Équations de Hamilton-Jacobi et contrôle optimal

Radu Ignat et Arnaud Basson

Exposé de maîtrise sous la direction de

Benoît Perthame

11 juin 2001

Table des matières

Introduction

Le but de cet exposé est d'étudier la définition des solutions des équations de Hamilton-Jacobi. On montre d'abord que la notion classique de solution est insuffisante, en utilisant la méthode des caractéristiques qui met en évidence l'apparition des singularités. On s'intéresse ensuite à la définition de solutions généralisées. On introduit la notion de solutions de viscosité, et on étudie leurs propriétés (existence et unicité). Pour prouver l'existence des solutions de viscosité on passe par l'intermédiaire de la théorie du contrôle des équations différentielles ordinaires qui fournit une solution pour un Hamiltonien convexe.

Référence : le texte de cet exposé s'appuie essentiellement sur [5].

1 Méthode des caractéristiques

On étudie le problème de Dirichlet pour l'équation de Hamilton-Jacobi :

$$\begin{cases} H(\nabla u(x), u(x), x) = 0 & \text{dans } U \\ u = g & \text{sur } \Gamma \subset \partial U \end{cases} \tag{1}$$

où U est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $H : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est une fonction donnée (le Hamiltonien), et $u : \bar{U} \to \mathbb{R}$ est la fonction inconnue. On impose une condition au bord sur une partie de ∂U. On note : $H(p, z, x)$, avec $p = (p_1, \dots, p_n)$, et $x = (x_1, \dots, x_n)$; $\nabla_p H = (H_{p_1}, \dots, H_{p_n})$, $\nabla_x H = (H_{x_1}, \dots, H_{x_n})$. On supposera en outre que toutes les données sont des fonctions régulières.

1.1 Équations caractéristiques

La méthode des caractéristiques consiste à introduire des chemins dans U (appelés caractéristiques) le long desquels on va résoudre l'équation. Plus précisément, on va écrire l'équation vérifiée par u le long du chemin, et on prendra des chemins qui partent d'un point frontière où on connaît la valeur de u grâce à g pour avoir une condition initiale. Toutefois, comme l'équation (1) fait intervenir ∇u, on sera contraint de rajouter une équation pour pouvoir calculer non seulement u le long du chemin, mais aussi son gradient.

Considérons donc une solution régulière u de l'équation, et un chemin $\vec{x} : I \to U$ (I intervalle de $\mathbb{R}$). On note

$$\vec{x}(s) = (x^1(s), \dots, x^n(s)),$$
$$z(s) = u(\vec{x}(s)),$$
$$\vec{p}(s) = \nabla u(\vec{x}(s)) = (p^1(s), \dots, p^n(s)),$$

et les dérivées par rapport à s seront notées avec un point. On a

$$\dot{z}(s) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_j}(\vec{x})\dot{x}^j$$

$$\dot{p}^i(s) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i}(\vec{x})\dot{x}^j.$$

Or $\frac{d}{dx_i}(H(\nabla u, u, x)) = 0$, i.e.

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial p_j}(\nabla u, u, x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial H}{\partial z}(\nabla u, u, x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + \frac{\partial H}{\partial x_i}(\nabla u, u, x) = 0$$

On obtient donc un système fermé d'équations sur z, $\vec{p}$, $\vec{x}$ en imposant

$$\dot{x}^j(s) = \frac{\partial H}{\partial p_j}(\vec{p}, z, \vec{x}).$$

En effet, on déduit de ces égalités le système des $2n+1$ équations caractéristiques de l'EDP (1) :

$$\begin{cases} \text{(a)} & \dot{\vec{p}} = -\dfrac{\partial H}{\partial z}(\vec{p}, z, \vec{x})\vec{p} - \nabla_x H(\vec{p}, z, \vec{x}) \\ \text{(b)} & \dot{z} = \vec{p} \cdot \nabla_p H(\vec{p}, z, \vec{x}) \\ \text{(c)} & \dot{\vec{x}} = \nabla_p H(\vec{p}, z, \vec{x}) \end{cases} \tag{2}$$

En résumé :

Proposition 1.1 *Si H est de classe C^1 et u est une solution de classe C^2 de l'EDP (1) sur U et si $\vec{x}$ est un chemin dans U satisfaisant (2c) alors (2a) et (2b) sont vérifiés.*

1.2 Cas du problème de Cauchy – Lien avec la mécanique

Voyons la forme des équations caractéristiques dans le cas du problème de Cauchy :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + H(\nabla_x u, x) = 0 \qquad \text{dans } U \times \mathbb{R} \tag{3}$$

U est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $H : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est donnée (on notera respectivement p et x ses variables) et $u : U \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est la fonction inconnue (de variables x et t). On ajoute une condition initiale :

$$u(x, 0) = g(x) \qquad \text{sur } U.$$

C'est un cas particulier du problème de Dirichlet en dimension $n+1$, en effet l'équation se réécrit

$$\tilde{H}(\nabla u, u, y) = 0$$

avec

$$\tilde{H}(q, z, y) = p_{n+1} + H(p, x),$$
$$y = (x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, q = (p, p_{n+1}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}.$$

Les équations caractéristiques s'écrivent donc :

$$\dot{\vec{p}} = -\nabla_x H(\vec{p}, \vec{x}) \tag{4}$$

$$\dot{p}_{n+1} = 0$$

$$\dot{z} = \vec{q} \cdot \nabla_q H = \vec{p} \cdot \nabla_p H + p_{n+1}$$

$$\dot{\vec{x}} = \nabla_p H \tag{5}$$

et $\dot{t} = 1$ ce qui permet d'identifier le temps t et la variable s. Les équations (4) et (5) sont appelées les équations de Hamilton. En mécanique analytique le chemin $\vec{x}(t)$ représente la trajectoire, $\vec{p}$ l'impulsion et H l'Hamiltonien est l'énergie : $H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(\vec{x})$. Les équations de Hamilton ne sont autres que $\vec{p} = m\vec{v}$ et $\dot{\vec{p}} = -\nabla V$. On a $p_{n+1} = -H(\vec{p}, \vec{x})$ et $\dot{p}_{n+1} = 0$, ce qui traduit la conservation de l'énergie. Enfin, z représente l'action, on a $\dot{z} = \vec{p} \cdot \vec{v} - H = \frac{\vec{p}^2}{2m} - V = L$ le Lagrangien, et on retrouve bien que l'action z est l'intégrale du Lagrangien (pour plus de détails, cf. [1]).

1.3 Conditions au bord

On revient au cas du problème de Dirichlet. On veut résoudre l'équation en construisant la solution u le long des chemins $\vec{x}$ vérifiant les équations caractéristiques, en partant du bord de U. On va donc étudier la construction de u au voisinage d'un point x^0 de ∂U. Pour simplifier, on suppose qu'au voisinage de ce point, la frontière de U est "droite", i.e. incluse dans $\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$, et que U est "au dessus" de ∂U i.e. localement contenu dans $\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}_+^*$. On peut toujours, si U est suffisamment régulier, se ramener à ce cas par un difféomorphisme local qui "aplatit" la frontière de U, car un tel difféomorphisme ne modifie pas la forme de l'équation (1).

On cherche des conditions initiales pour les équations caractéristiques : $\vec{p}(0) = p^0$, $z(0) = z^0$, et $\vec{x}(0) = x^0$. Nécessairement, $z^0 = g(x^0)$. On veut avoir

$$u(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) = g(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) \quad \text{(condition de Dirichlet)}$$

d'où

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}(x^0) = \frac{\partial g}{\partial x_i}(x^0) \quad 1 \le i \le n-1,$$

et de plus il faut $H(p^0, z^0, x^0) = 0$ pour réaliser l'équation. Ceci fournit n équations pour $p_1^0, \dots, p_n^0$:

$$\begin{cases} z^0 = g(x^0) & \\ p_i^0 = g_{x_i}(x^0) & 1 \le i \le n-1 \\ H(p^0, z^0, x^0) = 0 & \end{cases}$$

Si le triplet (p^0, z^0, x^0) vérifie ces conditions, il est dit admissible. Remarquons que x^0 est donné, z^0 et les $n-1$ premières composantes de p^0 sont déterminés de façon unique, mais pour p_n^0 il peut y avoir zéro, une ou plusieurs solutions.

On suppose dans la suite que (p^0, z^0, x^0) est admissible. Cependant on a besoin de conditions initiales pour les équations caractéristiques non seulement pour le chemin partant de x^0, mais aussi pour tous les points frontière au voisinage de x^0. On recherche donc, pour $y = (y', 0) \in \partial U$ au voisinage de x^0, un triplet $(q(y), g(y), y)$ admissible : la fonction q doit vérifier les équations

$$q^i(y) = g_{x_i}(y) \quad (1 \le i \le n-1),$$

$$H(q(y), g(y), y) = 0.$$

Proposition 1.2 *Soit (p^0, z^0, x^0) un triplet tel que $H(p^0, z^0, x^0) = 0$. On suppose que $H_{p_n}(p^0, z^0, x^0) \neq 0$. Alors il existe une fonction q régulière, définie au voisinage de x^0 dans ∂U telle que pour tout y proche de x^0, le triplet $(q(y), g(y), y)$ soit admissible.*

Démonstration. On applique le théorème des fonctions implicites à la fonction $G(p, y)$ définie au voisinage de (p^0, x^0) et à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ par

$$\begin{array}{rcll} G^i(p_1, \dots, p_n, y_1, \dots, y_n) & = & p_i - g_{x_i}(y_1, \dots, y_{n-1}, 0) & \quad (1 \le i \le n-1) \\ G^n(p_1, \dots, p_n, y_1, \dots, y_n) & = & H(p, g(y_1, \dots, y_{n-1}, 0), y). & \end{array}$$

On a $G(p^0, x^0) = 0$; la matrice

$$\partial_p G(p^0, x^0) = \begin{pmatrix} 1 & & \text{\Large 0} & 0 \\ & \ddots & & \vdots \\ \text{\Large 0} & & 1 & 0 \\ H_{p_1}(p^0, z^0, x^0) & \cdots & H_{p_{n-1}}(p^0, z^0, x^0) & H_{p_n}(p^0, z^0, x^0) \end{pmatrix}$$

est inversible si et seulement si $H_{p_n}(p^0, z^0, x^0) \neq 0$. Alors au voisinage de x^0 on tire p fonction (régulière) de y (de façon unique). En se restreignant aux $y = (y', 0)$, on obtient la fonction q cherchée.

