Le modèle des chemins pour les représentations des algèbres de Lie semi-simples

Olivier BENOIST et Mathieu HURUGUEN
Sujet proposé par Marc ROSSO

Introduction

L'étude des représentations d'un groupe de Lie peut être linéarisée, et se ramener à celle des représentations de son algèbre de Lie, ce qui permet un traitement purement algébrique de la question. On cherche alors à classifier et à décrire ces représentations.

Pour certaines algèbres de Lie particulières, dites semi-simples, on en a une description assez précise, due à Wilhelm Killing, Élie Cartan, Hermann Weyl et tant d'autres au début du vingtième siècle. Elles sont sommes directes de représentations irréductibles, et on sait paramétrer ces représentations irréductibles par certains points d'un réseau, et les décrire à l'aide de leur caractère donné par la formule de Weyl.

Cette description n'est cependant pas tout à fait satisfaisante : la formule de Weyl fait apparaître des sommes alternées, et est donc peu maniable en pratique.

C'est pour résoudre ce problème que Littelmann a mis au point au début des quatre-vingt-dix le modèle des chemins, que nous décrivons dans ce mémoire. Ce modèle, essentiellement combinatoire, fournit des algorithmes simples permettant de calculer efficacement le caractère d'une représentation irréductible. Il permet de plus de calculer la décomposition en somme directe de représentations irréductibles du produit tensoriel de deux représentations.

Mode d'emploi

Ce mémoire se compose de quatre parties.

La première, qui suit en grande partie le très bon livre [4], décrit la théorie générale des systèmes de racine et de leurs groupes de Weyl. Seule la lecture du premier paragraphe est essentielle pour la compréhension des énoncés des théorèmes de Littelmann qui suivront, mais la connaissance de l'intégralité de cette partie est requise pour le lecteur qui souhaite lire le détail des démonstrations : on y établit des résultats techniques nécessaires aux preuves.

La deuxième partie est une description de la théorie élémentaire des représentations des algèbres de Lie semi-simples complexes. Aucune démonstration n'est donnée, et le lecteur pourra se reporter à [6] pour une présentation élégante et concise, à [3] pour des exemples détaillés, et à [1] pour un ouvrage de référence.

Dans la troisième partie, on énonce les théorèmes de Littelmann. Ils sont ensuite démontrés dans la quatrième partie, à l'aide notamment des résultats de la première partie. On suit, en le détaillant, l'article [5]. Il convient de noter que le lecteur qui ne désire pas rentrer dans le détail des preuves parfois un peu techniques, et qui n'a pas lu l'intégralité de la première partie, pourra admettre le théorème 4.11, et ne lire de la quatrième partie que le dernier paragraphe.

Remerciements

Nous tenons à remercier Marc ROSSO pour la richesse du sujet qu'il nous a proposé, la gentillesse avec laquelle il nous a conseillé, et la profondeur des fauteuils de son bureau.

Table des matières

1 Systèmes de racines et groupes de Weyl

Dans cette partie, on introduit et on étudie un ensemble de configurations géométriques très simples qui apparaissent de manière naturelle dans l'étude des représentations des algèbres de Lie semi-simples.

1.1 Systèmes de racines, bases

E désigne un espace euclidien. Pour α dans E, s_α désigne la réflexion d'hyperplan $\alpha^\perp$.

Définition 1.1.

- Un *système de racines* R dans E est un ensemble de vecteurs non nuls satisfaisant :
  (i) R est fini et engendre E.
  (ii) $\forall \alpha \in R,\ R \cap \mathbb{R}\alpha = \{\alpha, -\alpha\}$.
  (iii) $\forall \alpha \in R,\ s_\alpha(R) = R$.
- Les éléments de R sont appelés *racines*.
- Le *groupe de Weyl* W associé à R est le sous-groupe de $O(E)$ engendré par les s_α.

Remarque 1.2. W est alors fini, car le morphisme naturel de W dans le groupe des permutations de R est injectif.

Remarque 1.3. On utilisera souvent dans la suite le fait simple suivant : si $w \in W$ et $\alpha \in R$ alors $ws_\alpha w^{-1} = s_{w(\alpha)}$.

Remarque 1.4. On appelle *système de racines généralisé* un ensemble fini de vecteurs non nuls vérifiant les deux dernières conditions. C'est donc un système de racines du sous-espace vectoriel qu'il engendre.

EXEMPLE 1.5. *Soit $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n+1}$ la base canonique de $\mathbb{R}^{n+1}$, et E l'hyperplan de $\mathbb{R}^{n+1}$ défini par l'équation $x_1 + ... + x_n = 0$. Alors les $(e_i - e_j)_{i\neq j}$ forment un système de racines de E, noté A_n.*

La réflexion d'hyperplan orthogonal à $e_i - e_j$ agit dans $\mathbb{R}^{n+1}$ comme une permutation des vecteurs de la base canonique : c'est une transposition échangeant e_i et e_j. Par conséquent, le groupe de Weyl W qu'ils engendrent s'identifie au groupe symétrique $\mathfrak{S}_{n+1}$.

Etant donné un système de racine R dans E, on va s'intéresser à des sous-ensembles générateurs minimaux particuliers, ce qui nous conduit à la notion de bases :

Définition 1.6. Une *base* de R est un sous-ensemble S de R formé de vecteurs linéairement indépendants et tel que tout élément de R s'exprime comme combinaison linéaire avec des coefficients de même signe d'éléments de S.

Remarque 1.7. Une base de R est en particulier une base de E.

Remarque 1.8. Si S est une base de R et si w est dans W, alors $w(S)$ est aussi une base.

Remarque 1.9. Les éléments d'une base sont appelés racines simples, une base est aussi parfois appelée système simple.

EXEMPLE 1.10. *On peut facilement exhiber une base du système de racines A_n de l'exemple 1.5 : les $(e_i - e_{i+1})_{1 \leqslant i \leqslant n}$ conviennent.*

Remarquons que l'existence d'une base n'est pas du tout claire. On consacrera la fin de ce paragraphe à démontrer qu'il existe toujours des bases, et qu'une fois qu'on en a une, on les a toutes (les autres étant ses conjuguées sous l'action du groupe de Weyl). Dans ce but, on introduit la notion de système positif.

Définition 1.11.

- Un ordre (strict) total sur E est une relation d'ordre (strict) total $>$ sur E compatible avec la structure d'espace vectoriel, c'est à dire vérifiant :
  - (i) $>$ est transitive.
  - (ii) $\forall \lambda, \mu \in E$, on a une et une seule des trois relations : $\lambda > \mu, \lambda = \mu, \mu > \lambda$.
  - (iii) $\forall \lambda, \mu, \nu \in E$, si $\lambda > \mu$, alors $\lambda + \nu > \mu + \nu$.
  - (iv) si $\lambda > \mu$ et si c est un réel non nul, $c\lambda > c\mu$ si $c > 0$, et $c\mu > c\lambda$ dans le cas contraire.
- Un *système positif* P de R est l'ensemble des racines λ vérifiant $\lambda > 0$ pour un certain ordre total $>$.

Remarque 1.12. Il existe toujours des systèmes positifs ; en effet, il existe toujours un ordre total sur E (par exemple, une base ordonnée de E étant fixée, on peut utiliser l'ordre lexicographique associé).

Remarque 1.13. Si S est une base de R, si P est l'ensemble des racines s'écrivant comme combinaison linéaire à coefficients positifs d'éléments de S, alors P coïncide avec le système positif associé à l'ordre lexicographique sur S (une fois S ordonnée). On l'appelle le système positif associé à S, et quand S est fixée sans ambiguïté, les éléments de P sont appelées les racines positives et ceux de -P les racines négatives.

Remarque 1.14. Si P est un système positif pour R, alors R est l'union disjointe de P et de -P. Ainsi $Card(R) = 2\,Card(P)$.

Théorème 1.15.

- *Toute base est contenue dans un unique système positif.*
- *Tout système positif contient une unique base. En particulier, il existe une base.*

Preuve. Soit S une base de R contenue dans P un système positif. Alors P contient le système positif associé à S et lui est donc égal pour des raisons de cardinal. D'où le premier point.

Soit à présent P un système positif associé à un ordre total $>$ sur E. Soit $S \subseteq P$ minimal pour la propriété que tout élement de P s'écrit comme combinaison linéaire à coefficients positifs d'éléments de S.

Lemme 1.16. $\forall \alpha, \beta \in S, (\alpha, \beta) \leqslant 0$.

Preuve du lemme. Supposons $(\alpha, \beta) > 0$, α, $\beta \in S$. Soit $c = 2\frac{(\beta,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}$. Alors $c > 0$ et $s_\alpha(\beta) = \beta - c\alpha$. Ainsi soit $\beta - c\alpha \in P$ soit $c\alpha - \beta \in P$. Plaçons-nous par exemple dans le second cas : $c\alpha - \beta = \sum_{\gamma \in S} c_\gamma \gamma$ où les c_γ sont positifs. Si $c > c_\alpha$, α s'exprime comme combinaison linéaire à coefficients positifs d'éléments de S ($(c - c_\alpha)\alpha = \sum_{\gamma \in S, \gamma \neq \alpha} c_\gamma \gamma + \beta$) et ceci contredit la minimalité de S. Si $c \leqslant c_\alpha$, on a $\beta \leqslant 0$ ($\beta = -\sum_{\gamma \in S, \gamma \neq \alpha} c_\gamma \gamma + (c - c_\alpha)\alpha$), ce qui n'est pas non plus possible. Le même type d'argument montre que le premier cas ne peut pas non plus se produire, et ceci démontre le lemme. □

A présent, supposons que les éléments de S sont linéairement dépendants et écrivons $\sum c_\beta \beta = \sum c_\gamma \gamma = \sigma$, la somme portant sur des éléments de S les c_β et les c_γ étant strictement positifs (et donc $\sigma \neq 0$). On a alors grâce au lemme, $(\sigma, \sigma) \leqslant 0$ et $\sigma = 0$. Ceci est impossible, donc les éléments de S sont bien linéairement indépendants et S est une base de R contenue dans P. De plus S est exactement l'ensemble des éléments de P qui ne peuvent s'écrire comme combinaison linéaire à coefficients strictement positifs d'au moins deux éléments de P. S est donc la seule base de R incluse dans P. □

Théorème 1.17. *Deux bases de R sont conjuguées sous l'action du groupe de Weyl.*

Remarque 1.18. On verra même plus loin que W agit simplement transitivement sur les bases, autrement dit étant donné S et S' deux bases de R il existe un unique w dans W tel que $S' = w(S)$.

Pour démontrer ce théorème on va utiliser la proposition suivante :

Proposition 1.19. *Soient S une base de R, P le système positif associé, et $\alpha \in S$. Alors $s_\alpha(P \setminus \{\alpha\}) = P \setminus \{\alpha\}$.*

Preuve. Soit $\beta \in P$, $\beta \neq \alpha$. Alors β s'écrit $\sum_{\gamma \in S} c_\gamma \gamma$ et il existe $\delta \neq \alpha$ tel que $c_\delta > 0$, car sinon β serait proportionnel à α et dans P, donc égal à α. Mais alors la décomposition de $s_\alpha(\beta)$ sur S fait apparaître le même coefficient sur δ, et par suite $s_\alpha(\beta)$ est une racine positive différente de α. □

Passons à la démonstration du théorème : soient S et S' deux bases, P et P' les systèmes positifs associés. On montre par récurrence sur $r = Card(P \cap -P')$ que P et P' sont conjugués sous l'action de W. Pour $r = 0$, $P = P'$ et la propriété est vérifiée. Si $r > 0$, alors on ne peut avoir $S \subseteq P'$. Soit alors $\alpha \in S \cap (-P')$. D'après la proposition précédente, $Card(s_\alpha(P) \cap -P') = r - 1$, et par hypothèse de récurrence, il existe $w' \in W$ tel que $P' = w' s_\alpha(P)$, ce qui achève la récurrence. Mais si $P' = w(P)$ alors $w(S)$ est une base incluse dans P', c'est donc S'. □

Remarque 1.20. Voici une conséquence très utile de la proposition 1.19. Notons ρ la demi-somme des racines positives. Soit $\alpha \in S$. Alors $\rho = \frac{1}{2}\sum_{\beta \in P\setminus\{\alpha\}} \beta + \frac{1}{2}\alpha$. Il vient donc, comme s_α est une bijection de $P \setminus \{\alpha\}$ sur lui même, $s_\alpha(\rho) = \rho - \alpha$. En utilisant le fait que s_α est une transformation orthogonale : $(\rho, \alpha) = (s_\alpha(\rho), s_\alpha(\alpha)) = (\rho - \alpha, -\alpha)$ et donc $(\rho, \alpha) = \frac{1}{2}(\alpha, \alpha)$.

Pour terminer ce paragraphe, on introduit la notion de chambre de Weyl, dont une étude plus approfondie sera faite dans l'avant-dernier paragraphe de cette partie.

Définition 1.21. On appelle *chambre de Weyl* associée à S ou *chambre de Weyl dominante*, notée $\mathfrak{W}$ l'ensemble : $\{\lambda \in E, \forall \alpha \in S, (\lambda, \alpha) \geqslant 0\}$.

Les murs de la chambre de Weyl sont alors les hyperplans $\{\lambda, (\lambda, \alpha) = 0\}$, pour $\alpha \in S$. Ce sont topologiquement les bords de $\mathfrak{W}$. On retrouve S à partir de $\mathfrak{W}$ en utilisant ses murs : les éléments de S sont les éléments de R qui leur sont directement orthogonal. A deux bases différentes sont donc associées deux chambres de Weyl différentes. Le théorème 1.17 montre alors que W agit transitivement sur l'ensemble des chambres de Weyl.

Remarque 1.22. D'après la remarque 1.20, ρ (la demi-somme des racines positives) est dans $\mathfrak{W}$.

1.2 Longueur

Le groupe de Weyl W est engendré par les réflexions s_α pour α dans R. Comme on va le voir dans le théorème suivant, on peut restreindre l'ensemble des α à n'importe quelle base S de R. En fait, on peut montrer mais on ne le fera pas ici, que les seules relations entre les éléments s_α, α dans S sont les suivantes :

$$\forall \alpha, \beta \in S, (s_\alpha s_\beta)^{m(s_\alpha s_\beta)} = 1,$$

où $m(w)$ désigne l'ordre de w pour $w \in W$.

Théorème 1.23. *Soit S une base de R. Alors W est engendré par les réflexions s_α, pour α dans S.*

Preuve. Notons provisoirement W' le sous-groupe de W engendré par les s_α, $\alpha \in S$, et soit P le système positif associé à S. Soit $\beta \in P$. On souhaite montrer que β possède un conjugué sous W' dans S, et ceci montrera le résultat car alors si $w'(\beta) = \alpha \in S$ il vient $s_\beta = w'^{-1} s_\alpha w'$, soit $s_\beta \in W'$, puis $W \subseteq W'$ (car W est engendré par les s_β avec $\beta \in P$). Mais $W'\beta \cap P$ est un ensemble non vide (contient β) fini de racines positives, et on choisit alors $\gamma = \sum_{\alpha \in S} c_\alpha \alpha$ dans cet ensemble (avec $c_\alpha \geqslant 0$) avec $\sum_{\alpha \in S} c_\alpha$ minimal. Il vient $(\gamma, \gamma) = \sum_{\alpha \in S} c_\alpha (\gamma, \alpha) > 0$ et donc il existe α avec $(\gamma, \alpha) > 0$. Si $\gamma \neq \alpha$ alors $s_\alpha(\gamma) = \gamma - 2\frac{(\gamma,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}\alpha$ est dans $W'\beta \cap P$ ce qui contredit la minimalité de γ. Donc $\gamma = \alpha$ est un conjugué de β dans S. $\square$

On fixe une base S de R. Le théorème précédent motive alors l'introduction des notions de longueur et d'expression réduite :

Définition 1.24. Une *expression réduite* de $w \in W$ est une expression du type $w = s_1 \dots s_r$, où $s_i = s_{\alpha_i}$, $\alpha_i \in S$, qui fait intervenir un nombre minimum de rélexions simples (une réflexion simple est une réflexion par rapport à une racine simple, mais attention, cela n'a de sens que si une base S a été fixée).

La *longueur* de $w \in W$, notée $l(w)$ est le nombre r dans l'expression précédente (en particulier, $l(1) = 0$).

On introduit aussi, pour $w \in W$, $n(w)$, le nombre de racines positives envoyées par w sur des racines négatives. Un des buts de ce paragraphe est d'établir l'égalité $l(w) = n(w)$ pour tout $w \in W$.
Jusqu'à la fin de ce paragraphe une base S de R est fixée et on note P le système positif associé. Voici quelques propriétés simples de la fonction longueur (les démonstrations sont évidentes) :

- $l(w) = 1$ si et seulement si $w = s_\alpha$ pour une certaine racine simple α.
- $\forall w \in W$, $l(w^{-1}) = l(w)$.
- $\forall w, w' \in W$, $\mid l(w) - l(w') \mid \leq l(ww') \leq l(w) + l(w')$.
- $\forall w \in W$, $det(w) = (-1)^{l(w)}$, et donc $l(ww')$ et $l(w)+l(w')$ ont même parité (en particulier si $w \in W$ et $\alpha \in S$, $l(s_\alpha w) = l(w)+1$ ou $l(s_\alpha w) = l(w)-1$).

Proposition 1.25. *Soient $w \in W$ et $\alpha \in S$. Alors :*

- $w(\alpha) \in P \Rightarrow n(ws_\alpha) = n(w) + 1$.
- $w(\alpha) \in -P \Rightarrow n(ws_\alpha) = n(w) - 1$.
- $w^{-1}(\alpha) \in P \Rightarrow n(s_\alpha w) = n(w) + 1$.
- $w^{-1}(\alpha) \in -P \Rightarrow n(s_\alpha w) = n(w) - 1$.

