Actions de groupes sur le cercle

Mostapha Benhenda
sous la direction de Raphaël Krikorian (Paris VI)

13 Octobre 2006

En général, résoudre une équation différentielle ordinaire est difficile.

Partant de ce constat, Henri Poincaré développa au XIXème siècle la théorie des systèmes dynamiques. Il introduisit de nouveaux objets afin de comprendre le comportement asymptotique de la solution $f^t(x)$ d'une Equation Différentielle Ordinaire (où $x \in X$ est la condition initiale dans l'espace des phases).

En physique, notamment en mécanique céleste, l'espace des phases X est souvent compact, à cause de la conservation de l'énergie. Pour simplifier l'étude, Poincaré prit donc pour X la variété compacte la plus élémentaire, à savoir $\mathbb{S}^1$. De plus, il discrétisa la situation en prenant $t \in \mathbb{Z}$. Il fut ainsi conduit à étudier l'action de $\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{S}^1$ par homéomorphismes.

Une généralisation naturelle de ce cadre consiste ensuite à considérer l'action d'un groupe d'homéomorphismes du cercle Γ générique.

Deux directions d'études sont alors possibles : une première se situe dans un cadre différentiel. On regarde les sous-groupes de $Diff^2_+(\mathbb{S}^1)$. Une seconde considère l'aspect topologique et se place seulement dans $Homeo_+(\mathbb{S}^1)$. Nous allons ici illustrer chacun des deux aspects.

1 Rappel des propriétés de base

La propriété de trichotomie est à la base de tous les développements qui vont suivre :

Proposition 1 (trichotomie) *Soit Γ un sous-groupe de $Homeo_+(\mathbb{S}^1)$. Alors on a toujours une, et une seule, de ces trois possibilités :*

1. *Il existe une orbite finie.*
2. *Toutes les orbites sont denses.*
3. *Il existe un compact Γ-invariant $K \subset \mathbb{S}^1$, infini, différent de $\mathbb{S}^1$, et tel que les orbites des points de K sont denses dans K. Cet ensemble K est unique, contenu dans l'adhérence de toute orbite et homéomorphe à un ensemble de Cantor. On dit que K est un minimal exceptionnel.*

Le cas 3 est pathologique. Pour s'en débarasser, on le ramène au cas 2 en utilisant une semi-conjugaison. Elle permet d'associer à Φ un homomorphisme minimal $\overline{\Phi}$ à valeurs dans les homéomorphismes du cercle obtenu en comprimant les composantes connexes du complémentaire de K :

Définition : Soit Γ un groupe et Φ_1, Φ_2 deux homomorphismes de Γ dans $Homeo_+(\mathbb{S}^1)$. On dit que Φ_1 est *semi-conjugué* à Φ_2 s'il existe une application continue croissante h de degré 1, du cercle dans lui-même telle que pour tout $\gamma \in \Gamma$, on a $\Phi_1(\gamma)h = h\Phi_2(\gamma)$.

Proposition 2 *Soit Γ un groupe et Φ un homomorphisme de Γ dans $Homeo_+(\mathbb{S}^1)$ tel que $\Phi(\Gamma)$ ait un minimal exceptionnel K. Alors il existe un homomorphisme $\bar{\Phi}$ de Γ dans $Homeo_+(\mathbb{S}^1)$ tel que Φ soit semi-conjugué à $\bar{\Phi}$ et tel que $\bar{\Phi}(\Gamma)$ ait des orbites denses dans le cercle.*

Le théorème de Poincaré classifie les groupes cycliques d'homéomorphismes en fonction d'un invariant dynamique, le nombre de rotation :