1.4 Construction de la solution au voisinage de la frontière

Soit (p^0, z^0, x^0) un triplet admissible tel que $H_{p_n}(p^0, z^0, x^0) \neq 0$. D'après le théorème de Cauchy-Lischitz, on peut résoudre les équations caractéristiques (2) pour chaque $y = (y', 0)$ au voisinage de x^0 avec comme donnée initiale $(q(y), g(y), y)$. On obtient donc des fonctions $\vec{p}(y, s)$, $z(y, s)$ et $\vec{x}(y, s)$.

Lemme 1.3 *L'application $(y, s) \mapsto \vec{x}(y, s)$ est inversible au voisinage de $(x^0, 0)$: Il existe un intervalle ouvert I contenant 0, un voisinage ouvert W de x^0 dans $\mathbb{R}^{n-1}$ et un voisinage ouvert V de x^0 dans $\mathbb{R}^n$ vérifiant : pour tout x dans V, il existe un unique $(y, s) \in W \times I$ tel que $x = \vec{x}(y, s)$; de plus les applications $x \mapsto s$ et $x \mapsto y$ sont régulières.*

Démonstration. Il suffit de prouver que la différentielle de $\vec{x}$ en $(x^0, 0)$ est inversible, et le théorème d'inversion locale fournit le résultat. On a $\frac{\partial x^i}{\partial y_j}(x^0, 0) = \delta_{ij}$ car $\vec{x}(y, 0) = (y, 0)$, et par (2c), $\dot{x}^i = H_{p_i}(p^0, z^0, x^0)$ donc

$$D\vec{x}(x^0, 0) = \begin{pmatrix} 1 & & 0 & H_{p_1}(p^0, z^0, x^0) \\ & \ddots & & \vdots \\ 0 & & 1 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & H_{p_n}(p^0, z^0, x^0) \end{pmatrix}$$

est inversible.

On peut maintenant construire la solution u de l'équation (1), en posant

$$u(x) = z(y(x), s(x)) = z(\vec{x}^{-1}(x)) \tag{6}$$

$$\vec{v}(x) = \vec{p}(y(x), s(x)) = \vec{p}(\vec{x}^{-1}(x)). \tag{7}$$

Théorème 1.4 *Sous les hypothèses suivantes :*

(i) (p^0, z^0, x^0) *est admissible,*

(ii) $H_{p_n}(p^0, z^0, x^0) \neq 0$,

(iii) Les fonctions $\vec{p}$, z, $\vec{x}$ *sont solutions des équations caractéristiques avec les conditions initiales* $\vec{p}(y, 0) = \vec{q}(y)$, $z(y, 0) = g(y)$, $\vec{x}(y, 0) = y$,

la fonction u *définie ci-dessus est régulière et vérifie*

$$\begin{cases} H(\nabla u, u, x) = 0 & \text{dans } V \\ u = g & \text{sur } \Gamma \cap V. \end{cases}$$

Démonstration. 1. Posons

$$f(y, s) = H(\vec{p}(y, s), s(y, s), \vec{x}(y, s)).$$

La fonction f est nulle au voisinage de $(x^0, 0)$ en effet $f(y, 0) = H(q(y), g(y), y) = 0$ et par (2) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial s} &= \frac{\partial \vec{p}}{\partial s} \cdot \nabla_p H + \frac{\partial z}{\partial s}\frac{\partial H}{\partial z} + \frac{\partial \vec{x}}{\partial s} \cdot \nabla_x H \\ &= \nabla_p H \cdot \left(\dot{\vec{p}} + \frac{\partial H}{\partial z}\vec{p} + \nabla_x H\right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Donc $H(\vec{v}(x), u(x), x) = 0$.

2. Montrons que $\vec{v}(x) = \nabla u(x)$ sur V. On a

$$\frac{\partial u}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial z}{\partial y_i}\frac{\partial y^i}{\partial x_j} + \frac{\partial z}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial x_j}.$$

En utilisant les équations caractéristiques (2b) et (2c) et en admettant que $\frac{\partial z}{\partial y_i} = \vec{p} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial y_i}$ (voir étape 3. de la preuve), on en déduit que

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x_j} &= \vec{p} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial \vec{x}}{\partial y_i}\frac{\partial y^i}{\partial x_j} + \frac{\partial \vec{x}}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial x_j}\right) \\ &= \vec{p} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial x_j} = p_j. \end{aligned}$$

3. Montrons le résultat admis en 2. : $\frac{\partial z}{\partial y_i} = \vec{p} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial y_i}$. Pour ce faire, on note

$$r^i(y, s) = \frac{\partial z}{\partial y_i} - \vec{p} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial y_i}.$$

On a $r^i(y,0) = \frac{\partial g}{\partial y_i} - \vec{q}(y)\cdot e_i = \frac{\partial g}{\partial y_i} - q^i(y) = 0$. Il reste à prouver que $\dot{r}^i = 0$. On a

$$\frac{\partial r^i}{\partial s} = \frac{\partial^2 z}{\partial s \partial y_i} - \frac{\partial \vec{p}}{\partial s}\cdot\frac{\partial \vec{x}}{\partial y_i} - \vec{p}\cdot\frac{\partial^2 \vec{x}}{\partial s\partial y_i},$$

or $\dot{z} = \vec{p}\cdot\dot{\vec{x}}$ donc

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y_i \partial s} = \frac{\partial \vec{p}}{\partial y_i}\cdot\frac{\partial \vec{x}}{\partial s} + \vec{p}\cdot\frac{\partial^2 \vec{x}}{\partial y_i \partial s}.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}\frac{\partial r^i}{\partial s} &= \frac{\partial \vec{p}}{\partial y_i}\cdot\frac{\partial \vec{x}}{\partial s} - \frac{\partial \vec{p}}{\partial s}\cdot\frac{\partial \vec{x}}{\partial y_i} \\ &= \frac{\partial \vec{p}}{\partial y_i}\cdot\nabla_p H + \frac{\partial H}{\partial z}\vec{p}\cdot\frac{\partial \vec{x}}{\partial y_i} + \nabla_x H\cdot\frac{\partial \vec{x}}{\partial y_i}.\end{aligned}$$

Comme $H(\vec{p},z,\vec{x}) = 0$, on a également

$$\frac{\partial \vec{p}}{\partial y_i}\cdot\nabla_p H + \frac{\partial z}{\partial y_i}\frac{\partial H}{\partial z} + \frac{\partial \vec{x}}{\partial y_i}\cdot\nabla_x H = 0$$

et il vient

$$\frac{\partial r^i}{\partial s} = \frac{\partial H}{\partial z}\left(\vec{p}\cdot\frac{\partial \vec{x}}{\partial y_i} - \frac{\partial z}{\partial y_i}\right) = -\frac{\partial H}{\partial z}r^i.$$

Ainsi pour tout y, r^i est solution d'une équation différentielle linéaire et s'annule en $s=0$, d'où $r^i = 0$.

4. Enfin, $u = g$ sur Γ : ceci est évident par construction de u.

$\square$

Remarque : régularité des fonctions : dans tous les calculs précédents, il suffit de supposer H et g de classe C^2, et on obtient alors des solutions $\vec{x}$, $\vec{p}$, z, u, etc, de classe C^2 grâce aux propriétés de régularité dans les théorèmes d'inversion locale et de Cauchy-Lipschitz (voir [5]).

Cas du problème de Cauchy :

$$u_t + H(\nabla_x u, x) = 0.$$

Un triplet $(p^0, p^0_{n+1}, z^0, x^0)$ est admissible si $z^0 = g(x^0)$, $p^0 = \nabla g(x^0)$ et $p^0_{n+1} = -H(p^0, x^0)$. La condition $\tilde{H}_{p_{n+1}} \neq 0$ est toujours vérifiée. Ainsi pour construire u, il reste à résoudre les équations de Hamilton (4) et (5) et à intégrer l'équation

$$\dot{z} = \vec{p}\cdot\nabla_p H + p_{n+1}.$$

1.5 Singularité au bout d'un temps fini

La construction précédente, faite au voisinage de tout point x^0 de ∂U (les recollements des voisinages des différents points de ∂U se font bien), donne une solution u définie au voisinage de la frontière de U. Dans le cas du problème de Cauchy, on obtient une solution u définie pour t proche de 0. Cependant, en général, on ne peut prolonger cette solution à tout l'ouvert U. Plus précisément, les singularités se produisent lorsque des caractéristiques $s \mapsto \vec{x}(s)$ issues de points x^0 distincts se croisent (cf. fig. 1) ; on a alors "2 valeurs" pour le gradient de u.

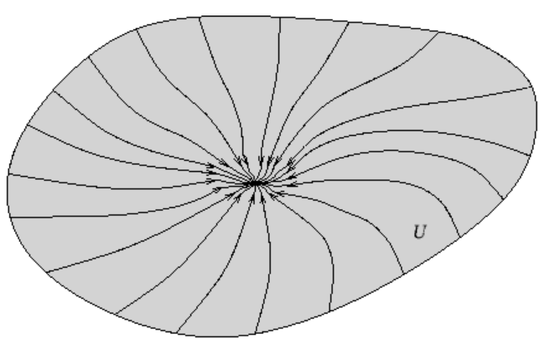

fig. 1 : intersection des caractéristiques

Donnons un exemple : $U = \mathrm{B}(0,1)$ dans $\mathbb{R}^2$,

$$H(p,z,x) = |p|^2 - 1$$

i.e. l'équation s'écrit

$$|\nabla u|^2 = 1,$$

avec la condition au bord $u = 0$ sur $\mathrm{C}(0,1)$. On a $\dot{\vec{p}} = 0$, $\dot{z} = 2|\vec{p}|^2$ et $\dot{\vec{x}} = 2\vec{p}$. Soit $x^0 \in \mathrm{C}(0,1)$, on a $z^0 = 0$ et $p^0 = -x^0$, d'où

$$\vec{p} = -x^0,$$
$$\vec{x} = -2tx^0 + x^0,$$
$$z = 2t,$$

donc les caractéristiques sont les rayons orientés vers l'origine, et $u = 1 - |x|$. On voit que ∇u a une singularité à l'origine.