Preuve. Pour v dans W, notons $P(v) = \{\alpha \in P, v(\alpha) \in -P\}$. Dans le premier cas, la proposition 1.19 montre que $P(ws_\alpha)$ est l'union disjointe de $\{\alpha\}$ et de $s_\alpha(P(w))$. Ainsi $n(ws_\alpha) = n(w) + 1$. Le deuxième cas se montre de même. Les deux derniers points se montrent en passant à l'inverse. $\square$

On peut alors montrer facilement une inégalité :

Lemme 1.26. $\forall w \in W, n(w) \leqslant l(w)$.

Preuve. Soit $w = s_1 \dots s_r$ une expression réduite de w. Alors $0 = n(ws_r \dots s_1) \geqslant n(w) - r$ par une itération de la proposition 1.25, ce qui fournit l'inégalité cherchée. $\square$

Pour établir la seconde inégalité, on va avoir besoin du théorème de suppression suivant :

Théorème 1.27 (théorème de suppression). *Soient $w \in W$ et $w = s_1 \dots s_r$, $(s_i = s_{\alpha_i})$ une expression de w comme produit de réflexions simples (non nécessairement réduite). Supposons $n(w) < r$. Alors il existe $1 \leqslant i < j \leqslant r$ tels que :*

- $\alpha_i = s_{i+1} \dots s_{j-1}\alpha_j (= \alpha_j$ *si* $i = j-1)$.
- $s_{i+1} \dots s_j = s_i \dots s_{j-1}$.
- $w = s_1 \dots \hat{s}_i \dots \hat{s}_j \dots s_r$.

Preuve. Si pour tout $j \leqslant r$, $s_1 \dots s_{j-1}\alpha_j \in P$ alors, par la proposition 1.25 $n(w) = r$. Comme ce n'est pas le cas il existe un $j \leqslant r$ tel que $s_1 \dots s_{j-1}\alpha_j \in -P$. Mais $\alpha_j \in P$, donc il existe un $i \geqslant 1$ tel que $s_i \dots s_{j-1}\alpha_j \in -P$ et $\alpha = s_{i+1} \dots s_{j-1}\alpha_j \in P$. Alors α est une racine positive envoyée par s_i sur une racine négative. D'après la proposition 1.19, c'est α_i : $s_{i+1} \dots s_{j-1}\alpha_j = \alpha_i$. D'où le premier point. Il vient alors :

$$(s_{i+1} \dots s_{j-1})s_j(s_{j-1} \dots s_{i+1}) = s_{s_{i+1} \dots s_{j-1}(\alpha_j)} = s_i$$

(remarque 1.3), d'où le second point. Le troisième n'est qu'une reformulation du deuxième. □

Théorème 1.28. $\forall w \in W$, $l(w) = n(w)$.

Preuve. Soit $w = s_1 \dots s_r$ une expression réduite de $w \in W$. On sait déjà (lemme 1.26) que $n(w) \leqslant r$. Si on suppose $n(w) < r$ alors le théorème de suppression implique que $l(w) \leqslant r - 2$, ce qui n'est pas le cas. Ainsi $n(w) = r = l(w)$. □

On obtient alors comme corollaire un résultat énoncé dans la section précédente, à savoir que W agit simplement transitivement sur l'ensemble des bases :

Théorème 1.29. *Le groupe de Weyl agit simplement transitivement sur l'ensemble des bases.*

Preuve. On sait déjà que l'action est transitive (théorème 1.17), il reste donc à voir que si S est une base, si $w \in W$ et si $w(S) = S$ alors $w = 1$. Mais sous ces conditions, $w(P)$ est un système positif contenant S, c'est donc P (par le théorème 1.15, P désignant le système positif associé à S), et donc $n(w) = 0$ ce qui donne $l(w) = 0$ puis $w = 1$. □

Remarque 1.30. W agit donc aussi simplement transitivement sur l'ensemble des chambres de Weyl.

1.3 Ordre de Bruhat

Dans ce paragraphe, on va définir un ordre sur le groupe de Weyl et en étudier les propriétés. S désigne toujours une base de R et P le système positif associé.

Définition 1.31. *L'ordre de Bruhat* strict sur W, noté $>$ est la relation antiréflexive, transitive suivante. Pour $v, w \in W$ on dit que $v > w$ si il existe une suite $w_0 = w, w_1 \dots, w_r = v$ telle que :

(i) $\forall i, 0 \leqslant i \leqslant r-1$, $\exists \alpha \in R, w_{i+1} = s_\alpha w_i$.

(ii) $\forall i, 0 \leqslant i \leqslant r-1$, $l(w_{i+1}) > l(w_i)$.

La relation d'ordre associée est notée $\geqslant$.

Remarque 1.32. On pourrait tout aussi bien décider dans la première condition de multiplier à droite par s_α. Mais les deux définitions sont équivalentes : en effet, d'après la remarque 1.3, $s_\alpha w_i = w_i s_{w^{-1}(\alpha)}$. Ainsi, tous les théorème énoncés ci-dessous "à gauche" ont un pendant "à droite".

Remarque 1.33. On aura besoin à plusieurs reprises dans la suite du fait suivant : si $v, w \in W$ sont tels que $v = s_\alpha w$ pour une racine α, alors, étant donné $t \in W$, $tv = s_{t(\alpha)} tw$.

Afin d'étudier l'ordre de Bruhat sur W on va avoir besoin du théorème d'échange suivant :

Théorème 1.34 (théorème d'échange). *Soit $w \in W$, $w = s_1 \dots s_r$ ($s_i = s_{\alpha_i}$) une expression non nécessairement réduite de w comme produit de réflexions simples. Soit $\alpha \in R$ tel que $l(s_\alpha w) < l(w)$. Alors il existe un indice i tel que $s_\alpha w = s_1 \dots \hat{s}_i \dots s_r$. De plus, si l'expression est réduite, i est unique.*

On aura besoin dans la démonstration du lemme suivant :

Lemme 1.35. *Soit $w \in W$ et $\alpha \in P$ alors $l(s_\alpha w) > l(w)$ si et seulement si $w^{-1}(\alpha) \in P$.*

Preuve.

$\Rightarrow$ On procède par récurrence sur $l(w)$. Si $l(w) = 0$ il n'y a rien à faire. Si $l(w) > 0$, alors il existe β une racine simple telle que $l(ws_\beta) < l(w)$, et donc $l(ws_\beta) = l(w) - 1$. Il vient $l(s_\alpha w s_\beta) \geqslant l(s_\alpha w) - 1 > l(w) - 1 = l(ws_\beta)$. Ainsi, par hypothèse de récurrence, $s_\beta w^{-1}(\alpha) \in P$. Supposons $w^{-1}(\alpha) \in -P$. Alors $-w^{-1}(\alpha)$ est une racine positive envoyée par s_β sur une racine négative. Comme β est la seule racine avec cette propriété, $w^{-1}(\alpha) = -\beta$ et $s_\beta w^{-1}(\alpha) = \beta$. Il vient alors $(s_\beta w^{-1}) s_\alpha (s_\beta w^{-1})^{-1} = s_\beta$, puis $s_\alpha w = w s_\beta$, ce qui est impossible pour des raisons de longueur. Donc $w^{-1}(\alpha) \in P$.

$\Leftarrow$ Si $l(s_\alpha w) < l(w)$, le sens direct appliqué à $s_\alpha w$ montre que $w^{-1}(\alpha) \in -P$ contrairement à l'hypothèse. $\square$

Preuve du théorème 1.34. On peut prendre α dans P ($s_{-\alpha} = s_\alpha$). Alors d'après le lemme $w^{-1}(\alpha) = s_r \dots s_1(\alpha) \in -P$. Mais $\alpha \in P$, donc il existe un indice i tel que $\beta = s_{i-1} \dots s_1(\alpha) \in P$ et $s_i \dots s_1(\alpha) \in -P$. Ceci montre que $\beta = \alpha_i$ par un argument déjà rencontré. On a alors $s_{\alpha_i} = (s_{i-1} \dots s_1) s_\alpha (s_{i-1} \dots s_1)^{-1}$, et donc $s_\alpha w = s_1 \dots \hat{s}_i \dots s_r$.
Supposons aussi $i < j$ distincts tels que $s_\alpha w = s_1 \dots \hat{s}_i \dots s_r = s_1 \dots \hat{s}_j \dots s_r$. Il vient $s_{i+1} \dots s_j = s_i \dots s_{j-1}$ et alors, comme dans le théorème de suppression, l'expression ne peut être réduite. Ainsi si l'expression est réduite, i est unique. $\square$

Un théorème intéressant que l'on souhaite établir concerne les éléments du groupe de Weyl adjacents pour l'ordre de Bruhat, on souhaite notamment voir que deux tels éléments diffèrent en longueur de 1 :

Théorème 1.36. *Soient $w, v \in W$ avec $w < v$. Alors il existe $w_0, \dots, w_m \in W$ tels que $w = w_0 < w_1 < \dots < w_m = v$ et, pour $1 \leqslant i \leqslant m$, $l(w_i) = l(w_{i-1}) + 1$.*

La démonstration de ce théorème nécessite plusieurs résultats préliminaires dont le premier est la proposition suivante :

Proposition 1.37. *Soient $w, v \in W$, avec $w \leqslant v$, et soit aussi $\alpha \in S$.*

(i) Alors soit $s_\alpha w \leqslant v$, soit $s_\alpha w \leqslant s_\alpha v$ (les deux pouvant se produire simultanément).

(ii) On suppose $l(v) = l(w) + 1$, $w < s_\alpha w$ et $s_\alpha w \neq v$. Alors on a à la fois $v < s_\alpha v$ et $s_\alpha w < s_\alpha v$.

Preuve. 1. Commençons par le cas où $v = s_\beta w$ pour un certain $\beta \in P$. Alors, si $\beta = \alpha$, $s_\alpha w = v$ et la propriété est vraie. On suppose donc désormais $\alpha \neq \beta$. Il y a alors deux cas :

- Si $l(s_\alpha w) = l(w) - 1$ alors $s_\alpha w \leqslant w \leqslant v$ donc $s_\alpha w \leqslant v$.
- Si $l(s_\alpha w) = l(w) + 1$ alors on montre que $s_\alpha w < s_\alpha v$. Remarquons que 1.31(i) est déjà satisfaite puisque $s_\alpha v = s_{s_\alpha(\beta)} s_\alpha w$ (remarque 1.33). Il reste donc à démontrer que $l(s_\alpha w) < l(s_\alpha v)$. Supposons que ce n'est pas le cas et donc que $l(s_\alpha w) \geqslant l(s_\alpha v)$. Remarquons que l'on ne peut avoir égalité car cela forcerait $l(s_\alpha v) = l(v) - 1$ et donc $l(v) = l(w) + 2$ ce qui est impossible car $det(v) = -det(w) \neq 0$. Ainsi $l(s_\alpha w) > l(s_\alpha v)$. Soit maintenant une expression réduite de w, $w = s_1 \dots s_r$. Alors $s_\alpha w = s_\alpha s_1 \dots s_r$ est une expression réduite de $s_\alpha w$ car $l(s_\alpha w) > l(w)$. Alors $s_\alpha v = s_{s_\alpha(\beta)} s_\alpha w$ est obtenu en supprimant un facteur dans cette expression réduite par théorème d'échange. Ce facteur ne peut être s_α car $\alpha \neq \beta$. Ainsi $s_\alpha v = s_\alpha s_1 \dots \hat{s}_i \dots s_r$ pour un certain i, et donc $v = s_1 \dots \hat{s}_i \dots s_r$, ce qui contredit $l(w) < l(v)$.

Dans le cas général on considère une suite $w_0 = w, w_1 \dots, w_r = v$ telle que : pour tout $0 \leqslant i \leqslant r - 1$, $w_{i+1} > w_i$ et il existe $\beta_i \in R, w_{i+1} = s_{\beta_i} w_i$. Le cas étudié ci-dessus s'applique et pour tout i, $s_\alpha w_i \leqslant w_{i+1}$, ou $s_\alpha w_i \leqslant s_\alpha w_{i+1}$. Si pour tout i, $s_\alpha w_i \leqslant s_\alpha w_{i+1}$, alors par transitivité $s_\alpha w \leqslant s_\alpha v$. Sinon, soit i le plus petit indice tel que $s_\alpha w_i \leqslant w_{i+1}$. Il vient $s_\alpha w \leqslant \cdots \leqslant s_\alpha w_i \leqslant w_{i+1} \leqslant \cdots \leqslant v$.

2. D'après ce qui précède, on a $s_\alpha w \leqslant v$ ou $s_\alpha w \leqslant s_\alpha v$. Le premier cas ne peut pas se produire car $l(s_\alpha w) = l(v)$ mais $s_\alpha w \neq v$. Ainsi, comme $s_\alpha w \neq s_\alpha v$, il vient $s_\alpha w < s_\alpha v$. Mais alors, $l(v) = l(s_\alpha w) < l(s_\alpha v)$, et donc $v < s_\alpha v$.

□

Une *sous-expression* d'une expression réduite $w = s_1 \dots s_r$ de $w \in W$ est un produit du type $s_{i_1} \dots s_{i_q}$ avec $1 \leqslant i_1 < \cdots < i_q \leqslant r$. Le théorème suivant traduit l'ordre de Bruhat en terme de sous-expressions :

Théorème 1.38. *Soient $v \in W$ et $v = s_1 \dots s_r$ une expression réduite de v. Soit aussi $w \in W$. Alors $w \leqslant v$ si et seulement si w peut être obtenu comme sous-expression de cette expression réduite.*

Preuve.

$\Rightarrow$ Si $v = w$ il n'y a rien à faire. Sinon, $v > w$ et on prend une suite $w_0 = w, w_1 \dots, w_r = v$ telle que pour tout $0 \leqslant i \leqslant r-1$, $w_{i+1} > w_i$ et il existe $\beta_i \in R, w_{i+1} = s_{\beta_i} w_i$. Il vient : $l(s_{\beta_{r-1}} v) < l(v)$, donc par théorème d'échange on peut écrire $w_{r-1} = s_1 \dots \hat{s}_i \dots s_r$. Cette expression n'est pas forcément réduite mais cela ne dérange pas pour itérer, car le théorème d'échange ne suppose pas l'expression réduite. In fine, on obtient bien w comme sous-expression de v.

$\Leftarrow$ On se donne une sous-expression $w = s_{i_1} \dots s_{i_q}$ et on souhaite montrer que $w \leqslant v$. On raisonne par récurrence sur $l(v) = r$ (le cas initial étant trivial). Si $i_1 \geqslant 2$ alors w est une sous-expression de $s_1 v < v$, donc par hypothèse de récurrence $w \leqslant s_1 v$ puis $w < v$. Si $i_1 = 1$, l'hypothèse de récurrence fournit $s_{i_2} \dots s_{i_q} \leqslant s_2 \dots s_r$. Enfin, en utilisant la proposition 1.37, on obtient soit $w = s_{i_1} \dots s_{i_q} \leqslant s_2 \dots s_r < v$ soit $w = s_{i_1} \dots s_{i_q} \leqslant s_1 \dots s_r = v$. $\square$

On peut maintenant passer à la démonstration du théorème 1.36 :

Preuve du théorème 1.36. On raisonne par récurrence sur $l(w) + l(v)$. Si cette quantité vaut 1, alors $w = 1$ et $v = s_\alpha$ pour un certain $\alpha \in S$, si bien qu'il n'y a rien à démontrer. Supposons à présent $l(w) + l(v) \geqslant 1$. Comme $v \neq 1$, v possède une expression réduite $v = s_1 \dots s_r$. D'après le théorème 1.38, w s'écrit $s_{i_1} \dots s_{i_q}$ pour certains $1 \leqslant i_1 < \dots < i_q \leqslant r$. Posons $s = s_1$. On a alors $l(sv) < l(v)$. Il y a deux cas à considérer :

- $w < sw$. Si $i_1 = 1$, alors sw est une sous expression de $sv = s_2 \dots s_r$ si bien que (théorème 1.38) $w < sw \leqslant sv < v$. Si $i_1 \neq 1$, w lui même est une sous expression de sv et donc (théorème 1.38) $w \leqslant sv$. Si $w = sv$ il n'y a rien à faire, sinon on a aussi $w < sv$. Maintenant dans les deux cas l'hypothèse de récurrence fournit une chaîne entre w et sv, que l'on complète facilement en une chaîne entre w et v.
- $sw < w$. L'hypothèse de récurrence fournit une chaîne entre sw et v : $sw = w_0 < w_1 < ... < w_m = v$ avec $l(w_{i+1}) = l(w_i) + 1$. On a : $sw_0 > w_0$ et $sw_m < w_m$. Ainsi on peut considérer i le plus petit entier tel que $sw_i < w_i$. Alors $w_i = sw_{i-1}$, car sinon, d'après la proposition 1.37(ii), on aurait $w_i < sw_i$ ($sw_{i-1} > w_{i-1}$ et $sw_{i-1} \neq w_i$), contrairement au choix de i. La chaîne suivante entre w et v convient :

$$w = sw_0 < \cdots < sw_{i-1} = w_i < \cdots < w_m = v$$

  (pour $1 \leqslant j \leqslant i-1$, $l(sw_j) = l(w_j) + 1 = l(w_{j-1}) + 2 = l(sw_{j-1}) + 1$ et 1.31(i) est satisfaite par la remarque 1.33).

