

Problème de Deligne-Simpson additif, carquois et algèbres de Kac-Moody

EXPOSÉ DE MAÎTRISE

Gaëtan Bisson
& Marc Sage

sujet proposé par Olivier Schiffmann

30 avril 2005

Résumé

L'étude des carquois est très riche et est un outil puissant en géométrie algébrique.

Ici, on s'intéressera en particulier au problème de Deligne-Simpson additif. Ce problème sera résolu grâce au système de racines d'une algèbre de Kac-Moody.

Pour cela, on ramènera notre problème à l'étude des représentations d'un carquois bien choisi qui correspondent à des modules sur l'algèbre pré-projective déformée associée à ce carquois.

Table des matières

1 Carquois	3
1.1 Premières définitions	3
1.2 Représentations	3
1.3 Algèbre des chemins	4
1.3.1 Définition et remarques	4
1.3.2 Transfert de propriétés	4
1.4 Isomorphisme de catégories	5
2 Algèbres de Lie semi-simples complexes	6
2.1 Premières définitions	7
2.2 Système de racines	7
2.2.1 Sous-algèbres de Cartan	7
2.2.2 Système de racines associé	8
2.3 Matrice de Cartan, graphe de Coxeter et schéma de Dynkin	8
2.4 Le cas de \mathfrak{sl}_3	9
3 Algèbres de Lie de Kac-Moody	10
3.1 Motivations	10
3.2 Théorie générale	11
3.2.1 Premières Définitions	11
3.2.2 Lien avec les carquois	12
3.2.3 Groupe de Weil	12
3.2.4 Système de racines	13
4 Problème de Deligne-Simpson additif	15
4.1 Énoncé du problème	15
4.2 Vers la théorie des carquois	16
4.2.1 Carquois associé	16
4.2.2 Matrice de Cartan généralisée associée	16
4.2.3 Racines associées	16
4.2.4 Algèbre préprojective déformée	17
5 Résolution du problème	20
5.1 Cadre	20
5.2 Correspondance bijective	20
5.2.1 Sens direct	20
5.2.2 Sens indirect	21
5.3 Solution irréductible \Leftrightarrow représentation simple	22
5.3.1 Sens direct	22
5.3.2 Sens indirect	23

Fixons dès maintenant k , un corps quelconque.

1 Carquois

1.1 Premières définitions

Commençons par rappeler ce que sont les carquois.

DÉFINITION (*carquois, chemins*):

Un *carquois* Q est la donnée de deux ensembles finis, Q_0 et Q_1 , et de deux applications de Q_1 dans Q_0 , notées s et t ^[a]. On notera $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$.

Un *chemin* dans ce carquois est une suite finie, $\rho_0 \dots \rho_n$, d'éléments de Q_1 telle que $\forall k \in \{1 \dots n\}$, $s(\rho_{k-1}) = t(\rho_k)$; on notera $t(\rho_0) \xleftarrow{\rho_0} \dots \xleftarrow{\rho_n} s(\rho_n)$ ^[b]. Si la suite est vide, le chemin est dit *trivial*, et il faut préciser son point-base, $u \in Q_0$; on notera (abusivement) u un tel chemin.

Le chemin est appelé *cycle* si $t(\rho_0) = s(\rho_n)$; le carquois est dit *fortement connexe* si, pour tout couple $(u, v) \in Q_0^2$, il existe un chemin qui se note $v \xleftarrow{\rho_0} \dots \xleftarrow{\rho_n} u$.

Soit $a : t(\rho_0) \xleftarrow{\rho_0} \dots \xleftarrow{\rho_n} s(\rho_n)$ et $b : t(\rho'_0) \xleftarrow{\rho'_0} \dots \xleftarrow{\rho'_m} s(\rho'_m)$ deux chemins de ce carquois. Si $t(\rho'_0) = s(\rho_n)$, la *composée* de ces deux chemins, $a \circ b$, est définie et est le chemin $t(\rho_0) \xleftarrow{\rho_0} \dots \xleftarrow{\rho_n} t(\rho'_0) \xleftarrow{\rho'_0} \dots \xleftarrow{\rho'_m} s(\rho'_m)$; sinon, elle n'est pas définie.

Pour cette première partie, nous supposons désormais qu'un carquois $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ est fixé.

1.2 Représentations

DÉFINITION (*catégorie des représentations*):

On définit la *catégorie des représentations* de Q — dont les objets sont appelés représentations —, notée $\text{Rep } Q$:

- Une *représentation* \mathcal{X} , du carquois Q est la donnée de deux applications — notées toutes deux \mathcal{X} , et en indice pour ne pas surcharger les écritures. L'une associe à chaque point du carquois un k -espace vectoriel de dimension finie et l'autre associe à chaque flèche une application linéaire :

$$\mathcal{X} : \begin{cases} u \in Q_0 & \mapsto \mathcal{X}_u \in \text{Vect}(k) \\ \rho \in Q_1 & \mapsto \mathcal{X}_\rho \in \text{Hom}(\mathcal{X}_{s(\rho)}, \mathcal{X}_{t(\rho)}) \end{cases}$$

Cela se visualise de la façon suivante :

$$Q \quad u \xrightarrow{\rho} v$$

$$\mathcal{X} \quad \mathcal{X}_u \xrightarrow{\mathcal{X}_\rho} \mathcal{X}_v$$

^[a]En fait, Q_0 est l'ensemble des points, Q_1 l'ensemble des flèches et s (resp. t) l'application qui à une flèche associe son point de départ (resp. point d'arrivée).

