Plusieurs généralisations du modèle des polymères en milieu aléatoire

Pierre Bertin, sous la direction de Nobuo Yoshida

December 1, 2009

Contents

1 Les polymères en milieu aléatoire

1.1 Le modèle

Le modèle des polymères dirigés en milieu aléatoire a été introduit par Huse et Henley [8] pour étudier les conséquences de la présence d'impuretés dans le modèle d'Ising en 2 dimensions. Les premiers travaux des polymères dirigés en milieu aléatoire furent par Imbrie et Spencer [9]. De nombreux autres auteurs ont suivis, un résumé des résultats obtenus peut être trouvé dans [4]. Les polymères dirigés en milieu aléatoire permettent de modéliser, en particulier, les chaînes polymériques dans une solution inhomogéne ou avec des impuretés.

Considérons $((S_t)_{t\in\mathbb{N}}, Q)$ la marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}^d$ démarrant de 0. Les impuretés sont modélisées par une famille iid de variables aléatoires a valeurs dans $\mathbb{R}$: $\eta_{t,y}, \quad (t,y) \in \mathbb{N}\times\mathbb{Z}^d$ dont nous noterons la loi P. Ici nous considérerons toujours des variables $\eta_{t,y}$ dont les moments exponentiels sont finis : $P[\exp(\beta\eta_{t,y})] < \infty$ pour tous $\beta \in (0,\infty)$.

Pour $t > 0$ et une trajectoire S de la marche aléatoire, nous définissons l'Hamiltonien du système au temps t :

$$H_t(S) = \sum_{i=1}^{t} \eta_{i,S_i}.$$

À présent nous pouvons définir la mesure polymérique au temps t de paramètre β

$$\mu_t(S) := \frac{1}{Z_t} \exp(\beta H_t(S)) Q(S)$$

où Z_t est appelée la fonction de partition et est définie par

$$Z_t = Q[\exp(\beta H_t(S))].$$

Physiquement parlant, le paramètre β représente la température inverse. Intuitivement, lorsque la température est très élevée, l'agitation thermique éclipse les interactions avec les impuretés du milieu et le polymère se conduit comme la marche aléatoire simple, et lorsque la température est proche de zéro, la mesure polymérique se concentrera sur les trajectoires où l'Hamiltonien est maximal.

1.2 La fonction de partition normalisée

L'étude de la fonction de partition est une clef pour la compréhension du comportement des polymères en milieu aléatoire. Bolthausen, dans [1] a remarqué la propriété suivante :

Proposition 1 *La fonction de partition normalisée*

$$W_t = \frac{Z_t}{P[Z_t]}$$

est une martigale sous la filtration $\mathcal{F}_t = \sigma(\eta_{s,y}, s \leq t)$*. De plus, la limite*

$$W_\infty = \lim_{t \to \infty} W_t$$

existe et elle vérifie la loi 0-1 suivante :

$$P\{W_\infty = 0\} \in \{0, 1\}$$

Tentons de comprendre ce qui se passe dans ces deux cas avec des exemples. Lorsque $\beta = 0$, nous avons déja vu que le polymère se comporte comme la marche aléatoire simple, donc nous obtenons facilement que $W_t = 1$ pour tous t. Nous nous trouvons donc dans le cas $W_\infty > 0$ p.s. Une étude plus complexe montre qu'à $\beta = \infty$, on se trouve dans le cas $W_\infty = 0$ p.s.

Ces considérations amènent à penser que $W_\infty > 0$ correspond au cas où le polymère se comporte de la même facon que la marche aléatoire, nous appellerons ce cas désordre faible puisque les impuretés ne changent pas le comportement du polymère, alors que $W_\infty = 0$ indique que le polymère est drastiquement différent de la marche, et nous appellerons ce cas désordre fort. Des considérations de monotonie en fonction de β amènent au résultat suivant :

Théorème 1 *Il existe une valeur critique $\beta_c = \beta_c(d) \in [0, \infty]$ (qui dépend de la loi de l'environnement) telle que*

- *le désordre fort s'applique si $\beta > \beta_c$*
- *le désordre faible s'applique si $\beta < \beta_c$*

1.3 Résultats connus

Carmona and Hu [2] et Comets, Shiga et Yoshida [5] ont prouvé le théorème suivant sur les valeurs de β_c :

Théorème 2 *(Carmon, Hu 2002 ; Comets, Yodhida, Shiga 2003)*
Si $\eta_{t,y}$ n'est pas constant p.s. (ie si le modèle n'est pas trivial),

$$\begin{aligned} \beta_c(d) &= 0 \quad \textit{pour} \quad d = 1, 2 \\ \beta_c(d) &> 0 \quad \textit{pour} \quad d \geq 3. \end{aligned}$$

En dimensions 1 et 2, le polymère est donc dans le cas du désordre fort à toutes températures. Ces deux résultats sont obtenus par la technique du moment fractionnaire, c'est-à-dire que la preuve consiste à montrer que $P[W_t^\theta]$ tend vers 0 pour un θ appartenant à $(0, 1)$.

