

# Introduction aux cartes aléatoires

Jérémie BETTINELLI

réalisé sous la direction de Grégory MIERMONT\*

Octobre 2008

## Résumé

Au cours de ce mémoire de magistère, nous présentons les cartes aléatoires, objets probabilistes relativement récents. On expose brièvement les méthodes combinatoires permettant de les compter, avant de s'intéresser aux approches bijectives entre les cartes et les arbres bien étiquetés afin de transporter des théorèmes de convergence sur les arbres vers les cartes, et ainsi considérer la limite d'échelle des cartes aléatoires.

## Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>2</b>
<b>1 Définitions</b>	<b>2</b>
1.1 Description classique . . . . .	2
1.2 Formule d'Euler . . . . .	3
1.3 Description combinatoire . . . . .	4
<b>2 Méthodes de comptage par décomposition récursive</b>	<b>5</b>
2.1 Illustration de la méthode sur un exemple simple . . . . .	5
2.2 Résultats . . . . .	6
<b>3 Limite d'échelle de cartes aléatoires</b>	<b>7</b>
3.1 Approches bijectives . . . . .	7
3.2 Construction de la bijection de SCHAEFFER . . . . .	8
3.2.1 Application directe . . . . .	8
3.2.2 Application réciproque . . . . .	10
3.3 Limite d'échelle . . . . .	10
3.3.1 Processus de contour et d'étiquettes des arbres . . . . .	10
3.3.2 Profil d'une grande quadrangulation . . . . .	11
3.3.3 Topologie de Gromov-Hausdorff . . . . .	12
3.3.4 Limite d'échelle . . . . .	12
<b>Généralisation</b>	<b>13</b>

---

\*CNRS et DMA, École Normale Supérieure, 45 rue d'Ulm, 75230 Paris Cedex 05

# Introduction

Bien que les cartes sont mathématiquement formalisées depuis la fin du XIX<sup>ème</sup> siècle, ce n'est que depuis quelques dizaines d'années qu'elles sont réellement au cœur de nombreux problèmes divers et variés. Dans les années 1960, William T. TUTTE, à l'aide de fonctions génératrices, s'intéresse à divers problèmes de comptage des cartes en relation avec son travail sur la conjecture (devenue théorème depuis) des quatre couleurs [18].

Certaines formules énumératives firent apparaître des objets combinatoires plus simples, en l'occurrence les arbres, ce qui conduit Robert CORI et Bernard VAUQUELIN, dans les années 1980, à développer des approches bijectives pour compter les cartes [7]. Par la suite, Gilles SCHAEFFER et plus tard Jérémie BOUTTIER, Philippe DI FRANCESCO et Emmanuel GUITTER améliorèrent ces approches, faisant apparaître une information géométrique (distance à un sommet distingué dans la carte) dans le codage, rendant ainsi ces méthodes plus exploitables dans les problèmes probabilistes [16, 3].

Dans le même temps, en raison de leur étroite relation avec les diagrammes de Feynman, les cartes attirent l'attention des physiciens. Les premiers, dans les années 1970, furent Gerardus 'T HOOFT [17] puis Édouard BRÉZIN, Claude ITZYKSON, Giorgio PARISI et Jean-Bernard ZUBER [4], mettant en relation les problèmes d'énumération de cartes en genre quelconque avec les intégrales de matrices.

Par ailleurs, de nombreux physiciens tels que Jan AMBJØRN, Bergfinnur J. DURHUUS et Thor-dur JONSSON voient dans les cartes aléatoires un moyen de formaliser le concept d'intégration par rapport à une mesure sur l'ensemble des surfaces qui apparaît en théorie de la gravité quantique 2-dimensionnelle [1].

## 1 Définitions

### 1.1 Description classique

La notion de cartes est assez intuitive, commençons par en donner une définition formelle<sup>1</sup> :

**Définition 1** Une *carte* est un graphe connexe fini non vide plongé (sans croisement d'arêtes), dans une surface compacte, sans bord, orientée et connexe, de façon que chaque composante connexe du complémentaire du support de la carte<sup>2</sup> soit homéomorphe au disque unité ouvert de  $\mathbb{R}^2$ .

**Définition 2** Le *genre* de la carte est le genre de la surface dans laquelle elle est plongée. Une carte en genre 0, c'est-à-dire plongée dans la sphère, sera simplement appelée *carte planaire*.

**Définition 3** On appelle *face* de cette carte les composantes connexes du complémentaire de son support. Le *degré* d'une face est le nombre d'arêtes qui lui sont incidentes.

**Définition 4** Une carte  $m$  est dite *enracinée* si une arête orientée  $e$  est distinguée. L'arête distinguée s'appelle la *racine* et son origine est appelée *sommet racine*.

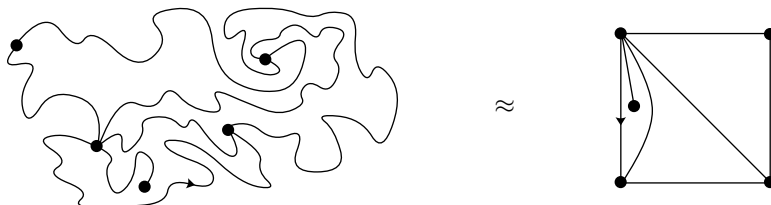
Lorsqu'il n'y aura pas d'ambiguïté, on notera encore  $m$  une carte enracinée au lieu de  $(m, e)$  et on appellera souvent simplement "carte" une carte enracinée.

Ainsi définies, les cartes forment une famille beaucoup trop grande, et il est naturel de les considérer "à déformation près" :

---

1. Voir par exemple le cours donné par Grégory MIERMONT [15] pour des définitions plus précises.  
2. Le **support** de la carte est la réunion des arêtes du graphe plongé.