Dans le cas du problème de Cauchy, on considère par exemple l'équation

$$u_t + |\nabla_x u|^2 = 0 \quad (x \in \mathbb{R}^2),$$

avec la condition initiale

$$u(0,x) = \frac{1}{1+|x|^2}.$$

On trouve alors

$$\vec{p} = p^0 = \frac{-2x^0}{(1+|x^0|^2)^2},$$

$z = z^0 + tp^0$ et $\vec{x} = x^0 + 2tp^0$. Ainsi, on voit que les caractéristiques se croisent en un temps fini, d'où une discontinuité de ∇u.

2 Solutions de viscosité – Problème d'unicité

Dans cette partie on étudie l'existence, l'unicité et quelques propriétés pour un type de solutions généralisées (faibles) du problème de Cauchy pour l'équation de Hamilton-Jacobi :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + H(\nabla_x u, x) = 0 & \text{dans } Q = \mathbb{R}^n \times]0,\infty[\\ u = g & \text{sur } \partial Q = \mathbb{R}^n \times \{t=0\} \end{cases} \tag{8}$$

Ici les données sont les fonctions continues $H : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ et on cherche $u : \mathbb{R}^n \times [0,+\infty[\to \mathbb{R}$, $u = u(x,t)$. Par la méthode des caractéristiques, on a vu qu'en général, il n'existe pas de solution régulière définie pour tout $t \geq 0$. Pour éliminer cet inconvénient, M. Crandall et P.-L. Lions ont introduit la notion de solution de viscosité. Notons que l'on peut traiter aussi le problème de Dirichlet associé à l'equation de Hamilton-Jacobi (cf. [3], [4]), mais pour simplifier l'étude, on se restreint ici au problème de Cauchy.

2.1 Introduction aux solutions généralisées

La première idée est de régulariser (8) (qui est une EDP non linéaire du premier ordre) pour avoir un nouveau problème qui possède une solution régulière (cette méthode s'appelle la *viscosité évanescente*). On considère donc, pour $\varepsilon > 0$, le problème suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} + H(\nabla_x u^\varepsilon, x) - \varepsilon \Delta_x u^\varepsilon = 0 & \text{dans } Q \\ u^\varepsilon = g & \text{sur } \partial Q \end{cases} \tag{9}$$

On admet que (9), qui est une EDP quasilinéaire parabolique du second ordre, a une solution régulière u^ε sur $\overline{Q}$. De plus, on trouve des estimations uniformes pour ses solutions i.e. pour tout K compact de $\overline{Q}$, il existe $c > 0$ tel que

$$\|u^\varepsilon\|_{L^\infty(K)},\ \|\nabla_x u^\varepsilon\|_{L^\infty(K)},\ \left\|\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\right\|_{L^\infty(K)} \leq c$$

pour tout $\varepsilon > 0$ suffisamment petit (ici on a supposé que H et g sont régulières) (cf. [7]). Donc la famille $\{u^\varepsilon\}_\varepsilon$ est localement bornée et équicontinue, d'où par le théorème d'Ascoli, l'existence d'une sous-suite $\varepsilon_j \longrightarrow 0$ telle que $u^{\varepsilon_j} \longrightarrow u$ localement uniformément sur $\overline{Q}$, et la limite u est dans $C(\mathbb{R}^n \times [0,+\infty[)$. Bien évidemment, on s'attend à ce que u soit une solution "faible" du problème (8) ; mais on sait seulement que u est continue dans $\overline{Q}$ et on n'a pas d'information sur $\nabla_x u$ et $\frac{\partial u}{\partial t}$ (dans quel sens ces dérivées existent-elles ?).

Dans les années 1960, plusieurs auteurs ont montré l'existence d'une fonction u continue et localement lipschitzienne sur $\overline{Q}$ qui satisfait

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + H(\nabla_x u, x) = 0 & \text{p.p. dans } Q \\ u = g & \text{sur } \partial Q \end{cases} \tag{10}$$

Malheureusement, ce type de solution généralisée est trop faible pour qu'on ait l'unicité et la stabilité par passage à la limite dans L^∞. En effet, considèrons le problème

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2 = 0 & \text{p.p. dans } \mathbb{R}\times]0,+\infty[\\ u = 0 & \text{sur } \mathbb{R}\times\{t=0\} \end{cases}$$

Il existe au moins deux solutions : la solution nulle, mais aussi la fonction

$$v(x,t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad |x| \geq t \\ -t+|x| & \text{si} \quad |x| < t. \end{cases}$$

Un autre exemple dans ce sens est le premier exemple du paragraphe 1.5 :

$$\begin{cases} |u'| = 1 & \text{p.p. dans }]0,1[\\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \tag{11}$$

Ici on peut construire une infinité des solutions généralisées : pour $n \geq 1$,

$$u_n(x) = \begin{cases} x - \frac{j}{2^{n-1}} & \text{si} \quad x \in \left[\frac{2j}{2^n}, \frac{2j+1}{2^n}\right] \\ \frac{j+1}{2^{n-1}} - x & \text{si} \quad x \in \left[\frac{2j+1}{2^n}, \frac{2j+2}{2^n}\right] \end{cases}, \quad j = 0,1,...,2^{n-1}-1.$$

On remarque que $0 \leq u_n(x) \leq \frac{1}{2^n}$ sur $[0,1]$. Donc $u_n \longrightarrow 0$ uniformément sur $[0,1]$, mais 0 n'est pas solution de (11).

Pour avoir l'unicité, on va introduire une nouvelle notion de solution appelée *solution de viscosité.*

2.2 Solutions de viscosité

L'idée qui est apparue au début des années 1980 consiste à fixer une fonction test régulière φ et de passer de (9) à (8) quand ε tend vers 0, en mettant les dérivées sur φ et en utilisant le principe du maximum pour $u - \varphi$.

Définition 2.1 *Une fonction $u : \mathbb{R}^n \times [0,\infty[\to \mathbb{R}$ est appelée **sous-solution de viscosité** (resp. **sur-solution de viscosité**) du problème (8) si :*

i. u est bornée et uniformement continue,

ii. $u = g$ sur $\mathbb{R}^n \times \{t=0\}$,

iii. pour tout $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n\times]0,\infty[)$, si $u-\varphi$ a un maximum local en $(x_0,t_0) \in \mathbb{R}^n\times]0,\infty[$, alors

$$\varphi_t(x_0,t_0) + H\left(\nabla_x\varphi(x_0,t_0), x_0\right) \leq 0;$$

(resp. si $u-\varphi$ a un minimum local en $(x_0,t_0) \in \mathbb{R}^n\times]0,\infty[$, alors

$$\varphi_t(x_0,t_0) + H\left(\nabla_x\varphi(x_0,t_0), x_0\right) \geq 0).$$

Si u est à la fois sous-solution et sur-solution alors on dit que u est une solution de viscosité de (8).

Motivation : On va montrer que la solution u construite avec la méthode de la viscosité évanescente est en fait une solution de viscosité. On va vérifier la condition iii. (la condition ii. est bien sûr satisfaite, mais pour avoir i. on doit demander des hypothèses supplémentaires sur H, voir [7]). Soit $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times]0,\infty[)$, on suppose que $u-\varphi$ a un maximum local *strict* en $(x_0,t_0) \in \mathbb{R}^n \times]0,\infty[$. On montre que pour $\varepsilon_j > 0$ assez petit, $u^{\varepsilon_j} - \varphi$ a un maximum local en $(x_{\varepsilon_j}, t_{\varepsilon_j}) \in \mathbb{R}^n \times]0,\infty[$ et

$$\lim_{j\to\infty} (x_{\varepsilon_j}, t_{\varepsilon_j}) = (x_0,t_0).$$

En effet, il existe $r>0$ tel que

$$\max_{\partial B}(u-\varphi) < (u-\varphi)(x_0,t_0),$$

où $B = B((x_0,t_0),r) \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Or $u^{\varepsilon_j} \longrightarrow u$ uniformement sur $\overline{B}$ d'où

$$max_{\partial B}(u^{\varepsilon_j} - \varphi) < (u^{\varepsilon_j} - \varphi)(x_0,t_0)$$

pour ε_j assez petit. Donc $u^{\varepsilon_j} - \varphi$ atteint un maximum local en un point de B noté $(x_{\varepsilon_j}, t_{\varepsilon_j})$; en faisant tendre r vers 0, on obtient le résultat. On a de plus

$$\begin{aligned} \nabla_x u^{\varepsilon_j}(x_{\varepsilon_j}, t_{\varepsilon_j}) &= \nabla_x \varphi(x_{\varepsilon_j}, t_{\varepsilon_j}), \\ \frac{\partial u^{\varepsilon_j}}{\partial t}(x_{\varepsilon_j}, t_{\varepsilon_j}) &= \frac{\partial \varphi}{\partial t}(x_{\varepsilon_j}, t_{\varepsilon_j}), \\ \Delta u^{\varepsilon_j}(x_{\varepsilon_j}, t_{\varepsilon_j}) &\leq \Delta \varphi(x_{\varepsilon_j}, t_{\varepsilon_j}). \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}(x_{\varepsilon_j}, t_{\varepsilon_j}) + H\left(\nabla_x \varphi(x_{\varepsilon_j}, t_{\varepsilon_j}), x_{\varepsilon_j}\right) = \varepsilon_j \Delta u^{\varepsilon_j}(x_{\varepsilon_j}, t_{\varepsilon_j}) \leq \varepsilon_j \Delta \varphi(x_{\varepsilon_j}, t_{\varepsilon_j}).$$

Comme φ régulière et H continue, en faisant tendre ε_j vers 0, il vient

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}(x_0,t_0) + H\left(\nabla_x \varphi(x_0,t_0), x_0\right) \leq 0.$$

Pour le cas général, i.e. lorsque $u-\varphi$ a un maximum local en (x_0,t_0), on prend

$$\tilde{\varphi}(x,t) = \varphi(x,t) + |x-x_0|^2 + (t-t_0)^2$$

de sorte que $u - \tilde{\varphi}$ ait un maximum local strict en (x_0,t_0), d'où

$$\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial t}(x_0,t_0) + H(\nabla_x \tilde{\varphi}(x_0,t_0), x_0) \leq 0.$$

Comme les dérivées du premier ordre de φ et $\tilde{\varphi}$ coincident en (x_0,t_0), on obtient iii. (pour le minimum local, on applique la même technique).