Il existe aussi de nombreux résultats concernant la loi des polymères. De nombreux articles ([1] entre autres) tendent à montrer que $W_\infty > 0$ p.s. implique la diffusivité du polymère, et un consensus est de dire que cette implication est une équivalence. Et des résultats de Carmona et Hu et de Comets, Shiga et Yoshida ([2], [5]) permettent de mieux comprendre le désordre fort :

Théorème 3 *(Carmona, Hu 2006)*
Si $S^{(1)}$ et $S^{(2)}$ sont deux chaînes de polymères indépendantes (dans le même environnement), alors

$$P\left\{W_\infty = 0\right\} = P\left\{\sum_{t\geq 1} \mu_{t-1}^{\otimes 2}(S_t^{(1)} = S_t^{(2)}) = \infty\right\}$$

De plus, si $W_\infty = 0$ p.s., il existe une constante c (qui dépend de β et de la loi de l'environnement) telle que

$$\frac{1}{c}\log W_t \leq \sum_{s=1}^{t} \mu_{s-1}^{\otimes 2}(S_s^{(1)} = S_s^{(2)}) \leq c \log W_t$$

Ce théorème montre que le désordre fort implique que deux polymères indépendants ont de grandes chances de passer par les mêmes états. Ceci mène a un autre jeu d'appellation : lorsque $W_\infty = 0$ on dit que le polymère est localisé, et lorsque $W_\infty > 0$ que le polymère est délocalisé.

Carmona et Hu [3] ont même prouve un résultat plus fort :

Théorème 4 *(Carmona, Hu 2006)*
Avec les mêmes notations que précédemment, on définit

$$N_t(S^{(1)}, S^{(2)}) = \sum_{s=1}^{t} 1_{S_s^{(1)}=S_s^{(2)}}$$

le nombre de points de raccords entre $S^{(1)}$ *et* $S^{(2)}$ *avant le temps* t*. Si* $W_\infty = 0$ *p.s., il existe une constante* $c > 0$ *telle que*

$$\mu_t^{\otimes 2}[N_t(S^{(1)} = S^{(2)})] \geq c \text{ infiniment souvent, p.s.}$$

Pour un nombre infini de t, les points de raccord entre deux polymères de longueur t ont une fréquence supérieure a c.

La dernière formule du théorème 3 est très puissante lorsque W_t décroit exponentiellement, ce qui mène a l'étude de la quantité suivante :

Proposition 2 *La quantité*

$$p(\beta) := \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log W_t$$

existe presque surement, est négative ou nulle et non-aléatoire. Elle est appelée l'énergie libre du modèle, et on a

$$p(\beta) = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} P[\log W_t]$$

De plus, $p(\beta)$ *est décroissant en* β*.*

En remarque, l'inégalité $p(\beta) \leq 0$ provient de Jensen : $P[\log W_t] \leq \log P[W_t]$. Lorsque $p(\beta) < 0$, cela veut dire que W_t tend *exponentiellement* vers 0, il est donc naturel de parler de très fort désordre. On peut de plus définir un deuxième point critique du système :

Proposition 3 *Il existe* $\overline{\beta}_c(d) \geq \beta_c(d)$ *tel que*

$$p(\beta) < 0 \Leftrightarrow \beta > \overline{\beta}_c(d)$$

La détermination de $\overline{\beta}_c(d)$ en basses dimensions n'a été faite que très récemment.

Théorème 5 *(Yoshida 2006, Lacoin 2009)*
$\overline{\beta}_c(d) = 0$ *pour* $d = 1, 2$

2 Un modèle continu : Polymères browniens en milieu aléatoire

2.1 Polymères browniens

Ce modèle est une façon de passer du discret au continu, à la fois pour le temps et l'espace. Il est défini avec un mouvement brownien et une mesure de Poisson

- Le mouvement Brownien : soit $(\{\omega_t\}_{t\geq 0}, Q)$ un mouvement brownien standard d-dimensionel. Plus précisément, soit $(\Omega, \mathcal{F})$ l'espace des trajectoires $C(\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R})$ muni de la tribu cylindrique, et Q la mesure de Wiener sur $(\Omega, \mathcal{F})$ qui vérifie $Q\{\omega_0 = 0\} = 1$. Ceci va remplacer la marche aléatoire S_t.