**Définition 5** On dit que les cartes  $\mathbf{m}$  et  $\mathbf{m}'$  sur les surfaces  $S$  et  $S'$  sont isomorphes s'il existe un homéomorphisme de  $S$  sur  $S'$ , conservant l'orientation et faisant correspondre les arêtes de  $\mathbf{m}$  et les arêtes de  $\mathbf{m}'$ . Lorsque les cartes sont enracinées, on demande de plus qu'il transforme la racine de  $\mathbf{m}$  en la racine de  $\mathbf{m}'$  (voir figure 1).



**FIGURE 1** – Deux représentations de la même carte.

On regardera ainsi les cartes à isomorphisme près. La raison pour laquelle on enracine les cartes est qu'elles ne possèdent ainsi aucun automorphisme (isomorphisme de la carte sur elle-même, c'est-à-dire symétrie) non trivial :

**Proposition 1** Un automorphisme de carte fixant une arête orientée, fixe toutes les arêtes.

Deux classes de cartes sont particulièrement intéressantes :

**Définition 6** On appelle **triangulation** (resp. **quadrangulation**) une carte dont toutes les faces ont exactement 3 (resp. 4) cotés. Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on notera  $\mathcal{T}_{g,n}$  (resp.  $\mathcal{Q}_{g,n}$ ) l'ensemble des triangulations (resp. quadrangulations) à  $n$  faces en genre  $g$ .

**Définition 7** Une carte est dite **bipartie** s'il est possible de colorier ses sommets de deux couleurs de sorte qu'aucune arête ne relie deux sommets de même couleur, ce qui équivaut à dire qu'il n'existe pas de cycle de longueur paire dans la carte.

**Remarque.** Il est facile de voir que les quadrangulations planaires sont biparties. En revanche, ce résultat n'est plus vrai en genre supérieur.

Une des raisons pour lesquelles les quadrangulations biparties sont particulièrement intéressantes est la bijection suivante, due à William TUTTE (voir figure 2).

**Proposition 2** Il existe une bijection entre les cartes en genre  $g$  à  $n$  arêtes et les quadrangulations biparties en le même genre  $g$  à  $n$  faces.

## 1.2 Formule d'Euler

Il est possible de relier les nombre d'arêtes, de sommets, de faces entre eux grâce à la proposition suivante :

**Proposition 3 (Formule d'Euler)** Soit  $\mathbf{m}$  une carte de genre  $g$ . Soit respectivement  $V(\mathbf{m})$ ,  $E(\mathbf{m})$  et  $F(\mathbf{m})$  les ensembles de sommets, arêtes et faces de la carte  $\mathbf{m}$ . On a alors

$$|V(\mathbf{m})| - |E(\mathbf{m})| + |F(\mathbf{m})| = 2 - 2g.$$

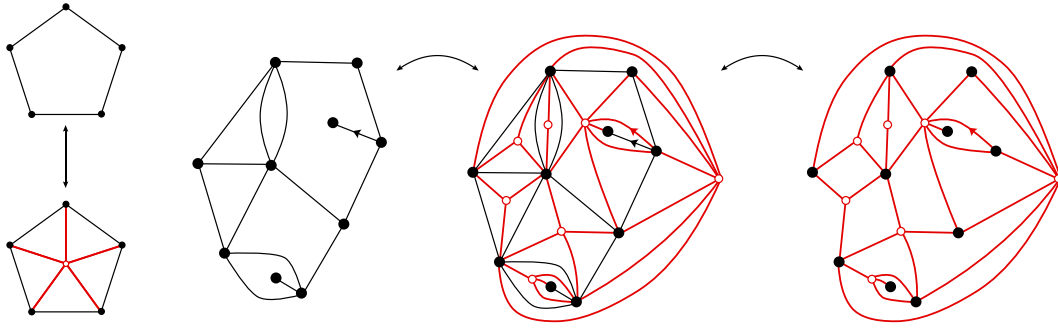


FIGURE 2 – Illustration de la bijection de William TUTTE.

**Remarque.** La quantité  $2 - 2g$  est appelée **caractéristique d’Euler-Poincaré** de la surface, et est souvent notée  $\chi(g)$ .

Il suffit donc d’une relation supplémentaire pour pouvoir déterminer toutes ces quantités. Par exemple, une quadrangulation possède deux fois plus d’arêtes que de faces étant donné que chaque face est bordée de quatre arêtes incidentes à exactement deux faces (éventuellement confondues). Ainsi, les éléments de  $\mathcal{Q}_{g,n}$  ont  $n$  faces,  $2n$  arêtes et  $n + 2 - 2g$  sommets.

### 1.3 Description combinatoire

Il existe une façon plus “algébrique” de voir les choses, très utile dans certains cas. Il s’agit de décrire totalement la carte par un triplet de permutations vérifiant certaines relations. Nous donnons ici un bref aperçu de ce point de vue (voir [15] pour une description plus détaillée).

Soit  $\mathbf{m}$  une carte et  $\vec{E}$  l’ensemble de ses arêtes orientées<sup>3</sup>. La permutation  $\alpha$  associée à une arête orientée  $e$  sa retournée  $\bar{e}$ . Les permutations  $\varphi$  et  $\sigma$  associent à une demi-arête la suivante respectivement dans le parcours des faces et dans le contour des sommets dans le sens positif (voir figure 3).

