuve. Le corollaire 2.21 vaut en fait également pour $X \times \mathbb{S}^2$ (la preuve est la même !). L'idée est donc de trouver des représentants simples des classes d'équivalence, ce qui se fait par réductions successives. Il se trouve qu'on finit par trouver une classe de fonctions dont on sait que les fibrés induits sont dans l'image de μ . La surjectivité est alors acquise. Un examen un peu plus minutieux de l'argument pour la surjectivité permet de construire un inverse pour μ et donc de conclure quant à l'injectivité.

On obtient des suites exactes de K-théorie à partir de suites exactes des ensembles de départ par le lemme admis qui suit :

Lemme 2.24 Soit X un espace connexe compact et A un fermé de X . La suite exacte $0 \rightarrow A \xrightarrow{i} X \xrightarrow{q} X/A \rightarrow 0$, où i et q désignent l'injection et le quotient, induit une suite exacte en K -théorie $\tilde{K}(X/A) \xrightarrow{q^*} \tilde{K}(X) \xrightarrow{i^*} \tilde{K}(A)$.

Remarque : La preuve revient à montrer que $\text{Ker}(i^*) = \text{Im}(q^*)$.

On cherche alors à étendre la suite exacte $\tilde{K}(X/A) \xrightarrow{q^*} \tilde{K}(X) \xrightarrow{i^*} \tilde{K}(A)$. Pour cela, on utilise le diagramme suivant, où CX et SX désignent le cône et la suspension de X :

$$\begin{array}{ccccccc}
A & \longrightarrow & X & \longrightarrow & X \cup CA & \longrightarrow & (X \cup CA) \cup CX & \longrightarrow & ((X \cup CA) \cup CX) \cup C(X \cup CA) & \longrightarrow & \dots \\
& & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
& & & & SA & & SX & & S(X/A) & &
\end{array}$$

La progression de la première ligne consiste à ajouter au dernier espace le cône de l'espace précédent. Les flèches verticales représentent les quotients par le cône fraîchement ajouté. Il importe dans ce diagramme que les cônes par lesquels on quotiente l'espace sont toujours contractiles. On pourra alors utiliser le lemme suivant :

Lemme 2.25 Si A est contractile, alors le quotient $q : X \rightarrow X/A$ induit en K -théorie une bijection $q^* : \tilde{K}(X/A) \rightarrow \tilde{K}(X)$.

Alors, le diagramme ci-dessus et les lemmes 2.24 et 2.25 permettent de décrire une suite exacte plus longue qu'on présente dans un troisième lemme :

Lemme 2.26 La suite suivante est exacte :

$$\dots \rightarrow \tilde{K}(S(X/A)) \rightarrow \tilde{K}(SX) \rightarrow \tilde{K}(SA) \rightarrow \tilde{K}(X) \rightarrow \tilde{K}(A).$$

Du théorème 2.23 et des lemmes 2.24, 2.25 et 2.26, on peut déduire :

Théorème 2.27 (Périodicité de Bott) L'application $\beta : \tilde{K}(X) \rightarrow \tilde{K}(S^2X)$ définie par $\beta(\alpha) = (H - 1) * \alpha$ est un isomorphisme de groupe.

où S^2X représente la suspension double de X et $*$ la multiplication externe. La notation est d'autant plus heureuse que $SS^n = S^{n+1}$.

On en déduit donc :

Corollaire 2.28 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\tilde{K}(S^{2n+1}) = 0$ et $\tilde{K}(S^{2n}) = \mathbb{Z}$ lequel est engendré par $(H - 1) * \dots * (H - 1)$

La périodicité de Bott 2.27 permet aussi d'établir la suite exacte périodique de K -théorie suivante, à partir du lemme 2.26.

Proposition 2.29 Soit X un espace connexe compact et A un fermé de X . La suite suivante est exacte, où SX désigne la suspension de X :

$$\begin{array}{ccccc}
\tilde{K}(X/A) & \rightarrow & \tilde{K}(X) & \rightarrow & \tilde{K}(A) \\
\uparrow & & & & \downarrow \\
\tilde{K}(SA) & \leftarrow & \tilde{K}(SX) & \leftarrow & \tilde{K}(S(X/A))
\end{array}$$