- La mesure de Poisson : Soit η une mesure de Poisson sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$ avec la densité uniformément égale a 1, définie sur l'espace $(\mathcal{M}, \mathcal{G}, P)$. Pour $t > 0$, il est naturel d'introduire la filtration

$$\mathcal{G}_t = \sigma\{\eta(A \cap ([0,t] \times \mathbb{R}^d); A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d)\}.$$

  Les points de Poisson sont les impuretés du milieu.

- La mesure polymérique : Soit V_t un tube autour du graphe $\{(s, \omega_s)\}_{o\leq s\leq t}$ de la trajectoire du mouvement brownien :

$$V_t = V_t(\omega) = \{(s,x); s \in (0,t], x \in U(\omega_s)\}$$

  où $U(\omega_s)$ est la boule de $\mathbb{R}^d$ de centre ω_s et de volume 1. Pour $t > 0$, on définit la mesure μ_t^x sur l'espace des trajectoires $(\Omega, \mathcal{F})$ par

$$\mu_t(d\omega) = \frac{1}{Z_t} \exp(\beta\eta(V_t))Q(d\omega),$$

  avec $\beta \geq 0$ un paramètre et

$$Z_t = Q\left[\exp(\beta\eta(V_t))\right].$$

Comme dans le modèle discret, on s'intéresse au comportement de

$$W_t = \frac{Z_t}{P[Z_t]} = Z_t e^{-\lambda t}$$

où $\lambda = \lambda(\beta) = e^\beta - 1$. Il est très facile de voir que, comme dans le cas discret, W_t est une martingale, que W_∞ existe et vérifie la même loi 0-1.

2.2 Résultats

La plupart des théorèmes du cas discret ont été prouvé pour les polymères browniens par Comets, Vargas et Yoshida ([7], [6]), ou se déduisent rapidement des preuves discrètes. En voici un résumé

Théorème 6 *(Comets, Yoshida 2005)*
Il existe $0 \leq \beta_c(d) \leq \overline{\beta}_c(d)$ *tels que*

- $W_\infty > 0$ *si* $\beta < \beta_c$
- $W_\infty = 0$ *si* $\beta > \beta_c$

- $p(\beta) < 0$ *si* $\beta > \overline{\beta}_c$

De plus, $\beta_c(d) = \overline{\beta}_c(d) = 0$ *pour* $d = 1, 2$ *et* $\beta_c(d) > 0$ *pour* $d \geq 3$.

Cependant, tout ne se passe pas sans problème, et par exemple la preuve du théorème 4 s'effondre lors du passage au continu.

La loi de l'environnement aléatoire est fixée ici, on peut donc avoir des résultats plus précis sur le comportement asymptotique de $p(\beta)$:

Théorème 7 *(Comets, Yoshida 2005)*

$$p(\beta) = -e^{\beta} + O(e^{\beta})$$

3 Un modèle plus général : Linear Stochastic Evolutions

Ce modèle a été introduit par Yoshida [12] pour généraliser plusieurs modèles déja existants. Commencons par un exemple.

3.1 La percolation par sommets dirigée

Soit $\xi_{t,y}, (t,y) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{Z}^d$ une famille iid de variables de Bernoully avec $P[\xi_{t,y} = 1] = p \in (0,1)$. Le sommet (t,y) avec $\xi_{t,y} = 1$ et $\xi_{t,y} = 0$ est dit respectivement *ouvert* et *fermé*. Un chemin ouvert de $(0,0)$ à (t,y) est une suite $\{(s,x_s)\}_{s=0}^{t}$ dans $\mathbb{N} \times \mathbb{Z}^d$ qui vérifie $x_0 = 0, x_t = y, |x_s - x_{s-1}| = 1$ et $\xi_{s,x_s} = 1$ pour $s = 1, \ldots, t$. Pour la percolation dirigée, il est habituel d'étudier la présence ou l'absence de chemins ouverts jusquà certains sites. Mais d'un autre côté, le modèle présente un autre phénomène de transition de phase si on regarde non seulement la présence de tels chemins, mais aussi leur nombre.