^[b]Les chemins sont notés dans ce sens pour avoir une composition aisée, qui fonctionne comme la composition de fonctions.

- Un *morphisme* θ entre \mathcal{X} et \mathcal{X}' , deux représentations de Q , est une application — notée elle aussi en indice — $\theta : u \in Q_0 \mapsto \theta_u \in \text{Hom}(\mathcal{X}_u, \mathcal{X}'_u)$ telle que, pour tout $\rho \in Q_1$, le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{X}_{s(\rho)} & \xrightarrow{\mathcal{X}_\rho} & \mathcal{X}_{t(\rho)} \\ \theta_{s(\rho)} \downarrow & & \downarrow \theta_{t(\rho)} \\ \mathcal{X}'_{s(\rho)} & \xrightarrow{\mathcal{X}'_\rho} & \mathcal{X}'_{t(\rho)} \end{array}$$

- Si $\theta : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}'$ et $\theta' : \mathcal{X}' \rightarrow \mathcal{X}''$ sont deux morphismes de représentations, la *composée* de ces deux morphismes est le morphisme $\theta' \circ \theta : u \in Q_0 \mapsto \theta'_u \circ \theta_u \in \text{Hom}(\mathcal{X}_u, \mathcal{X}''_u)$.

Quand nous parlerons de représentations et qu'il n'y aura pas d'ambiguïté, il sera courant d'écrire ρ pour désigner l'application linéaire \mathcal{X}_ρ associée à la flèche $\rho \in Q_1$.

1.3 Algèbre des chemins

1.3.1 Définition et remarques

DÉFINITION (*algèbre des chemins*):

L'*algèbre des chemins* associée à Q , que l'on note kQ , est la k -algèbre qui a pour base l'ensemble des chemins de Q et dont la multiplication (notée \cdot) coïncide, pour les éléments de la base, avec la composition des chemins lorsqu'elle est définie, avec l'application nulle lorsqu'elle ne l'est pas.

On voit aisément que cette algèbre est unifère (elle admet $\sum_{u \in Q_0} u$ comme élément neutre) et qu'elle se décompose en sommes directes :

$$kQ = \bigoplus_{u \in Q_0} u \cdot kQ = \bigoplus_{v \in Q_0} kQ \cdot v$$

Remarque 1.3.1:

On peut aussi proposer une version plus constructive de cette définition si l'on se ramène à $Q_0 = \{1 \dots n\}$:

L'algèbre des chemins de Q est la sous-algèbre de l'algèbre $M_n(k\langle Q_1 \rangle)$ ^[c] engendrée par les matrices :

- m^u ($m_{i,j}^u = 1$ si $i = j = u$, 0 sinon), pour $u \in Q_0$;
- m^ρ ($m_{i,j}^\rho = \rho$ si $i = v$ et $j = u$, 0 sinon), pour $u \xrightarrow{\rho} v \in Q_1$.

1.3.2 Transfert de propriétés

Beaucoup de propriétés du carquois se traduisent par des propriétés de son algèbre des chemins, et inversement. On se propose d'en étudier une.

^[c]C'est l'algèbre des matrices carrées de taille n à coefficients dans la k -algèbre libre engendrée par Q_1 .

Proposition 1.3.2:

On a l'équivalence suivante :

$$Q \text{ n'a pas de cycles} \iff kQ \text{ est de dimension finie}$$

Démonstration. kQ admet pour base vectorielle l'ensemble des chemins de Q . Dire que kQ est de dimension finie est donc équivalent à dire que Q n'a qu'un nombre fini de chemins.

Ainsi donc, si Q admet un cycle $c \in kQ$, comme il admet alors une infinité de chemins distincts (les $c \cdot c \cdot \dots \cdot c$), kQ n'est pas de dimension finie.

Inversement, si Q n'a pas de cycle, comme la longueur des chemins est bornée par le nombre de sommets et qu'il n'y a qu'un nombre fini d'arrêtes, un argument de combinatoire montre qu'il y a un nombre fini de chemins. \square

1.4 Isomorphisme de catégories**Lemme 1.4.1:**

La catégorie $\text{Rep } Q$ est isomorphe à la catégorie des kQ -modules.

Démonstration. L'isomorphisme et son inverse sont assez canoniques :

- À un kQ -module X , on associe la représentation \mathcal{X} de Q définie par $\mathcal{X}_u = u \cdot X$ et $\mathcal{X}_\rho : x \in \mathcal{X}_{s(\rho)} \mapsto \rho \cdot x \in \mathcal{X}_{t(\rho)}$.
- À une représentation \mathcal{X} de Q , on associe le kQ -module $X = \bigoplus_{u \in Q_0} \mathcal{X}_u$ où la multiplication est définie pour un chemin ^[d] $p = t(\rho_0) \xleftarrow{\rho_0} \dots \xleftarrow{\rho_n} s(\rho_n)$ et $x \in X$ par $px = \varepsilon_{t(\rho_0)} \mathcal{X}_{\rho_0} \dots \mathcal{X}_{\rho_n} \pi_{s(\rho_n)}(x)$ où ε_u et π_u sont les applications linéaires canoniques $\mathcal{X}_u \xrightarrow{\varepsilon_u} X \xrightarrow{\pi_u} \mathcal{X}_u$.