3 Fin de la preuve

3.1 Les opérations d'Adams

On définit très généralement une famille de morphisme d'anneaux $K(X) \rightarrow K(X)$ ayant des propriétés sympathiques. Nous verrons par la suite que ces morphismes imposent dans le cas de \mathbb{S}^{2n+1} des conditions arithmétiques qui s'avéreront suffisamment restrictives pour terminer la preuve. On commence d'abord par un résultat assez indépendant de notre étude mais qui interviendra de manière cruciale juste après :

Théorème 3.1 (Splitting Principle) *Soit ξ un fibré sur X . Notons $K^*(X) = \tilde{K}(X) \oplus \tilde{K}(SX)$ Alors il existe un compact $F(\xi)$ et une application $p : F(\xi) \rightarrow X$ tel que :*

- i) $p^* : K^*(X) \rightarrow K^*(F(\xi))$ soit injectif*
- ii) $p^*(\xi)$ se décompose en somme de fibré en droites.*

En particulier, F est injectif en K -théorie.

Preuve. Ce résultat sera admis. Comme précisé ci-dessus, il s'agit d'un résultat général (et difficile !) assez indépendant de ce qui nous intéresse. Le lecteur intéressé pourra se rapporter à [2] (p.66-72) pour de plus amples informations.

Théorème 3.2 (Opérations d'Adams) *Il existe $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille de morphismes d'anneaux $K(X) \rightarrow K(X)$, induits par les puissances extérieures, définis quelque soit X compact et vérifiant les propriétés suivantes :*

- i) $f^*\psi_n = \psi_n f^*$ pour tout $f : X \rightarrow Y$ (naturalité)*
- ii) $\psi_n \psi_m = \psi_{nm}$*
- iii) $\psi_n(L) = L^n$ si L est un fibré vectoriel en droites*
- iv) $\psi_p(\alpha) \equiv \alpha^p \pmod{p}$ si p est un nombre premier.*

La dernière assertion du théorème signifiant qu'il existe $\beta \in K(X)$ (dépendant a priori de α) tel que $\psi_p(\alpha) - \alpha^p = p\beta$.

Preuve. Pour ξ un fibré vectoriel sur X , posons

$$\psi_n(\xi) = s_n(\Lambda_1(\xi), \dots, \Lambda_n(\xi)) \tag{1}$$

où $\Lambda^i(\xi)$ est la i -ième puissance extérieure de ξ , s_n le n -ième polynôme de Newton.

Rappelons ce dont il s'agit : le polynôme $t_1^n + \dots + t_k^n$ est un polynôme symétrique en ses indéterminées. Il existe donc, en vertu du théorème des fonctions symétriques, un unique polynôme s_n tel que

$$t_1^n + \dots + t_k^n = s_n(\sigma_1, \dots, \sigma_k)$$

où $\sigma_1, \dots, \sigma_k$ sont les k premières fonctions symétriques élémentaires. Cette définition a bien un sens vu que s_n ne dépend pas de k . En effet, par récurrence (et unicité) on passe de $k+1$ à k en posant $t_{k+1} = 0$. s_n est le n -ième polynôme de Newton.

- i)* est alors immédiat et vient simplement du fait que $f^*\Lambda^i(E) = \Lambda^i(f^*E)$.
- ii)* est clair également (on a tout fait pour !).

Montrons l'additivité des ψ_n . Pour cela, on utilise le *splitting principle* 3.1 : si ξ_1, ξ_2 sont deux fibrés, on commence par tirer en arrière ξ_1 pour le décomposer en somme de fibrés en droites, puis on fait pareil pour ξ_2 . Il suffit donc de vérifier l'additivité sur les fibrés de la forme $L_1 \oplus \dots \oplus L_m$ vu que F est injectif en K-théorie.

Posons $\Lambda(\xi)(t) = \sum_{m \in \mathbb{N}} \Lambda^m(\xi)t^m \in K(X)[t]$. L'application $\Lambda(\xi)$ est bien un polynôme car $\Lambda^m(\xi) = 0$ dès que $m > \text{rg}(\xi)$ (où $\text{rg}(\xi)$ est le rang de ξ). De la proposition 2.10, il advient que :

$$\Lambda(L_1 \oplus \dots \oplus L_m)(t) = \prod_{k=1}^m \Lambda(L_k)(t) = \prod_{k=1}^m (1 + L_k t).$$

En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\Lambda^n(L_1 \oplus \dots \oplus L_m) = \sigma_n(L_1, \dots, L_m)$. On peut donc conclure par (1) qu'on a bien :

$$\psi_n(L_1 \oplus \dots \oplus L_m) = s_n(\sigma_1(L_1, \dots, L_m), \dots, \sigma_k(L_1, \dots, L_m)) = L_1^n \oplus \dots \oplus L_m^n.$$

L'application ψ_n , additive sur les fibrés, induit ainsi un morphisme de groupes sur $K(X)$ via $\psi(\xi_1 - \xi_2) = \psi(\xi_1) - \psi(\xi_2)$ et ψ est additif sur $K(X)$.