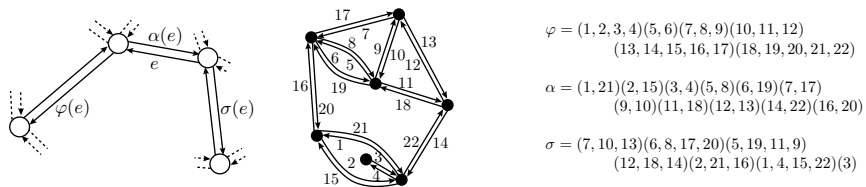


FIGURE 3 – Description d’une carte par un triplet de permutations et exemple.

Ainsi, les cycles de  $\alpha$  correspondent aux arêtes de  $\mathbf{m}$ , ceux de  $\varphi$  aux faces et ceux de  $\sigma$  aux sommets.

La permutation  $\alpha$  est une involution sans point fixe,  $\varphi\alpha\sigma = 1$  et  $\langle \varphi, \alpha, \sigma \rangle$  agit transitivement sur  $\vec{E}$  (ceci correspondant à la connexité de la carte). Réciproquement, à partir de trois telles permutations, on peut reconstruire la carte. Pour retrouver le genre de celle-ci, on applique simplement la formule d’Euler.

3. L’ensemble introduit plus haut des arêtes de  $\mathbf{m}$  est  $E(\mathbf{m}) = \{ \{e, \bar{e}\}, e \in \vec{E} \}$ .

**Définition 8** Soit  $X$  un ensemble fini. On appelle **graphe enrubanné** sur  $X$  un triplet de permutations  $(\varphi, \alpha, \sigma) \in \mathfrak{S}_X^3$  tel que  $\alpha$  soit une involution sans point fixe,  $\varphi\alpha\sigma = 1$  et  $\langle \varphi, \alpha, \sigma \rangle$  agisse transitivement sur  $X$ .

Deux graphes enrubannés  $(\varphi, \alpha, \sigma)$  et  $(\varphi', \alpha', \sigma')$  sur  $X$  et  $X'$  sont isomorphes s'il existe une bijection  $\pi : X \rightarrow X'$  vérifiant  $\pi^{-1}\alpha'\pi = \alpha$  et  $\pi^{-1}\varphi'\pi = \varphi$  (et donc  $\pi^{-1}\sigma'\pi = \sigma$ ).

**Remarque.** Le fait que  $\alpha$  soit une involution sans point fixe assure que  $X$  est de cardinal pair.

Ainsi, les classes d'isomorphisme de graphes enrubannés sont en bijection avec les classes d'isomorphisme de cartes.

## 2 Méthodes de comptage par décomposition récursive

### 2.1 Illustration de la méthode sur un exemple simple

On se place à présent en genre 0, c'est-à-dire sur la sphère de  $\mathbb{R}^3$ . L'un des premier problème auquel on est confronté est le comptage des cartes. Il peut être résolu (dans certains cas) en utilisant la méthode de décomposition récursive : il s'agit de décomposer les objets que l'on veut compter en plusieurs objets plus petit de la même famille. Pour cela, on introduit la série génératrice de la famille considérée.

Donnons tout de suite un exemple simple. Un **arbre** plan est une carte planaire à une seule face. Notons  $\mathcal{A}_n$  l'ensemble des arbres enracinés à  $n$  arêtes – et donc  $n + 1$  sommets d'après la formule d'Euler (proposition 3). Notons encore

$$\mathcal{A} := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{A}_n$$

l'ensemble de tous les arbres enracinés, et pour  $t \in \mathcal{A}$ ,  $|t|$  son nombre de sommets. Nous allons calculer  $|\mathcal{A}_n|$ .

La série génératrice des arbres est notée  $A$  : elle attribue un poids  $x$  à chaque sommet d'un arbre de  $\mathcal{A}$ , c'est-à-dire

$$A(x) := \sum_{t \in \mathcal{A}} x^{|t|} = \sum_{n \in \mathbb{N}} |\mathcal{A}_n| x^{n+1}.$$

Un arbre se décompose ainsi :

- ◊ soit il n'a qu'un sommet (de poids  $x$ ),
- ◊ soit il est composé d'un sommet racine (de poids  $x$ ) et de  $k$  sous-arbres  $t_1, t_2, \dots, t_k$  ( $k \geq 1$ ) descendant de cette racine, de poids respectifs  $x^{|t_1|}, x^{|t_2|}, \dots, x^{|t_k|}$ .

Cette décomposition donne des ensembles disjoints. On a donc

$$\begin{aligned} A(x) &= x + \left( x \sum_{t_1 \in \mathcal{A}} x^{|t_1|} \right) + \dots + \left( x \sum_{t_1, t_2, \dots, t_k \in \mathcal{A}} x^{|t_1|} x^{|t_2|} \dots x^{|t_k|} \right) + \dots \\ &= x \sum_{k \in \mathbb{N}} A(x)^k \\ &= \frac{x}{1 - A(x)}. \end{aligned}$$

On obtient alors

$$A(x) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2} = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} x^n,$$

l'autre racine de  $X^2 - X + x$  n'étant pas nulle en 0.

Finalement, on a le résultat suivant :

**Proposition 4** *Le nombre d'arbres enracinés à  $n$  arêtes et  $n+1$  sommets est*

$$|\mathcal{A}_n| = \text{Cat}_n := \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}.$$

*Ce nombre est appelé nombre de Catalan d'ordre  $n$ .*

## 2.2 Résultats

L'exemple précédent permet d'illustrer l'idée de la méthode mais ne reflète pas tous les problèmes que l'on rencontre lorsque l'on travaille avec des familles plus complexes. En pratique, il faut souvent étudier une famille plus générale pour obtenir ce que l'on souhaite. Par exemple, pour trouver le nombre de triangulations avec un nombre donné de sommets, il faut compter les triangulations à bord (cartes dont toutes les faces sont des triangles sauf éventuellement la face incidente à la racine), car il est aisé de les décomposer en deux plus petites triangulations à bord. Ensuite, les triangulations étant des triangulations à bord particulières, on obtient le résultat désiré.