Il s'agit d'une simple vérification que de montrer que ce qui est défini là est bien bijectif :

Soit \mathcal{X} une représentation de Q , on a donc le kQ -module associé, X . Puis, on a \mathcal{X}' la représentation de Q associée à X . Montrons que $\mathcal{X}' = \mathcal{X}$.

Tout d'abord, quelque soit le sommet u , on a :

$$\mathcal{X}'_u = u \cdot X = u \cdot \bigoplus_{v \in Q_0} \mathcal{X}_v = \mathcal{X}_u$$

Par ailleurs, pour $x = \sum_{u \in Q_0} x_u \in X$, on a $u \cdot x = x_u$ d'où :

$$\mathcal{X}'_\rho(s(\rho) \cdot x) = \mathcal{X}'_\rho(x_{s(\rho)}) = \rho \cdot x_{s(\rho)} = \mathcal{X}_\rho(x_{s(\rho)}) = \mathcal{X}_\rho(s(\rho) \cdot x)$$

Ainsi, $\mathcal{X}_\rho = \mathcal{X}'_\rho$. Comme cela est vrai indépendamment de ρ , les représentations \mathcal{X} et \mathcal{X}' sont rigoureusement les mêmes.

Soit réciproquement X un kQ -module et \mathcal{X} la représentation de Q associée. On a alors X' le kQ -module associé à \mathcal{X} . Montrons que $X' = X$.

Tout d'abord, on peut écrire :

$$X' = \bigoplus_{u \in Q_0} \mathcal{X}_u = \bigoplus_{u \in Q_0} u \cdot X = X$$

^[d]La multiplication est ainsi définie sur tout $kQ \times X$ puisque les chemins forment une base de l'algèbre kQ .

Comparons maintenant les lois. Soit $x = \sum_{u \in Q_0} x_u \in M'$. On a d'une part :

$$u \cdot' x = u \cdot' \sum_{v \in Q_0} v \cdot x_v = u \cdot x_u = \sum_{v \in Q_0} u \cdot v \cdot x_v = u \cdot \sum_{v \in Q_0} v \cdot x_v = u \cdot x$$

Et d'autre part on a :

$$\rho \cdot' x = \rho \cdot' \sum_{u \in Q_0} u \cdot x_u = \rho \cdot (s(\rho) \cdot x_{s(\rho)}) = \rho \cdot \sum_{u \in Q_0} u \cdot x_u = \rho \cdot x$$

Ainsi, les modules X et X' sont rigoureusement les mêmes.

Cela achevant la démonstration. \square

Dans la suite, cet isomorphisme sera toujours implicite. Et l'on désignera par la même écriture un kQ -module, et sa représentation associée.

DÉFINITION (*sous-représentation, représentation simple*):

Soit \mathcal{X} une représentation de Q . On dit que \mathcal{X}' est une sous-représentation de la représentation \mathcal{X} si $\forall u \in Q_0, \mathcal{X}'_u \subseteq \mathcal{X}_u$ et si $\forall \rho \in Q_1, \mathcal{X}'_\rho = \mathcal{X}_\rho \Big|_{\mathcal{X}'_s(\rho)}$.

Une représentation sera dite *simple* si elle n'admet pas de sous-représentation non-triviale

Cela revient au même de demander qu'elle (ou plutôt, le kQ -module associé) n'admette pas de sous-module non-trivial.

Proposition 1.4.2:

Si \mathcal{X} est une représentation de Q , alors :

$$\forall u \in Q_0, \text{Hom}_{kQ}(kQ \cdot u, \mathcal{X}) \simeq \mathcal{X}_u$$

Démonstration. Il suffit donc de montrer, si X est un kQ -module et $u \in Q_0$, que :

$$\text{Hom}_{kQ}(kQ \cdot u, X) \simeq u \cdot X$$

Or, un kQ -morphisme φ de $kQ \cdot u$ dans X est uniquement déterminé par l'image de u par ce morphisme. De plus, cette image est nécessairement dans $u \cdot X$ (car $\varphi(u \cdot u) = \varphi(u) \cdot \varphi(u) = u \cdot \varphi(u)$)

Ainsi, on a un isomorphisme :

$$\begin{cases} \text{Hom}_{kQ}(kQ \cdot u, X) & \rightarrow & u \cdot X \\ \varphi & \mapsto & \varphi(u) \end{cases}$$

\square

2 Algèbres de Lie semi-simples complexes

Nous présentons ici la théorie générale des algèbres de Lie semi-simples complexes. La section suivante permettra de détailler les résultats dont nous aurons besoin dans un cadre plus précis.

Dans toute cette section, le corps est celui des complexes.

2.1 Premières définitions

Soit x un élément d'une algèbre de Lie \mathfrak{g} . On notera $\text{ad } x$ l'application de \mathfrak{g} dans lui même $y \mapsto [x, y]$.