La propriété de multiplicativité (*i.e.* $\psi_n(\xi_1 \otimes \xi_2) = \psi_n(\xi_1) \otimes \psi_n(\xi_2)$) ainsi que *iii*) et *iv*) se démontrent de la même façon, en tirant en arrière d'abord pour décomposer les fibrés en somme de fibrés en droites, en vérifiant les formules sur ces types de fibrés et en concluant par l'injectivité en K-théorie de F . \square

On cherche à présent à utiliser la structure des opérations d'Adams sur $\tilde{K}(\mathbb{S}^n)$ pour achever notre preuve. Notons que ψ_k se restreint naturellement à un opérateur de $\tilde{K}(X)$ dans $\tilde{K}(X)$ en gardant les mêmes propriétés : pour vérifier que ψ_k laisse $\tilde{K}(X)$ stable, il suffit de voir, en utilisant la preuve de la proposition 2.16 que $\tilde{K}(X)$ est le noyau de l'homomorphisme $K(X) \rightarrow K(x_0)$ avec x_0 un élément quelconque de X , puis utiliser la propriété *i*). On obtient alors une proposition qui nous sera utile pour conclure :

Proposition 3.3 *L'application $\psi_k : \tilde{K}(\mathbb{S}^{2n}) \rightarrow \tilde{K}(\mathbb{S}^{2n})$ est la multiplication par k^n .*

Preuve. On procède par récurrence sur n . Pour $n = 1$, étant donné l'additivité de ψ_k , on peut se contenter de démontrer le résultat pour un générateur de $K(\mathbb{S}^2)$, par exemple pour $\alpha = H - 1$ avec H le fibré en droites canonique de \mathbb{S}^2 .

Comme ψ_k est un morphisme d'anneaux et H est un fibré en droites, on a $\psi_k(\alpha) = H^k - 1$. Or $H^k - 1 = (1 + \alpha)^k - 1$. Mais α^2 ainsi que toutes ses puissances supérieures sont nulles par l'exemple 2.22, donc $\psi_k(\alpha) = 1 + k\alpha - 1 = k\alpha$.

Alors, si l'on suppose le résultat vrai pour \mathbb{S}^{2n-2} , on utilise le produit externe (qui est un isomorphisme par la périodicité de Bott 2.27) $\tilde{K}(\mathbb{S}^2) \otimes \tilde{K}(\mathbb{S}^{2n-2}) \rightarrow \tilde{K}(\mathbb{S}^{2n})$. Alors si $\alpha \in \tilde{K}(\mathbb{S}^2)$ et $\beta \in \tilde{K}(\mathbb{S}^{2n-2})$, on a $\psi_k(\alpha * \beta) = \psi_k(\alpha) * \psi_k(\beta) = k\alpha * k^{n-1}\beta = k^n(\alpha * \beta)$, ce qui conclut la preuve. \square

3.2 Démonstration du théorème d'Adams

On avait annoncé dans l'introduction que la parallélisabilité de la sphère donnait à la sphère une structure proche de celle d'un groupe. Le lemme qui suit précise cela.

Lemme 3.4 *Si \mathbb{S}^n est parallélisable, alors \mathbb{S}^n est un H-espace.*

Definition *Un H-espace est un espace topologique muni d'une multiplication continue μ (qu'on appelle multiplication de H-espace) possédant un élément neutre à la fois à gauche et à droite, que l'on notera en général e . À la différence d'un groupe topologique, on ne suppose pas l'existence d'inverse ou l'associativité.*