Par ailleurs, les équations que l'on obtient sur les séries génératrices sont rarement aussi simples et nécessitent des méthodes plus évoluées pour être résolues. On renvoie le lecteur à [15] pour plus de détails. Le cas des triangulations  $y$  est en outre intégralement traité.

**Proposition 5** *Soit  $m, n \in \mathbb{N}$ . Notons  $\mathcal{T}_{m,n}^\partial$  l'ensemble des triangulations à bord possédant  $n$  sommets internes (c'est-à-dire hors du bord) et  $m+2$  sommets sur le bord. Alors*

$$|\mathcal{T}_{m,n}^\partial| = 2^{n+1} \frac{(2m+1)!(2m+3n)!}{m!2^n!(2m+2n+2)!}.$$

*De plus, on a les asymptotiques suivants :*

$$|\mathcal{T}_{m,n}^\partial|_{n \rightarrow \infty} \sim \bar{Z}_m \left( \frac{27}{2} \right)^n n^{-\frac{5}{2}} \quad \text{et} \quad \bar{Z}_m \underset{m \rightarrow \infty}{\sim} C 9^m m^{\frac{1}{2}},$$

où  $C > 0$  est une constante.

Ces formules permettent d'avoir des informations non triviales sur la structure des cartes aléatoires. Donnons là encore un exemple simple du genre d'information que l'on peut obtenir.

**Proposition 6** *Le nombre moyen de chaînes simples de longueur  $m+1$  sur une triangulation uniforme à  $n$  faces, et dont le premier pas orienté est la racine de la triangulation tend, lorsque  $n \rightarrow \infty$  vers*

$$\frac{\bar{Z}_{2m}}{\bar{Z}_0} \left( \frac{2}{27} \right)^m.$$

**Preuve.** L'idée consiste à découper la carte suivant la chaîne et à l'ouvrir en une nouvelle face. On obtient alors<sup>4</sup> une carte de  $\mathcal{T}_{2m, n/2-m}^\partial$ . Cette opération est réversible donc le nombre de triangulation à  $n$  face avec une telle chaîne est  $|\mathcal{T}_{2m, n/2-m}^\partial|$ . En ouvrant de la même façon, suivant la racine, une triangulation à  $n$  faces, on obtient un élément de  $\mathcal{T}_{0, n/2}^\partial$ . Ainsi le nombre recherché est

$$\frac{|\mathcal{T}_{2m, n/2-m}^\partial|}{|\mathcal{T}_{0, n/2}^\partial|} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\bar{Z}_{2m}}{\bar{Z}_0} \left(\frac{2}{27}\right)^m.$$

□

Ainsi, dans une grande triangulation uniforme, le nombre de chemins auto-évitants de longueur  $m$  est de l'ordre de  $\sqrt{m} 9^{2m} (2/27)^m = \sqrt{m} 6^m$ , ce qui montre que la "constante de connectivité moyenne" est 6. Ceci correspond au degré moyen d'un sommet :

$$\frac{\sum_{v \in \mathbf{m}} \deg v}{|V(\mathbf{m})|} = \frac{2|E(\mathbf{m})|}{|V(\mathbf{m})|} = \frac{3n}{n/2 + 2} \underset{n \rightarrow \infty}{\longrightarrow} 6.$$

Ce résultat est assez surprenant car on s'attend à une constante inférieure (lorsque l'on arrive à un nœud de degré  $k$ , on a au plus  $k - 1$  choix possibles pour continuer à être auto-évitant). Ainsi, en moyennant, on favorise les cartes avec des sommets de degré élevé.

Pour finir, donnons le nombre de cartes pour un nombre d'arêtes donné. On renvoie une fois de plus le lecteur à [15] pour une preuve.

**Théorème 7** *Le nombre de cartes planaires enracinées à  $n$  arêtes est*

$$\frac{2}{n+2} 3^n \text{Cat}_n.$$

## 3 Limite d'échelle de cartes aléatoires

### 3.1 Approches bijectives

Le dernier résultat de la section précédente (théorème 7) fait intervenir, dans une formule extrêmement simple, les nombres de Catalan, nombres qui comptent les arbres (proposition 4). Ceci laisse suggérer qu'on puisse utiliser les arbres pour coder les cartes et ainsi se ramener à des problèmes plus simples.

Cette manière de voir les choses permet, outre le fait de pouvoir compter des cartes, de conserver une information sur la structure géométrique de la carte (typiquement, distance à un point distingué) et ainsi s'avère très utile en ce qui concerne les questions probabilistes.

La première étape consiste à se ramener à des quadrangulation à l'aide de la bijection de TUTTE (c.f. figure 2). Notons  $\mathcal{M}_n$  l'ensemble des cartes planaires enracinées à  $n$  arêtes et  $\mathcal{Q}_n = \mathcal{Q}_{0, n}$  l'ensemble des quadrangulations planaires enracinées à  $n$  faces. On a

$$\mathcal{M}_n \xleftrightarrow{\text{TUTTE}} \mathcal{Q}_n \quad \text{et} \quad |\mathcal{M}_n| = |\mathcal{Q}_n|. \quad (1)$$

---

4. Si  $\mathbf{m} \in \mathcal{T}_{M, N}^\partial$ , la formule d'Euler et la relation  $3(|F(\mathbf{m})| - 1) = 2(|E(\mathbf{m})| - M - 2) + M + 2$  donnent  $|V(\mathbf{m})| = N + M + 2$ ,  $|F(\mathbf{m})| = 2N + M + 1$  et  $|E(\mathbf{m})| = 3N + 2M + 1$ . Ici, on veut que  $M = 2m$  et  $|F(\mathbf{m})| = n + 1$  (le +1 correspond à la face que l'on a "ouverte"), ce qui donne le résultat annoncé.