Soit $Z_{t,y}$ le nombre de chemins ouvert de $(0,0)$ à (t,y) et soit $|Z_t| = \sum_y Z_{t,y}$ le nombre total de chemins ouverts partant de $(0,0)$ et de longueur t. Si on regarde chaque chemin ouvert comme la trajectoire d'une particule, alors $Z_{t,y}$ est le nombre de particules qui occupent le sommet y au temps t. Une fois de plus on s'intéresse à $W_t = (2dp)^{-t}|Z_t|$, qui est une martingale.

On peut remarquer que ce modèle peut être interprété comme un cas limite des polymères en milieu aléatoire, avec $\eta_{t,y}$ qui vaut 0 avec probabilité p et $-\infty$ avec probabilité $1-p$.

3.2 The Linear Stochastic evolutions

Introduisons maintenant le modèle proprement dit. Soit $A_t = (A_{t,x,y})_{x,y \in \mathbb{Z}}, t \in \mathbb{N}^*$ une suite de matrices aléatoires de loi P, et dont les coefficients sont presque sûrement positifs. Voici une suite d'hypothèses sur A_t :

$$A_1, A_2, \ldots \text{ sont iid,} \tag{1}$$

$$\text{Les colonnes } A_{1,\cdot,y}, y \in \mathbb{Z}^d \text{ sont indépendantes,} \tag{2}$$

$$P[A_{1,x,y}^2] < \infty \quad \text{pour tous } x,y \in \mathbb{Z}^d, \tag{3}$$

$$A_{t,x,y} = 0 \text{ si } |x-y| > r_A \text{ pour un } r_A \text{ non-aléatoire}, \tag{4}$$

$$A_{1,x,y} \text{ n'est pas constant ps pour au moins un } x,y \in \mathbb{Z}^d \tag{5}$$

$$(A_{1,x+z,y+z})_{x,y\in\mathbb{Z}^d} \stackrel{loi}{=} A_1 \text{ for all } z \in \mathbb{Z}^d \tag{6}$$

Soit $(Z_t)_{t\in\mathbb{N}}$ la chaîne de Markov à valeurs dans $[0,\infty)^{\mathbb{Z}^d}$ définie par

$$\sum_{x\in\mathbb{Z}^d} Z_{t-1,x} A_{t,x,y} = Z_{t,y}, \quad t \in \mathbb{N}^* \tag{7}$$

avec $Z_{0,x} = 1_{x=0}$.

Si on regarde Z_t comme un vecteur ligne, (7) peut être interprétée comme

$$Z_t = Z_0 A_1 A_2 \dots A_t \quad t = 1,2,\dots$$

Définissons :

$$a_y = P[A_{t,0,y}] \qquad |a| = \sum_{y\in\mathbb{Z}^d} a_y \tag{8}$$

Les polymères dirigés est un cas particulier de ce modèle, avec $A_{t,x,y} = (2d)^{-1} 1_{\{|x-y|=1\}} e^{\beta\eta_{t,y}}$. Et la percolation par sommets dirigée en est un aussi avec $A_{t,x,y} = 1_{\{|x-y|=1\}} \xi_{t,y}$.

3.3 Autres exemples

Percolation par arêtes dirigée : Soit $\xi_{t,x,y}$, $(t,x,y) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}^d$ une famille iid de variables de Bernoully de paramètre $P(\xi_{t,x,y} = 1) = p$, $p \in (0,1)$. Le processus $(Z_t)_{t\in\mathbb{N}}$ défini par (7) vec

$$A_{t,x,y} = 1_{|x-y|=1} \xi_{t,x,y}$$

est appelé la percolation par arête dirigée. Pour comprendre la définition, on appelle un couple de points $((t-1,x),(t,y))$ une arête si $|x-y| = 1$, $(t,x,y) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}^d$. Cette arête est dite ouverte si $\xi_{t,x,y} = 1$.Un chemin dirigé ouvert de $(0,0)$ à (t,y) est une suite $\{s,x_s\}_{s=0}^t$ telle que $x_0 = 0$, $x_t = y$ et que les couples $((s-1,x_{s-1}),(s,x_s))$ sont tous des arêtes ouvertes. Alors, le nombre de chemins orientés de $(0,0)$ à (t,y) est donné par $Z_{t,y}$.