2.3 Cohérence avec les solutions classiques

Ici on va vérifier que la notion de solution de viscosité est cohérente avec celle de solution classique de (8).

D'abord, on remarque que toute solution $u \in C^1(\mathbb{R}^n \times [0,\infty[)$ qui satisfait (8) et qui est bornée et uniformement continue, est une solution de viscosité.

On montre maintenant la réciproque i.e. toute solution de viscosité régulière est une solution classique.

Lemme 2.2 *Soit $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction continue et soit $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tel que u est differentiable en x_0. Alors il existe $v \in C^1(\mathbb{R}^n)$ telle que $u(x_0) = v(x_0)$ et $u-v$ a un maximum strict en x_0.*

Preuve. On se ramène au cas $x_0 = 0$, $u(0) = 0$, $\nabla_x u(0) = 0$ en considérant

$$\tilde{u}(x) = u(x + x_0) - u(x_0) - \nabla_x u(x_0) \cdot x.$$

Puis on écrit $u(x) = |x|\rho_1(x)$, avec $\rho_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continue et $\rho_1(0) = 0$. On pose pour $r \geq 0$

$$\rho_2(r) = \max_{x \in B(r)} |\rho_1(x)|.$$

La fonction $\rho_2 : [0, \infty[\to [0, \infty[$ est continue, croissante et $\rho_2(0) = 0$. Finalement on considère

$$v(x) = \int_{|x|}^{2|x|} \rho_2(r) dr + |x|^2.$$

Cette fonction satisfait les conditions demandées : $v(0) = u(0)$, $\nabla_x v(0) = \nabla_x u(0)$ et $\forall x \neq 0$, $u(x) - v(x) < u(0) - v(0)$.

Théorème 2.3 *Soit u une solution de viscosité de (8) et $(x_0, t_0) \in \mathbb{R}^n \times]0, \infty[$ un point où u est différentiable. Alors $u_t(x_0, t_0) + H(\nabla_x u(x_0, t_0), x_0) = 0$.*

Preuve. En appliquant le lemme précédent, on trouve $v \in C^1$ telle que $u - v$ a un maximum strict en (x_0, t_0). Soit $(\eta_\varepsilon)_\varepsilon$ la suite usuelle régularisante de $\mathbb{R}^{n+1}$. On pose $\varphi^\varepsilon = \eta_\varepsilon * v$. Alors $\varphi^\varepsilon \in C^\infty(Q)$ et $\varphi^\varepsilon \longrightarrow v$, $\nabla_x \varphi^\varepsilon \longrightarrow \nabla_x v$, $\varphi^\varepsilon_t \longrightarrow v_t$ uniformement au voisinage de (x_0, t_0). On déduit que $u - \varphi^\epsilon$ a un maximum local en un point $(x_\varepsilon, t_\varepsilon)$, avec $(x_\varepsilon, t_\varepsilon) \longrightarrow (x_0, t_0)$ quand $\varepsilon \longrightarrow 0$. Par suite,

$$\frac{\partial \varphi^\varepsilon}{\partial t}(x_\varepsilon, t_\varepsilon) + H(\nabla_x \varphi^\varepsilon(x_\varepsilon, t_\varepsilon), x_\varepsilon) \leq 0.$$

En faisant tendre ε vers 0, comme les dérivées de u et v coïncident en (x_0, t_0), on obtient :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_0, t_0) + H(\nabla_x u(x_0, t_0), x_0) \leq 0.$$

Pour l'inégalité inverse, on raisonne de même à l'aide d'une fonction $\tilde{v} \in C^1$ telle que $u - \tilde{v}$ a un minimum strict en (x_0, t_0).

2.4 Unicité

Le but de cette section est de montrer l'unicité de la solution de viscosité pour le problème (8). On va traiter un cas plus général : pour $T > 0$, on considère le problème

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + H(\nabla_x u, x) = 0 & \text{sur } \mathbb{R}^n \times]0, T] \\ u = g & \text{sur } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \end{cases} \tag{12}$$

On dit que u est une *solution de viscosité* de (12) si u est bornée et uniformément continue, $u = g$ sur $\mathbb{R}^n \times \{t = 0\}$ et u vérifie les inégalités de la définition 2.1 quand $u - \varphi$ a un maximum ou un minimum local en $(x_0, t_0) \in \mathbb{R}^n \times]0, T[$. En fait, grâce au lemme suivant, on peut admettre que $t_0 = T$ sans rien changer.

Lemme 2.4 *Soit u une solution de viscosité de (12) et φ telle que $u - \varphi$ ait un maximum (resp. minimum) local en $(x_0, t_0) \in \mathbb{R}^n \times]0, T]$. Alors $\varphi_t(x_0, t_0) + H(\nabla_x \varphi(x_0, t_0), x_0) \leq 0$ (resp. ≥ 0).*

Preuve. Supposons que $u - \varphi$ ait un maximum local en (x_0, T). Comme précédemment, on peut supposer qu'il s'agit d'un maximum local strict. Pour $x \in \mathbb{R}^n$ et $0 < t < T$, posons

$$\varphi^\varepsilon(x, t) = \varphi(x, t) + \frac{\varepsilon}{T - t}.$$

Alors pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, $u - \varphi^\varepsilon$ a un maximum local en $(x_\varepsilon, t_\varepsilon)$ où $0 < t_\varepsilon < T$, et $(x_\varepsilon, t_\varepsilon) \longrightarrow (x_0, T)$. Par définition,

$$\frac{\partial \varphi^\varepsilon}{\partial t}(x_\varepsilon, t_\varepsilon) + H(\nabla_x \varphi^\varepsilon(x_\varepsilon, t_\varepsilon), x_\varepsilon) \leq 0$$

d'où

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}(x_\varepsilon,t_\varepsilon)+\frac{\varepsilon}{(T-t_\varepsilon)^2}+H\left(\nabla_x\varphi(x_\varepsilon,t_\varepsilon),x_\varepsilon\right)\le 0.$$

Si ε tend vers 0, on obtient

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}(x_0,T)+H\left(\nabla_x\varphi(x_0,T),x_0\right)\le 0.$$

On montre maintenant l'unicité des solutions de viscosité :

Théorème 2.5 *Si H satisfait les hypothèse de type Lipschitz suivantes :*

$$\exists c>0,\ \forall x,y,p,q\in\mathbb{R}^n,\left\{\begin{array}{l}|H(p,x)-H(q,x)|\le c|p-q|\\ |H(p,x)-H(p,y)|\le c|x-y|(1+|p|)\end{array}\right.$$

alors il existe au plus une solution de viscosité de (12).

Preuve. 1. Supposons qu'il existe deux solutions de viscosité u et $\tilde u$ de (12) telles que

$$\sup_{\mathbb{R}^n\times[0,T]}(u-\tilde u)=\sigma>0.$$

On fixe ε, $\lambda\in\,]0,1[$ et on considère pour $x,y\in\mathbb{R}^n$, $t,s\in[0,T]$ la fonction

$$\phi(x,y,t,s)=u(x,t)-\tilde u(y,s)-\lambda(t+s)-\frac{1}{\varepsilon^2}\left(|x-y|^2+(t-s)^2\right)-\varepsilon\left(|x|^2+|y|^2\right).$$

Alors il existe $(x_0,y_0,s_0,t_0)\in\mathbb{R}^{2n}\times[0,T]^2$ tel que

$$\phi(x_0,y_0,s_0,t_0)=\max_{\mathbb{R}^{2n}\times[0,T]^2}\phi(x,y,s,t).$$

2. On peut choisir $\varepsilon,\lambda\in\,]0,1[$ petits pour que

$$\phi(x_0,y_0,s_0,t_0)\ge\sup_{\mathbb{R}^n\times[0,T]}\phi(x,x,t,t)\ge\frac{\sigma}{2}.$$

Comme u et $\tilde u$ sont bornées et que $\phi(x_0,y_0,t_0,s_0)\ge\phi(0,0,0,0)$, on a : $|x_0-y_0|,|t_0-s_0|=O(\varepsilon)$ quand $\varepsilon\longrightarrow 0$ et $\varepsilon\left(|x_0|+|y_0|\right)=O(\varepsilon^{\frac12})$. En utilisant $\phi(x_0,y_0,t_0,s_0)\ge\phi(x_0,x_0,t_0,t_0)$ et les estimations précédentes, on obtient $|x_0-y_0|,|t_0-s_0|=o(\varepsilon)$.

3. On note $\omega(.)$ (resp $\tilde\omega(.)$) le module d'uniforme continuité de u (resp. $\tilde u$), i.e.

$$|u(x,t)-u(y,s)|\le\omega\left(|x-y|+|t-s|\right),$$

pour $x,y\in\mathbb{R}^n$ et $t,s\in[0,T]$, avec $\omega(r)\longrightarrow 0$ quand $r\longrightarrow 0$. En utilisant les conditions initiales, on déduit des majorations précédentes que

$$\frac{\sigma}{2}\le u(x_0,t_0)-\tilde u(y_0,s_0)\le\omega(t_0)+\tilde\omega(t_0)+\tilde\omega\left(o(\varepsilon)\right).$$

Si $\varepsilon>0$ est assez petit, on aura $\frac{\sigma}{4}\le\omega(t_0)+\tilde\omega(t_0)$, d'où $t_0>0$. Pareillement $s_0>0$.