Soit encore

$$\mathcal{Q}_n^\bullet = \{(\mathbf{q}, v), \mathbf{q} \in \mathcal{Q}_n, v \in V(\mathbf{q})\},$$

l'ensemble des quadrangulations pointées. La formule d'Euler permet de voir que si  $\mathbf{q} \in \mathcal{Q}_n$ , alors  $|V(\mathbf{q})| = n + 2$ , donc

$$|\mathcal{Q}_n| := \frac{|\mathcal{Q}_n^\bullet|}{n + 2}. \quad (2)$$

Soit enfin  $\mathbb{T}_n$  l'ensemble des couples  $(\mathbf{t}, l)$  tels que :

- ◊  $\mathbf{t} \in \mathcal{A}_n$ ,
- ◊  $l : V(\mathbf{t}) \rightarrow \mathbb{Z}$  est telle que sa valeur en le sommet racine de  $\mathbf{t}$  est 1, et si  $u \sim v$  ( $u$  et  $v$  sont voisins, c'est-à-dire distant de 1) alors  $|l(u) - l(v)| \leq 1$ .

Un élément de  $\mathbb{T}_n$  sera appelé arbre **bien étiqueté**.

On munit une carte  $\mathbf{m}$  de sa distance de graphe  $d_{gr}$  : pour  $u, v \in V(\mathbf{m})$ ,  $d_{gr}(u, v)$  est le nombre d'arêtes du plus court chemin dans  $\mathbf{m}$  reliant  $u$  à  $v$ .

**Théorème 8 (Bijection de SCHAEFFER)** *Il existe une bijection entre  $\mathcal{Q}_n^\bullet$  et  $\mathbb{T}_n \times \{-1, 1\}$  telle que si  $(\mathbf{q}, v) \longleftrightarrow (\mathbf{t}, l, \varepsilon)$ , alors, pour tout  $d \in \mathbb{N}^*$ ,*

$$|\{u \in V(\mathbf{q}) \mid d_{gr}(u, v) = d\}| = |\{u \in V(\mathbf{t}) \mid l(u) - \min l + 1 = d\}|.$$

*De plus  $(\bar{\mathbf{q}}, v) \longleftrightarrow (\mathbf{t}, l, -\varepsilon)$ , où  $\bar{\mathbf{q}}$  est la même carte que  $\mathbf{q}$  enracinée en la retournée de la racine de  $\mathbf{q}$ .*

On a donc

$$|\mathcal{Q}_n^\bullet| = 2 |\mathbb{T}_n| = 2 \cdot 3^n \text{Cat}_n, \quad (3)$$

car à tout arbre de  $\mathcal{A}_n$  correspond  $3^n$  fonctions d'étiquettes : pour chaque branche, on choisit un incrément dans  $\{-1, 0, 1\}$ .

En combinant (1), (2) et (3), on retrouve ainsi le résultat du théorème 7.

## 3.2 Construction de la bijection de SCHAEFFER

On explique ici, sans démonstration, comment fonctionne la bijection de SCHAEFFER. On renvoie le lecteur à ses travaux [16] pour une preuve.

### 3.2.1 Application directe

Partant d'une quadrangulation pointée  $(\mathbf{q}, v) \in \mathcal{Q}_n^\bullet$ , on associe à chaque sommet  $u$  une étiquette  $l(u) := d_{gr}(u, v)$  (voir figure 4).

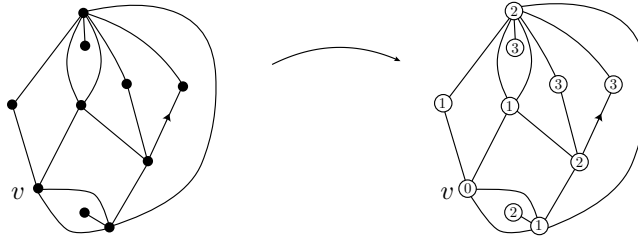


FIGURE 4 – Définition des étiquettes en fonction de la distance au point distingué.



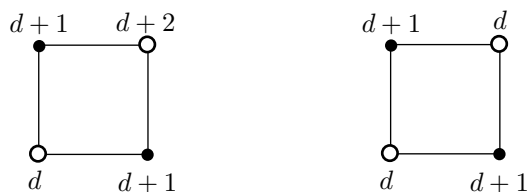


FIGURE 5 – Les deux types possibles de face, *simple* à gauche, *confluent* à droite.

Le caractère bipartite de la carte assure le fait que deux points voisins ont des étiquettes différentes d'exactly 1, on n'a donc que deux types possibles de face (voir figure 5).

On trace alors sur chaque face une nouvelle arête, en fonction du type de face comme décrit sur la figure 6. On définit ainsi un graphe plongé sur la sphère. C'est un arbre<sup>5</sup>, on l'enracine et lui associe une valeur de  $\varepsilon$  comme expliqué sur la figure 6.