$\square$

On a ainsi achevé la démonstration du théorème 1.36. Il nous reste à établir le lemme de croisement suivant qui est une conséquence immédiate de la proposition 1.37(ii), et que l'on utilisera à plusieurs reprises dans le paragraphe suivant. Les principaux résultats qu'il faut retenir de ce paragraphe sont donc la définition de l'ordre de Bruhat, bien sûr, le théorème 1.36, et le lemme suivant :

Lemme 1.39 (lemme de croisement). *Soient $v, w \in W$, avec $l(v) = l(w)+1$. Soit aussi $\alpha \in S$ tel que $s_\alpha w > w$ et $s_\alpha v < v$. Alors $v = s_\alpha w$.*

Preuve. Si $v \neq s_\alpha w$ alors d'après la proposition 1.37 (ii), $s_\alpha v > v$, contrairement à l'hypothèse. □

1.4 Chambres de Weyl

On rappelle qu'avec les notations précédentes, $\mathfrak{W}$ désigne la chambre de Weyl associée à S (voir définition 1.21). On va démontrer que $\mathfrak{W}$ est un domaine fondamental pour l'action de W sur E. Ceci signifie que l'orbite de tout vecteur de E sous W rencontre $\mathfrak{W}$ en un et un seul point.

Théorème 1.40.

- *Soit $\lambda \in E$. Alors il existe $w \in W$ tel que $w(\lambda) \in \mathfrak{W}$.*
- *Soient $\lambda, \mu \in \mathfrak{W}$ et $w \in W$ tel que $w(\lambda) = \mu$. Alors $\lambda = \mu$ et w est un produit de réflexions simples qui fixent toutes λ (en particulier $\mathfrak{W}$ est un domaine fondamental pour l'action de W sur E).*

Preuve. Pour le premier point, choisissons ν dans l'orbite de λ sous W, avec (ν, ρ) maximal (où ρ est la demi-somme des racines positives). Alors ν est dans la chambre de Weyl $\mathfrak{W}$: en effet, soit $\alpha \in S$. On a : $(s_\alpha \nu, \rho) = (\nu, s_\alpha \rho) = (\nu, \rho) - (\nu, \alpha)$ d'après la remarque 1.20, ce qui force $(\nu, \alpha) \geqslant 0$, par choix de ν. Pour le deuxième point, on raisonne par récurrence sur $n(w)$. Si $n(w) = 0$, $w = 1$ (théorème 1.28). Sinon, il existe une racine positive envoyée par w sur une racine négative, et donc il existe une racine simple α envoyée par w sur une racine négative. Il vient : $0 \geqslant (\nu, w(\alpha)) = (\lambda, \alpha) \geqslant 0$ car $w(\lambda) = \nu \in \mathfrak{W}$ et $\alpha \in P$, $w(\alpha) \in -P$. Ainsi $(\lambda, \alpha) = 0$ et $ws_\alpha(\lambda) = \nu$. Mais d'après la proposition 1.25, $n(ws_\alpha) = n(w) - 1$, donc l'hypothèse de récurrence montre que $\lambda = \nu$ et ws_α est un produit de réflexions simples fixant λ, et il en va donc de même pour w. □

On se donne $\lambda \in E$. On s'intéresse maintenant à l'ensemble $W_{\lambda^+,\lambda}$ des éléments w du groupe de Weyl qui envoient son conjugué λ^+ dans la chambre de Weyl sur λ. Ceci revient à étudier le stabilisateur W_{λ^+} de λ^+ sous W, puisque étant donné $w \in W_{\lambda^+,\lambda}$, $W_{\lambda^+,\lambda} = wW_{\lambda^+}$. On va notamment mettre en évidence qu'il existe dans $W_{\lambda^+,\lambda}$ un unique élément de longueur minimale, et que cet élément est alors un minimum au sens de l'ordre de Bruhat dans $W_{\lambda^+,\lambda}$. Le théorème 1.40 fournit quelques éléments de réponse : on sait notamment que W_{λ^+} est engendré par les réflexions simples qu'il contient. De manière générale, introduisons $J \subseteq S$, $R_J = R \cap Vect(J)$ et enfin W_J le sous-groupe de W engendré par les s_α pour $\alpha \in J$. W_J est donc muni de deux notions de longueur : la restriction de l et l_J, définie de la même manière que l, mais avec les générateurs $s_\alpha, \alpha \in J$. On définit aussi $W^J = \{w \in W, \forall \alpha \in J, ws_\alpha > w\}$. On établit alors le théorème suivant :

Théorème 1.41.

- *R_J est un système de racines généralisé, J en est une base, et W_J en est le groupe de Weyl. On note P_J et $\geqslant_J$ respectivement le système positif associé à J et l'ordre de Bruhat sur W_J.*
- *Les deux notions de longueur coïncident : $l = l_J$.*
- *$\geqslant_J$ coïncide avec la restriction de l'ordre de Bruhat $\geqslant$ sur W à W_J.*
- *Soit $w \in W$. Il existe dans wW_J un élément minimum pour l'ordre de Bruhat (c'est à dire vérifiant $w' \geqslant u$ pour tout $w' \in wW_J$). Pour $w' \in wW_J$, $l(w') = l(u) + l(u^{-1}w')$, et u est dans W^J.*

Preuve. Soit $\beta \in R_J$. Alors $\beta \in Vect(J)$, donc $s_\beta(Vect(J)) = Vect(J)$. Par ailleurs, $s_\beta(R) = R$, donc s_β envoie bien R_J dans lui même, et R_J est un système de racines généralisé (les autres conditions étant trivialement satisfaites). Tout élément de R s'écrit comme combinaison linéaire à coefficients tous positifs ou tous négatifs d'éléments de S, donc si en plus cet élément est dans $Vect(J)$ il s'écrit comme combinaison linéaire à coefficients tous positifs ou tous négatifs d'éléments de J, et J est bien une base de R_J. Finalement le groupe de Weyl de R_J est le groupe engendré par les s_α pour $\alpha \in J$, c'est donc W_J.

On montre plutôt $n_J(w) = n(w)$ pour tout $w \in W_J$ (d'après le théorème 1.28). Mais soit $\alpha \in P \backslash P_J$. Alors $\alpha = \sum_{\beta \in S} c_\beta \beta$ et il existe $\gamma \in S \backslash J$ avec $c_\gamma > 0$. On voit alors que pour tout $w \in W_J$ $w(\alpha) \in P$ (c_γ ne change pas). Ainsi, les racines positives de R éventuellement envoyées sur des racines négatives de R par un élément $w \in W_J$ sont exactement les racines positives de R_J éventuellement envoyées sur des racines négatives de R_J par w. Ceci est exactement dire que $n_J(w) = n(w)$.

Soient $w, w' \in W_J$. Supposons $w \leqslant w'$. D'après l'égalité $l = l_J$, on peut considérer une expression réduite (au sens de W comme au sens de W_J) de w' comme produit de réflexions simples associées à des racines de J. Mais alors l'inégalité montre par le théorème 1.38 que w est une sous-expression de cette expression réduite (au sens de W), et donc toujours par le même théorème (puisque l'expression est aussi réduite au sens de W_J), $w' \geqslant_J w$. L'autre implication est triviale.

Soit u dans wW_J de longueur minimale. Soient $w' \in wW_J$et $v' \in W_J$ tels que $w' = uv'$. On considère alors les écritures réduites suivantes (pour l'existence de la deuxième, on utilise $l = l_J$) : $u = s_1 \dots s_r$ ($s_i = s_{\alpha_i}$, $\alpha_i \in S$), et $v' = s'_1 \dots s'_q$ ($s'_i = s_{\alpha'_i}$, $\alpha'_i \in J$). Alors $l(w') \leqslant r + q$. Si l'inégalité est stricte, le théorème de suppression indique que l'on peut supprimer deux facteurs du type s_i ou s'_i sans changer uv'. Mais si l'on supprime au moins un facteur du type s_i, alors, en multipliant w' à droite par les facteurs du type s'_i restant, on obtient dans wW_J un élément de longueur strictement plus petite que $l(u)$, ce qui est impossible par choix de u. Ainsi on supprime deux facteur de type s'_i, mais alors en multipliant à gauche par u on met en contradiction le fait que l'expression de départ pour v' est réduite. C'est donc qu'il y a égalité $l(w') = l(u) + l(v')$. Mais alors si $l(w') = l(u)$, on doit avoir $l(v) = 0$, et $v = 1$, $w' = u$. Ainsi u est le seul élément de longueur minimale dans wW_J. Il reste à montrer que u est bien un minimum. Mais soit $w' = uv' \in wW_J$, $w' \neq u$, et $v' = s'_1 \dots s'_q$ une expression réduite de v'

($s'_i = s_{\alpha'_i}$, $\alpha'_i \in J$). Posons $w_0 = u$ et pour i entre 1 et q, $w_i = us'_1 \dots s'_i$. Alors ce qui a été fait ci dessus montre que comme $s'_1 \dots s'_i \in W_J$, $l(w_i) = l(u) + i$. Finalement, $u = w_0 < w_1 < \dots < w_q = w'$ est une chaîne entre u et w' puis $u \leqslant w'$. Le fait que $u \in W^J$ est clair. □

Voici un corollaire qui découle immédiatement de l'égalité des notions de longueur et du théorème 1.40.

Corollaire 1.42. *Soit $\lambda \in \mathfrak{W}$ et $w \in W$ tel que $w(\lambda) = \lambda$. Alors w possède une écriture réduite qui ne fait intervenir que des réflexions simples fixant toutes λ.*

Preuve. Notons W_J le fixateur de λ sous l'action de W sur E. Alors W_J est engendré par les réflexions simples qu'il contient (théorème 1.40), autrement dit il existe $J \subseteq S$ tel que W_J soit le groupe de Weyl associé au système R_J (notations précédentes). Le corollaire découle alors de l'égalité $l = l_J$. □

Dans la fin de ce paragraphe, on va définir à l'aide de W et $\mathfrak{W}$ une relation sur E et en étudier certaines propriétés.

Définition 1.43. Soient $\nu, \mu \in E$, ν^+, μ^+ leurs conjugués dans $\mathfrak{W}$ sous W. Alors on note $\nu \succcurlyeq \mu$ si il existe $v, w \in W$ avec $v(\nu^+) = \nu$, $w(\mu^+) = \mu$ et $v \geqslant w$ (pour l'ordre de Bruhat).

On va s'attacher, étant donné $\nu, \mu \in E$ vérifiant $\nu \succcurlyeq \mu$, à déterminer deux éléments particuliers v et w, respectivement dans $W_{\nu^+,\nu}$ et $W_{\mu^+,\mu}$. Le second est directement fourni par le théorème 1.41 :

Théorème 1.44. *Il existe dans $W_{\mu^+,\mu}$ un minimum w pour l'ordre de Bruhat.*

Preuve. Posons $J = \{\alpha \in S, s_\alpha(\mu^+) = \mu^+\}$, et $w' \in W_{\mu^+,\mu}$. Alors $W_{\mu^+,\mu} = w'W_J$ et le résultat provient directement du théorème 1.41. □

On fixe désormais w le minimum de $W_{\mu^+,\mu}$. Le théorème suivant fournit alors le v recherché.

Théorème 1.45. *Soient $\nu, \mu \in E$ avec $\nu \succcurlyeq \mu$, w l'élément minimum de $W_{\mu^+,\mu}$. Alors il existe un minimum v pour l'ordre de Bruhat dans l'ensemble $W_{\nu^+,\nu} \cap \{t \in W, t \geqslant w\}$.*

Enfin, si μ et ν sont à homothétie près dans la même orbite sous le groupe de Weyl, alors v est l'élément minimal de $W_{\nu^+,\nu}$.

La preuve de ce théorème utilise les inégalités suivantes dont une preuve (bien sûr indépendante de ce qui est fait ici) sera fournie au paragraphe suivant lors de la démonstration du théorème 1.48 : pour tout $a, b \in W$ avec $b \leqslant a$, et pour tout $\alpha \in S$:

(i) Si $s_\alpha a < a$ et $s_\alpha b < b$ alors $s_\alpha a \geqslant s_\alpha b$.

(ii) Si $s_\alpha a < a$ et $s_\alpha b > b$ alors $s_\alpha a \geqslant b$, $a \geqslant s_\alpha b$.

(iii) Si $s_\alpha a > a$ et $s_\alpha b > b$ alors $s_\alpha a \geqslant s_\alpha b$.

Montrons pour commencer un lemme tiré de [2] :

Lemme 1.46. *Soit $J \subseteq S$ (on reprend les notations précédentes). Soient $\sigma, \tau \in W^J$ vérifiant $\sigma \leqslant \tau$. Alors il existe une application $g_{\sigma,\tau} : W_J \to W_J$ vérifiant :*

$$\forall a, b \in W_J, \sigma a \leqslant \tau b \Leftrightarrow g_{\sigma,\tau}(a) \leqslant b.$$

Preuve. On raisonne par récurrence sur $l(\tau) = k$. Si $k = 0$, $\sigma = \tau = 1$ et $g_{\sigma,\tau} = id_{W_J}$ convient. Si $k > 0$, soit s une réflexion simple avec $s\tau < \tau$. Remarquons que cela implique $s\tau \in W^J$. En effet, si $\beta \in J$, comme $\sigma \in W^J$, $\tau s_\beta > \tau$, et de deux choses l'une : ou bien $s\tau s_\beta > \tau s_\beta$, et par transitivité de l'ordre de Bruhat, $s\tau s_\beta > s\tau$, ou bien $s\tau s_\beta < \tau s_\beta$ auquel cas l'inégalité (i) fournit aussi $s\tau s_\beta > s\tau$. On distingue alors trois cas :

- Si $s\sigma < \sigma$. Le même raisonnement montre que $s\sigma \in W^J$, si bien que l'hypothèse de récurrence montre que $g_{s\sigma,s\tau}$ existe. On pose alors $g_{\sigma,\tau} = g_{s\sigma,s\tau}$. Soient $a, b \in W_J$. Il vient : $g_{\sigma,\tau}(a) \leqslant b$ si et seulement si $s\sigma a \leqslant s\tau b$. Mais $s\sigma \in W^J$, $a \in W_J$, si bien que d'après le théorème 1.41, $s\sigma a < \sigma a$. De même, $s\tau b < \tau b$. Mais alors les inégalité (i) et (iii) montre que $s\sigma a \leqslant s\tau b$ si et seulement si $\sigma a \leqslant \tau b$, ce qui montre que $g_{\sigma,\tau}$ convient.
- Si $s\sigma > \sigma$ et $s\sigma \in W^J$, alors l'inégalité (ii) montre que $s\tau \geqslant \sigma$, et on pose alors $g_{\sigma,\tau} = g_{\sigma,s\tau}$ (bien définie par récurrence). Soient $a, b \in W_J$. Il vient : $g_{\sigma,\tau}(a) \leqslant b$ si et seulement si $\sigma a \leqslant s\tau b$. De plus, comme $s\tau \in W^J$ et $b \in W_J$, le théorème 1.41 permet de montrer que $s_\tau b < \tau b$. Ainsi, si $\sigma a \leqslant s\tau b$ alors $\sigma a \leqslant \tau b$. Réciproquement, supposons $\sigma a \leqslant \tau b$. Alors $s\sigma \in W^J$ et $a \in W_J$, le théorème 1.41 permet de montrer que $s_\sigma a > \sigma a$. L'inégalité (ii) montre alors que $\sigma a \leqslant s\tau b$, et $g_{\sigma,\tau}$ ainsi définie convient à nouveau.
- Si $s\sigma > \sigma$ et $s\sigma \notin W^J$. Alors il existe s'une réflexion simple associée à une racine dans J telle que $s\sigma s' < s\sigma$. Le lemme du croisement appliqué à $\sigma s' > \sigma$ montre alors que $s\sigma = \sigma s'$. Par ailleurs on a toujours $\sigma \leqslant s\tau$ et $g_{\sigma,s\tau}$ est bien définie. Soient $a, b \in W_J$, avec $a \leqslant b$. On définit $g_{\sigma,\tau}(a)$ par $g_{\sigma,s\tau}(a)$ si $s'a > a$ et par $g_{\sigma,s\tau}(s'a)$ sinon. Alors, si $s'a > a$, $g_{\sigma,\tau}(a) \leqslant b$ est équivalent à $\sigma a \leqslant s\tau b$. Mais comme ci dessus $s\tau b < \tau b$, si bien que $\sigma a \leqslant s\tau b$ implique $\sigma a \leqslant \tau b$. Réciproquement, supposons $\sigma a \leqslant \tau b$. Alors, comme $s\sigma a = \sigma s' a > \sigma a$ (par le même raisonnement que ci dessus : $\sigma \in W^J$, $s'a \in W_J$ et $s'a > a$) l'inégalité (ii) montre que $\sigma a \leqslant s\tau b$. Si $s'a < a$, $g_{\sigma,\tau}(a) \leqslant b$ est équivalent à $\sigma s' a \leqslant s\tau b$, autrement dit à $s\sigma a \leqslant s\tau b$. Or $s\sigma a < \sigma a$, $s\tau b < \tau b$, et les inégalités (i) et (iii) montre que $s\sigma a \leqslant s\tau b$ est équivalent à $\sigma a \leqslant \tau b$, et $g_{\sigma,\tau}$ convient encore.

Finalement, on a réussi à construire dans les trois cas une fonction $g_{\sigma,\tau}$ convenable, ce qui achève la récurrence. □

On peut maintenant passer à la démonstration du théorème 1.45.

Preuve du théorème 1.45. Soit w le minimum de $W_{\mu^+,\mu}$, et $v' \in W_{\nu^+,\nu}$ tel que $v' \geqslant w$. Soit $J = \{\alpha \in S, s_\alpha(\nu^+) = \nu^+\}$. Considérons σ, τ les minima respectifs de wW_J et $v'W_J$. Montrons d'abord que $\sigma \leqslant \tau$. Pour cela, considérons une chaîne $v_0 = v' > v_1 > \cdots > v_m = \tau$ avec pour tout i, $v_{i+1} = v_i s_i$, s_i réflexion simple vérifiant $s_i(\nu^+) = \nu^+$. Supposons $v_i \geqslant \sigma$ pour un certain indice

i. Alors, par minimalité de σ, $\sigma s_i > \sigma$, et comme $v_i s_i < v_i$, l'inégalité (ii) montre que $v_{i+1} \geqslant \sigma$. Comme $v_0 \geqslant \sigma$, on a bien $v_m = \tau \geqslant \sigma$.