DÉFINITION (*algèbres nilpotentes, simples et semi-simples*) :

Soit \mathfrak{g} une algèbre de Lie. Elle est dite :

- *nilpotente* lorsque la suite $\begin{cases} C^1(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g} \\ C^{n+1}(\mathfrak{g}) = [\mathfrak{g}, C^n(\mathfrak{g})] \end{cases}$ est nulle à partir d'un certain rang ;
- *simple* si elle n'est pas abélienne et n'admet pas d'idéal non-trivial ;
- *semi-simple* lorsqu'elle s'écrit sous la forme d'un produit direct d'algèbres de Lie simples $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \times \cdots \times \mathfrak{g}_r$ (avec $[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j] = 0$ lorsque $i \neq j$).

En fait, une algèbre de Lie complexe \mathfrak{g} est semi-simple si et seulement si elle n'admet pas d'idéal abélien non-trivial — pour montrer cela, on prend $\{\mathfrak{g}_1 \dots \mathfrak{g}_r\}$ l'ensemble des idéaux non-nuls minimaux de \mathfrak{g} ; ce sont bien des algèbres de Lie simples et on montre que \mathfrak{g} est égal à leur produit direct.

DÉFINITION (*éléments nilpotents, semi-simples*) :

Soit \mathfrak{g} une algèbre de Lie. Un élément x de cette algèbre est dit :

- *nilpotent* si $\text{ad } x$ l'est ;
- *semi-simple* si $\text{ad } x$ est diagonalisable.

DÉFINITION (*forme de Killing*) :

Soit \mathfrak{g} une algèbre de Lie. On appelle forme de Killing de \mathfrak{g} la forme :

$$B : (x, y) \mapsto \langle x, y \rangle = \text{tr}(\text{ad } x \circ \text{ad } y)$$

Pour ce qui suit, nous fixerons \mathfrak{g} , une algèbre de Lie semi-simple complexe.

2.2 Système de racines

2.2.1 Sous-algèbres de Cartan

DÉFINITION (*sous-algèbre de Cartan*) :

Une sous-algèbre de Cartan \mathfrak{h} de \mathfrak{g} est un élément maximal de l'ensemble des sous-algèbres abéliennes constituées d'éléments semi-simples.

On peut montrer que toutes les sous-algèbres de Cartan sont conjuguées par les automorphismes intérieurs de \mathfrak{g} .

De plus, elles vérifient de nombreuses propriétés :

Proposition 2.2.1 :

Soit \mathfrak{h} une sous-algèbre de Cartan d'une algèbre de Lie semi-simple \mathfrak{g} . Alors :

- \mathfrak{h} une sous-algèbre nilpotente ;
- \mathfrak{h} est son propre normalisateur (ie. $\mathfrak{h} = \{x \mid \text{ad } x(\mathfrak{h}) \subseteq \mathfrak{h}\}$) et donc, a fortiori, le commutant de \mathfrak{h} est \mathfrak{h} ;
- la restriction à \mathfrak{h} de la forme de Killing est non-dégénérée.

En fait, si \mathfrak{h} est une sous-algèbre de \mathfrak{g} qui vérifie les deux premières propriétés de la proposition précédente, alors \mathfrak{h} est une sous-algèbre de Cartan de \mathfrak{g} .

Dans ce qui suit, nous munirons \mathfrak{g} , \mathfrak{h} et \mathfrak{h}^* de la structure qu'induit la forme de Killing — eg. orthogonalité, dualité...

2.2.2 Système de racines associé

DÉFINITION (*racines*) :

Soit \mathfrak{h} une sous-algèbre de Cartan de \mathfrak{g} . Pour tout $\lambda \in \mathfrak{h}^*$, posons :

$$\mathfrak{g}_\lambda = \{x \in \mathfrak{g} \mid \forall h \in \mathfrak{h}, [h, x] = \lambda(h)x\}$$

Les *racines* de \mathfrak{g} (relativement à \mathfrak{h}) sont les éléments non-nuls λ de \mathfrak{h}^* tels que $\mathfrak{g}_\lambda \neq 0$. Une fois \mathfrak{h} fixé, on notera R l'ensemble des racines.

On a alors :

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \left(\bigoplus_{\lambda \in R} \mathfrak{g}_\lambda \right)$$

En effet, puisque \mathfrak{h} est abélien, d'après l'identité de Jacobi, les endomorphismes $\text{ad } h$ (pour $h \in \mathfrak{h}$) commutent ; comme, de plus, ils sont diagonalisables, ils sont simultanément diagonalisables.

Remarquez bien qu'on distingue $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_0$ des autres \mathfrak{g}_λ qui proviennent d'une racine.

L'ensemble des racines $R \subseteq \mathfrak{h}^*$ jouit de propriétés remarquables que nous nous contenterons de décrire :

Proposition 2.2.2 :

- R est un système de racines réduit au sens où :*
- R est fini, engendre \mathfrak{h}^* (en tant qu'espace vectoriel complexe) et ne contient pas 0 ;*
- pour tout $\alpha \in R$, $1 - 2 \frac{\langle \cdot, \alpha \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} \alpha$ laisse stable R ;*
- pour tout couple $(\alpha, \beta) \in R^2$, on a : $\langle \alpha, \beta \rangle \in \mathbb{Z}$;*
- pour tout $\alpha \in R$, α et $-\alpha$ sont les seules racines proportionnelles à α .*

Quelque soit $\alpha \in R$, $\dim \mathfrak{g}_\alpha = 1$. Si $(\alpha, \beta) \in R^2$ vérifie $\alpha + \beta \neq 0$, alors $\mathfrak{g}_{\alpha+\beta} = [\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta]$; alors, \mathfrak{g}_α et \mathfrak{g}_β sont orthogonaux et $\mathfrak{g}_{-\alpha}$ s'identifie au dual de \mathfrak{g}_α .