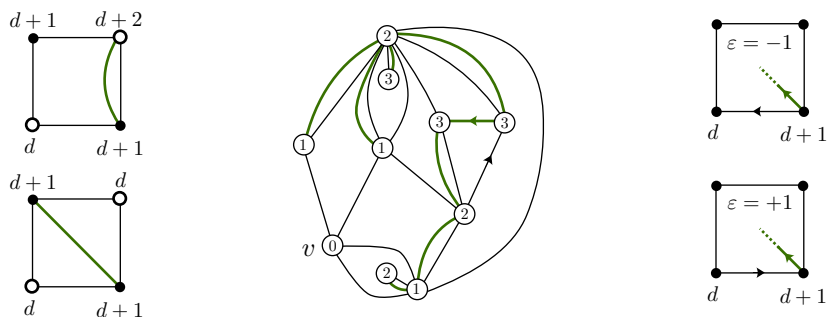


FIGURE 6 – Construction de l'arbre.

Enfin, on définit la fonction d'étiquetage  $l$  en tradant les étiquettes de sorte que la valeur en le sommet racine de l'arbre soit 1.

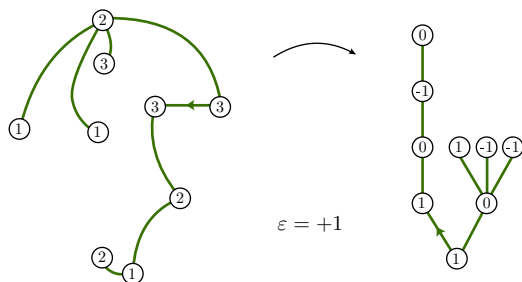


FIGURE 7 – Construction de l'arbre.

5. Ce n'est pas très dur à voir, il suffit de remarquer qu'il est acyclique et comporte un sommet de plus que son nombre d'arêtes.

### 3.2.2 Application réciproque

Dans l'autre sens, partons d'un arbre bien étiqueté. On translate les étiquettes de manière à ce que la plus petite soit 1. On rajoute un point d'étiquette 0 dans la face de l'arbre. Ensuite, on relie chaque coin dans le parcours en profondeur de l'arbre au premier coin suivant d'étiquette strictement inférieure. Si c'est un coin d'étiquette 1, on le relie simplement au sommet rajouté (voir figure 8). Enfin, on enracine la carte obtenue en fonction de la racine de l'arbre et de la valeur de  $\varepsilon$  comme sur la figure 6.

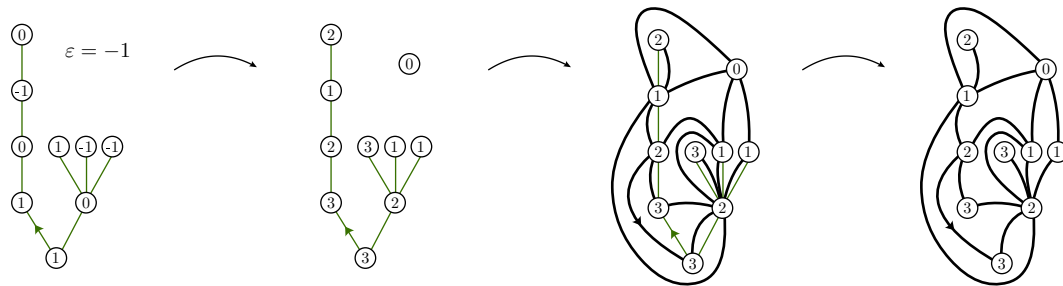


FIGURE 8 – *Bijection inverse.*

Notons qu'il n'est pas évident, a priori, qu'on puisse dessiner ces arcs sans croisement.

On a ainsi construit deux applications, il faut voir qu'elles sont bien réciproques l'une de l'autre. Un sens est facile : partant d'un arbre, on construit une quadrangulation et on retombe sur le bon arbre. L'autre sens est plus difficile, il faut voir que l'on obtient bien toutes les arêtes de la carte.

Les propriétés énoncées dans le théorèmes 8 découlent immédiatement de cette construction.

## 3.3 Limite d'échelle

### 3.3.1 Processus de contour et d'étiquettes des arbres

À un arbre bien étiqueté  $(t, l) \in \mathbb{T}_n$ , on associe les fonctions suivantes, appelées **fonction de contour** et **fonction d'étiquettes**, de  $[0, 2n]$  dans  $\mathbb{R}$  définies ainsi (voir figure 9) :

- ◊ à un point  $i \in \llbracket 1, i \rrbracket$ ,  $C^t$  associe la hauteur du  $i^{\text{ème}}$  point de l'arbre dans son parcours en profondeur et  $L^t$  l'étiquette de ce point,
- ◊ ces deux fonctions sont interpolées linéairement sur  $[0, 2n]$ .

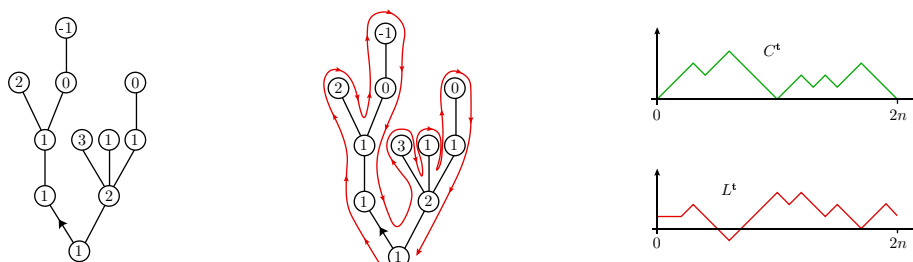


FIGURE 9 – *Parcours en profondeur d'un arbre et fonctions associées.*

Soit  $(\mathbf{t}_n, l_n)$  uniforme dans  $\mathbb{T}_n$ . On définit les processus de contour et d'étiquettes par

$$C^n := C^{\mathbf{t}_n} \quad \text{et} \quad L^n := L^{\mathbf{t}_n}.$$

On connaît le comportement de ces processus pour des grands arbres, c'est-à-dire quand  $n$  tend vers l'infini :