Preuve. Si \mathbb{S}^n est parallélisable, on dispose d'une base de vecteurs $(v_1(x), \dots, v_n(x))$ en tout point x . Quitte à appliquer le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, on peut alors supposer que $(x, v_1(x), \dots, v_n(x))$ est une base orthonormée de \mathbb{R}^{n+1} . On note e_1 le premier vecteur de la base canonique de \mathbb{R}^{n+1} . On considère alors la rotation $\alpha_x \in SO(n+1)$ qui à la base orthonormée $(e_1, v_1(e_1), \dots, v_n(e_1))$ associe $(x, v_1(x), \dots, v_n(x))$ (ces deux bases ont même orientation par continuité des v_k et du déterminant), et on note $\mu(x, y) = \alpha_x(y)$. L'application μ est bien une multiplication de H-espace puisqu'elle possède un élément neutre e_1 : en effet α_{e_1} est l'identité, donc $\mu(e_1, y) = y$ quelque soit y , et $\mu(x, e_1) = x$ quelque soit x . C'est bien une application continue puisque le procédé de Gram-Schmidt déforme les vecteurs de manière continue. On a donc prouvé que \mathbb{S}^n est un H-espace. \square

La fin de la preuve consiste à traiter le cas impair : on prouve que si l'on peut munir \mathbb{S}^{2n-1} d'une structure de H-espace, alors $n = 1, 2$ ou 4 (ce qui correspond à $\mathbb{S}^1, \mathbb{S}^3$ et \mathbb{S}^7). Pour cela, on va associer à la multiplication de H-espace une autre application dont l'invariant de Hopf (qu'on définira) va être contraint, ce qui imposera le choix de n .

On note \mathbb{D}^n le disque unité fermé de \mathbb{R}^n .

Tout d'abord, on associe de manière naturelle à une application $f : \mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ une autre application $\widehat{f} : \mathbb{S}^{2n-1} \rightarrow \mathbb{S}^n$. Pour cela, on identifie \mathbb{S}^{2n-1} au bord du disque D^{2n} , soit à $\partial(\mathbb{D}^n \times \mathbb{D}^n) = \partial\mathbb{D}^n \times \mathbb{D}^n \cup \mathbb{D}^n \times \partial\mathbb{D}^n$, et \mathbb{S}^n à la réunion de deux disques \mathbb{D}^n , joints sur leurs bords, qu'on notera \mathbb{D}_+^n et \mathbb{D}_-^n . Alors, on définit \widehat{f} séparément sur $\partial\mathbb{D}^n \times \mathbb{D}^n$ et sur $\mathbb{D}^n \times \partial\mathbb{D}^n$, comme suit :

$$\widehat{f} : (x, y) \mapsto \begin{cases} |y|f(x, y/|y|) \in \mathbb{D}_+^n & \text{si } (x, y) \in \partial\mathbb{D}^n \times \mathbb{D}^n \\ |x|f(x/|x|, y) \in \mathbb{D}_-^n & \text{si } (x, y) \in \mathbb{D}^n \times \partial\mathbb{D}^n \end{cases}$$

\widehat{f} est bien à valeurs dans \mathbb{D}^n puisque f est à valeurs dans \mathbb{S}^{n-1} , et bien continue puisque les deux expressions données coïncident sur $\partial\mathbb{D}^n \times \partial\mathbb{D}^n = \mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^{n-1}$ avec f . Notons que si f est surjective (ce sera le cas quand on considèrera une multiplication de H-espace), \widehat{f} l'est également.

Il nous reste à définir un dernier outil topologique, à savoir l'invariant de Hopf. On se place dans le cas qui nous intéresse en remplaçant n par $2n - 1$. On considère $f : \mathbb{S}^{4n-1} \rightarrow \mathbb{S}^{2n}$, qu'on peut supposer surjective. On note C_f la sphère \mathbb{S}^{2n} à laquelle on rattache la boule unité fermée de \mathbb{R}^{4n} comme suit : à un élément de \mathbb{S}^{4n-1} , le bord de cette boule, on associe son image par f qui se trouve sur \mathbb{S}^{2n} .

Comme f est supposée surjective, quotienter C_f par $\mathbb{S}^{2n} = f(\mathbb{S}^{4n-1})$ revient à identifier le bord de la boule unité de \mathbb{R}^{4n} à un point. Cela prouve donc que $C_f/\mathbb{S}^{2n} = \mathbb{S}^{4n}$, en utilisant par exemple la projection stéréographique.