Remarquons au passage que cela démontre le deuxième point, car si μ et ν sont à homothétie près dans la même orbite du groupe de Weyl, alors μ^+ et ν^+ sont proportionnels, et $W_{\mu^+,\mu} = wW_J$, $W_{\nu^+,\nu} = v'W_J$, si bien que $\sigma = w$, et $\tau \geqslant w$. $v = \tau$ est alors bien un minimum dans l'ensemble $W_{\nu^+,\nu} \cap \{t \in W, t \geqslant w\}$.

Revenons au cas général. On peut appliquer le lemme précédent : il existe une application $g_{\sigma,\tau} : W_J \to W_J$ vérifiant :

$$\forall a, b \in W_J, \sigma a \leqslant \tau b \Leftrightarrow g_{\sigma,\tau}(a) \leqslant b.$$

Mais cela se traduit notamment par :

$$\forall v' \in W_{\nu^+,\nu}, v' \geqslant w \Leftrightarrow \tau^{-1}v' \geqslant g_{\sigma,\tau}(\sigma^{-1}w).$$

On pose alors $v = \tau g_{\sigma,\tau}(\sigma^{-1}w)$. On a bien $v \in W_{\nu^+,\nu}$ et $v \geqslant w$. Par ailleurs, soit v' avec ces propriétés : alors $\tau^{-1}v' \geqslant g_{\sigma,\tau}(\sigma^{-1}w)$ et ces éléments sont dans W_J, donc il existe une chaîne $w_0 = \tau^{-1}v' > w_1 > \cdots > w_r = g_{\sigma,\tau}(\sigma^{-1}w)$, avec, pour tout i, $w_{i+1} = w_i s_{\beta_i}$, $\beta_i \in R_J$, et $l(w_{i+1}) = l(w_i) - 1$. $\tau \in W^J$ et $w_i \in W_J$, donc on obtient la chaîne suivante entre v' et v : $v' = \tau w_0 > \cdots > \tau w_r = v$ (pour tout i, $\tau w_{i+1} = \tau w_i s_{\beta_i}$, et $l(\tau w_{i+1}) = l(\tau) + l(w_{i+1}) = l(\tau) + l(w_i) - 1 = l(\tau w_i) - 1$). Finalement, v est bien le minimum de l'ensemble $W_{\nu^+,\nu} \cap \{t \in W, t \geqslant w\}$. □

Étant donnés $\nu, \mu \in E$ avec $\nu \succcurlyeq \mu$, on appelle *couple* associé à (ν, μ) le couple (v, w) du théorème 1.45. On reviendra sur la relation $\succcurlyeq$ à la fin du paragraphe suivant.

Énonçons finalement une proposition qui nous servira beaucoup dans la suite :

Proposition 1.47. *Soient $\lambda \in E$, $v \in W_{\lambda^+,\lambda}$, et $\alpha \in S$. Alors :*

(i) Si $(\lambda, \alpha) < 0$ alors $s_\alpha v < v$.

(ii) Si $(\lambda, \alpha) > 0$ alors $s_\alpha v > v$. De plus, si on a seulement $(\lambda, \alpha) \geqslant 0$, et si v est l'élément minimum de $W_{\lambda^+,\lambda}$ alors on a encore $s_\alpha v > v$.

Preuve.

(i) $(\lambda, \alpha) < 0$, donc $(\lambda^+, v^{-1}(\alpha)) < 0$. Par ailleurs $\lambda^+ \in \mathfrak{W}$, et donc $v^{-1}(\alpha) \in -P$. D'après la proposition 1.25, $s_\alpha v < v$.

(ii) La première partie se montre de la même façon. Pour la deuxième partie, seul le cas ou $(\lambda, \alpha) = 0$ n'est pas démontré. Mais dans ce cas $s_\alpha v \in W_{\lambda^+,\lambda}$ et comme v est minimum, $s_\alpha v > v$.

□

1.5 Systèmes de racines locaux

On conserve les notations des sections précédentes. On se donne R un système de racines dans E. Étant donné un sous ensemble R' de R, on considère l'intersection de tous les systèmes de racines généralisés le contenant (il y en a au moins un, à savoir R) : c'est le plus petit système de racines généralisé contenant R' (au sens de l'inclusion), et on l'appelle le système de racines engendré par R'. On se donne maintenant $v, w \in W$ avec $v > w$. D'après le théorème 1.36 on peut considérer une chaîne $w = w_0 < w_1 < \cdots < w_m = v$ avec $l(w_{i+1}) = l(w_i) + 1$. Soient alors $\beta_1, \ldots, \beta_m \in P$ tels que $w_{i+1} = s_{\beta_i} w_i$ (on dira dans la suite que ces racines sont les racines associées à la chaîne sélectionnée). Le *système de racines local* $R_{v,w}$ est par définition le système de racines engendré par $\{\beta_1, \ldots, \beta_m\}$. Par convention, $R_{v,w} = \emptyset$ si $v = w$. La première chose à faire est de vérifier que ce système de racines est bien défini, c'est-à-dire ne dépend pas de la chaîne.

Théorème 1.48. *Soient $v, w \in W$, avec $v \geqslant w$, et $w = w_0 < w_1 < \cdots < w_m = v$ une chaîne entre v et w avec pour racines associées $\beta_1, \ldots, \beta_m$. Le système de racine engendré par ces racines ne dépend pas de la chaîne choisie, et est appelé système de racines local associé à v et w, noté $R_{v,w}$ ($R_{v,w} = \emptyset$ si $v = w$).*

Preuve. On raisonne par récurrence sur $l(v) - l(w) = k$:

Si $l(v) - l(w) \leqslant 1$ alors le résultat est clair. Sinon, supposons le résultat acquis pour $l(v) - l(w) \leqslant k - 1$. On fait alors aussi une récurrence sur $l(v) \geqslant l(w)$. Si $l(v) = l(w)$, $v = w$ et c'est fini. Sinon soit $\alpha \in S$ telle que $s_\alpha v < v$ (existe car $v \neq 1$). Supposons d'abord que $s_\alpha w < w$. Alors $l(s_\alpha v) - l(s_\alpha w) = k$ et $l(s_\alpha v) < l(v)$. L'hypothèse de récurrence s'applique donc pour dire que le système de racines local $R_{s_\alpha v, s_\alpha w}$ est bien défini. On considère alors une chaîne $w = w_0 < w_1 < \cdots < w_m = v$ avec $l(w_{i+1}) = l(w_i) + 1$ et $\beta_1, \ldots, \beta_m \in R$ tels que $w_{i+1} = s_{\beta_i} w_i$. Deux cas se présentent :

1. Pour tout i, $s_\alpha w_i < w_i$. Alors pour tout i, $l(s_\alpha w_{i+1}) = l(s_\alpha w_i) + 1$ et $s_\alpha w_{i+1} = s_{s_\alpha(\beta_i)} s_\alpha w_i$. On en déduit que

$$s_\alpha w = s_\alpha w_0 < s_\alpha w_1 < \cdots < s_\alpha w_m = s_\alpha v$$

   est une chaîne entre $s_\alpha w$ et $s_\alpha v$ avec pour racines associées $s_\alpha(\beta_1), \ldots, s_\alpha(\beta_m)$. Alors le système de racines engendré par $\beta_1, \ldots, \beta_m \in R$ est dans ce cas $s_\alpha(R_{s_\alpha v, s_\alpha w})$.

2. Il existe i avec $s_\alpha w_i > w_i$. On considère alors i maximal pour cette propriété (et donc $1 \leqslant i \leqslant m - 1$). Le lemme de croisement montre que sous ces conditions $w_{i+1} = s_\alpha w_i$. Alors :

$$s_\alpha w = s_\alpha w_0 < w_0 < w_1 < \cdots < w_i = s_\alpha w_{i+1} < \cdots < s_\alpha w_m = s_\alpha v$$

   est une chaîne entre $s_\alpha w$ et $s_\alpha v$, avec pour racines associées $\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_i$, $s_\alpha(\beta_{i+2}), \ldots, s_\alpha(\beta_m)$. Dans ce cas, $\beta_{i+1} = \alpha$, donc à nouveau le système de racines engendré par $\beta_1, \ldots, \beta_m \in R$ est $s_\alpha(R_{s_\alpha v, s_\alpha w})$.

Ceci montre que $R_{v,w}$ est bien défini, avec $R_{s_\alpha v, s_\alpha w} = s_\alpha(R_{v,w})$.
Supposons à présent que $s_\alpha w > w$. On utilise le lemme suivant :

Lemme 1.49. *Soient $v, w \in W$ et $\alpha \in S$. On suppose $v \geqslant w$ et $s_\alpha w > w$. Alors $s_\alpha v \geqslant w$.*

Preuve. Si $s_\alpha v \geqslant v$, on conclut par transitivité de l'ordre de Bruhat. Sinon, soit $w = w_0 < w_1 < \cdots < w_m = v$ une chaîne entre v et w avec pour racines associées $\beta_1, \ldots, \beta_m$ et i maximal avec $s_\alpha w_i > w_i$. Le lemme de croisement implique $s_\alpha w_i = w_{i+1}$, donc $\alpha = \beta_{i+1}$. Pour $j > i$, $l(s_\alpha w_{i+1}) = l(s_\alpha w_i) + 1$ et $s_\alpha w_{i+1} = s_{s_\alpha(\beta_{i+1})} s_\alpha w_i$ (remarque 1.33). Ainsi on a la chaîne suivante entre w et $s_\alpha v$:

$$w = w_0 < \cdots < w_i = s_\alpha w_{i+1} < \cdots < s_\alpha w_m = s_\alpha v$$

avec pour racines associées $\beta_1, \ldots, \beta_i, s_\alpha(\beta_{i+2}), \ldots, s_\alpha(\beta_m)$. □

Ainsi, $v > s_\alpha v \geqslant w$ et à partir d'une chaîne $w = w_0 < w_1 < \cdots < w_m = v$ avec racines associées $\beta_1, \ldots, \beta_m$, on peut construire une chaîne entre w et $s_\alpha v$ avec racines associées, $\beta_1, \ldots, \beta_i, s_\alpha(\beta_{i+2}), \ldots, s_\alpha(\beta_m)$, pour un certain indice i vérifiant $\beta_{i+1} = \alpha$. Or $l(s_\alpha v) - l(w) = k - 1$ donc par l'hypothèse de récurrence $R_{s_\alpha v, w}$ est bien défini, donc $R_{v,w}$ aussi, et de plus $R_{v,w}$ est le système de racines engendré par $R_{s_\alpha v, w}$ et α. Ainsi, dans tous les cas, la définition ne dépend pas de la chaîne choisie. □

Dans la preuve on a démontré des résultats supplémentaires qui seront utiles pour prouver le dernier théorème de ce paragraphe :

Théorème 1.50. *Soient $v, w \in W$, avec $v \geqslant w$. Soit aussi $\alpha \in S$:*

(i) Si $s_\alpha v < v$ et $s_\alpha w < w$ alors $s_\alpha v \geqslant s_\alpha w$ et $R_{s_\alpha v, s_\alpha w} = s_\alpha(R_{v,w})$.

(ii) Si $s_\alpha v < v$ et $s_\alpha w > w$ alors $s_\alpha v \geqslant w$, $v \geqslant s_\alpha w$ et $R_{v,w}$ est le système de racines engendré par α et $R_{s_\alpha v, w}$, mais aussi celui engendré par α et $R_{v, s_\alpha w}$.

(iii) Si $s_\alpha v > v$ et $s_\alpha w > w$ alors $s_\alpha v \geqslant s_\alpha w$ et $R_{s_\alpha v, s_\alpha w} = s_\alpha(R_{v,w})$.

Preuve. On a déjà montré (i) et le premier point de (ii). On pose $v' = s_\alpha v$ et $w' = s_\alpha w$. Pour (iii), le même raisonnement que celui qui permet de montrer l'inégalité en (i) donne $v' \geqslant w'$. Le premier point s'applique alors à v' et w' pour donner $R_{s_\alpha(v'), s_\alpha(w')} = s_\alpha(R_{v',w'})$, puis le résultat. Pour le deuxième point de (ii) remarquons que $v' \geqslant w$, $s_\alpha v' > v'$ et $s_\alpha w > w$, si bien que d'après (iii), $s_\alpha v' \geqslant s_\alpha w$, soit $v \geqslant s_\alpha w$. Alors (i) s'applique à $v \geqslant w'$ et on obtient : $R_{s_\alpha v, w} = s_\alpha(R_{v, s_\alpha w})$. □

Étant donnés $\nu, \mu \in E$ avec $\nu \succcurlyeq \mu$ on rappelle que le couple associé à (ν, μ) est le couple (v, w) comme dans le théorème 1.45. Le système de racines local associé à (ν, μ), $R_{\nu,\mu}$ est alors par définition le système de racines local $R_{v,w}$ où (v, w) est le couple associé à (ν, μ). On aura besoin dans la démonstration des théorèmes de Littelmann de relier les systèmes de racines $R_{s_\alpha(\nu), s_\alpha(\mu)}$, $R_{s_\alpha(\nu), \mu}$, $R_{\nu, s_\alpha(\mu)}$ à $R_{\nu,\mu}$ sous certaines conditions sur ν et μ et α (racine simple). C'est exactement ce que fait le théorème suivant :

Théorème 1.51. *Soient $\nu, \mu \in E$, avec $\nu \succcurlyeq \mu$. On note (v, w) le couple associé à (ν, μ). Soit enfin $\alpha \in S$.*

(i) Supposons $(\nu,\alpha) \leqslant 0$ et $(\mu,\alpha) > 0$. Alors $\nu \succcurlyeq s_\alpha(\mu)$ et le couple associé à $(\nu, s_\alpha(\mu))$ est soit $(v, s_\alpha w)$ auquel cas $R_{\nu,\mu}$ est le système de racines engendré par α et $R_{\nu,s_\alpha(\mu)}$, soit $(s_\alpha v, s_\alpha w)$ auquel cas $R_{\nu,s_\alpha(\mu)} = s_\alpha(R_{\nu,\mu})$.

(ii) Supposons $(\nu,\alpha) > 0$ et $(\mu,\alpha) > 0$. Alors $s_\alpha(\nu) \succcurlyeq s_\alpha(\mu)$, le couple associé à $(s_\alpha(\nu), s_\alpha(\mu))$ est $(s_\alpha v, s_\alpha w)$ et $R_{s_\alpha(\nu),s_\alpha(\mu)} = s_\alpha(R_{\nu,\mu})$.

(iii) Supposons $(\nu,\alpha) > 0$ et $(\mu,\alpha) \geqslant 0$. Alors $s_\alpha(\nu) \succcurlyeq \mu$, le couple associé à $(s_\alpha(\nu), \mu)$ est $(s_\alpha v, w)$ et $R_{s_\alpha(\nu),\mu}$ est le système de racines engendré par α et $R_{\nu,\mu}$.

Preuve.

(i) Par la proposition 1.47 (*ii*), on sait que $s_\alpha w > w$. Soit $w' \in R_{\mu^+,s_\alpha(\mu)}$. Alors $s_\alpha w' \in W_{\mu^+,\mu}$, donc $s_\alpha w' \geqslant w$. Toujours par la proposition 1.47 (*ii*), $w' > s_\alpha w'$. Alors $s_\alpha w > w$ et le théorème 1.50 (*iii*) montre que $w' \geqslant s_\alpha w$ et $s_\alpha w$ est le minimum de $W_{\mu^+,s_\alpha(\mu)}$. Si $s_\alpha v < v$, alors la proposition 1.50 (*ii*) montre que $v \geqslant s_\alpha w$ et $R_{v,w}$ est le système de racines engendré par α et $R_{v,s_\alpha w}$, donc on a à la fois $\nu \succcurlyeq s_\alpha(\mu)$, $(v, s_\alpha w)$ est le couple associé à $(\nu, s_\alpha(\mu))$. Finalement dans ce cas $R_{\nu,\mu}$ est le système de racines engendré par α et $R_{\nu,s_\alpha(\mu)}$. Supposons maintenant $s_\alpha v > v$. Remarquons que ceci impose $(\nu,\alpha) \geqslant 0$ par la proposition 1.47 (*i*), et donc $(\nu,\alpha) = 0$ d'après l'hypothèse, puis $s_\alpha(\nu) = \nu$. Grâce au théorème 1.50 (*iii*) on sait que $s_\alpha v \geqslant s_\alpha w$ (et $R_{s_\alpha v, s_\alpha w} = s_\alpha(R_{v,w})$) puis $\nu \succcurlyeq s_\alpha(\mu)$. Soit alors $v' \in W$ tel que $(v', s_\alpha w)$ soit le couple associé à $(\nu, s_\alpha(\mu))$. L'inégalité $s_\alpha w > w$ impose $v' \geqslant v$ (car $v' \geqslant w$ et $v'(\nu^+) = \nu$). Deux cas se présentent alors :
- Si $v \geqslant s_\alpha w$, alors $v' = v$. Il vient $s_\alpha v > v \geqslant s_\alpha w$ ce qui montre que $\alpha \in R_{s_\alpha v, s_\alpha w} = s_\alpha(R_{v,w})$ et donc que $R_{s_\alpha v, s_\alpha w} = R_{v,w}$. Ainsi $R_{v,w}$ est le système de racines engendré par α et $R_{v,s_\alpha w}$. Cela signifie vu ce qui a été montré précédemment que $R_{\nu,\mu}$ est le système de racines engendré par α et $R_{\nu,s_\alpha(\mu)}$.
- Sinon, pour des raisons de longueur, $v' = s_\alpha v$, et donc dans ce cas $R_{\nu,s_\alpha(\mu)} = s_\alpha(R_{\nu,\mu})$.