**Théorème 9 (CHASSAING, MARCKERT, SCHAEFFER)** *On a*

$$\left( \left( \frac{C_{2ns}^n}{(2n)^{\frac{1}{2}}} \right)_{0 \leq s \leq 1}, \left( \frac{L_{2ns}^n}{\left(\frac{8n}{9}\right)^{\frac{1}{4}}} \right)_{0 \leq s \leq 1} \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(loi)} \left( (\mathfrak{e}_s)_{0 \leq s \leq 1}, (Z_s)_{0 \leq s \leq 1} \right),$$

pour la topologie uniforme sur  $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})^2$ , où

- ◇ le processus  $\mathfrak{e}$  est l'excursion brownienne normalisée,
- ◇ le processus  $Z$  est, conditionnellement à  $\mathfrak{e}$ , un processus gaussien centré de covariance

$$\text{cov}(Z_s, Z_t) = \inf_{s \wedge t \leq u \leq s \vee t} \mathfrak{e}_u.$$

Le processus  $Z$  est appelé **tête du serpent brownien dirigé par l'excursion brownienne normalisée**. On renvoie le lecteur à [11] pour plus d'informations sur le sujet.

### 3.3.2 Profil d'une grande quadrangulation

Ces résultats peuvent être transportés sur les quadrangulations, via la bijection de SCHAEFFER.

Soit  $(\mathbf{q}, v) \in \mathcal{Q}_n^\bullet$  une quadrangulation pointée. Son **rayon** est défini par

$$\mathcal{R}_{\mathbf{q}, v} := \max_{u \in V(\mathbf{q})} d_{gr}(u, v).$$

On définit encore son **profil** sur  $\mathbb{N}$  par, pour  $k \in \mathbb{N}$ ,

$$\mathcal{I}_{\mathbf{q}, v}(k) := |\{u \in V(\mathbf{q}) \mid d_{gr}(u, v) = k\}|.$$

**Remarque.**  $\frac{1}{n+2} \mathcal{I}_{\mathbf{q}, v}$  est la loi de la distance à  $v$  d'un point uniforme dans  $V(\mathbf{q})$ .

Soit  $(\mathbf{q}_n, v_n)$  uniforme dans  $\mathcal{Q}_n^\bullet$ , on définit les processus rayon et profil :

$$\mathcal{R}_n := \mathcal{R}_{\mathbf{q}_n, v_n} \quad \text{et} \quad \mathcal{I}_n := \mathcal{I}_{\mathbf{q}_n, v_n}.$$

**Théorème 10** *On a*

- ◇  $\frac{\mathcal{R}_n}{n^{\frac{1}{4}}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(loi)} \mathcal{R}_\infty$  dans  $\mathbb{R}$ , avec  $\mathcal{R}_\infty := \max_{[0,1]} Z - \min_{[0,1]} Z$ ,
- ◇  $\frac{\mathcal{I}_n \left( n^{\frac{1}{4}} \cdot \right)}{n+2} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(loi)} \mathcal{I}_\infty$  pour la topologie de la convergence faible,

où  $\mathcal{I}_\infty$  est la mesure aléatoire sur  $\mathbb{R}_+$  définie par

$$\mathcal{I}_\infty(g) = \int_0^1 dt g \left( Z_t - \min_{[0,1]} Z \right) \quad \text{pour } g \geq 0.$$

Ce théorème montre en particulier que la taille typique d'une grande quadrangulation est  $n^{\frac{1}{4}}$  et donne la loi de la répartition des points dans la carte.

### 3.3.3 Topologie de Gromov-Hausdorff

On regarde à présent les cartes aléatoires comme des espaces métriques aléatoire et on s'intéresse à ce qu'il se passe lorsque la "taille" devient grande. Il nous faut donc une topologie sur les espaces métriques, la plus adaptée est la topologie de Gromov-Hausdorff. On renvoie le lecteur au livre de Mikhail GROMOV [8] pour plus de détails.

Pour comparer deux compacts  $K$  et  $K'$  d'un espace métrique  $(Z, \delta)$ , il est naturel d'introduire la distance de Hausdorff (voir figure 10) :

$$\delta_H(K, K') := \max \left\{ \max_{x \in K} \delta(x, K'), \max_{x' \in K'} \delta(x', K) \right\}.$$

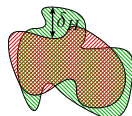


FIGURE 10 – Distance de Hausdorff.

On considère les espaces métriques à isomorphisme près, notons  $[X, d]$  la classe d'isomorphismes de l'espace métrique  $(X, d)$  et définissons

$$CM := \{[X, d], (X, d) \text{ métrique compact}\}.$$

On le muni de la **distance de Gromov-Hausdorff**  $d_{GH}$  définie par :

$$d_{GH}([X, d], [X', d']) := \inf_{\substack{(Z, \delta) \text{ métrique} \\ \varphi : (X, d) \rightarrow (Z, \delta) \\ \varphi' : (X', d') \rightarrow (Z, \delta)}} \delta_H(\varphi(X), \varphi(X')),$$

où la borne inférieure est prise sur tous les espaces métriques  $(Z, \delta)$  et tous les isomorphismes  $\varphi : (X, d) \rightarrow (Z, \delta)$  et  $\varphi' : (X', d') \rightarrow (Z, \delta)$ .

On a alors le théorème suivant (c.f. [8]) :

**Théorème 11** *L'application  $d_{GH}$  est une distance sur  $CM$  et  $(CM, d_{GH})$  est un espace polonais.*

**Remarque.** Il existe des façons plus agréables de caractériser la distance de Gromov-Hausdorff, notamment à l'aide de correspondances que l'on utilisera souvent en pratique.