Définition-Propriété 3 (nombre de rotation) *Soit $f \in Homeo_+(\mathbb{S}^1)$ et $\tilde{f}$ un relevé quelconque de f dans le revêtement universel $\widetilde{Homeo}_+(\mathbb{S}^1)$ de $Homeo_+(\mathbb{S}^1)$. Soit $x \in \mathbb{R}$. La quantité $(\tilde{f}^n(x) - x)/n$ admet une limite quand n tend vers l'infini, indépendante de x, qu'on note $\tau(\tilde{f})$ et qu'on appelle nombre de translation de $\tilde{f}$. De plus, comme deux relevés ne diffèrent que par un entier, alors il en est de même de leurs nombres de translation. On appelle alors nombre de rotation de f la classe de $\tau(\tilde{f})$ modulo $\mathbb{Z}$. On le note $\rho(f)$.*

Théorème 4 (Poincaré) *Soit $f \in Homeo_+(\mathbb{S}^1)$ et $\rho(f)$ son nombre de rotation. Alors les assertions suivantes sont vraies :*

- *$\rho(f)$ est rationnel si et seulement si f a une orbite périodique. Dans ce cas, si $K \subset \mathbb{S}^1$ est un fermé invariant par f, alors f possède au moins un point périodique sur K.*
- *Si $\rho(f)$ est irrationnel, alors f est semi-conjugué à la rotation du cercle d'angle $\rho(f)$. Si de plus les orbites de f sont denses, alors cette semi-conjugaison est en fait une conjugaison.*

2 Les groupes de difféomorphismes du cercle engendrés par des éléments proches des rotations

2.1 Motivations

Dans la propriété de trichotomie, le cas 3 est pathologique. On va chercher des conditions suffisantes pour l'exclure. Un premier résultat dans ce sens est le théorème de Denjoy : il dit essentiellement que lorsque Γ est cyclique, infini et que le générateur possède suffisamment de régularité (C^2), le cas 3 ne se produit pas.

En revanche, si Γ n'est pas cyclique, le cas 3 peut se produire même si les difféomorphismes sont de classe C^∞. Un exemple élémentaire est donné par Sacksteder [Sac] :

Exemple de motivation : Plaçons-nous sur le cercle $\mathbb{R}/2\mathbb{Z}$ et considérons le groupe G engendré par les difféomorphismes du cercle f et g définis par :

$f(x) = x + 2/3 \pmod 2$ pour $x \in [0, 2]$

$g(x) = x/3$ si $x \in [0, 1]$
$g(x) = 3x - 10/3$ si $x \in [4/3, 5/3]$

$g(x)$ est définie ailleurs sur $[0,2]$ de sorte que g soit de classe C^∞, que $g(2) = 2$ et que g^{-1} existe et soit C^∞ sur $\mathbb{S}^1$.

Construisons alors le Cantor K comme suit : à la première étape, on supprime les intervalles ouverts $]1/3, 2/3[$, $]1, 4/3[$ et $]5/3, 2[$. Aux étapes suivantes, on procède comme d'habitude (on coupe les intervalles en trois et on supprime celui du milieu). Alors on a la :

Proposition 5 *K est un ensemble minimal sous l'action de G.*

Pour exclure le cas 3 dans le cas Γ non cyclique, on doit donc ajouter d'autres hypothèses. Un résultat classique dans ce sens est le théorème de Plante (cf. [Lio]) : si un groupe Γ de difféomorphismes C^2 est de type fini et s'il préserve une mesure de probabilité sur $\mathbb{S}^1$, alors il n'admet pas de minimal exceptionnel.

Ici, l'exclusion du cas 3 va être obtenue en mettant une contrainte sur une partie génératrice du groupe : il suffit qu'ils soient "proches" des rotations. On peut voir ces résultats comme une extension à $Diff_+^2(\mathbb{S}^1)$ d'un résultat dont on dispose sur PSL(2,$\mathbb{R}$) : dans la théorie des groupes fuchsiens on montre (cf. [Bea]), en utilisant l'inégalité de Jorgensen, que si un sous-groupe discret à deux générateurs admet un minimal exceptionnel, alors on ne peut pas conjuguer simultanément dans PSL(2,$\mathbb{R}$) les deux générateurs d'un tel groupe en des éléments "proches des rotations".