2.3 Matrice de Cartan, graphe de Coxeter et schéma de Dynkin

DÉFINITION (*base*) :

Une *base* de R est un sous-ensemble S de R qui est une base linéaire de \mathfrak{h}^* tel que :

$$R \subseteq \left\{ \sum_{\alpha \in S} w_\alpha \alpha \mid w \in \mathbb{N}^S \right\} \cup \left\{ \sum_{\alpha \in S} w_\alpha \alpha \mid (-w) \in \mathbb{N}^S \right\}$$

Nous admettrons l'existence d'une base S , que nous fixons.

Pour représenter et caractériser la base choisie, introduisons les différents objets mathématiques suivants :

DÉFINITION (*matrice de Cartan*) :

La *matrice de Cartan* est la matrice (à coefficients entiers, d'après la proposition 2.2.2) :

$$\mathbf{C} = \left(2 \frac{\langle \beta, \alpha \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} \right)_{(\alpha, \beta) \in S^2}$$

DÉFINITION (*graphe de Coxeter, schéma de Dynkin*) :

Le *graphe de Coxeter* est le graphe dont la matrice d'adjacence est la matrice symétrique indicée par S de terme général $\mathbf{C}_{i,j} + \mathbf{C}_{j,i}$.

Le *schéma de Dynkin* est le graphe de Coxeter complété, en chaque sommet, de la valeur $\langle \alpha, \alpha \rangle$ du carré de la longueur de α (où α est la racine à laquelle le sommet est associé).

2.4 Le cas de \mathfrak{sl}_3

Regardons plus précisément ce qui se passe dans le cas de \mathfrak{sl}_3 (l'algèbre de Lie associée au groupe de Lie $SL_3(\mathbb{C})$) :

$$\mathfrak{sl}_3 = \{M \in M_3(\mathbb{C}) \mid \text{tr } M = 0\}$$

Notons \mathfrak{h} la sous-algèbre formée des matrices diagonales :

$$\mathfrak{h} = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & -a-b \end{pmatrix} \mid (a, b) \in \mathbb{C}^2 \right\}$$

Elle est abélienne et est constituée d'éléments semi-simples. De plus, elle est maximale dans l'ensemble des sous-algèbres non-triviales de ce type. Donc \mathfrak{h} est une sous-algèbre de Cartan de \mathfrak{sl}_3 .

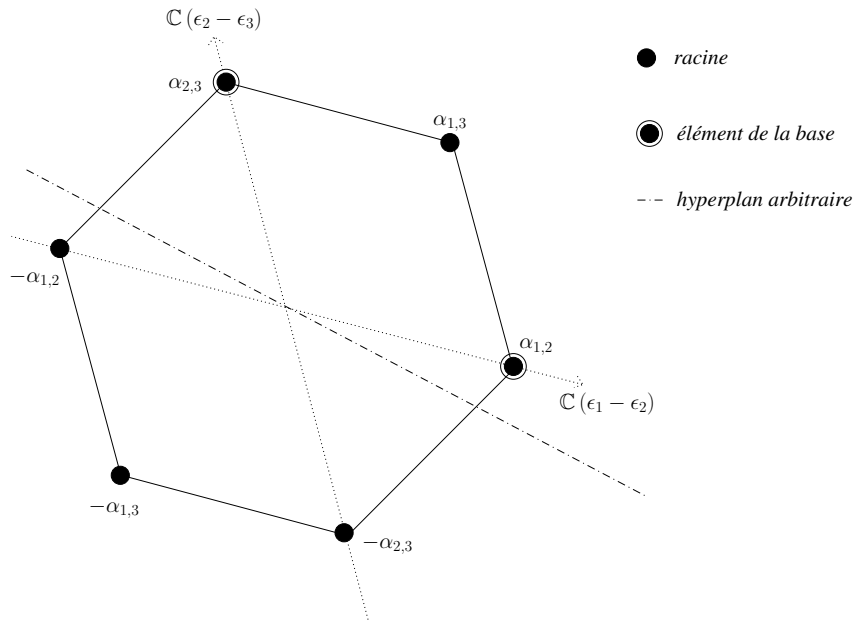
On a $\dim \mathfrak{h} = 2$ et donc $\mathfrak{h}^* \simeq \mathbb{C}^2$.

Par exemple, si l'on note $\epsilon_i \in \mathfrak{h}^*$ la forme linéaire $M \mapsto M_{i,i}$, alors on peut identifier \mathfrak{h}^* à $\mathbb{C}(\epsilon_1 - \epsilon_2) \oplus \mathbb{C}(\epsilon_2 - \epsilon_3)$.

Notons $E_{i,j}$ la matrice élémentaire dont le seul coefficient non-nul vaut 1 et est celui dont l'indice est (i, j) . Notons, lorsque $i \neq j$, $\alpha_{i,j} \in \mathfrak{h}^*$ la racine telle que $E_{i,j} \in \mathfrak{sl}_{3, \alpha_{i,j}}$.