4. On prend

$$\varphi(x,t)=\tilde u(y_0,s_0)+\lambda(t+s_0)+\frac{1}{\varepsilon^2}\left(|x-y_0|^2+(t-s_0)^2\right)+\varepsilon\left(|x|^2+|y_0|^2\right).$$

Alors la fonction $(x,t)\mapsto\phi(x,y_0,t,s_0)=(u-\varphi)(x,t)$ a un maximum en (x_0,t_0), d'où

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}(x_0,t_0)+H\left(\nabla_x\varphi(x_0,t_0),x_0\right)\le 0$$

et par suite

$$\lambda+\frac{2(t_0-s_0)}{\varepsilon^2}+H\left(\frac{2}{\varepsilon^2}(x_0-y_0)+2\varepsilon x_0,x_0\right)\le 0.$$

De même si on prend

$$\tilde{\varphi}(y,s) = u(x_0,t_0) - \lambda(t_0+s) - \frac{1}{\varepsilon^2}\left(|x-y_0|^2 + (t_0-s)^2\right) - \varepsilon\left(|x_0|^2 + |y|^2\right),$$

alors la fonction $(y,s) \mapsto -\phi(x_0,y,t_0,s) = (\tilde{u} - \tilde{\varphi})(y,s)$ a un minimum en (y_0,s_0) d'où

$$\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial t}(y_0,s_0) + H\left(\nabla_x \tilde{\varphi}(y_0,s_0), y_0\right) \geq 0,$$

$$-\lambda + \frac{2(t_0-s_0)}{\varepsilon^2} + H\left(\frac{2}{\varepsilon^2}(x_0-y_0) - 2\varepsilon y_0, y_0\right) \geq 0.$$

5. On déduit de 4. que

$$2\lambda \leq H\left(\frac{2}{\varepsilon^2}(x_0-y_0) - 2\varepsilon y_0, y_0\right) - H\left(\frac{2}{\varepsilon^2}(x_0-y_0) + 2\varepsilon x_0, x_0\right).$$

En utilisant les hypothèses sur H, il vient

$$\lambda \leq c\varepsilon\left(|x_0| + |y_0|\right) + c|x_0-y_0|\left(1 + \frac{|x_0-y_0|}{\varepsilon^2} + \varepsilon\left(|x_0| + |y_0|\right)\right).$$

Lorsque ε tend vers 0, comme $|x_0 - y_0| = o(\varepsilon)$ et $\varepsilon(|x_0| + |y_0|) = O(\varepsilon^{1/2})$, on arrive à une contradiction : $0 < \lambda \leq 0$.

$\square$

Références : on trouvera des théorèmes d'unicité plus élaborés dans [3], [4], [7].

3 Théorie du contrôle – Programmation dynamique

On a vu qu'une méthode pour montrer l'existence d'une solution de viscosité est de régulariser (8) par(9), de prouver l'existence d'une solution régulière u^ε pour (9) et ensuite de faire de bonnes estimations uniformes sur u^ε. Cependant cette méthode nécessite des connaissances technique sur les bornes de la solution de l'équation de la chaleur, ce qui n'est pas le but de cet exposé. On va montrer — dans un cas moins général — l'existence d'une solution viscosité pour (8) à l'aide de la théorie du contrôle pour les équations différentielles ordinaires et de la méthode de programmation dynamique. Une chose remarquable est que la définition de la solution de viscosité est une conséquence des conditions optimales de la théorie du contrôle.

3.1 Introduction à la théorie du contrôle

Dans cette section, on va étudier la contrôlabilité de la solution $\mathbf{x}$ de l'EDO :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(s) = \mathbf{f}\left(\mathbf{x}(s), \alpha(s)\right) & \text{dans }]0,t[\\ \mathbf{x}(t) = x. \end{cases} \tag{13}$$

Ici, $x \in \mathbb{R}^n$ est le point terminal de la solution $\mathbf{x}(\cdot)$ à l'instant terminal $t \leq T$, où $T > 0$ est fixé ; $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \times A \to \mathbb{R}^n$ est une fonction donnée qui est bornée, continue et lipschitzienne par rapport à la première variable et A est un sous-ensemble compact de $\mathbb{R}^m$. La fonction α est le *contrôle*, i.e. une facon d'ajuster les paramètres de A quand le temps décroit (dans notre cas) et qui affecte la dynamique du système donnée par (13). On note

$$\mathcal{A} = \{\alpha : [0,T] \to A \mid \alpha \text{ est mesurable}\}$$

l'ensemble des contrôles admissibles. Il résulte des hypothèses ci-dessus que pour tout contrôle $\alpha \in \mathcal{A}$, l'EDO (13) a une solution unique, lipschitzienne sur l'intervalle $[0,t]$ et qui vérifie l'équation presque partout sur $]0,t[$. On dit que cette solution $\mathbf{x} = \mathbf{x}^\alpha$ est la *réponse* du système au contrôle α et $\mathbf{x}(s)$ est l'*état* du système à l'instant s.

Notre but est de trouver le contrôle α^* qui rend le système optimal. Pour définir le sens du mot "optimal", on doit introduire un *critère de coût*. Pour $x \in \mathbb{R}^n$ et $0 \leq t \leq T$, on considère pour chaque contrôle $\alpha \in \mathcal{A}$ le *coût* :

$$C_{x,t}(\alpha) = \int_0^t h\left(\mathbf{x}(s), \alpha(s)\right) \, ds + g\left(\mathbf{x}(0)\right)$$

où $\mathbf{x} = \mathbf{x}^\alpha$ la solution de (13) et $h : \mathbb{R}^n \times A \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sont des fonctions données qui vérifient pour un $C > 0$ les conditions :

$$\begin{cases} |h(x,a)| \leq C, \ |g(x)| \leq C \\ |h(x,a) - h(y,a)| \leq C|x-y|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n, \forall a \in A \\ |g(x) - g(y)| \leq C|x-y|. \end{cases}$$

De plus, on suppose que h est continue sur $\mathbb{R}^n \times A$. Maintenant on veut trouver (si c'est possible) un contrôle α^* qui minimise la fonction de coût parmi les contrôles admissibles, pour chaque donnée $x \in \mathbb{R}^n$, $t \in [0, T]$.

3.2 Programmation dynamique

La méthode de la programmation dynamique consiste à résoudre le problème précédent en considérant la fonction

$$u(x,t) = \inf_{\alpha \in \mathcal{A}} C_{x,t}(\alpha) \quad (x \in \mathbb{R}^n, \ 0 \leq t \leq T).$$

L'idée est de montrer que cette fonction est solution d'une EDP du type de (12) et ensuite de prouver la réciproque, c'est à dire, à l'aide d'une solution de l'EDP (12), trouver le contrôle optimal.

Soit $x \in \mathbb{R}^n$ et $0 < t \leq T$.

Théorème 3.1 *Soit $0 < \tau < t$; on definit la fonction*

$$\tilde{u}(x,t) = \inf_{\alpha \in \mathcal{A}} \left(\int_\tau^t h\left(\mathbf{x}(s), \alpha(s)\right) \, ds + u(\mathbf{x}(\tau), \tau) \right)$$

où $\mathbf{x} = \mathbf{x}^\alpha$ est la solution de l'EDO (13) pour le contrôle α. Alors $\tilde{u} = u$.

Preuve. 1. On montre l'inégalité $u \leq \tilde{u}$. Soit $\alpha_1 \in \mathcal{A}$ et soit $\mathbf{x}_1$ la solution de l'EDO

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_1(s) = \mathbf{f}\left(\mathbf{x}_1(s), \alpha_1(s)\right) & \text{sur }]0, t[\\ \mathbf{x}_1(t) = x. \end{cases}$$

On fixe $\varepsilon > 0$ et on choisit $\alpha_2 \in \mathcal{A}$ tel que

$$u(\mathbf{x}_1(\tau), \tau) + \varepsilon \geq \int_0^\tau h\left(\mathbf{x}_2(s), \alpha_2(s)\right) \, ds + g\left((\mathbf{x}_2(0)\right)$$

où

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_2(s) = \mathbf{f}\left(\mathbf{x}_2(s), \alpha_2(s)\right) & \text{sur }]0, \tau[\\ \mathbf{x}_2(\tau) = \mathbf{x}_1(\tau). \end{cases}$$

On définit le contrôle

$$\alpha_3(s) = \begin{cases} \alpha_2(s) & \text{si } 0 < s < \tau \\ \alpha_1(s) & \text{si } \tau < s < t, \end{cases}$$

et soit $\mathbf{x}_3$ la solution de

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_3(s) = \mathbf{f}\left(\mathbf{x}_3(s), \alpha_3(s)\right) & \text{sur }]0, t[\\ \mathbf{x}_3(t) = x. \end{cases}$$

Par unicité des solutions pour l'EDO (13), on déduit :

$$\mathbf{x}_3(s) = \begin{cases} \mathbf{x}_2(s) & \text{si } 0 < s < \tau \\ \mathbf{x}_1(s) & \text{si } \tau < s < t. \end{cases}$$

Par définition, on obtient :

$$\begin{aligned} u(x,t) &\leq C_{x,t}(\alpha_3) = \int_0^t h(\mathbf{x}_3(s),\alpha_3(s))\,ds + g(\mathbf{x}_3(0)) \\ &\leq \int_0^\tau h(\mathbf{x}_2(s),\alpha_2(s))\,ds + \int_\tau^t h(\mathbf{x}_1(s),\alpha_1(s))\,ds + g(\mathbf{x}_2(0)) \\ &\leq u(\mathbf{x}_1(\tau),\tau) + \varepsilon + \int_\tau^t h(\mathbf{x}_1(s),\alpha_1(s))\,ds. \end{aligned}$$

Comme α_1 était arbitraire, on déduit

$$u(x,t) \leq \inf_{\alpha\in\mathcal{A}} \left(\int_\tau^t h(\mathbf{x}(s),\alpha(s))\,ds + u(\mathbf{x}(\tau),\tau) \right) + \varepsilon$$

où $\mathbf{x}$ est solution de (13). En faisant tendre ε vers 0, il en résulte que $u(x,t) \leq \tilde{u}(x,t)$.