2.2 Absence de minimal exceptionnel et Ergodicité

Définition : Soit $f \in Diff_+^{log}(\mathbb{S}^1)$. On pose :

$$W(f) = sup \sum_{i=0}^{n-1} |log(f'(a_{i+1})) - log(f'(a_i))|$$

où le supremum est pris sur tous les n-uplets de points $a_0 < ... < a_n = a_0$ cycliquement ordonnés sur $\mathbb{S}^1$ et sur tous les entiers naturels n.

On l'appelle la variation totale du logarithme de la dérivée de f. f est dite de classe C^{log} si $W(f) < \infty$.

Théorème 6 (Navas [Nav]) ***En classe*** C^{log}. *Il existe une constante $\lambda_0 > 0$ telle que, si Γ est un sous-groupe de $Diff_+^{log}(\mathbb{S}^1)$ engendré par un ensemble Γ^1 de difféomorphismes, dont au moins l'un d'entre eux a un nombre fini de points périodiques, et tels que $W(f) \leq \lambda_0$ pour tout $f \in \Gamma^1$, alors Γ n'admet pas de minimal exceptionnel.(où $W(f)$ est la variation totale du logarithme de la dérivée de f)*

Corollaire (Duminy[Nav]) : En classe C^2. *Il existe une constante $\delta_0 > 0$ telle que, si Γ est un sous-groupe de $Diff_+^2(\mathbb{S}^1)$ engendré par un ensemble Γ^1 (pas nécessairement fini) de difféomorphismes, dont au moins l'un d'entre eux a un nombre fini de points périodiques, et tels que $|f''(x)| \leq \delta_0$ pour tout $f \in \Gamma^1$, alors Γ n'admet pas de minimal exceptionnel.*

Remarque : $\lambda_0 \simeq 0.199$ et $\delta_0 \simeq 0.165$. On ne sait pas si ces constantes sont optimales.

Le théorème de Duminy peut être vu comme un résultat de stabilité topologique par des perturbations petites au sens C^2 : en effet, pour une rotation, seuls les cas 1 et 2 de la propriété de trichotomie se produisent.

Par ailleurs, on sait qu'une rotation d'angle irrationnel agit sur $\mathbb{S}^1$ de manière ergodique par rapport à la mesure de Lebesgue (Rappelons que l'action de Γ sur $\mathbb{S}^1$ est ergodique par rapport à une mesure μ si les sous-ensembles μ-mesurables et Γ-invariants ont une mesure nulle ou totale).

L'ergodicité est également stable par cette perturbation :

Théorème 7 (Navas) *Soit Γ un groupe de difféomorphismes du cercle engendré par une famille Γ^1 d'éléments qui vérifient $\|f"\| < \delta_0$ pour tout $f \in \Gamma^1$, où la constante δ_0 est celle définie précedemment. Supposons de plus que Γ n'a pas d'orbite finie et que les points périodiques d'au moins l'un de ses générateurs sont isolés. Alors Γ agit sur $\mathbb{S}^1$ de manière ergodique par rapport à la mesure de Lebesgue.*

En modifiant un peu la preuve du théorème ci-dessus, on obtient le fait suivant : si $\alpha > 0$ et si $\Gamma \subset Diff_+^{1+\alpha}(\mathbb{S}^1)$ admet un minimal exceptionnel K tel que pour tout $p \in K$, il existe $g \in \Gamma$ tel que $g'(p) > 1$, alors $Leb(K) = 0$.

Cela éclaire le problème ouvert suivant :

Des Cantors minimaux de mesure positive peuvent-ils apparaître pour des sous-groupes de type fini de $Diff_+^2(\mathbb{S}^1)$?

Pour finir cette partie, disons un mot de l'hypothèse des points périodiques isolés pour un générateur.