Pour définir l'invariant de Hopf, on a encore besoin d'une conséquence du résultat 2.29 qui donne la suite exacte :

$$\begin{array}{ccccc} \tilde{K}(X/A) & \rightarrow & \tilde{K}(X) & \rightarrow & \tilde{K}(A) \\ & & \uparrow & & \downarrow \\ \tilde{K}(SA) & \leftarrow & \tilde{K}(SX) & \leftarrow & \tilde{K}(S(X/A)) \end{array}$$

Dans notre situation, on a $X = C_f$, $A = \mathbb{S}^{2n}$ et $X/A = \mathbb{S}^{4n}$. Donc d'après le corollaire à la périodicité de Bott 2.27, $\tilde{K}(SX) = \tilde{K}(S(X/A)) = 0$. On a alors la suite exacte suivante :

$$0 \rightarrow \tilde{K}(\mathbb{S}^{4n}) \rightarrow \tilde{K}(C_f) \rightarrow \tilde{K}(\mathbb{S}^{2n}) \rightarrow 0.$$

Notons $\alpha \in \tilde{K}(C_f)$ l'image du générateur de $\tilde{K}(\mathbb{S}^{4n})$ et $\beta \in \tilde{K}(C_f)$ un élément de l'image réciproque du générateur de $\tilde{K}(\mathbb{S}^{2n})$. Comme le carré du générateur de $\tilde{K}(\mathbb{S}^{2n})$ est nul, β^2 s'envoie sur zéro, donc comme la suite est exacte, il existe h entier tel que $\beta^2 = h\alpha$ (α , image du générateur de $\tilde{K}(\mathbb{S}^{4n})$, est aussi le générateur de son image puisqu'il s'agit ici de sympathiques morphismes de groupes). Or la valeur de h modulo 2 ne dépend pas du choix de β dans l'image réciproque du générateur de $\tilde{K}(\mathbb{S}^{2n})$. En effet, deux éléments de cette image réciproque diffèrent d'un élément du noyau, qui est donc également un élément de l'image de $\tilde{K}(\mathbb{S}^{4n})$ puisque la suite est exacte. Un tel élément s'écrit donc $\beta + m\alpha$. Comme $\alpha^2 = 0$, son carré vaut $\beta^2 + 2m\alpha\beta = \beta^2 \pmod{2}$. Il s'ensuit que h définit bien un invariant lié à f uniquement, qu'on appellera *invariant de Hopf modulo 2*.

Lemme 3.5 *Si $g : \mathbb{S}^{2n-1} \times \mathbb{S}^{2n-1} \rightarrow \mathbb{S}^{2n-1}$ est une multiplication de H -espace, alors l'application associée $\hat{g} : \mathbb{S}^{4n-1} \rightarrow \mathbb{S}^{2n}$ a 1 pour invariant de Hopf modulo 2.*

Preuve. On note e l'élément neutre de g , $f = \hat{g}$ et Φ l'application caractéristique liée à la construction de C_f , qui peut être vue une application $(\mathbb{D}^{2n} \times \mathbb{D}^{2n}, \partial(\mathbb{D}^{2n} \times \mathbb{D}^{2n})) \rightarrow (C_f, \mathbb{S}^{2n})$, où la notation X, Y désigne l'espace X/Y . La preuve va reposer sur le diagramme commutatif suivant, où l'on a aussi noté $\tilde{K}(X, Y) = \tilde{K}(X/Y)$. Les flèches horizontales représentent les produits. La flèche diagonale représente le produit externe, qui est équivalent au produit externe $\tilde{K}(\mathbb{S}^{2n}) \otimes \tilde{K}(\mathbb{S}^{2n}) \rightarrow \tilde{K}(\mathbb{S}^{4n})$, qui est un isomorphisme d'après la périodicité de Bott 2.27.

$$\begin{array}{ccc} \tilde{K}(C_f) \otimes \tilde{K}(C_f) & \longrightarrow & \tilde{K}(C_f) \\ \uparrow \simeq & & \uparrow \\ \tilde{K}(C_f, \mathbb{D}_-^{2n}) \otimes \tilde{K}(C_f, \mathbb{D}_+^{2n}) & \longrightarrow & \tilde{K}(C_f, \mathbb{S}^{2n}) \\ \Phi^* \otimes \Phi^* \downarrow & & \Phi^* \downarrow \simeq \\ \tilde{K}(\mathbb{D}^{2n} \times \mathbb{D}^{2n}, \partial\mathbb{D}^{2n} \times \mathbb{D}^{2n}) \otimes \tilde{K}(\mathbb{D}^{2n} \times \mathbb{D}^{2n}, \mathbb{D}^{2n} \times \partial\mathbb{D}^{2n}) & \longrightarrow & \tilde{K}(\mathbb{D}^{2n} \times \mathbb{D}^{2n}, \partial(\mathbb{D}^{2n} \times \mathbb{D}^{2n})) \\ \downarrow \simeq & \nearrow \simeq & \\ \tilde{K}(\mathbb{D}^{2n} \times \{e\}, \partial\mathbb{D}^{2n} \times \{e\}) \otimes \tilde{K}(\{e\} \times \mathbb{D}^{2n}, \{e\} \times \partial\mathbb{D}^{2n}) & & \end{array}$$