(ii) Par la proposition 1.47 (*ii*) on sait que $s_\alpha v > v$ et $s_\alpha w > w$. En utilisant le théorème 1.50 (*iii*) il vient $s_\alpha v \geqslant s_\alpha w$, et donc $s_\alpha(\nu) \succcurlyeq s_\alpha(\mu)$. Le même raisonnement que celui tenu en (*i*) montre que $s_\alpha w$ est le minimum de $W_{\mu^+,s_\alpha(\mu)}$. Par ailleurs, soit $v' \in W_{\nu^+,s_\alpha(\nu)}$ avec $v' \geqslant s_\alpha w$. Il vient, par la proposition 1.47 (*ii*), $s_\alpha v' < v'$ et $w < s_\alpha w$. Par le théorème 1.50 (*i*) $s_\alpha v' \geqslant w$, et comme $s_\alpha v' \in W_{\nu^+,\nu}$, $s_\alpha v' \geqslant v$ par définition de v puis $v' \geqslant s_\alpha v$ par le théorème 1.50 (*iii*). Ainsi le couple associé à $(s_\alpha(\nu), s_\alpha(\mu))$ est bien $(s_\alpha v, s_\alpha w)$ et sous ces conditions, le théorème 1.50 (*iii*) à nouveau donne $R_{s_\alpha v, s_\alpha w} = s_\alpha(R_{v,w})$, et donc $R_{s_\alpha(\nu),s_\alpha(\mu)} = s_\alpha(R_{\nu,\mu})$.

(iii) On sait grâce à la proposition 1.47 (*ii*) que $s_\alpha v > v$, si bien que $s_\alpha v > w$ et $s_\alpha(\nu) \succcurlyeq \mu$. Montrons à présent que le couple associé à $(s_\alpha(\nu), \mu)$ est précisément $(s_\alpha v, w)$. Pour cela il suffit de montrer que si $v' \in W_{\nu^+,s_\alpha(\nu)}$ vérifie $v' \geqslant w$, alors $v' \geqslant s_\alpha v$. Mais étant donné un tel v', $s_\alpha v' \in W_{\nu^+,\nu}$, donc par la proposition 1.47 (*ii*), $s_\alpha v' < v'$. Par ailleurs, $(\mu,\alpha) \geqslant 0$ et w est l'élément minimal de $W_{\mu^+,\mu}$, donc par cette même proposition $s_\alpha w > w$.

Alors, le théorème 1.50 (ii) montre que $s_\alpha v' \geqslant w$. Comme $s_\alpha v' \in W_{\nu^+,\nu}$, $s_\alpha v' \geqslant v$. On a alors $s_\alpha v' \geqslant v$, $s_\alpha v > v$ et $v' > s_\alpha v'$ donc d'après le théorème 1.50 (iii), $v' \geqslant s_\alpha v$, ce qui montre ce que l'on voulait. On en déduit alors facilement que $R_{s_\alpha(\nu),\mu}$ est le système de racines engendré par α et $R_{\nu,\mu}$.

□

2 Généralités sur les algèbres de Lie

2.1 Algèbres de Lie

Définition 2.1. Une *algèbre de Lie* (complexe) est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathfrak{g}$ de dimension finie muni d'une application bilinéaire antisymétrique $[\ ,\ ] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ satisfaisant l'identité de Jacobi :

$$\forall X, Y, Z \in \mathfrak{g}, \quad [X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] = 0.$$

Un morphisme d'algèbres de Lie est une application linéaire préservant le crochet.

Exemple 2.2. *Si V est un espace vectoriel de dimension finie, $End(V)$ muni du commutant est une algèbre de Lie notée $\mathfrak{gl}(V)$.*

Définition 2.3. Une *représentation* d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est un morphisme d'algèbres de Lie : $\mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$.

Si $\rho_1 : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ et $\rho_2 : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(W)$ sont deux représentations de $\mathfrak{g}$, on définit leur somme directe $\rho_1 \oplus \rho_2 : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V \oplus W)$ et leur produit tensoriel $\rho_1 \otimes \rho_2 : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V \otimes W)$ comme suit :

$$(\rho_1 \oplus \rho_2)(X)(v \oplus w) = \rho_1(X)(v) \oplus \rho_2(X)(w),$$
$$(\rho_1 \otimes \rho_2)(X)(v \otimes w) = \rho_1(X)(v) \otimes w + v \otimes \rho_2(X)(w).$$

Exemple 2.4. *En posant $ad(X)(Y) = [X,Y]$, on obtient une application ad : $\mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$: c'est la représentation adjointe.*

Elle permet de définir la forme de Killing sur $\mathfrak{g}$:

$$(X,Y) = Tr(ad(X) \circ ad(Y)).$$

Remarque 2.5. Quand il n'y aura pas d'ambiguïté, on notera l'action de $\mathfrak{g}$ sur V multiplicativement.

Remarque 2.6. Les définitions ci-dessus sont motivées par le fait suivant : à toute algèbre de Lie (complexe) $\mathfrak{g}$ on peut associer un unique groupe de Lie (complexe) simplement connexe G. Les représentations de $\mathfrak{g}$ correspondent alors aux représentations de G, et on a défini la somme directe et le produit tensoriel de deux représentations de $\mathfrak{g}$ de sorte à ce qu'elles correspondent à la somme directe et au produit tensoriel des représentations de G associées.

2.2 Algèbres de Lie semi-simples

On s'intéressera à des algèbres de Lie particulières, dites semi-simples.

Définition 2.7. On dit qu'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est *semi-simple* si sa forme de Killing est non dégénérée.

EXEMPLE 2.8. *Considérons l'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ des matrices $n \times n$ de trace nulle munies du commutateur. Sa forme de Killing est $(X, Y) = 2n\,Tr(X \circ Y)$. Elle est non dégénérée, et $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ est donc semi-simple.*

On montre de même que l'algèbre $\mathfrak{so}_n(\mathbb{C})$ des matrices $n \times n$ antisymétriques, et que l'algèbre de Lie $\mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{C})$ du groupe symplectique sont semi-simples.

La structure des algèbres de Lie semi-simples est décrite par le théorème ci-dessous.

Théorème 2.9. *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semi-simple. Alors il existe une sous-algèbre commutative maximale $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ dont l'action sur $\mathfrak{g}$ par la représentation adjointe est diagonalisable.*

Plus précisément, il existe un sous-ensemble R du dual $\mathfrak{h}^*$ de $\mathfrak{h}$ composé d'éléments non nuls, et pour tout $\alpha \in R$ un sous-espace vectoriel $\mathfrak{g}_\alpha$ de dimension 1 de $\mathfrak{g}$ tels que

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in R} \mathfrak{g}_\alpha$$

et que

$$\forall H \in \mathfrak{h}, \forall X \in \mathfrak{g}_\alpha, ad(H)(X) = \alpha(H)X.$$

On appelle $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$, et les éléments de R sont les racines de $\mathfrak{g}$.

On peut préciser la géométrie de R. En effet, la forme de Killing prend des valeurs réelles et est définie positive sur le sous-espace réel E de $\mathfrak{h}^*$ engendré par les racines, qui est ainsi muni d'une structure d'espace euclidien. R est alors un système de racines de E comme défini en 1.1.

R vérifie de plus la condition d'intégralité suivante : si $\alpha, \beta \in R, 2\frac{(\beta,\alpha)}{(\alpha,\alpha)} \in \mathbb{Z}$. En introduisant la racine duale $\alpha^\vee = \frac{2\alpha}{(\alpha,\alpha)}$ de α, cette condition se réécrit :

$$\forall\, \alpha, \beta \in R, (\,\beta, \alpha^\vee) \in \mathbb{Z}.$$

La théorie développée dans la première partie peut alors être appliquée : on peut choisir une base S de R, et parler de racines simples ou positives. On notera de plus comme précédemment le groupe de Weyl W et la chambre de Weyl dominante $\mathfrak{W}$. Finalement, la propriété d'intégralité montre que les racines engendrent dans E un réseau Λ_R. Celui-ci est de rang maximal et globalement invariant par W : c'est le *réseau des racines.*

EXEMPLE 2.10. *Si $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$, on peut choisir pour $\mathfrak{h}$ la sous-algèbre des matrices diagonales de trace nulle. Notons alors L_i l'élément de $\mathfrak{h}^*$ qui à une matrice associe son i-ème coefficient diagonal. On a $R = \{L_i - L_j, i \neq j\}$, et si $\alpha = L_i - L_j \in R$, $\mathfrak{g}_\alpha$ est engendré par la matrice élémentaire E_{ij}.*

On reconnaît le système de racines A_{n-1} décrit en 1.5 et 1.10. Ainsi, on peut choisir $S = \{L_i - L_{i+1}, 1 \leqslant i < n\}$, et W est le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$.

Remarque 2.11. On sait classifier les systèmes de racines, et on peut en déduire une classification des algèbres de Lie semi-simples. On montre ainsi qu'elles sont sommes directes d'algèbres de Lie dites simples, qui, à cinq exceptions près, sont toutes de la forme $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C}), \mathfrak{so}_n(\mathbb{C})$ ou $\mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{C})$.

L'étude de ces algèbres de Lie pourrait donc se faire au cas par cas. Le langage général des systèmes de racines permet d'unifier énoncés et démonstrations.

2.3 Représentations des algèbres de Lie semi-simples

Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semi-simple, $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Cartan, R son système de racines dont on choisit une base S, et W le groupe de Weyl correspondant. Nous décrivons ici les représentations de $\mathfrak{g}$.

Théorème 2.12 (Complète réductibilité). *Toute représentation de $\mathfrak{g}$ s'écrit comme somme directe de représentations irréductibles, c'est-à-dire sans sous-espace propre invariant.*

Ce théorème permet de ramener l'étude des représentations de $\mathfrak{g}$ à celle de ses représentations irréductibles.

Théorème 2.13. *Soit $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ une représentation de $\mathfrak{g}$. Alors l'action de $\mathfrak{h}$ sur V est diagonalisable. Plus précisément, il existe des sous-espaces V_μ de V tels que*

$$V = \bigoplus_{\mu \in \mathfrak{h}^*} V_\mu$$

et que

$$\forall H \in \mathfrak{h}, \forall v \in V_\mu, H.v = \mu(H)v.$$

Les μ qui interviennent dans la décomposition ci-dessus sont les *poids* de la représentation, et les V_μ associés sont les *espaces de poids*. La dimension de V_μ est la multiplicité de μ dans ρ.

Les poids doivent vérifier la condition d'intégralité : si $\alpha \in R, (\mu, \alpha^\vee) \in \mathbb{Z}$. Cela les force à appartenir à un réseau Λ_W de E, dans lequel Λ_R est d'indice fini. C'est le *réseau des poids*. Un élément λ de Λ_W est dit dominant s'il appartient à la chambre de Weyl dominante $\mathfrak{W}$.

On peut alors décrire les représentations irréductibles de $\mathfrak{g}$ en termes de poids.

Théorème 2.14. *Soit Γ une représentation irréductible de $\mathfrak{g}$. Alors il existe un unique poids dominant λ intervenant dans cette représentation tel que si $v \in V_\lambda$, pour toute racine simple α et tout élément X_α de $\mathfrak{g}_\alpha$, $X_\alpha.v = 0$. On dit que λ est le poids dominant de Γ.*

Réciproquement, si λ est un poids dominant, il existe une unique représentation irréductible Γ_λ de poids dominant λ.

Il reste à décrire ces représentations irréductibles Γ_λ et plus précisément à déterminer les multiplicités des poids μ dans Γ_λ. L'objet qui en rend compte est le caractère de Γ_λ.

Définition 2.15. On note $\mathbb{Z}[\Lambda_W]$ l'anneau dont une $\mathbb{Z}$-base est $(e^\mu)_{\mu\in\Lambda_W}$, et où la multiplication est définie par $e^{\mu_1}e^{\mu_2} = e^{\mu_1+\mu_2}$.

Le *caractère* $Char(\rho)$ de la représentation $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ est l'élément $\displaystyle\sum_{\mu\in\Lambda_W} dim(V_\mu)\, e^\mu$ de $\mathbb{Z}[\Lambda_W]$, où $V = \displaystyle\bigoplus_{\mu\in\Lambda_W} V_\mu$ est la décomposition de V en espaces de poids.

On vérifie aisément que les caractères de la somme directe et du produit tensoriel de deux représentations sont respectivement la somme et le produit des caractères de ces représentations. De plus, le caractère d'une représentation la détermine uniquement.

Le formule de Weyl permet d'expliciter les caractères des représentations irréductibles de $\mathfrak{g}$:

Théorème 2.16 (**Formule de Weyl).** *Notons ρ la demi-somme des racines positives. Par la remarque 1.20, c'est un poids. On a la formule suivante :*

$$Char(\Gamma_\lambda) = \frac{\sum_{w\in W} \varepsilon(w) e^{w(\lambda+\rho)}}{\sum_{w\in W} \varepsilon(w) e^{w(\rho)}},$$

où ε dénote la signature.

Cette formule fournit théoriquement un moyen de calculer les caractères des représentations irréductibles de $\mathfrak{g}$. Cependant, elle se prête peu à des calculs pratiques, et l'un des objectifs de ce mémoire est de décrire un algorithme efficace permettant de calculer $Char(\Gamma_\lambda)$.

Le deuxième problème auquel on s'intéressera est celui de la description du produit tensoriel de deux représentations de $\mathfrak{g}$. Plus précisément, quelle est la décomposition en somme directe de représentations irréductibles de $\Gamma_{\lambda_1} \otimes \Gamma_{\lambda_2}$?

3 Le modèle des chemins

Nous décrivons dans cette partie le modèle des chemins pour les représentations des algèbres de Lie semi-simples, en énonçant les principaux résultats de ce mémoire, dus à Littelmann. Les démonstrations sont reportées à la partie suivante.

On conserve les notations de la partie précédente. En particulier, si $\mathfrak{g}$ est l'algèbre de Lie semi-simple considérée et $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Cartan, on travaille dans le sous-espace réel E de $\mathfrak{h}^*$ engendré par les racines R. On dénote toujours le réseau des poids par Λ_W, le groupe de Weyl par W et la chambre de Weyl dominante par $\mathfrak{W}$.

3.1 Opérateurs de racine

On note Π l'ensemble des chemins affines par morceaux $\pi : [0,1] \to E$ d'origine 0 et d'extrémité un poids. Π^+ est le sous-ensemble de Π constitué des chemins tracés dans $\mathfrak{W}$.

Pour toute racine simple α, on va définir deux fonctions f_α et $e_\alpha : \Pi \to \Pi$, les opérateurs de racine associés à α. Ces deux opérateurs vont consister à appliquer la symétrie s_α - on dira symétriser - à certaines parties du chemin π considéré. Ils ne seront pas définis pour tous les éléments π de Π.

Voici par exemple comment calculer $f_\alpha(\pi)$: si $(\pi(t), \alpha^\vee)$ atteint son minimum en t_0 avec t_0 maximal, on applique la symétrie s_α au-delà de t_0, et ce jusqu'à ce qu'on ait décalé l'extrémité de π de $-\alpha$. Il y a une subtilité supplémentaire : il se peut qu'après avoir symétrisé la partie correspondant à $t \in [t_0, t_1]$, le minimum de $(\ . \ , \alpha^\vee)$ soit atteint pour un certain $t_2 > t_1$ maximal, auquel cas on continuera à symétriser au-delà de t_2, et ainsi de suite... Si après avoir ainsi symétrisé jusqu'à $t = 1$, on n'a pas pu décaler l'extrémité de π de $-\alpha$, f_α n'est tout simplement pas défini.

On définit de même e_α : on repère le t_0 minimal où $(\pi(t), \alpha^\vee)$ atteint son minimum, et on applique s_α en-deçà jusqu'à ce qu'on ait décalé l'extrémité de π de α. On prend garde au fait que si après avoir symétrisé la partie correspondant à $t \in [t_1, t_0]$, le minimum de $(\ . \ , \alpha^\vee)$ est atteint pour un certain $t_2 < t_1$ minimal, on continuera à symétriser en-deçà de t_2, et ainsi de suite... Comme précédemment, si une fois arrivé en $t = 0$, on n'a pas pu décaler l'extrémité de π de α, e_α n'est pas défini.

Plus formellement, si $\pi \in \Pi$, notons $h_\alpha(t) = (\pi(t), \alpha^\vee)$, et soit m_α le minimum de cette fonction. On pose :

$$\begin{cases} l(t) = \min\{1, (h_\alpha(s) - m_\alpha)_{t \leqslant s \leqslant 1}\} \\ r(t) = \max\{0, (m_\alpha - h_\alpha(s) + 1)_{0 \leqslant s \leqslant t}\} \end{cases}$$

Alors f_α est défini quand $l(1) = 1$ et on a dans ce cas $f_\alpha \pi(t) = \pi(t) - l(t)\alpha$. De même, e_α est défini quand $r(0) = 0$, auquel cas on a $e_\alpha \pi(t) = \pi(t) + r(t)\alpha$.

Remarque 3.1. Les valeurs de ces opérateurs ne dépendent pas de la paramétrisation des chemins considérés.

Décrivons à présent les principales propriétés de ces opérateurs de racine :

Proposition 3.2. *Soit $\pi \in \Pi$ et α une racine simple.*

(i) Si $f_\alpha \pi$ est défini, $f_\alpha \pi(1) = \pi(1) - \alpha$.
De même, si $e_\alpha \pi$ est défini, $e_\alpha \pi(1) = \pi(1) + \alpha$.

(ii) Si $f_\alpha \pi$ est défini, $e_\alpha f_\alpha \pi = \pi$.
De même, si $e_\alpha \pi$ est défini, $f_\alpha e_\alpha \pi = \pi$.

(iii) $f_\alpha^k \pi$ est défini si et seulement si $k \leqslant (\pi(1), \alpha^\vee) - m_\alpha$.
De même, $e_\alpha^k \pi$ est défini si et seulement si $k \leqslant -m_\alpha$.