On peut alors schématiser le système de racines ainsi qu'une de ses bases comme le montre la figure 1.

Techniquement, pour trouver une base, on choisit arbitrairement un \mathbb{R} -hyperplan H dans E' , le \mathbb{R} -espace vectoriel engendré par R . Ensuite, on trouve une famille libre et génératrice située dans une même composante connexe de $E' - H$ (incluse dans le système de racines) qui minimise la distance à cet hyperplan.

FIG. 1 – Base et système de racines de \mathfrak{sl}_3

3 Algèbres de Lie de Kac-Moody

3.1 Motivations

Nous avons vu un mécanisme qui permet d'associer à toute algèbre de Lie semi-simple complexe une matrice de Cartan.

Or on sait qu'une matrice de Cartan détermine à isomorphisme près (sur la sous-algèbre de Cartan) le système de racines auquel elle est associée; et qu'un système de racines détermine à isomorphisme près l'algèbre de Lie semi-simple de laquelle il découle.

On a donc une bijection entre la classe des algèbres de Lie semi-simples complexes et la classe des matrices de Cartan; et on connaît une construction explicite qui nous permet de calculer l'application directe (c'est ce que nous avons expliqué dans la section).

Dans les années 60, Jean-Pierre Serre a exhibé l'application réciproque. Il s'agit d'un procédé qui donne, à partir d'une matrice de Cartan, une présentation de l'algèbre à laquelle elle est associée :

Théorème 3.1.1 :

Soit \mathfrak{g} une algèbre de Lie semi-simple complexe et $(C_{i,j})_{(i,j) \in \{1,\dots,n\}^2}$ sa matrice de Cartan ^[e].

Notons \mathfrak{g}^C l'algèbre de Lie engendrée (formellement) par les X_i, Y_i et H_i et

^[e]Modulo le choix d'une sous-algèbre de Cartan \mathfrak{h} et d'une base S .

définie par les relations :

$$\begin{aligned}
(W1) \quad & [H_i, H_j] = 0 \\
(W2) \quad & [X_i, Y_i] = H_i \text{ et } [X_i, Y_j] = 0 \text{ si } i \neq j \\
(W3) \quad & [H_i, X_j] = \mathbf{C}_{i,j} X_j \text{ et } [H_i, Y_j] = -\mathbf{C}_{i,j} Y_j \\
(\theta_{i,j}) \quad & (\text{ad } X_i)^{-\mathbf{C}_{i,j}+1} (X_j) = 0 \text{ si } i \neq j \\
(\theta_{i,j}^-) \quad & (\text{ad } Y_i)^{-\mathbf{C}_{i,j}+1} (Y_j) = 0 \text{ si } i \neq j
\end{aligned}$$

Alors, $\mathfrak{g}^{\mathbf{C}}$ est une algèbre de Lie semi-simple admettant pour sous-algèbre de Cartan la sous-algèbre \mathfrak{h} engendrée par les H_i . Sa matrice de Cartan est \mathbf{C} , et donc, $\mathfrak{g}^{\mathbf{C}}$ est isomorphe à \mathfrak{g} .

Pour plus de détails, y compris la preuve de ce théorème, se référer à [5].

Exemple : On peut, par exemple, appliquer les relations de ce théorème au cas de \mathfrak{sl}_n . Les générateurs H_i , X_i et Y_i (pour $i \in \{1, \dots, n-1\}$) s'identifieront alors avec les matrices de \mathfrak{sl}_n comme il suit :

$$\begin{aligned}
H_i &= E_{i,i} - \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \\
X_i &= E_{i,i+1} \\
Y_i &= E_{i+1,i}
\end{aligned}$$

3.2 Théorie générale

L'idée que Kac et Moody ont eue indépendamment dans les années 70 est d'appliquer la présentation de Serre à une classe de matrices plus générale que celle des matrices de Cartan.

On obtient ainsi des algèbres qui ne sont plus des algèbres de Lie semi-simples, mais des algèbres plus générales, qui ressemblent en beaucoup de points aux algèbres de Lie semi-simples complexes.

3.2.1 Premières Définitions

DÉFINITION (*algèbre de Kac-Moody*) :

Une *algèbre de Kac-Moody* est l'image par la présentation de Serre (l'application $\mathbf{C} \mapsto \mathfrak{g}^{\mathbf{C}}$) d'une matrice symétrique à coefficients entiers, termes diagonaux positifs et termes extra-diagonaux négatifs telle que, quelque soit les indices i et j , $a_{i,j} = 0 \Leftrightarrow a_{j,i} = 0$ (ces matrices seront appelées *matrices de Cartan généralisées* par la suite).

On peut montrer que $\mathfrak{g}^{\mathbf{C}}$ est de dimension infinie sauf si \mathbf{C} est une matrice de Cartan.

Ainsi, les algèbres de Kac-Moody sont en quelque sorte l'équivalent des algèbres semi-simples complexes en dimension infinie.

Dans une algèbre de Kac-Moody, il est courant de qualifier de positive la sous-algèbre engendrée par les X_i et de négative la sous-algèbre engendrée par les Y_i .