Elle a l'air superflue. Il est raisonnable d'espérer s'en débarasser : en effet, le théorème de Morse-Smale dit en particulier que les C^2-difféomorphismes à points périodiques isolés forment un ensemble Baire-gras. En fait, une réponse positive à la question suivante suffirait [Nav] :

Existe-t-il une constante $N \in \mathbb{N}$ telle que pour tout $\Gamma \subset Homeo_+(\mathbb{S}^1)$ sans orbite finie et non semi-conjuguée à un groupe de rotations, pour tout système de générateurs $\Gamma_1 \subset \Gamma$, pour tout $p \in \mathbb{S}$, il existe $f \in \Gamma^N$ telle que p ne soit pas un point périodique pour f ? (où $\Gamma^N = \{f \in \Gamma, f = f_{i_1} \circ ... \circ f_{i_n}, f_{i_j} \in \Gamma^1, n \leq N\}$)

3 Le groupe des homéomorphismes du cercle

3.1 Des méthodes dynamiques pour des résultats topologiques et algébriques

L'utilisation d'arguments de nature dynamique permet de démontrer de nombreux résultats de nature topologique ou algébrique sur $Homeo_+(\mathbb{S}^1)$. On propose ici d'en donner un aperçu :

Muni de la topologie de la convergence uniforme, $Homeo_+(\mathbb{S}^1)$ est un groupe topologique. On a envie de le considérer comme un groupe de Lie de dimension infinie afin de bénéficier des résultats de cette théorie. Mais une des difficultés est que contrairement au cas d'un groupe de Lie, il n'est pas vrai qu'un élément de $Homeo_+(\mathbb{S}^1)$ proche de l'identité soit dans un sous-groupe à 1 paramètre. En effet, $f \in Homeo_+(\mathbb{S}^1)$ peut être inclus dans un flot topologique si et seulement si $\rho(f) = 0$ ou f est conjugué à une rotation.

Malgré cela, $Homeo_+(\mathbb{S}^1)$ partage beaucoup de propriétés communes avec les groupes de Lie de dimension finie. Plus exactement, on peut voir $Homeo_+(\mathbb{S}^1)$ comme un analogue en dimension infinie de PSL(2,$\mathbb{R}$).

En effet, les groupes de Lie admettent un sous-groupe compact maximal K, unique à conjugaison près. De plus, l'inclusion de K dans le groupe de Lie est une équivalence d'homotopie. Dans le cas de PSL(2,$\mathbb{R}$), le sous-groupe compact maximal est SO(2,$\mathbb{R}$)/$\{\pm$Id$\}$, isomorphe à $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ et le quotient de PSL(2,$\mathbb{R}$) par son sous-groupe compact maximal est contractile puisqu'il s'identifie au demi-plan supérieur H.

Pour le groupe des homéomorphismes du cercle, on obtient des résultats similaires : à conjugaison près, le groupe des rotations $SO(2,\mathbb{R})$ est l'unique sous-groupe maximal compact de $Homeo_+(\mathbb{S}^1)$ et l'inclusion $SO(2,\mathbb{R}) \hookrightarrow Homeo_+(\mathbb{S}^1)$ est une équivalence d'homotopie.

Par ailleurs, on sait qu'étant donné un choix générique (au sens de Baire) de deux éléments de SL(2,$\mathbb{R}$), le sous-groupe qu'ils engendrent est libre. Il en est de même pour $Homeo_+(\mathbb{S}^1)$.

Enfin, tout élément de $Homeo_+(\mathbb{S}^1)$ peut s'écrire comme un produit de deux commutateurs. Cela nous permet aussi de déduire que $Homeo_+(\mathbb{S}^1)$ est simple. On peut donc le considérer comme un analogue d'un groupe de Lie simple, groupes pour lesquels on dispose d'une théorie puissante.