2. Pour l'inégalité inverse, on fixe $\varepsilon > 0$ et on choisit $\alpha_4 \in \mathcal{A}$ tel que

$$u(x,t) + \varepsilon \geq \int_0^t h(\mathbf{x}_4(s),\alpha_4(s))\,ds + g(\mathbf{x}_4(0))$$

où

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_4(s) = \mathbf{f}\left(\mathbf{x}_4(s),\alpha_4(s)\right) & \text{pour } 0 < s < t \\ \mathbf{x}_4(t) = x. \end{cases}$$

Or

$$u(\mathbf{x}_4(\tau),\tau) \leq \int_0^\tau h(\mathbf{x}_4(s),\alpha_4(s))\,ds + g(\mathbf{x}_4(0)),$$

donc on a

$$u(x,t) + \varepsilon \geq \inf_{\alpha\in\mathcal{A}} \left(\int_\tau^t h(\mathbf{x}(s),\alpha(s))\,ds + u(\mathbf{x}(\tau),\tau) \right)$$

où $\mathbf{x} = \mathbf{x}^\alpha$ est solution de (13). Ainsi $u(x,t) \geq \tilde{u}(x,t)$.

□

3.3 Équation de Hamilton-Jacobi-Bellman

On va montrer à l'aide du théorème précédent que la fonction u donnée par la méthode de la programmation dynamique est une solution de viscosité de l'EDP (12). Pour cela, on doit vérifier d'abord que u est bornée et uniformement continue.

Lemme 3.2 *Il existe $C > 0$ tel que $|u(x,t)| \leq C$ et*

$$\left|u(x,t) - u(\hat{x},\hat{t})\right| \leq C\left(|x-\hat{x}| + |t-\hat{t}|\right),$$

pour tous $x,\hat{x} \in \mathbb{R}^n$, et tous $0 \leq t,\hat{t} \leq T$.

Preuve. 1. Des hypothèses faites sur h et g, on déduit que u est bornée sur $\mathbb{R}^n \times [0,T]$.

2. Montrons le caractère lipschitzien en x. Soit $x,\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ et $0 \leq t \leq T$. Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Alors il existe $\hat{\alpha} \in \mathcal{A}$ tel que

$$u(\hat{x},t) + \varepsilon \geq \int_0^t h(\hat{\mathbf{x}}(s),\hat{\alpha}(s))\,ds + g\left(\hat{\mathbf{x}}(0)\right)$$

où $\hat{\mathbf{x}}$ est la solution de l'EDO

$$\begin{cases} \dot{\hat{\mathbf{x}}}(s) = \mathbf{f}\left(\hat{\mathbf{x}}(s),\hat{\alpha}(s)\right) & \text{sur }]0,t[\\ \hat{\mathbf{x}}(t) = \hat{x}. \end{cases}$$

On déduit que

$$u(x,t) - u(\hat{x},t) \leq \int_0^t h\left(\mathbf{x}(s),\hat{\alpha}(s)\right)\,ds + g\left(\mathbf{x}(0)\right) - \int_0^t h\left(\hat{\mathbf{x}}(s),\hat{\alpha}(s)\right)\,ds - g\left(\hat{\mathbf{x}}(0)\right) + \varepsilon$$

où $\mathbf{x}$ est la solution de
$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(s) = \mathbf{f}\left(\mathbf{x}(s), \hat{\alpha}(s)\right) & \text{sur }]0, t[\\ \mathbf{x}(t) = x. \end{cases}$$

Comme f est lipschitzienne, par l'inégalité de Gronwall on obtient

$$|\mathbf{x}(s) - \hat{\mathbf{x}}(s)| \leq C|x - \hat{x}|,$$

pour tout $s \in [0, t]$. De là, comme g et h sont lipchitziennes, on déduit que

$$u(x, t) - u(\hat{x}, t) \leq C|x - \hat{x}| + \varepsilon.$$

Le même raisonnement avec les rôles de x et $\hat{x}$ inversés implique

$$|u(x, t) - u(\hat{x}, t)| \leq C|x - \hat{x}|,$$

pour tous $x, \hat{x} \in \mathbb{R}^n$, et tout $0 \leq t \leq T$.

3. Montrons le caractère lipschitzien en t. Soit $x \in \mathbb{R}^n$ et $0 \leq \hat{t} < t \leq T$. On fixe $\varepsilon > 0$ et on choisit $\alpha \in \mathcal{A}$ tel que
$$u(x, t) + \varepsilon \geq \int_0^t h\left(\mathbf{x}(s), \alpha(s)\right)\, ds + g\left(\mathbf{x}(0)\right)$$

où $\mathbf{x}$ est la solution de (13). On prend $\hat{\alpha}(s) = \alpha(s + t - \hat{t})$ pour $0 \leq s \leq \hat{t}$ et on considère la solution $\hat{\mathbf{x}}$ du problème
$$\begin{cases} \dot{\hat{\mathbf{x}}}(s) = \mathbf{f}\left(\hat{\mathbf{x}}(s), \hat{\alpha}(s)\right) & \text{sur }]0, \hat{t}[\\ \hat{\mathbf{x}}(\hat{t}) = x. \end{cases}$$

Ceci implique $\hat{\mathbf{x}}(s) = \mathbf{x}(s + t - \hat{t})$. On obtient alors :

$$\begin{aligned} u(x, \hat{t}) - u(x, t) &\leq \int_0^{\hat{t}} h(\hat{\mathbf{x}}(s), \hat{\alpha}(s))\, ds + g(\hat{\mathbf{x}}(0)) - \int_0^t h(\mathbf{x}(s), \alpha(s))\, ds - g(\mathbf{x}(0)) + \varepsilon \\ &\leq -\int_0^{t-\hat{t}} h(\mathbf{x}(s), \alpha(s))\, ds + g(\mathbf{x}(t - \hat{t})) - g(\mathbf{x}(0)) + \varepsilon \\ &\leq C|t - \hat{t}| + \varepsilon. \end{aligned}$$

On prend maintenant $\hat{\alpha}$ tel que

$$u(x, \hat{t}) + \varepsilon \leq \int_0^{\hat{t}} h\left(\hat{\mathbf{x}}(s), \hat{\alpha}(s)\right)\, ds + g\left(\hat{\mathbf{x}}(0)\right)$$

où
$$\begin{cases} \dot{\hat{\mathbf{x}}}(s) = \mathbf{f}\left(\hat{\mathbf{x}}(s), \hat{\alpha}(s)\right) & \text{sur }]0, \hat{t}[\\ \hat{\mathbf{x}}(\hat{t}) = x. \end{cases}$$

On définit
$$\alpha(s) = \begin{cases} \hat{\alpha}(0) & \text{si } 0 \leq s \leq t - \hat{t} \\ \hat{\alpha}(s + \hat{t} - t) & \text{si } t - \hat{t} \leq s \leq t, \end{cases}$$

et on prend pour $\mathbf{x}$ la solution de (13). Alors $\mathbf{x}(s) = \hat{\mathbf{x}}(s + \hat{t} - t)$ sur $]t - \hat{t}, t[$. Par conséquent,

$$\begin{aligned} u(x, t) - u(x, \hat{t}) &\leq \int_0^t h(\mathbf{x}(s), \alpha(s))\, ds + g(\mathbf{x}(0)) - \int_0^{\hat{t}} h(\hat{\mathbf{x}}(s), \hat{\alpha}(s))\, ds - g(\hat{\mathbf{x}}(0)) + \varepsilon \\ &= \int_0^{t-\hat{t}} h(\mathbf{x}(s), \alpha(s)\, ds + g(\mathbf{x}(0)) - g(\mathbf{x}(t - \hat{t})) + \varepsilon \\ &\leq C|t - \hat{t}| + \varepsilon. \end{aligned}$$

On a obtenu que
$$\left|u(x, t) - u(x, \hat{t})\right| \leq C|t - \hat{t}|,$$

pour tous $0 \leq \hat{t} \leq t \leq T$, et tout $x \in \mathbb{R}^n$.

$\square$

Théorème 3.3 *La fonction u est la solution de viscosité de l'EDP suivante :*

$$\begin{cases} u_t(x,t) + \max_{a\in A}\big(\mathbf{f}(x,a)\cdot\nabla u(x,t) - h(x,a)\big) = 0 & \textit{dans } \mathbb{R}^n \times]0,T[\\ u = g & \textit{sur } \mathbb{R}^n \times \{0\}. \end{cases} \tag{14}$$

L'équation (14) est appelée équation de Hamilton-Jacobi-Bellman. Son Hamiltonien est

$$H(p,x) = \max_{a\in A}\big(\mathbf{f}(x,a)\cdot p - h(x,a)\big).$$

Notons qu'il est convexe par rapport à p et vérifie les hypothèses du théorème d'unicité 2.5.