(iv) Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $k\pi : t \mapsto k.\pi(t)$.
Alors $f_\alpha^k(k\pi) = k(f_\alpha\pi)$ et $e_\alpha^k(k\pi) = k(e_\alpha\pi)$.

(v) Munissons Π de la norme de la convergence uniforme. Alors les opérateurs de racine sont continus :
Si $\pi_n \to \pi$ et que les $f_\alpha\pi_n$ sont définis, $f_\alpha\pi$ est défini et $f_\alpha\pi_n \to f_\alpha\pi$.
Si $\pi_n \to \pi$ et que les $e_\alpha\pi_n$ sont définis, $e_\alpha\pi$ est défini et $e_\alpha\pi_n \to e_\alpha\pi$.

Preuve. (i) Cela résulte immédiatement de la définition des opérateurs de racine : on symétrise des parties de π jusqu'à obtenir ce décalage de $\pm\alpha$.

(ii) Après avoir appliqué e_α à π, le t_0 auquel on s'est arrêté de symétriser est le plus grand t où $(\, . \, , \alpha^\vee)$ atteint son minimum. C'est donc exactement à partir de ce point qu'on symétrisera lorsqu'on appliquera f_α. Les valeurs de t correspondant aux parties qu'on symétrise lorsqu'on applique e_α à π et f_α à $e_\alpha\pi$ sont donc les mêmes, et $f_\alpha e_\alpha \pi = \pi$. L'autre égalité se démontre de même.

(iii) A chaque application de f_α, $(\pi(1), \alpha^\vee)$ diminue de 2 et m_α de 1. Par conséquent, $(\pi(1), \alpha^\vee) - m_\alpha$ diminue de 1. Comme f_α est bien définie si et seulement si $(\pi(1), \alpha^\vee) - m_\alpha \geqslant 1$, on obtient le résultat.
Le résultat similaire pour e_α se montre de même.

(iv) C'est évident : symétriser jusqu'à obtenir un décalage de α puis dilater d'un facteur k revient à commencer par dilater d'un facteur k, puis à symétriser jusqu'à obtenir un décalage de $k\alpha$.

(v) Cela résulte de la formule explicite pour les opérateurs de racine.

□

Définition 3.3. Soient $\pi_1, \pi_2 \in \Pi$. On définit leur *concaténation* $\pi_1 * \pi_2$ par :

$$\pi_1 * \pi_2(t) = \begin{cases} \pi_1(2t) & \text{si } 0 \leqslant t \leqslant 1/2 \\ \pi_1(1) + \pi_2(1-2t) & \text{si } 1/2 \leqslant t \leqslant 1 \end{cases}$$

Soient B et B' deux familles de chemins. On définit leur concaténation $B * B'$ comme l'ensemble des concaténations d'un chemin de B et d'un chemin de B'.

Pour que les opérateurs de racine se comportent bien vis-à-vis de la concaténation, il faut des conditions supplémentaires, décrites par la proposition suivante.

Proposition 3.4. *Soit α une racine simple, et $\pi_1, \pi_2 \in \Pi$ tels que les minima des fonctions $h_i(t) = (\pi_i(t), \alpha^\vee)$ soient entiers.*

Alors, $f_\alpha(\pi_1 * \pi_2)$ ne peut valoir, s'il est défini, que $f_\alpha(\pi_1) * \pi_2$ ou $\pi_1 * f_\alpha(\pi_2)$. De même, $e_\alpha(\pi_1 * \pi_2)$ ne peut valoir que $e_\alpha(\pi_1) * \pi_2$ ou $\pi_1 * e_\alpha(\pi_2)$.

Preuve. On fait la démonstration pour f_α, l'autre étant similaire.

Si le plus grand t où $(\pi_1 * \pi_2(t), \alpha^\vee)$ atteint son minimum est supérieur à 1/2, la symétrisation n'affectera que des valeurs de t supérieures à 1/2, et on aura $f_\alpha(\pi_1 * \pi_2) = \pi_1 * f_\alpha(\pi_2)$.

Supposons au contraire que le plus grand t où $(\pi_1 * \pi_2(t), \alpha^\vee)$ atteint son minimum m_α soit strictement inférieur à 1/2. Alors, par l'hypothèse d'intégralité, le minimum de $(\pi_1 * \pi_2(t), \alpha^\vee)$ sur $[\,1/2\,,1\,]$ est supérieur à $m_\alpha + 1$. La symétrisation ne concernera donc que des t inférieurs à 1/2, et $f_\alpha(\pi_1 * \pi_2) = f_\alpha(\pi_1) * \pi_2$.

$\square$

Cette proposition motive la définition suivante, dont on aura besoin :

Définition 3.5. Un chemin π est dit *entier* si pour toute racine simple α, le minimum de $h_\alpha(t) = (\pi(t), \alpha^\vee)$ est entier. Une famille $B \subset \Pi$ de chemins est dite entière si les chemins qui la composent sont entiers.

On utilisera le plus souvent la proposition ci-dessus sous la forme du corollaire suivant :

Corollaire 3.6. *Si B et B' sont deux familles entières stables par les opérateurs de chemin, il en va de même pour $B * B'$.*

3.2 Les théorèmes de Littelmann

Nous décrivons tout d'abord les caractères des représentations irréductibles de $\mathfrak{g}$ en termes de chemins.

Définition 3.7. Soit $\pi \in \Pi$. On note $B(\pi)$ le sous-ensemble de B engendré par π et les opérateurs de racine.

Définition 3.8. Soit $B \subset \Pi$ une famille finie de chemins. On note $Char(B)$ l'élément $\sum_{\pi \in B} e^{\pi(1)}$ de $\mathbb{Z}[\Lambda_W]$.

Théorème 3.9 (Calcul du caractère). *Soit $\pi \in \Pi^+$. Alors $B(\pi)$ est fini, et $Char(B(\pi)) = Char(\Gamma_{\pi(1)})$.*

Si λ est un poids dominant, ce théorème permet de calculer $Char(\Gamma_\lambda)$ en choisissant un $\pi \in \Pi^+$ particulier tel que $\pi(1) = \lambda$. En pratique, on pourra prendre pour π le chemin $\lambda : t \mapsto t\lambda$. Les éléments de $B(\lambda)$ sont les chemins de Lakshmibai-Seshadri associés à λ.

Le modèle des chemins permet de plus de décrire les produits tensoriels de représentations de $\mathfrak{g}$. C'est le rôle du théorème ci-dessous.

Théorème 3.10 (Décomposition du produit tensoriel). *Soient λ_1 et λ_2 deux poids dominants, et $\pi_1, \pi_2 \in \Pi^+$ tels que $\pi_1(1) = \lambda_1$ et $\pi_2(1) = \lambda_2$. Alors*

$$\Gamma_{\lambda_1} \otimes \Gamma_{\lambda_2} \simeq \bigoplus \Gamma_{\lambda_1 + \eta(1)},$$

où la sommation porte sur les $\eta \in B(\pi_2)$ tels que $\pi_1 * \eta \in \Pi^+$.

La démonstration de ces deux théorèmes, qui fait l'objet de la partie suivante, passera par une description précise de $B(\pi)$ pour $\pi \in \Pi^+$, et de sa combinatoire.

4 Démonstrations des théorèmes

Les deux premiers paragraphes de cette partie sont consacrés à la description de la structure de $B(\pi)$ pour $\pi \in \Pi^+$. On y utilise de manière importante les propriétés géométriques des systèmes de racine, et la combinatoire du groupe de Weyl développées dans la première partie.

Le lecteur qui ne souhaiterait pas lire ces démonstrations un peu techniques peut admettre le théorème 4.11 et passer directement au dernier paragraphe, où sont démontrés les deux théorèmes principaux 3.9 et 3.10.

On reprend les notations des parties précédentes : on se place dans l'espace euclidien E muni du système de racines R, et sur lequel agit le groupe de Weyl W. On choisit une base S de R et on note ρ la demi-somme des racines positives. Π est l'ensemble des chemins linéaires par morceaux, tracés dans E, joignant 0 à un poids. Π^+ et $\Pi^+_\circ$ sont constitués des chemins de Π tracés respectivement dans la chambre de Weyl dominante $\mathfrak{W}$ et dans son intérieur (pour $t > 0$).

4.1 Chemins localement entiers

On commence par traiter un cas particulier auquel on se ramènera dans le paragraphe suivant. Il s'agit d'une famille de chemins qui se comportent particulièrement bien vis-à-vis des opérateurs de racine : les chemins localement entiers.

Si $\lambda \in E$, on note λ^+ l'unique conjugué de λ dans $\mathfrak{W}$ (voir proposition 1.40). On identifie de plus un élément λ de E avec le chemin $t \mapsto t\lambda$.

Définition 4.1. Soient $\nu_1, \ldots, \nu_r$ des éléments de E. On note $\nu_1 \succcurlyeq \ldots \succcurlyeq \nu_r$ s'il existe $w_1, \ldots, w_r \in W$ tels que $\nu_i = w_i(\nu_i^+)$ et $w_1 \geqslant \ldots \geqslant w_r$.

Remarque 4.2. Cette définition prolonge la définition 1.43. Il convient de faire attention : $\succcurlyeq$ n'est pas une relation transitive.

Définition 4.3. Un chemin ν est dit *localement entier* si on peut écrire $\nu = \nu_1 * \ldots * \nu_r$ où $\nu_1, \ldots, \nu_r$ sont des éléments de E tels que $\nu_1 \succcurlyeq \ldots \succcurlyeq \nu_r$ vérifiant les conditions suivantes pour $2 \leqslant i \leqslant r$:

(i) Pour tout $\beta \in R_{\nu_{i-1},\nu_i}$, $(\nu_1 + \ldots + \nu_i, \beta^\vee) \in \mathbb{Z}$, où le système de racine local R_{ν_{i-1},ν_i} est défini au paragraphe 1.5.

(ii) Soit il existe $t_i > 0$ tel que $t_i\nu_i$ et ν_{i+1} soient dans la même orbite du groupe de Weyl, soit on peut trouver $p_i, q_i > 0$ tels que $\nu_1 + \ldots + \nu_{i-1} + p_i\nu_i \in \Lambda_W$ et $q_i\nu_{i+1} + \nu_{i+2} + \ldots + \nu_r \in \Lambda_W$.

Voici une première propriété d'intégralité des chemins localement entiers :

Lemme 4.4. *Soit $\nu = \nu_1 * \ldots * \nu_r$ un chemin localement entier, et α une racine simple. Alors les minima locaux de $h_\alpha(t) = (\nu(t), \alpha^\vee)$ sont des entiers.*

En particulier, un chemin localement entier est entier.

Preuve. Soit $s \in [0,1]$ un point où h_α atteint un minimum local. Comme ν est affine par morceaux, il existe i tel que $\nu(s) = \nu_1 + \ldots + \nu_i$ pour un certain i, $0 \leqslant i \leqslant r$. On choisit de plus i minimal, ce qui permet de supposer le minimum strict à gauche.

Si $i = 0$ ou r, la quantité considérée est bien entière car $\nu(0)$ et $\nu(1)$ sont des poids. Si $1 \leqslant i \leqslant r-1$, par stricte minimalité à gauche, $(\nu_i, \alpha^\vee) < 0$ et $(\nu_{i+1}, \alpha^\vee) \geqslant 0$. Soient alors (v, w) le couple d'éléments de W associé à (ν_i, ν_{i+1}) comme en **??**. Par la proposition 1.47, et notamment par minimalité de w, $s_\alpha v < v$ et $s_\alpha w > w$. La proposition 1.50(ii) montre alors $v > s_\alpha v \geqslant w$, ce qui implique $\alpha \in R_{\nu_i, \nu_{i+1}}$. Comme ν est localement entier, par 4.3(i), $(\nu(s), \alpha^\vee) = (\nu_1 + \ldots + \nu_i, \alpha^\vee) \in \mathbb{Z}$.

□

On en déduit le théorème suivant, qui fait l'intérêt de la notion de chemin localement entier.

Théorème 4.5. *L'ensemble des chemins localement entiers est stable par les opérateurs de racine.*

Soit α une racine simple. On ne fait la démonstration que pour l'opérateur f_α, celle pour e_α étant similaire. On scinde la preuve en cinq étapes.

Etape 1 : *Soit ν un chemin localement entier. Si $f_\alpha \nu$ est défini, on peut en choisir une paramétrisation $\nu = \nu_1 * \ldots * \nu_r$ telle qu'il existe i $\leqslant k$ avec :*

$$f_\alpha \nu = \nu_1 * \ldots * \nu_{i-1} * s_\alpha \nu_i * \ldots * s_\alpha \nu_k * \nu_{k+1} * \ldots * \nu_r$$

On choisira alors i maximal et k minimal (ce qui impose en particulier $(\nu_{i-1}, \alpha) \leqslant 0$ et $(\nu_{k+1}, \alpha) \geqslant 0$).

Preuve. Soit t_0 maximal tel que h_α atteigne en t_0 son minimum m_α, et $t_1 > t_0$ minimal tel que $h_\alpha(t_1) = m_\alpha + 1$. Comme les minima locaux de h_α sont entiers, h_α est croissante sur $[t_0, t_1]$. Notons au passage que cela implique qu'elle ne prend pas de valeurs entières sur $]t_0, t_1[$.

Appliquer f_α revient alors exactement à symétriser la partie de ν correspondant à $t \in [t_0, t_1]$. Cela montre l'existence de la paramétrisation demandée.

□

Etape 2 : *De plus, si $i \leqslant j \leqslant k$, $(\nu_j, \alpha^\vee) > 0$.*

Preuve. La croissance de h_α sur $[t_0, t_1]$ se traduit par $(\nu_j, \alpha^\vee) \geqslant 0$ pour $i \leqslant j \leqslant k$. Supposons par l'absurde $(\nu_j, \alpha^\vee) = 0$. Par maximalité de i et minimalité de k, on a $i < j < k$, et en choisissant j maximal, on peut supposer $(\nu_{j+1}, \alpha^\vee) > 0$. Distinguons deux cas à l'aide de 4.3(ii) :

Tout d'abord, s'il existe $p > 0$ tel que $\nu_1 + \ldots + \nu_{j-1} + p\nu_j \in \Lambda_W$, il vient $(\nu_1 + \ldots + \nu_{j-1} + \nu_j, \alpha^\vee) = (\nu_1 + \ldots + \nu_{j-1} + p\nu_j, \alpha^\vee) \in \mathbb{Z}$, ce qui contredit le fait que h_α ne prenne pas de valeurs entières sur $]t_0, t_1[$.

Autrement, ν_j et ν_{j+1} sont à homothétie près dans la même orbite du groupe de Weyl. Alors, par le théorème 1.45, les v et w minimaux tels que $v(\nu_j^+) = \nu_j$ et

$w(\nu_{j+1}^+) = \nu_{j+1}$ vérifient $v \geqslant w$. Par ailleurs, $(\nu_j, \alpha) = 0$ et $(\nu_{j+1}, \alpha) > 0$ montre grâce à la proposition 1.47 (ii) que $s_\alpha v > v$ et $s_\alpha w > w$. Ainsi, par le théorème 1.50 (iii), $s_\alpha v \geqslant s_\alpha w$, et donc puisque $s_\alpha v(\nu_j^+) = \nu_j$, $s_\alpha w(\nu_{j+1}^+) = s_\alpha(\nu_{j+1})$ on a montré $\nu_j \succcurlyeq s_\alpha(\nu_{j+1})$. Ensuite, on montre que $s_\alpha w$ est l'élément minimal de $W_{\nu_{j+1}^+, s_\alpha(\nu_{j+1})}$. En effet, soit $w' \in W_{\nu_{j+1}^+, s_\alpha(\nu_{j+1})}$. Alors $s_\alpha w' \in W_{\nu_{j+1}^+, \nu_{j+1}}$ donc $s_\alpha w' \geqslant w$, $w' > s_\alpha w'$ et $s_\alpha w > w$ si bien que d'après le théorème 1.50 (iii) $w' \geqslant s_\alpha w$. Ainsi, ν_j et $s_\alpha(\nu_{j+1})$ sont à homothétie près dans la même orbite du groupe de Weyl, v est l'élément minimal associé à ν_j, $s_\alpha w$ celui associé à $s_\alpha(\nu_{j+1})$: d'après le théorème 1.45, $v \geqslant s_\alpha w > w$. Finalement, $\alpha \in R_{\nu_j, \nu_{j+1}}$ et donc $(\nu_1 + \ldots + \nu_j, \alpha^\vee) \in \mathbb{Z}$, ce qui n'est pas possible.

□

Etape 3 : *Notons $\mu_j = s_\alpha(\nu_j)$ si $i \leqslant j \leqslant k$ et $\mu_j = \nu_j$ autrement, de sorte à ce que $f_\alpha \nu = \mu_1 * \ldots * \mu_r$. Alors $\mu_1 \succcurlyeq \ldots \succcurlyeq \mu_r$.*

Preuve. On sait que $\nu_1 \succcurlyeq \ldots \succcurlyeq \nu_r$, et on peut donc choisir $w_1, \ldots, w_r \in W$ tels que $\nu_i = w_i(\nu_i^+)$ et $w_1 \geqslant \ldots \geqslant w_r$.