3.2 Action de réseaux sur le cercle

On passe maintenant à l'étude de l'action de réseaux sur le cercle. Rappelons qu'un *réseau* Γ d'un groupe de Lie G est un sous-groupe discret tel que le volume du quotient G/Γ est fini pour la mesure de Haar. En dimension supérieure à 3, les actions de réseaux sur le cercle se comportent de manière assez rigide. Par exemple, le théorème de Witte [Wit] dit que si Γ est un sous-groupe d'indice fini de SL(n,$\mathbb{Z}$) ($n \geq 3$), alors tout homomorphisme $\Phi : \Gamma \to Homeo_+(\mathbb{S}^1)$ a une image finie.

On présente ici un résultat du même genre dans le cadre de réseaux quelconques. On énonce le théorème de Ghys [Gh01] pour SL(3,$\mathbb{R}$), mais il est encore vrai pour SL(n,$\mathbb{R}$) ($n \geq 3$) et même pour une classe de groupes plus générale.

Théorème 8 (Ghys[Gh99]) *Soit Γ un réseau de SL(3,$\mathbb{R}$). Alors toute action de Γ sur le cercle a une orbite finie.*

Schéma de la preuve :

Première étape : Il suffit de trouver une mesure invariante sous cette action

Deuxième étape : l'application de Furstenberg

Rappelons qu'un drapeau de $\mathbb{R}^3$ est la donnée d'un plan vectoriel E_2 de $\mathbb{R}^3$ et d'une droite vectorielle E_1 contenue dans E_2.

L'ensemble des drapeaux, muni de la topologie naturelle, est une variété compacte, qu'on note Dr. C'est un espace homogène sous l'action de SL(3,$\mathbb{R}$). Le groupe Γ agit naturellement sur $\mathbb{R}^3$ et donc sur Dr.

$Prob(\mathbb{S}^1)$, l'espace des probabilités sur le cercle, est un espace métrisable compact sur lequel $Homeo_+(\mathbb{S}^1)$ agit naturellement, ainsi que Γ via l'homomorphisme Φ.

On munit Dr de la tribu des parties mesurables au sens de Lebesgue et on munit $Prob(\mathbb{S}^1)$ de la tribu des boréliens.

Cette étape consiste à construire une application mesurable $\psi : Dr \to Prob(\mathbb{S}^1)$, l'application de Furstenberg, qui est équivariante sous les actions de Γ sur la source et le but.

Pour démontrer le théorème, il suffit alors de montrer que l'application ψ prend une valeur constante μ, presque partout par rapport à la mesure de Lebesgue sur Dr. En effet, l'équivariance de ψ montrera que cette probablilité μ est invariante par $\Phi(\Gamma)$.

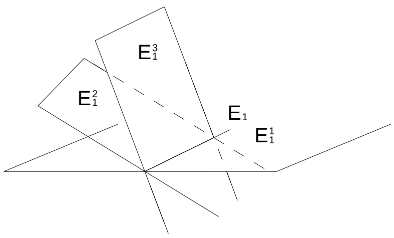
On suppose donc maintenant par l'absurde que l'application ψ n'est pas constante sur une partie de mesure de Lebesgue totale.

Troisième étape : l'application ψ à valeurs dans les masses de Dirac

On montre que les valeurs prises par ψ ont toujours des atomes. On modifie alors ψ de sorte à ne conserver comme information que l'emplacement sur le cercle de ses atomes dont l'intensité dépasse un certain seuil qu'on s'est préalablement donné. On obtient ainsi une application $\psi : Dr \to \mathbb{S}^1_k$, avec $k > 0$, à valeurs dans l'espace $\mathbb{S}^1_k$ des parties à k éléments du cercle, qui est mesurable au sens de Lebesgue et équivariante presque partout sous les actions de Γ sur la source et le but.

Quatrième étape : l'ordre cyclique des triplets de points sur le cercle

On considère l'espace X des triplets (E^2_1, E^2_2, E^2_3) de plans distincts de $\mathbb{R}^3$ qui s'intersectent sur une même droite E_1.