3.2.2 Lien avec les carquois

Fixons, pour la fin cette partie, un carquois $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ sans boucle — ie. $\forall \rho \in Q_1, s(\rho) \neq t(\rho)$.

On notera $\varepsilon_u \in \mathbb{Z}^{Q_0}$ le vecteur coordonnée au point $u \in Q_0$.

DÉFINITION (*formes de Ringel et de Tits*):

La *forme de Ringel*, est la forme bilinéaire définie sur \mathbb{R}^{Q_0} comme il suit :

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \sum_{u \in Q_0} \alpha_u \beta_u - \sum_{\rho \in Q_1} \alpha_{s(\rho)} \beta_{t(\rho)}$$

La *forme de Tits* est la forme symétrique bilinéaire correspondante :

$$(\alpha, \beta) = \langle \alpha, \beta \rangle + \langle \beta, \alpha \rangle$$

Notons q la forme quadratique associée à la forme de Tits.

Associons à notre carquois une matrice de Cartan généralisée :

DÉFINITION (*matrice de Cartan généralisée associée*):

La *matrice de Cartan généralisée associée* à Q est la matrice \mathbf{C} définie par $\mathbf{C}_{u,v} = (\varepsilon_u, \varepsilon_v)$.

Cette matrice de Cartan généralisée caractérise complètement le graphe Q . En effet, $\mathbf{C}_{u,v} = -n$ si et seulement si il y a exactement n flèches qui s'écrivent $u \longrightarrow v$.

On peut aussi donner une définition plus explicite de \mathbf{C} , la matrice de Cartan généralisée associée à Q . Elle est indiquée par $(Q_0)^2$ et vérifie :

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{u,v} &= 2 \text{ si } u = v \\ \mathbf{C}_{u,v} &= -n \text{ si } n = \text{card} \left\{ \rho \in Q_1, \left\{ \begin{array}{l} s(\rho) = u \\ t(\rho) = v \end{array} \right\} \text{ ou } \left\{ \begin{array}{l} s(\rho) = v \\ t(\rho) = u \end{array} \right\} \right\} \\ \mathbf{C}_{u,v} &= 0 \text{ sinon} \end{aligned}$$

Nous disions plus haut que les algèbres de Lie de Kac-Moody sont très similaires aux algèbres de Lie semi-simples complexes.

Dans ce qui suit, nous allons préciser cela en mettant en avant des résultats similaires.

3.2.3 Groupe de Weil

DÉFINITION (*groupe de Weil*):

Pour $u \in Q_0$, on a la réflexion :

$$s_u : \mathbb{Z}^{Q_0} \rightarrow \mathbb{Z}^{Q_0} : \alpha \mapsto \alpha - (\alpha, \varepsilon_u) \varepsilon_u$$

Le *groupe de Weil* est le sous groupe $W \subseteq \text{Aut}(\mathbb{Z}^{Q_0})$ engendré par la famille $(s_u)_{u \in Q_0}$. Ce groupe agit — naturellement — sur \mathbb{Z}^{Q_0} .

Lemme 3.2.1 :

Les réflexions s_u et s_v commutent (ie. $[s_u, s_v] = 0$) si et seulement s'il n'existe pas de flèche qui s'écrit $u \rightarrow v$ ou $v \rightarrow u$.

Démonstration. Il suffit de calculer en utilisant les relations de linéarité pour les réflexions. Quelque soit $i \in Q_0$, on a :

$$\begin{aligned} s_v(s_u(\varepsilon_i)) &= s_v(\varepsilon_i - (\varepsilon_i, \varepsilon_u)\varepsilon_u) \\ &= s_v(\varepsilon_i) - (\varepsilon_i, \varepsilon_u)s_v(\varepsilon_u) \\ &= \varepsilon_i - (\varepsilon_i, \varepsilon_v)\varepsilon_v - (\varepsilon_i, \varepsilon_u)(\varepsilon_u - (\varepsilon_u, \varepsilon_v)\varepsilon_v) \\ &= \varepsilon_i - ((\varepsilon_i, \varepsilon_v)\varepsilon_v + (\varepsilon_i, \varepsilon_u)\varepsilon_u) + (\varepsilon_v, \varepsilon_u)(\varepsilon_i, \varepsilon_u)\varepsilon_u \end{aligned}$$

Seul le dernier terme n'est pas symétrique en u et v . On en déduit :

$$[s_v, s_u](\varepsilon_i) = (\varepsilon_v, \varepsilon_u)((\varepsilon_i, \varepsilon_u)\varepsilon_u - (\varepsilon_i, \varepsilon_v)\varepsilon_v)$$

Alors, s'il n'existe pas de flèche qui s'écrit $u \rightarrow v$ ou $v \rightarrow u$, on a $(\varepsilon_v, \varepsilon_u) = 0$ et donc $[s_v, s_u] = 0$.

Si ce n'est pas le cas, $(\varepsilon_v, \varepsilon_u) = -n$ (pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$) et alors, pour $i = v$, la formule donne $[s_v, s_u](\varepsilon_v) = (-n)((-n)\varepsilon_u - 2\varepsilon_v)$, ce qui est non-nul. \square

3.2.4 Système de racines

Tout comme les algèbres de Lie semi-simples complexes, les algèbres de Kac-Moody possèdent un système de racines. Nous nous proposons de décrire ses propriétés.