La commutativité du diagramme est due au fait que tous les produits sont naturels et définis de manière agréable, comme le rappelle la propriété 2.10, et se comportent sympathiquement par rapport aux applications Φ^* et $\Phi^* \otimes \Phi^*$. Les définitions de f et de Φ impliquent qu'on peut restreindre Φ à un homéomorphisme de $\mathbb{D}^{2n} \times \{e\}$ dans \mathbb{D}_+^{2n} et de $\{e\} \times \mathbb{D}^{2n}$ dans \mathbb{D}_-^{2n} , ce qui prouve que Φ^* est un morphisme de $\tilde{K}(\mathbb{D}^{2n} \times \{e\}, \partial\mathbb{D}^{2n} \times \{e\}) = \tilde{K}(\mathbb{D}^{2n} \times \mathbb{D}^{2n}, \partial\mathbb{D}^{2n} \times \mathbb{D}^{2n})$ dans $\tilde{K}(C_f, \mathbb{D}_-^{2n})$, et la flèche $\Phi^* \otimes \Phi^*$ est donc bien un morphisme défini comme sur le diagramme.

L'élément $\beta \otimes \beta$ de $\tilde{K}(C_f) \otimes \tilde{K}(C_f)$, identifié à un élément de $\tilde{K}(C_f, \mathbb{D}_-^{2n}) \otimes \tilde{K}(C_f, \mathbb{D}_+^{2n})$, s'envoie par $\Phi^* \otimes \Phi^*$ sur un générateur des quatre ensembles du bas du diagramme qui sont isomorphes. Par commutativité du diagramme, son produit β^2 est donc l'image d'un générateur de $\tilde{K}(C_f, \mathbb{S}^{2n}) =$, c'est-à-dire α , au signe près, puisque α est un générateur de $\mathbb{Z} \simeq \tilde{K}(\mathbb{S}^{4n})$ d'après le corollaire 2.28. On a donc prouvé que l'invariant de Hopf modulo 2 de f est 1. \square

Théorème 3.6 *Si $f : \mathbb{S}^{4n-1} \rightarrow \mathbb{S}^{2n}$ est une application d'invariant de Hopf modulo 2 égal à 1, alors $n = 1, 2$ ou 4.*

Preuve. Soit α et β les deux éléments de $\tilde{K}(C_f)$ qui ont défini l'invariant de Hopf modulo 2. On va étudier l'image de ces éléments par les opérations d'Adams définies en 3.2 d'ordre 2 et 3. Comme α est l'image d'un élément x de $\tilde{K}(\mathbb{S}^{4n})$ par une application g^* , les propriétés *i*) et 3.3 donnent alors :

$$\psi_k(\alpha) = \psi_k(g^*(x)) = g^*(\psi_k(x)) = g^*(k^{2n}x) = k^{2n}g^*(x) = k^{2n}\alpha.$$

On fait le même genre de travail pour β , qui est un antécédent d'un élément y de $\tilde{K}(\mathbb{S}^{2n})$ par une application h^* . On a alors :

$$h^*(\psi_k(\beta)) = \psi_k(y) = k^n y = h^*(k^n \beta),$$

ce qui prouve que $\psi_k(\beta)$ et $k^n \beta$ diffèrent d'un élément du noyau, qu'on notera $\mu_k \alpha$, avec μ_k un entier.

On va maintenant utiliser le fait que $\psi_k \psi_l = \psi_l \psi_k (= \psi_{lk})$.

$$\psi_l \psi_k(\beta) = \psi_l(k^n \beta + \mu_k \alpha) = k^n (l^n \beta + \mu_l \alpha) + \mu_k l^{2n} \alpha.$$

On voudrait alors identifier le coefficient en α de cette expression avec celui de $\psi_k \psi_l(\beta)$ (qui est le même en échangeant l et k). Vérifions rapidement que si $a_1 \alpha + b_1 \beta = a_2 \alpha + b_2 \beta$, on peut identifier les coefficients deux à deux. On a $(a_1 - a_2)\alpha = (b_2 - b_1)\beta$. Or l'élément de gauche est dans le noyau de l'application qu'on a noté h^* , et β s'envoie par h^* sur un élément non nul, ce qui impose alors $b_2 = b_1$ et par suite $a_1 = a_2$.