C'est encore un espace homogène sous l'action de SL(3,$\mathbb{R}$) . Un point de X détermine trois drapeaux. L'application ψ permet de définir une application mesurable équivariante $\psi^{(3)} : X \to (\mathbb{S}^1_k)^3$. La contradiction cherchée va résulter de l'ergodicité de l'action de Γ sur X, qui sera incompatible avec la non ergodicité de celle de Γ sur les triplets de points du cercle : un triplet de points disctincts peut en effet être orienté positivement ou négativement, et cette partition est invariante sous l'action de $Homeo_+(\mathbb{S}^1)$

4 Une généralisation du nombre de rotation : la classe d'Euler bornée

L'objectif de cette partie est de construire un invariant dynamique associé à une action de groupe sur le cercle qui prolonge le nombre de rotation (cf. [Gh01], [Gh87]).

4.1 La cohomologie d'un groupe

Soit Γ un groupe et A un groupe abélien.

Définition : On appelle *k-cochaîne homogène* de Γ toute application $c : \Gamma^{k+1} \to A$ telle que pour tout $\gamma \in \Gamma$, $c(\gamma\gamma_0, ..., \gamma\gamma_k) = c(\gamma_0, ..., \gamma_k)$. L'ensemble des k-cochaînes est noté $C^k(\Gamma, A)$.

On associe à c une unique *k-cochaine inhomogène* $\overline{c} : \Gamma^k \to A$ telle que
$c(\gamma_0, ..., \gamma_k) = \overline{c}(\gamma_0^{-1}\gamma_1, \gamma_1^{-1}\gamma_2, ..., \gamma_{k-1}^{-1}\gamma_k)$.

Définition : On définit l'application cobord $d_k : C^k(\Gamma, A) \to C^{k+1}(\Gamma, A)$ par :

$$d_k c(\gamma_0, ..., \gamma_{k+1}) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i c(\gamma_0, ..., \hat{\gamma}_i, ..., \gamma_k)$$

On a $d_{k+1} \circ d_k = 0$. On peut donc définir le groupe de cohomologie $H^k(\Gamma, A)$ comme étant le quotient des cocycles (le noyau de d_k) par les cobords (l'image de d_{k-1}).

En degré 2, la cohomologie nous permet de construire la classe d'Euler :
considérons une extension centrale de Γ par A (ie une suite exacte avec $i(A) \subset Z(\Gamma)$) :

$$0 \to A \xrightarrow{i} \tilde{\Gamma} \xrightarrow{p} \Gamma \to 1$$

S'il existe une section $s : \Gamma \to \tilde{\Gamma}$ qui soit un morphisme, alors l'extension est triviale : $\tilde{\Gamma}$ est isomorphe à $\Gamma \times A$.

Mesurer la non-trivialité de l'extension revient donc à mesurer l'obstruction à trouver une section s qui soit un morphisme. On choisit alors une section s et on regarde $\overline{c}(\gamma_1, \gamma_2) = s(\gamma_1\gamma_2)^{-1}s(\gamma_1)s(\gamma_2)$. On observe que $\overline{c}$ appartient à Ker p et est donc à valeurs dans A (à isomorphisme près).

On obtient ainsi une application $\overline{c} : \Gamma^2 \to A$ qui nous donne une 2-cochaine homogène $c : \Gamma^3 \to A$.

La cochaîne c est un cocycle dont la classe de cohomologie ne dépend pas du choix de s. On l'appelle *classe d'Euler* de l'extension. Elle paramétrise les classes d'isomorphismes des extensions centrales de A par Γ.