Démonstration. 1. Soit $v \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times]0,T[)$ une fonction telle que $u - v$ ait un maximum local en un point $(x_0,t_0) \in \mathbb{R}^n \times]0,T[$. On va montrer par l'absurde que

$$v_t(x_0,t_0) + \max_{a\in A}\big(\mathbf{f}(x_0,a)\cdot\nabla v(x_0,t_0) - h(x_0,a)\big) \le 0.$$

Si ce n'était pas le cas, il existerait $a \in A$ et $\theta > 0$ tels que, pour tout (x,t) au voisinage de (x_0,t_0), on ait

$$v_t(x,t) + \mathbf{f}(x,a)\cdot\nabla v(x,t) - h(x,a) \ge \theta.$$

On prend α constant égal à a. Soit $\mathbf{x}$ la solution de

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(s) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(s),a) & 0 < s < t_0 \\ \mathbf{x}(t_0) = x. \end{cases}$$

Soit $\tau < t_0$, suffisamment proche de t_0 de sorte que pout tout $s \in [\tau, t_0]$ on ait

$$v_t(\mathbf{x}(s),s) + \mathbf{f}(\mathbf{x}(s),a)\cdot\nabla v(\mathbf{x}(s),s) - h(\mathbf{x}(s),a) \ge \theta$$

et

$$\begin{aligned} u(x_0,t_0) - u(\mathbf{x}(\tau),\tau) &\ge v(x_0,t_0) - v(\mathbf{x}(\tau),\tau) \\ &\ge \int_\tau^{t_0} \frac{d}{ds}\big(v(\mathbf{x}(s),s)\big)\, ds \\ &\ge \int_\tau^{t_0} \big(v_t(\mathbf{x}(s),s) + \mathbf{f}(\mathbf{x}(s),a)\cdot\nabla v(\mathbf{x}(s),s)\big)\, ds. \end{aligned}$$

Or on a, d'après le théorème 3.1,

$$u(x_0,t_0) \le \int_\tau^{t_0} h(\mathbf{x}(s),a)\, ds + u(\mathbf{x}(\tau),\tau),$$

et on obtient une contradiction :

$$0 < \theta(t_0 - \tau) \le \int_\tau^{t_0} \big(v_t(\mathbf{x},s) + \mathbf{f}(\mathbf{x},a)\cdot\nabla v(\mathbf{x},s) - h(\mathbf{x},a)\big)\, ds \le 0.$$

2. Soit $v \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times]0,T[)$ une fonction telle que $u - v$ ait un minimum local en un point $(x_0,t_0) \in \mathbb{R}^n \times]0,T[$. On va montrer par l'absurde que

$$v_t(x_0,t_0) + \max_{a\in A}\big(\mathbf{f}(x_0,a)\cdot\nabla v(x_0,t_0) - h(x_0,a)\big) \ge 0.$$

Si ce n'était pas le cas, il existerait $\theta > 0$ tel que pout tout $a \in A$ et tout (x,t) au voisinage de (x_0,t_0), on ait

$$v_t(x,t) + \mathbf{f}(x,a)\cdot\nabla v(x,t) - h(x,a) \le -\theta.$$

Soit $\tau < t_0$, suffisamment proche de t_0 de sorte que pour tout $\alpha \in \mathcal{A}$ et tout $s \in [\tau, t_0]$ on ait

$$v_t(\mathbf{x}(s),s) + \mathbf{f}(\mathbf{x}(s),a)\cdot\nabla v(\mathbf{x}(s),s) - h(\mathbf{x}(s),a) \le -\theta,$$

$$u(x_0,t_0) - u(\mathbf{x}(\tau),\tau) \le v(x_0,t_0) - v(\mathbf{x}(\tau),\tau)$$

où $\mathbf{x}$ est solution de

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(s) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(s), \alpha(s)) & 0 < s < t_0 \\ \mathbf{x}(t_0) = x_0. \end{cases}$$

C'est possible car f et par suite $\dot{\mathbf{x}}$ sont bornés donc $\mathbf{x}(s)$ tend vers x_0 quand s tend vers t_0, uniformément par rapport à α. On a alors

$$u(x_0, t_0) - u(\mathbf{x}(\tau), \tau) \leq \int_\tau^{t_0} \big(v_t(\mathbf{x}(s), s) + \mathbf{f}(\mathbf{x}(s), \alpha(s)) \cdot \nabla v(\mathbf{x}(s), s)\big)\, ds.$$

En choisissant α dans le théorème 3.1 tel que

$$u(x_0, t_0) \geq u(\mathbf{x}(\tau), \tau) + \int_\tau^{t_0} h(\mathbf{x}(s), \alpha(s)\, ds - \frac{\theta(t_0 - \tau)}{2},$$

on obtient une contradiction :

$$-\frac{\theta(t_0 - \tau)}{2} \leq \int_\tau^{t_0} \big(v_t(\mathbf{x}, s) + \mathbf{f}(\mathbf{x}, \alpha) \cdot \nabla v(\mathbf{x}, s) - h(\mathbf{x}, \alpha)\big)\, ds \leq -\theta(t_0 - \tau).$$

3. Le fait que $u = g$ sur $\mathbb{R}^n \times \{0\}$ est une conséquence immédiate de la définition de u. □

Remarque : On a montré ainsi que la fonction u, qui minimise le coût, est l'unique solution de viscosité du problème (14) pour l'équation de Hamilton-Jacobi-Bellman. On s'intéresse maintenant à la réciproque : comment peut-on trouver le contrôle optimal à partir de cette EDP ? Voici l'idée de la construction du contrôle optimal. Étant donnés une date finale $0 < t \leq T$ et un état final $x \in \mathbb{R}^n$, on considère l'EDO optimale

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}^*(s) = \mathbf{f}\left(\mathbf{x}^*(s), \alpha^*(s)\right) & \text{sur }]0, t[\\ \mathbf{x}^*(t) = x. \end{cases} \tag{15}$$

où pour tout temps s, on choisit $\alpha^*(s) \in A$ tel que

$$\mathbf{f}\left(\mathbf{x}^*(s), \alpha^*(s)\right) \cdot \nabla u(\mathbf{x}^*(s), s) - h(\mathbf{x}^*(s), \alpha^*(s)) = H(\nabla u(\mathbf{x}^*(s), s), \mathbf{x}^*(s)).$$

Autrement dit, quand le système est dans l'état $\mathbf{x}^*(s)$ à l'instant s, on choisit la valeur du contrôle optimal $\alpha^*(s)$ qui atteint le maximum dans la définition du hamiltonian H de l'EDP (14). On dit que α^* est *le contrôle rétroactif (feedback control)*. On vérifie aisément que cette méthode génère la trajectoire de coût minimal, au moins dans les régions où u et α^* sont régulières (pour que l'équation ci-dessus ait bien un sens) ; mais l'interprétation de cette équation quand ∇u n'existe pas est problématique (cf. [2]).

3.4 Existence d'une solution pour un Hamiltonien convexe

En s'inspirant de ce qui précède, on va montrer l'existence d'une solution de viscosité dans le cas ou le Hamiltonien ne dépend que de p et est convexe :

$$\begin{cases} u_t + H(\nabla u) = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^n \times]0, \infty[\\ u(t = 0) = g & \text{sur } \mathbb{R}^n \times \{0\} \end{cases} \tag{16}$$

Pour cela on va se ramener à une équation de Hamilton-Jacobi-Bellman grâce à la transformation de Legendre.

On suppose que $H : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est convexe (donc continu) et tel que

$$\frac{H(p)}{|p|} \xrightarrow[|p| \to \infty]{} +\infty \tag{17}$$

et que g est lipschitzienne.

On appelle transformée de Legendre de H la fonction suivante, appelé Lagrangien :

$$L(q) = H^*(q) = \sup_{p \in \mathbb{R}^n} \big(q \cdot p - H(p)\big) \quad (q \in \mathbb{R}^n), \tag{18}$$

Exemple : reprenons le Hamiltonien de la mécanique $H(p,x) = \frac{p^2}{2m} + V(x)$. Sa transformée de Legendre par rapport à p est

$$L(q,x) = \sup_p \left(q \cdot p - \frac{p^2}{2m} - V(x)\right) = \frac{1}{2}mq^2 - V(x) = \frac{p^{*2}}{2m} - V(x).$$

Le maximum est atteint pour $p^* = mq$. Ainsi q est la vitesse.

Proposition 3.4 *Le Lagrangien est convexe et vérifie aussi la propriété (17). De plus H est la transformée de Legendre de L : $H = L^*$.*

Les fonctions H et L sont dites fonctions convexes duales.

Démonstration. Pour tout p, l'application $q \mapsto q \cdot p - H(p)$ est linéaire ce qui entraîne la convexité de L. Soit $C > 0$ et $q \neq 0$. On a

$$\begin{aligned} L(q) &= \sup_{p\in\mathbb{R}^n} \big(q \cdot p - H(p)\big) \\ &\geq C|q| - H\left(C\frac{p}{|p|}\right) \qquad \left(p = C\frac{p}{|p|}\right) \\ &\geq C|q| - \max_{\bar{B}(0,C)} H \end{aligned}$$

donc $\liminf_{|q|\to\infty} \frac{L(q)}{|q|} \geq C$ pour tout $C \in \mathbb{R}$. Montrons maintenant que $H = L^*$. On a $L(q) + H(p) \geq p \cdot q$ d'où $H(p) \geq L^*(p)$. Par ailleurs, on a

$$\begin{aligned} L^*(p) &= \sup_{q\in\mathbb{R}^n} \Big(q \cdot p - \sup_{r\in\mathbb{R}^n} \big(q \cdot r - H(r)\big)\Big) \\ &= \sup_{q\in\mathbb{R}^n} \inf_{r\in\mathbb{R}^n} \big(q \cdot (p - r) + H(r)\big). \end{aligned}$$

H étant convexe, il existe $s \in \mathbb{R}^n$ tel que pour tout r,

$$H(r) \geq H(p) + s \cdot (r - p)$$

Il vient donc

$$L^*(p) \geq \inf_{r\in\mathbb{R}^n} \big(s \cdot (p - r) + H(r)\big) = H(p).$$

On est ainsi ramené à une équation du type Hamilton-Jacobi-Bellman. On pose donc

$$u(x,t) = \inf\left\{\int_0^t L(\dot{w}(s))\,ds + g(w(0)) \mid w \in C^1([0,t]),\ w(t) = x\right\}.$$

Proposition 3.5 *Si $t \neq 0$, on a*

$$u(x,t) = \min_{y\in\mathbb{R}^n} \left\{tL\left(\frac{x-y}{t}\right) + g(y)\right\}. \tag{19}$$

L'expression au second membre de (19) s'appelle la formule de Hopf-Lax.