Soit $1 \leqslant l \leqslant i$ le plus petit entier tel que pour $l \leqslant j < i$, $s_\alpha v_j > v_j$. En particulier, par la proposition 1.47, $(\nu_j, \alpha^\vee) \geqslant 0$. Comme h_α atteint son minimum en $\nu_1 + \ldots + \nu_i$, on a même $(\nu_j, \alpha^\vee) = 0$ pour $l \leqslant j < i$. On pose alors :

$$v_i = \begin{cases} s_\alpha w_i & \text{si } l \leqslant j \leqslant k \\ w_i & \text{autrement} \end{cases}$$

Tout d'abord, $v_j(\mu_j^+) = \mu_j$. En effet :

- si $i \leqslant j \leqslant k$, $v_j(\mu_j^+) = s_\alpha w_j(\nu_j^+) = s_\alpha \nu_j = \mu_j$
- si $l \leqslant j < i$, $v_j(\mu_j^+) = s_\alpha w_j(\nu_j^+) = s_\alpha \nu_j = \nu_j = \mu_j$ car $(\nu_j, \alpha^\vee) = 0$.
- pour les autres valeurs de j, $v_j(\mu_j^+) = w_j(\nu_j^+) = \nu_j = \mu_j$.

De plus, pour tout j, $v_j \geqslant v_{j+1}$. En effet, remarquons d'abord que pour j compris entre i et k (au sens large), $(\nu_j, \alpha) > 0$, et donc d'après la proposition 1.47 (ii), $s_\alpha w_j > w_j$. Ensuite :

- si $j < l - 1$ c'est évident.
- si $j = l - 1$, $w_j \geqslant w_{j+1}$, $s_\alpha w_j < w_j$, $s_\alpha w_{j+1} > w_{j+1}$ (d'après la définition de l) et le théorème 1.50 (ii) montre que $w_j \geqslant s_\alpha w_{j+1}$ autrement dit $v_j \geqslant v_{j+1}$.
- si $l \leqslant j < k$, $w_j \geqslant w_{j+1}$, $s_\alpha w_j > w_j$, $s_\alpha w_{j+1} > w_{j+1}$ et le théorème 1.50 (iii) montre que $s_\alpha w_j \geqslant s_\alpha w_{j+1}$, soit $v_j \geqslant v_{j+1}$.
- si $j = k$, $v_j = s_\alpha w_j > w_j \geqslant w_{j+1} = v_{j+1}$.
- si $j > k$, c'est évident

Ainsi $v_1 \geqslant \cdots \geqslant v_r$, et pour tout j, $v_j(\mu^+) = \mu_j$, on a donc bien montré $\mu_1 \succcurlyeq \ldots \succcurlyeq \mu_r$.

□

Etape 4 : *La condition 4.3(i) est vérifiée.*

Preuve. On note $P_j = \nu_1 + \ldots + \nu_j$ et $Q_j = \mu_1 + \ldots + \mu_j$. En reliant P_j et Q_j d'une part, et en exprimant les systèmes de racine locaux de μ à l'aide de ceux de ν grâce au théorème 1.51 d'autre part, on se ramène au cas connu de ν. On distingue plusieurs cas :

- si $j < i-1$, $Q_j = P_j$ et $R_{\mu_j,\mu_{j+1}} = R_{\nu_j,\nu_{j+1}}$, donc la condition est évidente.
- si $j = i-1$, $Q_j = P_j$, et, puisque $(\nu_j, \alpha) \leqslant 0$ et $(\nu_{j+1}, \alpha) > 0$, on tient du théorème 1.51 (i) que $R_{\mu_j,\mu_{j+1}} = s_\alpha(R_{\nu_j,\nu_{j+1}})$ ou $R_{\nu_j,\nu_{j+1}}$ est engendré par $R_{\mu_j,\mu_{j+1}}$ et α. Dans le premier cas, pour $\beta \in R_{\mu_j,\mu_{j+1}}$, $s_\alpha(\beta) \in R_{\nu_j,\nu_{j+1}}$, si bien que $(P_j, s_\alpha(\beta^\vee)) = (s_\alpha(Q_j), \beta^\vee) \in \mathbb{Z}$. Ainsi, $s_\alpha(Q_j) = Q_j - (Q_j, \alpha^\vee)\alpha$, $(Q_j, \alpha^\vee) = m_\alpha \in \mathbb{Z}$ et $(\alpha, \beta^\vee) \in \mathbb{Z}$ montre que $(Q_j, \beta^\vee) \in \mathbb{Z}$. Le second cas est évident.
- si $i \leqslant j < k$, alors $(\nu_j, \alpha) > 0$ et $(\nu_{j+1}, \alpha) > 0$ si bien que d'après le théorème 1.51 (ii) $R_{\mu_j,\mu_{j+1}} = s_\alpha(R_{\nu_j,\nu_{j+1}})$. Par ailleurs $Q_j - s_\alpha(P_j) = \nu_1 - s_\alpha(\nu_1) + \cdots + \nu_{i-1} - s_\alpha(\nu_{i-1}) = m_\alpha \alpha$. Soit alors $\beta \in R_{\mu_j,\mu_{j+1}}$, si bien que $s_\alpha(\beta) \in R_{\nu_j,\nu_{j+1}}$ et donc $(Q_j, \beta^\vee) = (s_\alpha(P_j) + m_\alpha \alpha, \beta^\vee) = (P_j, (s_\alpha(\beta)^\vee)) + m_\alpha(\alpha, \beta^\vee) \in \mathbb{Z}$
- si $j = k$, $Q_j = P_j - \alpha$ et $(\nu_j, \alpha) > 0$, $(\nu_{j+1}, \alpha) \geqslant 0$ si bien que d'après le théorème 1.51 (iii) $R_{\mu_j,\mu_{j+1}}$ est engendré par $R_{\nu_j,\nu_{j+1}}$ et α. Il reste donc juste à vérifier que $(Q_j, \alpha^\vee) \in \mathbb{Z}$, ce qui est vrai car cette quantité vaut exactement $m_\alpha - 1$.
- si $j > k$, $Q_j = P_j - \alpha$ et $R_{\mu_j,\mu_{j+1}} = R_{\nu_j,\nu_{j+1}}$, et on a juste besoin d'utiliser la propriété d'intégralité des racines.

□

Etape 5 : *La condition 4.3(ii) est vérifiée.*

Preuve. Si ν_j et ν_{j+1} sont à homothétie près dans la même orbite du groupe de Weyl, il en va de même pour μ_j et μ_{j+1}. Supposons donc qu'on se trouve dans l'autre cas. On démontre alors la première partie de la condition, à savoir l'existence de $p_j > 0$ tel que $\mu_1 + \ldots + \mu_{j-1} + p_j \mu_j \in \Lambda_W$. Le cas de q_j se traite exactement de la même manière. Rappelons les faits suivants : $(\nu_1 + \ldots + \nu_{i-1}, \alpha^\vee) = m_\alpha \in \mathbb{Z}$, $(\nu_1 + \ldots + \nu_k, \alpha^\vee) = m_\alpha + 1 \in \mathbb{Z}$, donc $(\nu_i + \ldots + \nu_k, \alpha^\vee) = 1$. Il vient :

- si $j \leqslant i-1$, $\mu_1 = \nu_1, \ldots, \mu_j = \nu_j$, si bien que l'existence de p_j est évidente.
- si $i \leqslant j \leqslant k$, soit $p_j > 0$ tel que $\nu_1 + \ldots + \nu_{j-1} + p_j \nu_j \in \Lambda_W$. Alors $\nu_1 + \ldots + \nu_{j-1} + p_j \nu_j - (\mu_1 + \ldots + \mu_{j-1} + p_j \mu_j) = (\nu_i + \ldots + p_j \nu_j, \alpha^\vee)\alpha \in \Lambda_W$ car $(\nu_i + \ldots + p_j \nu_j, \alpha^\vee) = (\nu_1 + \ldots + p_j \nu_j, \alpha^\vee) - m_\alpha \in \mathbb{Z}$. Ainsi $\mu_1 + \ldots + \mu_{j-1} + p_j \mu_j \in \Lambda_W$.
- si $j > k$, soit $p_j > 0$ tel que $\nu_1 + \ldots + \nu_{j-1} + p_j \nu_j \in \Lambda_W$. Alors $\nu_1 + \ldots + \nu_{j-1} + p_j \nu_j - (\mu_1 + \ldots + \mu_{j-1} + p_j \mu_j) = (\nu_i + \ldots + \nu_k, \alpha^\vee)\alpha = \alpha \in \Lambda_W$, donc $\mu_1 + \ldots + \mu_{j-1} + p_j \mu_j \in \Lambda_W$.

□

Nous sommes à présent en mesure de décrire $B(\nu)$ si ν est localement entier. On montre d'abord un lemme :

Lemme 4.6. *Soit $\nu = \nu_1 * \ldots * \nu_r$ un chemin localement entier tel que $\rho * \nu \in \Pi_\circ^+$. Alors $\nu_1, \ldots, \nu_r \in \mathfrak{W}$.*

Preuve. Soit α une racine simple. Comme $\rho * \nu \in \Pi_\circ^+$, le minimum de h_α est > -1 (par 1.20, $(\rho, \alpha^\vee) = 1$). De plus, par le lemme 4.4, c'est un entier : il est donc égal à 0, et $\nu \in \Pi^+$.

Choisissons alors par l'absurde i minimal avec $\nu_i \notin \mathfrak{W}$, et α une racine simple telle que $(\nu_i, \alpha^\vee) < 0$. Comme ν est localement entier, on peut de plus choisir $w_1 \geqslant \ldots \geqslant w_r$ tels que $w_j(\nu_j^+) = \nu_j$. En particulier, par 1.47, $s_\alpha w_i < w_i$, et on peut trouver une expression réduite de w_i commençant par s_α. s_α s'écrit alors comme sous-expression de cette expression réduite, et, par 1.38, $w_i \geqslant s_\alpha$. On en déduit que pour tout $j < i$, $w_j \geqslant s_\alpha$. Mais w_j fixe ν_j car $\nu_j \in \mathfrak{W}$. Par **??**, on peut trouver une expression réduite de w_j faisant intervenir des réflexions fixant ν_j. Comme, par 1.42, s_α en est une sous-expression, s_α fixe ν_j, et $(\nu_j, \alpha^\vee) = 0$. Finalement, $(\nu_1 + \ldots + \nu_i, \alpha^\vee) = (\nu_i, \alpha^\vee) < 0$, ce qui contredit le fait que ν reste dans $\mathfrak{W}$.

□

Voici enfin le résultat principal de ce paragraphe :

Proposition 4.7. *Soit $\nu = \nu_1 * \ldots * \nu_r \in \Pi^+$ un chemin localement entier. Alors :*

(i) $B(\nu)$ est entière (voir définition 3.5).

(ii) Si $\mu \in B(\nu)$ est tel que $\rho * \mu \in \Pi_\circ^+$, $\mu = \nu$.

(iii) $B(\nu)$ est engendrée par ν et les opérateurs f_α.

(iv) $B(\nu)$ est finie.

Preuve. (i) Cela résulte de la stabilité des chemins localement entiers par les opérateurs de racine et du lemme 4.4.

(ii) Soit $\mu \in B(\nu)$. Quitte à reparamétrer ν, on peut supposer $\mu = \mu_1 * \ldots * \mu_r$, où μ_j et ν_j sont dans la même orbite du groupe de Weyl. Par le lemme précédent, si $\rho * \mu \in \Pi_\circ^+$, μ_j est l'unique élément de l'orbite de ν_j dans $\mathfrak{W}$. C'est donc ν_j, et on a $\mu = \nu$.

(iii) Soit $\mu \in B(\nu)$. Appliquons autant que possible à μ des opérateurs e_α. L'opération doit s'arrêter car on ajoute à l'extrémité du chemin des racines simples, alors que la longueur du chemin reste constante. Notons μ' le chemin obtenu. On ne peut lui appliquer e_α, donc le minimum de $(\mu'(t), \alpha^\vee)$ est > -1, donc $\geqslant 0$ par le lemmme 4.4. Ainsi, $\mu' \in \Pi^+$, et $\rho * \mu' \in \Pi_\circ^+$. Par conséquent, par (ii), $\mu' = \nu$, et on a donc $\mu = f_{\alpha_1} \cdots f_{\alpha_k} \nu$ pour $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ des racines simples.

(iv) Tout d'abord, il y a un nombre fini de chemins dans $B(\nu)$ d'extrémité donnée. En effet, $\mu(1) = \nu(1) - \sum \alpha_i$, et comme les racines simples forment une base, les $\mu' \in B(\nu)$ de même extrémité que μ font intervenir les mêmes f_α, dans un ordre éventuellement différent.

De plus, comme les longueurs des chemins de $B(\nu)$ sont égales, les extrémités possibles appartiennent à une partie bornée du réseau Λ_W, et sont donc en nombre fini. $B(\nu)$ est donc bien fini.

□

Remarque 4.8. Si ν est un chemin localement entier, mais non nécessairement dans Π^+, les propriétés (i) et (iv) restent vraies. En effet, considérons le chemin ν' obtenu en appliquant autant que possible les opérateurs e_α à ν. C'est un chemin localement entier de Π^+ , auquel on peut appliquer 4.7. Comme $B(\nu) = B(\nu')$, on a le résultat voulu.

4.2 Structure de $B(\pi)$

On cherche à présent à démontrer le théorème 4.7 pour un chemin $\pi \in \Pi^+$ quelconque. Pour cela, on se ramène au cas connu des chemins localement entiers. On a besoin au préalable de la définition suivante :

Définition 4.9. Soit $\pi \in \Pi$. On note $G(\pi)$ le graphe orienté et colorié dont les sommets sont les éléments de $B(\pi)$, et dont on relie deux sommets η et η' par une arête de couleur α si $\eta' = f_\alpha \eta$.

De même, si $\pi_1, \pi_2 \in \Pi$, on notera $G(\pi_1) * G(\pi_2)$ le graphe orienté et colorié dont les sommets sont les éléments de $B(\pi_1) * B(\pi_2)$, et dont on relie deux sommets η et η' par une arête de couleur α si $\eta' = f_\alpha \eta$.

La proposition précise que l'on va démontrer est alors la suivante :

Proposition 4.10. *Soit $\pi \in \Pi^+$. Alors $B(\pi)$ est entière, et $G(\pi) \simeq G(\pi(1))$.*

L'isomorphisme décrit par la proposition ci-dessus permet de montrer pour π ce qu'on sait déjà pour $\pi(1)$ (qui est, lui, localement entier). En particulier, on en déduit la proposition 4.7 dans le cas général :

Théorème 4.11. *Soit $\pi \in \Pi^+$. Alors :*

(i) $B(\pi)$ est entière.

(ii) Si $\eta \in B(\pi)$ est tel que $\rho * \eta \in \Pi^+_\circ$, $\eta = \pi$.

(iii) $B(\pi)$ est engendrée par π et les opérateurs f_α.

(iv) $B(\pi)$ est finie.

Preuve. (i) est dans l'énoncé de 4.10, et (iii) et (iv) découlent immédiatement de l'isomorphisme des graphes et de la proposition 4.7. Pour (ii), on procède de même en remarquant que pour un chemin entier η,

$$\begin{aligned} \rho * \eta \in \Pi^+_\circ \quad &\Leftrightarrow \quad \text{les minima des } h_\alpha(t) = (\eta(t), \alpha^\vee) \text{ sont } > -1 \\ &\Leftrightarrow \quad \text{les minima des } h_\alpha(t) = (\eta(t), \alpha^\vee) \text{ sont } \geqslant 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \text{aucun des opérateurs } e_\alpha \text{ n'est défini sur } \eta, \end{aligned}$$

cette dernière propriété ne dépendant que du graphe.

□

Il nous reste à démontrer la proposition 4.10. On aura besoin du lemme suivant :

Lemme 4.12. *Soient $\pi, \pi_1, \pi_2 \in \Pi$ tels que $B(\pi), B(\pi_1)$ et $B(\pi_2)$ soient entiers, et que $G(\pi_1) \simeq G(\pi_2)$. Alors $G(\pi_1) * G(\pi) \simeq G(\pi_2) * G(\pi)$.*

Preuve. Notons $\Phi : G(\pi_1) \to G(\pi_2)$ l'isomorphisme. On a une bijection naturelle $\Phi' : B(\pi_1) * B(\pi) \to B(\pi_2) * B(\pi)$. Il suffit de montrer qu'elle préserve l'action de f_α, où α est une racine simple.

Pour cela, remarquons tout d'abord que si $\eta \in B(\pi_1)$, comme η est entier et par 3.2(iii), on peut caractériser le minimum de $(\eta(t), \alpha^\vee)$ comme l'opposé du plus grand k tel que $e_\alpha^k \eta$ est défini. Par isomorphisme des graphes, c'est égal au minimum de $(\Phi(\eta)(t), \alpha^\vee)$.

Finalement, soit $\eta * \eta' \in B(\pi_1) * B(\pi)$. Comme η et η' sont entiers, la proposition 3.4 et sa démonstration montre que le fait que $f_\alpha(\eta * \eta')$ soit bien défini, et, le cas échéant, le facteur sur lequel l'opérateur de racine s'appliquera ne dépendent que des valeurs des minima de $(\eta(t), \alpha^\vee)$ et $(\eta'(t), \alpha^\vee)$. Par conséquent, $f_\alpha(\eta*\eta')$ est défini si et seulement si $f_\alpha(\Phi'(\eta*\eta'))$, et, le cas échéant, $f_\alpha(\Phi'(\eta * \eta')) = \Phi'(f_\alpha(\eta * \eta'))$. D'où le résultat.

□

La démonstration de la proposition 4.10 s'effectue en plusieurs étapes, en établissant sa validité pour des familles de chemins de plus en plus générales.

Etape 1 : *La proposition 4.10 est vraie pour $\pi = \lambda * \mu$ où λ et μ sont des poids dominants.*

Preuve. On considère la famille de chemins $\pi_s = ((1-s)\lambda) * (\mu + s\lambda)$, de sorte à ce qu'on ait en particulier $\pi_0 = \lambda * \mu$ et $\pi_1 = \lambda + \mu$, et on pose $B_s = B(\pi_s)$. Si s est rationnel, π_s est localement entier.