4.2 La classe d'Euler d'une action de groupe sur le cercle

On considère un homomorphisme $\Phi : \Gamma \to Homeo_+(\mathbb{S}^1)$ et l'extension centrale $0 \to \mathbb{Z} \to \widetilde{Homeo}_+(\mathbb{S}^1) \to Homeo_+(\mathbb{S}^1) \to 1$

On peut tirer en arrière cette extension par Φ et considérer l'ensemble $\tilde{\Gamma}$ des éléments $(\gamma, \tilde{f}) \in \Gamma \times A$ tels que $\Phi(\gamma) = p(f)$

$\tilde{\Gamma}$ est une extension centrale de Γ par $\mathbb{Z}$. La classe d'Euler de cette extension est appelée classe d'Euler de Φ et notée $eu(\Phi)$. C'est un invariant dynamique.

Mais le problème, c'est que $H^2(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) = 0$. La classe d'Euler ne détecte pas le nombre de rotation.

4.3 La classe d'Euler bornée

Pour sauver le nombre de rotation, il faut remarquer que c'est un quasi-morphisme et que cette propriété le caractérise :

Définition : Soit Γ un groupe. Un quasi-morphisme $F : \Gamma \to \mathbb{R}$ est une application telle qu'il existe une constante D telle que pour tous γ_1, γ_2 dans Γ, on ait :
$|F(\gamma_1\gamma_2) - F(\gamma_1) - F(\gamma_2)| \leq D$.

Proposition 9 *Soit $F : \Gamma \to \mathbb{R}$ un quasi-homomorphisme. Alors il existe un unique réel τ tel que la suite $F(n) - n\tau$ soit bornée.*

Proposition 10 *Le nombre de translation est l'unique quasi-homomorphisme*
$\tau : \widetilde{Homeo}_+(\mathbb{S}^1) \to \mathbb{R}$ dont la restriction aux sous-groupes monogènes est un homomorphisme et qui prend la valeur 1 *en la translation par* 1.

On veut utiliser cette caractérisation. Pour cela, on considère les k-cochaînes *bornées*. Comme précédemment avec les k-cochaînes, on construit un groupe de cohomologie $H^k_b(\Gamma, A)$.

Regardons $H^2_b(\mathbb{Z},\mathbb{Z})$: soit $c : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}$ un 1-cocycle borné. Voyons-le comme un cocycle quelconque. Puisque $H^2(\mathbb{Z},\mathbb{Z}) = 0$, alors on a $c(n, p) = du$ (où $du(n, p) = u(n + p) - u(n) - u(p)$) avec $u : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$.

Le fait que c soit borné est équivalent au fait que u soit un quasi-morphisme. C'est plutôt bon signe.

En effet, d'après la proposition 9, il existe un unique $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $v(n) = u(n) - n\theta$ soit borné. On a bien $c = dv$. Mais v n'est pas a priori à valeurs dans $\mathbb{Z}$. On pose alors $w(n) = u(n) - \lfloor n\theta \rfloor$, qui est borné lui aussi mais qui est cette fois-ci à valeurs dans $\mathbb{Z}$.

On a $c(n, p) = dw(n, p) + c_\theta(n, p)$ avec $c_\theta(n, p)) = \lfloor \theta(n + p) \rfloor - \lfloor \theta(n) \rfloor - \lfloor \theta(p) \rfloor$.

On peut ensuite montrer que c_θ et c_ξ sont cohomologues si et seulement si $\theta - \xi$ est entier. Par conséquent, $H^2_b(\mathbb{Z},\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

Maintenant, pour retomber sur nos pieds, il faut d'abord trouver une classe d'Euler bornée pour les homéomorphismes qui coincide avec celle de c_θ dans le cas d'une rotation R_θ d'angle θ.

Autrement dit, il faut trouver un cocycle c tel que son pullback par $\Phi_\theta : 1 \mapsto R_\theta$ soit cohomologue à c_θ.

Choisissons une section σ telle que $0 \leq \sigma(f)(0) < 1$ et posons :

$c(f_1, f_2) = \sigma(f_1 f_2)^{-1}\sigma(f_1)\sigma(f_2)$.