Binary contact path process : Soit $\eta_{t,y}$, $\zeta_{t,y}$ et $e_{t,y}$ ($(t,y) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{Z}^d$) trois familles de variables aléatoires iid telles que $P[\eta_{t,y} = 1] = p \in (0,1]$, $P[\zeta_{t,y} = 1] = q \in [0,1]$ et $P[e_{t,y} = e] = \frac{1}{2d}$ pour toute $e \in \mathbb{Z}^d$ avec $|e| = 1$, et on suppose que ces trois familles sont indépendantes les unes des autres. On définit la chaîne de Markov Z_t à valeurs dans $\mathbb{N}^{\mathbb{Z}^d}$ par

$$Z_{t+1,y} = \eta_{t+1,y} Z_{t,y-e_{t+1,y}} + \zeta_{t+1,y} Z_{t,y}$$

On interprète ce processus comme le développement d'une infection, avec $Z_{t,y}$ individus infectés au temps t et au site y. Le terme $\zeta_{t+1,y} Z_{t,y}$ signifie que ces individus restent infectés avec probabilité q et guérissent avec probabilité $1-q$. Et le terme $\eta_{t+1,y} Z_{t,y-e_{t+1,y}}$ signifie qu'avec probabilité p, un site voisin $y - e_{t+1,y}$ est tiré au hasard (par exemple, le vent souffle dans cette direction), et $Z_{t,y-e_{t+1,y}}$ nouveaux individus du site y sont infectés au temps $t+1$. Cette chaîne de Markov est obtenue par (7) avec

$$A_{t,x,y} = \eta_{t,y} 1_{e_{t,y}=y-x} + \zeta_{t,y} 1_{x=y}.$$

3.4 Résultats

Une fois encore, les résultats s'obtiennent de facon comparable au cas des polymères. La fonction de répartition normalisée

$$W_t := |Z_t| / P[|Z_t|]$$

est une martingale et sa limite W_∞ existe. Attention, cette fois W_t peut s'annuler en temps fini (puisqu'on a autorisé les 0 dans les coefficients de A_t). Le système se trouve dans un de ces trois cas :

- $P[W_\infty > 0] > 0$
- $P[W_\infty > 0] = 0$
- il existe $c > 0$ tel que $W_t = O(e^{-ct})$

Théorème 8 *(Yoshida 2008)*
En dimencion 1 ou 2, le troisième cas s'applique.

L'une des astuces de ces démonstrations est de définir une marche aléatoire pour remplacer la marche aléatoire simple S_t des polymères : on définit donc S'_t la marche dont le noyau de transition est :

$$Q[S_{t+1} = x + y | S_t = x] = \frac{a_y}{|a|}.$$

Heuristiquement, cette marche est prévue pour suivre le comportement moyen de A_t.

References

[1] E. Bolthausen : A note on diffusion of directed polymer in a random environment, J. Theoret. Probab. **9** (1996) 171-189

[2] P. Carmona, Y. Hu : On the partition function of a directed polymer in a random Gaussian environment, Probab. Theor. Relat. Fields **124** 3 (2002) 432-457

[3] P. Carmona, Y. Hu : Strong disorder implies strong localization for directed polymers in a random environment,ALEA **2** (2006) 217-229

[4] F. Comets, T. Shiga, N. Yoshida : Probabilistic analysis of directed polymers in random environment : a review, Adv. Stud. Pure Math. **39** (2004) 115-142

[5] F. Shiga, N. Yoshida : Directed polymers in a random environment : strong disorder and path localization, Bernouilli **9** 4 (2003) 705-723

[6] F. Comets, V. Vargas : Majorizing multiplicative cascades for directed polymers in random media, ALEA Lat. Am. J Probab. Math. Stat. **2** (2006) 267-277.

[7] F. Comets, N. Yoshida : Brownian directed polymers in random environment, Comm. Math. Phys. **254** (2005), 257-287

[8] D.A. Huse, C.L. Henley : Pinning and roughening of domain wall in Ising systems due to random impurities, Phys. Rev. Lett. **54** (1985) 2708-2711

[9] J.Z. Imbrie, T.Spencer : Diffusion of directed polymer in a random environment, J. Stat. Phys. **52** 3/4 (1988) 608-626

[10] H. Lacoin : New bounds for the free energy of directed polymers in dimension 1+1 and 1+2, arXiv:09010699v2

[11] N. Yoshida : Phase transitions for the growth rate of Linear Stochastic Evolutions, preprint 2008, J.Stat.Phys 133 No6 1033-1058

[12] N. Yoshida : Localization for Linear Stochastic Evolutions, preprint 2008