Démonstration. Pour $y \in \mathbb{R}^n$ et $w(s) = y + \frac{s}{t}(x - y)$ on trouve

$$u(x,t) \leq tL\left(\frac{x-y}{t}\right) + g(y),$$

donc on a

$$u(x,t) \leq \inf_{y\in\mathbb{R}^n} \left\{tL\left(\frac{x-y}{t}\right) + g(y)\right\}.$$

Réciproquement, si w est C^1, on a, par l'inégalité de Jensen

$$L\left(\frac{1}{t}\int_0^t \dot{w}(s)\,ds\right) \leq \frac{1}{t}\int_0^t L(\dot{w}(s))\,ds,$$

$$tL\left(\frac{x-w(0)}{t}\right)+g(w(0))\leq\int_0^t L(\dot{w}(s))\,ds+g(w(0)),$$

d'où l'on tire

$$\inf_{y\in\mathbb{R}^n}\left\{tL\left(\frac{x-y}{t}\right)+g(y)\right\}\leq u(x,t).$$

Lemme 3.6 *Pour tout x et tout $s<t$ on a*

$$u(x,t)=\min_{y\in\mathbb{R}^n}\left\{(t-s)L\left(\frac{x-y}{t-s}\right)+u(y,s)\right\}.$$

Démonstration. Fixons $y\in\mathbb{R}^n$ et $s\in\,]0,t[$, et soit $z\in\mathbb{R}^n$ tel que

$$u(y,s)=sL\left(\frac{y-z}{s}\right)+g(z).$$

Par convexité, on a

$$L\left(\frac{x-z}{t}\right)\leq\left(1-\frac{s}{t}\right)L\left(\frac{x-y}{t-s}\right)+\frac{s}{t}L\left(\frac{y-z}{s}\right).$$

et par suite

$$u(x,t)\leq(t-s)L\left(\frac{x-y}{t-s}\right)+u(y,s),$$

Comme ceci est valable pour tout y, on obtient

$$u(x,t)\leq\min_{y\in\mathbb{R}^n}\left\{(t-s)L\left(\frac{x-y}{t-s}\right)+u(y,s)\right\}.$$

Pour prouver l'inégalité inverse, considérons $w\in\mathbb{R}^n$ tel que

$$u(x,t)=tL\left(\frac{x-w}{t}\right)+g(w).$$

Soit $y=\frac{s}{t}x+\left(1-\frac{s}{t}\right)w$. On a

$$\begin{aligned}(t-s)L\left(\frac{x-y}{t-s}\right)+u(y,s)&\leq(t-s)L\left(\frac{x-w}{t}\right)+sL\left(\frac{y-w}{s}\right)+g(w)\\&\leq u(x,t).\end{aligned}$$

et on obtient l'inégalité cherchée.

Lemme 3.7 *La fonction u est lipschitzienne sur $\mathbb{R}^n\times[0,+\infty[$ et $u=g$ sur $\mathbb{R}^n\times\{0\}$.*

Démonstration. On fixe $t>0$, x, $x'\in\mathbb{R}^n$. Soit $y\in\mathbb{R}^n$ tel que

$$tL\left(\frac{x-y}{t}\right)+g(y)=u(x,t).$$

On a alors, en notant k_g le rapport de Lipschitz de g,

$$\begin{aligned}u(x',t)-u(x,t)&\leq tL\left(\frac{x'-(x'-x+y)}{t}\right)+g(x'-x+y)-tL\left(\frac{x-y}{t}\right)-g(y)\\&\leq k_g|x'-x|.\end{aligned}$$

Montrons maintenant que u est lipschitzienne en t. On commence par traiter le point $t=0$. Soit $x\in\mathbb{R}^n$ et $t>0$. On a

$$\begin{aligned}u(x,t)&=\min_{y\in\mathbb{R}^n}\left\{tL\left(\frac{x-y}{t}\right)+g(y)\right\}\\&\geq g(x)+t\min_{z\in\mathbb{R}^n}\{-k_g|z|+L(z)\}\\&\geq g(x)-t\max_{w\in B(0,k_g)}\max_{z\in\mathbb{R}^n}\{w\cdot z-L(z)\}\\&\geq g(x)-t\max_{\bar{B}(0,k_g)}H;\end{aligned}$$

par ailleurs $u(x,t) \leq tL(0) + g(x)$, d'où

$$|u(x,t) - g(x)| \leq Ct.$$

Par un calcul analogue, on prouve que u est lipschitzienne en t pour $t > 0$: si $t' < t$, on a

$$\begin{aligned} u(x,t) - u(x,t') &= \min_{y \in \mathbb{R}^n} \left\{ (t-t') L\left(\frac{x-y}{t-t'}\right) + u(y,t') - u(x,t') \right\} \\ &\geq (t-t') \min_{y \in \mathbb{R}^n} \left\{ L\left(\frac{x-y}{t-t'}\right) - \frac{|x-y|}{t-t'} k_g \right\} \\ &\geq -(t-t') \max_{w \in \bar{B}(0,k_g)} \max_{z \in \mathbb{R}^n} \{ w \cdot z - L(z) \} \\ &\geq -C(t-t'). \end{aligned}$$

et d'autre part,

$$\begin{aligned} u(x,t) - u(x,t') &= \min_{y \in \mathbb{R}^n} \left\{ (t-t') L\left(\frac{x-y}{t-t'}\right) + u(y,t') - u(x,t') \right\} \\ &\leq (t-t') L(0), \end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration. □

Théorème 3.8 *On suppose que H ne dépend que de p, est convexe et que $H(p)/|p|$ tend vers $+\infty$ lorsque $|p|$ tend vers $+\infty$ On suppose de plus que g est bornée et lipschitzienne. Alors l'équation*

$$\begin{cases} u_t(x,t) + H(\nabla u(x,t)) = 0 & \textit{dans } \mathbb{R}^n \times]0,T[\\ u = g & \textit{sur } \mathbb{R}^n \times \{0\} \end{cases} \tag{20}$$

admet comme solution de viscosité la solution donnée par la formule de Hopf-Lax (19).

Démonstration. 1. Soit L la fonction duale de H. L vérifie les mêmes propriétés que H :

$$\frac{L(q)}{|q|} \xrightarrow[|q| \to \infty]{} +\infty. \tag{21}$$

On a vu que u est lipschitzienne et qu'elle vérifie la condition initiale. Elle est de plus bornée car g l'est.

2. Soit $v \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times]0,\infty[)$ telle que la fonction $u - v$ ait un maximum local en un point $(x_0,t_0) \in \mathbb{R}^n \times]0,\infty[$. Par le lemme 3.6, on a pour $t < t_0$ et (x,t) au voisinage de (x_0,t_0),

$$u(x_0,t_0) \leq (t_0 - t) L\left(\frac{x_0 - x}{t_0 - t}\right) + u(x,t),$$

$$v(x_0,t_0) - v(x,t) \leq (t_0 - t) L\left(\frac{x_0 - x}{t_0 - t}\right).$$

Pour $x - x_0 = (t - t_0) q$, on obtient

$$v_t(x_0,t_0) + \nabla_x v(x_0,t_0) \cdot q \leq L(q),$$

et ceci pour tout $q \in \mathbb{R}^n$, d'où

$$v_t(x_0,t_0) + H(\nabla_x(x_0,t_0)) \leq 0.$$

3. Supposons que $u - v$ ait un minimum local en (x_0,t_0). Par l'absurde, s'il existe $\theta > 0$ tel qu'au voisinage de (x_0,t_0) on ait

$$v_t(x,t) + H(\nabla v(x,t)) \leq -\theta < 0,$$

alors on a, toujours au voisinage de (x_0, t_0), par dualité de H et L,

$$v_t(x,t) + \nabla v(x,t) \cdot q - L(q) \leq \theta$$

pour tout $q \in \mathbb{R}^n$. Par le lemme 3.6 on a, pour h assez petit et pour un certain x_1,

$$u(x_0, t_0) = hL\left(\frac{x_0 - x_1}{h}\right) + u(x_1, t_0 - h).$$

Ensuite on calcule...

$$\begin{aligned} v(t_0, x_0) - v(x_1, t_0 - h) &= \int_0^1 \frac{d}{ds}\big(v(sx_0 + (1-s)x_1, t_0 + (s-1)h)\big)\, ds \\ &= \int_0^1 \big(\nabla v(sx_0 + (1-s)x_1, t_0 + (s-1)h) \cdot (x_0 - x_1) \\ &\qquad + v_t(sx_0 + (1-s)x_1, t_0 + (s-1)h)h\big)\, ds. \end{aligned}$$

En posant $q = \frac{x_0 - x_1}{h}$, on obtient pour h assez petit

$$\begin{aligned} v(t_0, x_0) - v(x_1, t_0 - h) &\leq hL\left(\frac{x_0 - x_1}{h}\right) - \theta h \\ &\leq u(t_0, x_0) - u(x_1, t_0 - h) - \theta h, \end{aligned}$$

ce qui est impossible. Ainsi on a prouvé que

$$v_t(x_0, t_0) + H(\nabla v(x_0, t_0)) \geq 0.$$

□

Conclusion

Les théorèmes précédents montrent que les solutions de viscosité constituent la notion adaptée de solution faible des équations de Hamilton-Jacobi. Cette méthode peut s'appliquer à une classe plus générale d'équations que celles étudiées ici, notamment on peut traiter certaines équations du second ordre et obtenir des résultats similaires (cf. [3]). En ce qui concerne les applications des équations de Hamilton-Jacobi, citons la mécanique, comme on l'a vu plus haut, mais aussi l'optique (équation eikonale), les probabilités (cf. [6]) et la géometrie (par exemple l'étude des mouvements de surface) (cf. [3]).

Références

[1] V. Arnold. *Méthodes mathématiques de la mécanique classique.* Éditions Mir, 1976.

[2] M. Bardi and I. Capuzzo-Dolcetta. *Optimal control and viscosity solutions of Hamilton-Jacobi-Bellman equations.* Birkhäuser, 1997.

[3] M. Bardi, M. G. Crandall, L. C. Evans, H. M. Soner, and P. E. Souganidis. *Viscosity solutions and applications.* Lecture notes in Mathematics. Springer, 1997.

[4] G. Barles. *Solution de viscosité des équations de Hamilton-Jacobi.* Springer-Verlag, 1994.

[5] L. C. Evans. *Partial differential equations.* AMS Press, 1998.

[6] W. H. Fleming and H. M. Soner. *Controlled Markov processes and viscosity solutions.* Springer, 1993.

[7] P.-L. Lions. *Generalized solutions of Hamilton-Jacobi equations.* Research Notes in Mathematics 69. Pitman Advanced Publishing Program, 1982.