Le minimum de $h_s(t) = (\pi_s(t), \alpha^\vee)$ est constant car c'est un entier, et une fonction continue de s. Par conséquent, $f_\alpha \pi_1$ est bien défini si et seulement si $f_\alpha \pi_s$ est bien défini. Grâce à la continuité des opérateurs de racine (proposition 3.2(v)), cet argument montre par récurrence immédiate sur r que $\eta_0 = f_{\alpha_1} \dots f_{\alpha_r} \pi_0$ est bien défini si et seulement si $\eta_s = f_{\alpha_1} \dots f_{\alpha_r} \pi_s$ est bien défini.

Posons alors $\Phi : B_0 \to B_1 \, , \, \eta_0 \mapsto \eta_1$. Vérifions que cette application est bien définie : si $\eta_0 = f_{\alpha_1} \dots f_{\alpha_r} \pi_0 = f_{\beta_1} \dots f_{\beta_r} \pi_0$, l'argument d'intégralité et de continuité ci-dessus montre que $e_{\beta_r} \dots e_{\beta_1} f_{\alpha_1} \dots f_{\alpha_r} \pi_1$ est bien défini. C'est un élément de B_1, dont l'extrémité est $\lambda + \mu$. Mais comme les éléments de B_1 sont de longueur $\lambda + \mu$, ce ne peut être que $\lambda + \mu = \pi_1$, et $f_{\alpha_1} \dots f_{\alpha_r} \pi_1 = f_{\beta_1} \dots f_{\beta_r} \pi_1$. Φ est donc bien définie. Par 4.7(iii), Φ est de plus définie sur tout B_0.

Les mêmes arguments permettent de construire un inverse $\Phi^{-1} : B_0 \to B_1 \, , \, \eta_0 \mapsto \eta_1$ à Φ. En particulier, Φ est bijective, et est l'isomorphisme recherché entre $G(\pi_0) = G(\lambda * \mu)$, et $G(\pi_1) = G(\lambda + \mu) = G((\lambda * \mu)(1))$.

□

Etape 2 : *La proposition 4.10 est vraie pour $\pi = \lambda * -\mu \in \Pi^+$ où λ et μ sont des poids dominants.*

Preuve. Comme λ et $-\mu$ sont localement entiers, $B(\lambda)$ et $B(-\mu)$ sont entières. Le corollaire 3.6 montre alors qu'il existe une injection $G(\lambda * -\mu) \hookrightarrow G(\lambda) * G(-\mu)$, et $B(\lambda * -\mu)$ est bien entière.

Ensuite, la première étape permet d'appliquer le lemme 4.12 : on a un isomorphisme $G(\lambda)*G(-\mu) \simeq G((\lambda-\mu)*\mu)*G(-\mu)$. On obtient donc une injection $G(\lambda*-\mu) \hookrightarrow G((\lambda-\mu)*\mu)*G(-\mu)$ qui, en envoyant $\lambda*-\mu$ sur $(\lambda-\mu)*(\mu*-\mu)$, induit une bijection $G(\lambda*-\mu) \simeq G((\lambda-\mu)*(\mu*-\mu))$.

Finalement, comme $B(\lambda-\mu)$ est entière, que $(\mu*-\mu)$ est entier et qu'aucun opérateur de racine ne peut s'appliquer à $(\mu*-\mu)$, la proposition 3.4 montre que $G((\lambda-\mu)*(\mu*-\mu)) \simeq G(\lambda-\mu)$. D'où le résultat.

□

Etape 3 : *La proposition 4.10 est vraie pour $\pi = \lambda_1 * \ldots * \lambda_r \in \Pi^+$, où les λ_i sont des poids dominants ou des opposés de poids dominants.*

Preuve. On raisonne par récurrence sur r, le cas $r=1$ étant évident. On pose $\pi = \lambda_1 * \ldots * \lambda_{r-1} \in \Pi^+$.

Tout d'abord, par intégralité de $B(\pi)$ et de $B(\lambda_r)$, et à l'aide du corollaire 3.6, on a une injection $G(\pi * \lambda_r) \hookrightarrow G(\pi) * G(\lambda_r)$. Cela montre déjà la propriété d'intégralité. De plus, l'hypothèse de récurrence permet d'appliquer le lemme 4.12 : on a un isomorphisme $G(\pi)*G(\lambda_r) \simeq G(\pi(1))*G(\lambda_r)$. On obtient donc une injection $G(\pi * \lambda_r) \hookrightarrow G(\pi(1)) * G(\lambda_r)$ qui, en envoyant $\pi * \lambda_r$ sur $\pi(1)*\lambda_r$, induit une bijection $G(\pi*\lambda_r) \simeq G(\pi(1)*\lambda_r)$. Alors, par la première ou la deuxième étape, selon que λ_r est un poids dominant ou l'opposé d'un poids dominant, on obtient $G(\pi * \lambda_r) \simeq G(\pi(1) + \lambda_r)$.

□

Etape 4 : *La proposition 4.10 est vraie pour $\pi = \lambda_1 * \ldots * \lambda_r \in \Pi^+$, où les λ_i sont des multiples rationnels de poids dominants ou d'opposés de poids dominants.*

Preuve. □

Il existe $n > 0$ tel que $n\,\pi$ s'écrive comme concaténation de poids dominants et d'opposés de poids dominants. Par la troisième étape, on a donc $G(n\,\pi) \simeq G(n\,\pi(1))$. Mais par la proposition 3.2(iv), les graphes $G(\pi)$ et $G(\pi(1))$ peuvent être retrouvés comme sous-graphes engendrés par les opérateurs f_α^n et e_α^n de ces deux graphes. Par conséquent, on a un isomorphisme $\Phi : G(\pi) \to G(\pi(1))$.

Il reste à démontrer la propriété d'intégralité. Pour cela, soit $\eta \in B(\pi)$ et α une racine simple. On note m_α le minimum de $t \mapsto (\eta(t), \alpha^\vee)$ et n_α le minimum de $t \mapsto (\Phi(\eta)(t), \alpha^\vee)$, qu'on sait être entier par les propriétés des chemins localement entiers. Montrons $m_\alpha = n_\alpha$, ce qui conclura.

Supposons par l'absurde que $m_\alpha < n_\alpha$, l'autre cas étant similaire. Il existe alors un entier $k > 0$ tel que $k\,n_\alpha - k\,m_\alpha > 1$. Par la proposition 3.2(iii), cela implique que $e_\alpha^{-kn_\alpha+1}(k\,\eta)$ est défini, alors que $e_\alpha^{-kn_\alpha+1}\Phi(k\,\eta)$ ne l'est pas. Mais par le premier point de cette démonstration, les graphes $G(k\,\pi)$ et $G(k\,\pi(1))$ sont isomorphes, $k\eta$ correspondant à $k\,\Phi(\eta)$. C'est une contradiction.

Etape 5 : *La proposition 4.10 est vraie pour $\pi \in \Pi^+$ quelconque.*

Preuve. Écrivons $\pi = \lambda_1 * \ldots * \lambda_r \in \Pi^+$ comme limite de chemins tels qu'à l'étape précédente. Comme on peut approcher les λ_i par des multiples rationnels de poids (en les décomposant sur la base des racines simples, et en approchant les coefficients par des rationnels), on peut supposer que λ_i est un multiple rationnel de poids.

Il reste alors à approcher les λ_i par des chemins tels qu'à l'étape précédente. En les décomposant sur la base des racines simples, et en séparant coefficients positifs et négatifs, on écrit $\lambda_i = \mu_i - \nu_i$ où μ_i et ν_i sont des multiples rationnels de poids dominants. Alors λ_i est limite des $(\frac{\mu_i}{k} * \frac{\nu_i}{k})^k$ où la puissance k-ième représente la concaténation de k chemins identiques.

On peut alors conclure en passant à la limite les résultats de l'étape précédente : on obtient l'isomorphisme des graphes désiré par continuité des opérateurs de racine (proposition 3.2(v)), et la propriété d'intégralité car une limite d'entiers est un entier.

□

On connaît à présent la structure de $B(\pi)$. Cela va nous permettre de démontrer dans le paragraphe qui suit les deux théorèmes principaux de ce mémoire.

4.3 Démonstrations des théorèmes de Littelmann

Attaquons-nous tout d'abord au théorème 3.9. On commence par un lemme :

Lemme 4.13. *Soit $B \subset \Pi$ une famille finie de chemins stable par les opérateurs de racine. Alors $Char(B)$ est stable par le groupe de Weyl.*

Preuve. Soit α une racine simple. Par la proposition 3.2 , si μ est un poids tel que $(\mu, \alpha^\vee) = k \geqslant 0$, e_α^k et f_α^k sont des bijections réciproques entre les chemins de B d'extrémités μ et $s_\alpha(\mu)$ respectivement.

Ainsi $Char(B)$ est invariant par s_α. Comme ces réflexions engendrent W, $Char(B)$ est invariant par W. □

Voici enfin la proposition importante de ce paragraphe : elle permettra de faire le lien, à l'aide de la formule de Weyl, entre caractères des représentations irréductibles de $\mathfrak{g}$, et caractères des familles de chemins.

Proposition 4.14. *Soit $B \subset \Pi$ une famille finie de chemins stable par les opérateurs de racine. $Char(B)$ est alors donné par la formule suivante :*

$$\sum_{w \in W} \varepsilon(w) e^{w(\rho)}\, Char(B) \;=\; \sum_{\substack{\eta \in B \\ \rho * \eta \in \Pi_o^+}} \sum_{w \in W} \varepsilon(w) e^{w(\rho + \eta(1))},$$

où ε dénote la signature.

Preuve. Par le lemme précédent, les deux membres sont invariants par W. Comme W agit transitivement sur les chambres de Weyl (Remarque 1.30), il suffit de vérifier que les coefficients des poids dominants coïncident, c'est-à-dire que

$$\sum_{(w,\eta)\in\Omega} \varepsilon(w)e^{w(\rho)+\eta(1)} = \sum_{\substack{\eta\in B \\ \rho*\eta\in\Pi_o^+}} e^{\rho+\eta(1)},$$

où $\Omega = \{(w,\eta)\,|\,w(\rho)+\eta(1)\in \mathfrak{W}\}$. Notons Ω' le sous-ensemble de Ω constitué des (w,η) tels que le chemin $w(\rho)*\eta$ rencontre une face de la chambre de Weyl. Comme il s'agit exactement de ceux pour lesquels on n'a pas $w = Id$ et $\rho*\eta\in\Pi_o^+$, on doit en fait montrer :

$$\sum_{(w,\eta)\in\Omega'} \varepsilon(w)e^{w(\rho)+\eta(1)} = 0.$$

Soient $(\alpha_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ les racines simples, et F_i la face de la chambre de Weyl orthogonale à α_i. Posons Ω'_i l'ensemble des éléments (w,η) de Ω' telle que la dernière face de la chambre de Weyl rencontrée par $w(\rho)*\eta$ soit F_i. S'il y en a plusieurs, on requiert que ce soit celle avec un indice i minimal. On obtient ainsi une partition $\Omega' = \bigcup_i \Omega'_i$ de Ω', et il suffira de montrer que pour tout i,

$$\sum_{(w,\eta)\in\Omega'_i} \varepsilon(w)e^{w(\rho)+\eta(1)} = 0.$$

Pour cela, on construit une involution φ_i de Ω'_i telle que si $\varphi_i(w,\eta) = (w',\eta')$, on ait $w(\rho)*\eta(1) = w(\rho')*\eta'(1)$ et $\varepsilon(w) = -\varepsilon(w')$. Les termes de la somme ci-dessus s'annuleront alors deux par deux.

Soit donc $(w,\eta)\in\Omega'_i$, et notons $k = (w(\rho),\alpha_i^\vee)$. Si $k>0$, comme $w(\rho)*\eta$ rencontre F_i, le minimum de $(\eta(t),\alpha_i^\vee)$ est plus petit que $-k$, et $e^k_{\alpha_i}(\eta)$ est bien défini par la proposition 3.2(iii). De même, si $k<0$, $f^{-k}_{\alpha_i}(\pi)$ est bien défini. On pose alors :

$$\varphi_i(w,\eta) = \begin{cases} (s_{\alpha_i}w, e^k_{\alpha_i}(\eta)) & \text{si } k\geqslant 0 \\ (s_{\alpha_i}w, f^{-k}_{\alpha_i}(\eta)) & \text{si } k<0 \end{cases}$$

Notons $\varphi_i(w,\eta) = (w',\eta')$. C'est un élément de Ω'_i : en effet, si on note t_0 le plus grand t tel que $w(\rho)*\eta(t)$ soit sur le bord de $\mathfrak{W}$, $w'(\rho)+\eta'(t) = w(\rho)+\eta(t)$ pour $t\geqslant t_0$.

Finalement, φ_i est bien une involution de Ω'_i car les opérateurs de racine sont inverses l'un de l'autre.

□

On en déduit comme corollaire le théorème 3.9, que l'on réénonce ci-dessous :

Corollaire 4.15. *Soit $\eta\in\Pi^+$. Alors $B(\eta)$ est fini, et $Char(B(\eta)) = Char(\Gamma_{\eta(1)})$.*

Preuve. $B(\pi)$ est finie par 4.11(iv) . En comparant alors la formule obtenue grâce à la proposition ci-dessus à la formule de Weyl 2.16, on obtient l'égalité :

$$Char(B(\pi)) = \sum_{\substack{\eta\in B(\pi) \\ \rho*\eta\in\Pi_o^+}} Char(\Gamma_{\eta(1)}).$$

On peut alors conclure à l'aide de 4.11(ii) :

$$Char(B(\pi)) = Char(\Gamma_{\pi(1)}).$$

$\square$

On a achevé la démonstration du théorème 3.9. Il nous reste à prouver 3.10, et c'est essentiellement la proposition qui suit qui va nous le permettre :

Proposition 4.16. *Soient* $\pi_1, \pi_2 \in \Pi^+$. *Alors*

$$B(\pi_1) * B(\pi_2) = \bigcup B(\pi_1 * \eta),$$

où la réunion, disjointe, porte sur les $\eta \in B(\pi_2)$ *tels que* $\pi_1 * \eta \in \Pi^+$.

Preuve. $\bigcup B(\pi_1 * \eta) \subset B(\pi_1) * B(\pi_2)$ découle du corollaire 3.6, car le corollaire 4.11 montre que $B(\pi_1)$ et $B(\pi_2)$ sont entières.

Pour l'inclusion inverse, on choisit $\eta_1 * \eta_2 \in B(\pi_1) * B(\pi_2)$, et on lui applique autant que possible les opérateurs e_α. Toujours par 3.6, on obtient un chemin entier de la forme $\eta_1' * \eta_2' \in B(\pi_1) * B(\pi_2)$. Comme on ne peut lui appliquer e_α, le minimum du produit scalaire avec $\alpha^\vee$ est nul, et $\eta_1' * \eta_2' \in \Pi^+$ De plus, on a alors $\rho * \eta_1' \in \Pi_\circ^+$, et le corollaire 4.11 montre $\eta_1' = \pi_1$. Ainsi, $\eta_1 * \eta_2 \in B(\pi_1 * \eta_2')$, et on a le résultat.

Il reste à vérifier que la réunion est disjointe. Si ce n'était pas le cas, on aurait η_1 et η_2 avec $B(\pi_1 * \eta_1)$ et $B(\pi_1 * \eta_2)$ d'intersection non vide. Comme ils sont tous deux engendrés par un chemin et les opérateurs de racine, ils seraient égaux. Mais $\rho * \pi_1 * \eta_1$ et $\rho * \pi_1 * \eta_2$ appartiennent tous deux à $\Pi_\circ^+$, et 4.11 montre donc $\pi_1 * \eta_1 = \pi_1 * \eta_2$, et $\eta_1 = \eta_2$. $\square$

On en déduit comme corollaire le théorème 3.10, réénoncé ci-dessous :

Corollaire 4.17. *Soient* λ_1 *et* λ_2 *deux poids dominants, et* $\pi_1, \pi_2 \in \Pi^+$ *tels que* $\pi_1(1) = \lambda_1$ *et* $\pi_2(1) = \lambda_2$. *Alors*

$$\Gamma_{\lambda_1} \otimes \Gamma_{\lambda_2} \simeq \bigoplus \Gamma_{\lambda_1 + \eta(1)},$$

où la sommation porte sur les $\eta \in B(\pi_2)$ *tels que* $\pi_1 * \eta \in \Pi^+$.

Preuve. En prenant les caractères des familles de chemins de la proposition précédente, on obtient :

$$\begin{aligned} Char(B(\pi_1)).Char(B(\pi_2)) &= Char(B(\pi_1) * B(\pi_2)) \\ &= \sum Char(B(\pi_1 * \eta)), \end{aligned}$$

soit, par le théorème 3.9, et comme la somme et le produit des caractères correspondent respectivement à la somme directe et au produit tensoriel des représentations,

$$Char(\Gamma_{\lambda_1} \otimes \Gamma_{\lambda_2}) = Char(\bigoplus \Gamma_{\lambda_1 + \eta(1)}).$$

Finalement, comme une représentation est uniquement déterminée par son caractère, on obtient bien :

$$\Gamma_{\lambda_1} \otimes \Gamma_{\lambda_2} \simeq \bigoplus \Gamma_{\lambda_1+\eta(1)}.$$

$\square$

Références

[1] N. Bourbaki. *Goupes et algèbres de Lie, Chapitres 7 et 8.* Masson, 1990.

[2] V. Deodhar. A splitting criterion for Bruhat orderings on Coxeter groups. *Communications of Algebra 15*, pages 1889–1894, 1987.

[3] W. Fulton et J. Harris. *Representation Theory.* Springer-Verlag, 1991.

[4] J. Humphreys. *Reflection Groups and Coxeter Groups.* Cambridge Univ. Press, 1990.

[5] P. Littelmann. Combinatorics and Representation Bases. *1997 European Summer School in Group Theory*, 1997.

[6] J.-P. Serre. *Algèbres de Lie semi-simples complexes.* Benjamin Publ., 1966.