Alors c vérifie les propriétés voulues.

De plus, $[c]$ est un invariant dynamique. On dispose en effet d'un résultat de classification analogue à celui de Poincaré :

Définitions : Soit Γ tel que $\Phi(\Gamma)$ admet une orbite finie à k éléments. Chaque élément de $\Phi(\Gamma)$ permute ces k points cycliquement de sorte que l'on obtient un homomorphisme $r : \Gamma \to \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$. Deux orbites finies de $\Phi(\Gamma)$ ont le même nombre de points et définissent le même r. On appelle ce r la *structure cyclique des orbites finies*.

Réciproquement, considérons les homomorphismes $r : \Gamma \to \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$ et leurs actions correspondantes sur le cercle par rotations d'ordre k. Les classes dans $H^2_b(\Gamma,\mathbb{Z})$ de ces actions forment les *éléments rationnels* de $H^2_b(\Gamma,\mathbb{Z})$.

Théorème 11 (Ghys [Gh01]**)** *Soient Φ_1 et Φ_2 deux homomorphismes d'un groupe Γ dans $Homeo_+(\mathbb{S}^1)$. Supposons que les classes d'Euler bornées $\Phi_1^*(eu)$ et $\Phi_2^*(eu)$ soient égales à la même classe c dans $H^2_b(\Gamma,\mathbb{Z})$. Alors on a deux possibilités :*

Si c est une classe rationnelle, alors $\Phi_1(\Gamma)$ et $\Phi_2(\Gamma)$ ont des orbites finies avec la même structure cyclique.

Si c n'est pas rationnelle, alors les homomorphismes minimaux associés $\bar{\Phi}_1$ et $\bar{\Phi}_2$ sont conjugués.

Réciproquement , si $\Phi_1(\Gamma)$ et $\Phi_2(\Gamma)$ ont des orbites finies avec la même structure cyclique ou bien s'ils n'ont pas d'orbite finie et leurs homomorphismes minimaux associés sont conjugués (par un homéomorphisme préservant l'orientation) , alors ils ont la même classe d'Euler bornée.

Références :

[Bea] A. BEARDON, *The Geometry of Discrete Groups*. Springer-Verlag (1983)

[Gh87] Etienne GHYS, "Groupes d'homéomorphismes du cercle et cohomologie bornée" The Lefschetz centennial conference, Part III (Mexico City, 1984), 81-106 *Contemp. Math. 58 III, Amer. Math. Soc.*, Providence, RI, 1987

[Gh99] Etienne GHYS, "Actions de réseaux sur le cercle", *Inventiones Mathematicae* 137,199-231 (1999)

[Gh01] Etienne GHYS, "Groups acting on the circle" *L'Enseignement Mathématique 47* (2001), 329-407.

[Gre] Frederick GREENLEAF, *Invariant means on topological groups and their applications*, Van Nostrand (1969)

[Fer] Renato FERES, *Dynamical Systems and Semisimple Groups : an Introduction*. Cambridge University Press (1998)

[Lio] Isabelle LIOUSSE, Actions de groupes sur le cercle. Cours de l'Ecole d'été de Grenoble (2006).

[Mar] G. MARGULIS, "Free subgroups of the homeomorphism group of the circle" *C.R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 331* (2000), 669-674.

[Nav] Andres NAVAS, "Sur les groupes de difféomorphismes du cercle engendrés par des éléments proches des rotations", *L'Enseignement Mathématique*, t. 50 p.29-68 (2004)

[Sac] Richard SACKSTEDER, "On the existence of exceptional leaves of foliations of codimension one" *Annales de l'Institut Fourier (Grenoble) 14* (1964), 221-225.

[Wit] Dave WITTE, "Arithmetic groups of higher $\mathbb{Q}$-rank cannot act on 1-manifolds" *Proc. Amer. Math. Soc.* 122 (1994), 333-340