### 3.3.4 Limite d'échelle

Un des grands problèmes actuels est de comprendre la limite d'échelle des quadrangulations aléatoires. Grâce à un argument de relative compacité, Jean-François LE GALL a récemment démontré l'existence d'une limite d'échelle, le long d'une sous-suite. On renvoie le lecteur à [12] et [13] pour les preuves de ces théorèmes.

**Théorème 12 (LE GALL)** *Soit  $\mathbf{q}_n \in \mathcal{Q}_n$  uniforme parmi les quadrangulations de la sphère à  $n$  faces.*

*Alors l'espace métrique  $(V(\mathbf{q}_n), n^{-1/4}d_{gr})$  tend en loi pour la topologie de Gromov-Hausdorff, le long d'une sous-suite, vers un espace métrique aléatoire limite, noté  $(S, D)$ .*

On connaît certaines propriétés de l'espace limite  $(S, D)$  :

**Théorème 13 (LE GALL)** *La dimension de Hausdorff de  $(S, D)$  est p.s. 4.*

**Théorème 14 (LE GALL, PAULIN)** *L'espace  $(S, D)$  est p.s. homéomorphe à la sphère unité de  $\mathbb{R}^3$ .*

Il est amusant de mettre en parallèle ces deux théorèmes : p.s.  $(S, D)$  est homéomorphe à la sphère de  $\mathbb{R}^2$  et est de dimension de Hausdorff 4. Bien sûr, ceci n'est pas du tout contradictoire, on obtient des propriétés similaires avec les courbes fractales.

## Généralisation

Les techniques exposées tout au long de cette présentation sont très robustes, on peut les adapter à divers problèmes. Les méthodes de comptage par séries génératrices ont beaucoup d'applications qui dépassent largement le cadre des cartes.

La bijection de Schaeffer se généralise bien en genre supérieur (c'est-à-dire  $g \geq 1$ ), elle s'établit entre les quadrangulations biparties de genre  $g$  et les  $g$ -arbres – cartes à une seule face, encore appelées cartes unicellulaires, de genre  $g$ .

On peut aussi établir une bijection entre les cartes planaires biparties et les mobiles bien étiquetés (notion généralisant les arbres bien étiquetés) : cette bijection, dont le principe est le même que celle de Gilles SCHAEFFER, est due à Jérémie BOUTTIER, Philippe DI FRANCESCO et Emmanuel GUITTER [3].

## Références

- [1] Jan AMBJØRN, Bergfinnur J. DURHUUS, and Thordur JONSSON. *Quantum Geometry : A Statistical Field Theory Approach*. Cambridge University Press, 1997.
- [2] Edward G. BEGLE. Regular convergence. *Duke Math. J*, 11(3) :441–450, 1944.
- [3] Jérémie BOUTTIER, Philippe DI FRANCESCO, and Emmanuel GUITTER. Planar maps as labeled mobiles. *Electron. J. Combin*, 11(1), 2004.
- [4] Édouard BRÉZIN, Claude ITZYKSON, Giorgio PARISI, and Jean-Bernard ZUBER. Planar diagrams. *Communications in Mathematical Physics*, 59(1) :35–51, 1978.
- [5] Guillaume CHAPUY. The structure of unicellular maps, and a connection between maps of positive genus and planar labelled trees. [arXiv:0804.0546](https://arxiv.org/abs/0804.0546), 2008.
- [6] Guillaume CHAPUY, Michel MARCUS, and Gilles SCHAEFFER. A bijection for rooted maps on orientable surfaces. [arXiv:0712.3649](https://arxiv.org/abs/0712.3649), 2007.
- [7] Robert CORI and Bernard VAUQUELIN. Planar maps are well labeled trees. *Canad. J. Math*, 33(5) :1023–1042, 1981.
- [8] Mikhail GROMOV. *Metric Structures for Riemannian and Non-Riemannian Spaces*. Birkhauser, 1999.
- [9] Jean-François LE GALL. Brownian excursions, trees and measure-valued branching processes. *Ann. Probab*, 19(4) :1399–1439, 1991.
- [10] Jean-François LE GALL. A class of path-valued Markov processes and its applications to superprocesses. *Probability Theory and Related Fields*, 95(1) :25–46, 1993.

- [11] Jean-François LE GALL. *Spatial Branching Processes, Random Snakes, and Partial Differential Equations*. Birkhauser, 1999.
- [12] Jean-François LE GALL. The topological structure of scaling limits of large planar maps. *Inventiones Mathematicae*, 169(3) :621–670, 2007.
- [13] Jean-François LE GALL and Frédéric PAULIN. Scaling limits of bipartite planar maps are homeomorphic to the 2-sphere. [arXiv:math.PR/0612315](https://arxiv.org/abs/math/0612315), 2006.
- [14] Grégory MIERMONT. Tessellations of random maps of arbitrary genus. [arXiv:0712.3688](https://arxiv.org/abs/0712.3688), 2007.
- [15] Grégory MIERMONT. Cartes Aléatoires. <http://www.math.u-psud.fr/~miermont/>, 2008.
- [16] Gilles SCHAEFFER. *Conjugaison d'arbres et cartes combinatoires aléatoires*. PhD thesis, Université de Bordeaux 1, 1998.
- [17] Gerardus 'T HOOFT. A planar diagram theory for strong interactions. *Nuclear Physics B*, 72(3) :461–473, 1974.
- [18] William T. TUTTE. A census of planar maps. *Canad. J. Math*, 15(2) :249–271, 1963.