On obtient alors pour $k = 2$ et $l = 3$ l'égalité suivante, où μ_2 et μ_3 sont des entiers :

$$2^n \mu_3 + \mu_2 3^{2n} = 3^n \mu_2 + \mu_3 2^{2n},$$

ou encore :

$$2^n (2^n - 1) \mu_3 = 3^n (3^n - 1) \mu_2.$$

Or $\psi_2(\beta) \equiv \beta^2 \equiv \alpha \pmod{2}$ en utilisant l'hypothèse sur l'invariant de Hopf faite dans le théorème 3.6 qu'on démontre et la propriété *iv*) des opérations d'Adams. D'autre part, $\psi_2(\beta) = 2^n \beta + \mu_2 \alpha \equiv \mu_2 \alpha \pmod{2}$, ce qui prouve que μ_2 est un entier impair.

Alors, comme 2^n divise $3^n (3^n - 1) \mu_2$ et est premier avec 3^n et μ_2 puisque ce sont des entiers impairs, 2^n divise $3^n - 1$ et le lemme suivant d'arithmétique conclut la preuve.

Lemme 3.7 *Si 2^n divise $3^n - 1$, alors $n = 1, 2$ ou 4 .*

Preuve. Montrons dans un premier temps que si l'on note $n = 2^l \times m$ avec m impair, la plus grande puissance de 2 divisant $3^n - 1$ est 2^l si $l = 0$ et 2^{l+2} sinon.

Si $l = 0$, n est impair et on a alors $3^n \equiv -1 \pmod{4}$ puisque $3 \equiv -1 \pmod{4}$, et donc $3^n - 1 \equiv 2 \pmod{4}$, ce qui prouve que 2 est la plus grande puissance de 2 divisant $3^n - 1$. Notons que passer de l à $l + 1$ revient à multiplier n par 2, et on utilisera alors l'identité $3^{2n} - 1 = (3^n - 1)(3^n + 1)$. De deux choses, l'une : si n est pair (c'est-à-dire $l \geq 1$), $3^n \equiv 1 \pmod{8}$, et donc la plus grande puissance de 2 divisant $3^{2n} - 1$ est 2 fois celle divisant $3^n - 1$; si n est impair, $3^n \equiv 3 \pmod{8}$, et la plus grande puissance de 2 divisant $3^{2n} - 1$ est 4 fois celle divisant $3^n - 1$, c'est-à-dire 8, d'après le cas $l = 0$. Ceci prouve par récurrence le résultat énoncé ci-dessus.

Si 2^n divise $3^n - 1$, on a donc en particulier $n \leq l + 2$, d'où $2^l \leq n \leq l + 2$, ce qui est exclu si $l \geq 3$. Comme $n \leq l + 2$, il ne reste plus qu'à étudier les cas $n = 1, 2, 3$ et 4 , ce qui conclut la preuve. \square

Le cas impair du théorème d'Adams est démontré en recollant les morceaux : si la sphère \mathbb{S}^{2n-1} est parallélisable, elle est munie d'une multiplication de H-espace d'après le lemme 3.4. Le lemme 3.5 donne que l'application associée à cette multiplication admet 1 comme invariant de Hopf modulo 2, ce qui impose la valeur de n par le théorème 3.6.

Conclusion

- Le théorème d'Adams qu'on a démontré est un résultat *topologique* lié à la structure *algébrique* de H-espace.
- On a montré que les sphères parallélisables \mathbb{S}^0 , \mathbb{S}^1 et \mathbb{S}^3 peuvent même être munies d'une structure de groupe topologique. En ce qui concerne \mathbb{S}^7 , il a en fait été démontré qu'il est impossible de munir la sphère d'une multiplication associative, par exemple par James dans [3].

Références

- [1] *K-theory, an introduction*, Max Karoubi,
- [2] *Vector bundles and K-theory*, Allen Hatcher, 2009, disponible sur <http://www.math.cornell.edu/hatcher>.
- [3] *Multiplication on Spheres (II)*, I.M. James, disponible sur <http://www.ams.org/journals/tran/1957-084-02/S0002-9947-1957-0090812-8>.