DÉFINITION (*région fondamentale, racines réelles et imaginaires*) :

La *région fondamentale* est l'ensemble F des vecteurs α non-nuls de \mathbb{N}^{Q_0} à support connexe qui vérifient $\forall u \in Q_0, (\alpha, \varepsilon_u) \leq 0$ (ou, si l'on préfère $\mathbf{C}\alpha \in (-\mathbb{N})^{Q_0}$).

L'ensemble Rr des *racines réelles* est l'orbite des vecteurs coordonnées sous W (ce que l'on note $Rr = \mathcal{O}_W(\{\varepsilon_u | u \in Q_0\})$).

L'ensemble Ri des *racines imaginaires* est l'orbite de $F \cup (-F)$ sous W (ce que l'on note $Ri = \mathcal{O}_W(F \cup (-F))$).

L'ensemble des *racines* est $R = Rr \cup Ri$.

Le lemme suivant sera admis; il se montre avec des arguments de théorie de Lie.

Lemme 3.2.2 :

Soit α une racine. Alors, soit toutes les composantes de α sont positives, soit elles sont toutes négatives.

On peut donc parler de racines positives et négatives.

Remarque 3.2.3 :

L'action du groupe de Weil préserve la forme de Tits (ie. les éléments de W sont auto-adjoints pour la forme de Tits). En effet, on vérifie cela tout simplement pour la famille $(s_w)_{w \in Q_0}$ (qui engendre W) en utilisant la base $(\varepsilon_u)_{u \in Q_0}$ de \mathbb{Z}^{Q_0} :

$$\begin{aligned} (s_w(\varepsilon_u), s_w(\varepsilon_v)) &= (\varepsilon_u - (\varepsilon_u, \varepsilon_w) \varepsilon_w, \varepsilon_v - (\varepsilon_v, \varepsilon_w) \varepsilon_w) \\ &= (\varepsilon_u, \varepsilon_v) - (\varepsilon_v, \varepsilon_w) (\varepsilon_u, \varepsilon_w) - (\varepsilon_u, \varepsilon_w) (\varepsilon_v, \varepsilon_w) \\ &\quad + (\varepsilon_u, \varepsilon_w) (\varepsilon_v, \varepsilon_w) (\varepsilon_w, \varepsilon_w) \\ &= (\varepsilon_u, \varepsilon_v) - 2(\varepsilon_u, \varepsilon_w) (\varepsilon_v, \varepsilon_w) + 2(\varepsilon_u, \varepsilon_w) (\varepsilon_v, \varepsilon_w) \\ &= (\varepsilon_u, \varepsilon_v) \end{aligned}$$

Ainsi donc, si α est une racine réelle on aura $q(\alpha) = 1$; et si α est une racine imaginaire on aura $q(\alpha) \leq 0$. Et cela montre qu'en fait, l'union $R = Rr \cup Ri$ est disjointe.

Ce qui suit permet de mieux comprendre la structure du système de racines.

On notera $\bigwedge_{u \in Q_0} \alpha_u$ le plus grand diviseur commun des composantes de α ; et on dira que α est indivisible si cette quantité vaut 1.

Observons tout d'abord que cette quantité est invariante par rapport à l'action du groupe de Weil. Pour tout $w \in Q_0$, et en posant $\alpha' = s_w(\alpha)$, on a ^[f] :

$$\begin{aligned} \bigwedge_{u \in Q_0} \alpha'_u &= \alpha'_w \wedge \bigwedge_{u \in Q_0 \setminus \{w\}} \alpha'_u \\ &= (\alpha_w - (\alpha, \varepsilon_w)) \wedge \bigwedge_{u \in Q_0 \setminus \{w\}} \alpha_u \\ &= \left(\alpha_w - \sum_{u \in Q'} q'_u \alpha_u \right) \wedge \bigwedge_{u \in Q_0 \setminus \{w\}} \alpha_u \\ &= \bigwedge_{u \in Q_0} \alpha_u \end{aligned}$$

Proposition 3.2.4 :

- (i) Toute racine réelle est indivisible ; ainsi, si $\alpha \in \mathbb{Z}^{Q_0}$ est une racine réelle, $\mathbb{Z}\alpha \cap R = \{\alpha, -\alpha\}$.
- (ii) Si α est une racine imaginaire, alors α est multiple d'une racine imaginaire indivisible, et tout multiple de α est une racine imaginaire.

Démonstration.

(i) Soit $\alpha \in Rr$. Supposons que $\alpha = n\alpha'$ avec $\alpha' \in \mathbb{Z}^{Q_0}$ et $n \in \mathbb{Z}$. Alors, $1 = q(\alpha) = q(n\alpha') = n^2 q(\alpha') \in n^2 \mathbb{Z}$; donc $n \in \{-1, 1\}$.

(ii) Soit $\alpha \in Ri$. On a donc $\alpha' \in F \cup (-F)$ et $g \in W$ tels que $\alpha = g(\alpha')$. On peut aussi écrire $\alpha = n(\hat{\alpha})$ — pour $n = \bigwedge_{u \in Q_0} \alpha_u$ et $\hat{\alpha} = \frac{1}{n}\alpha \in \mathbb{Z}^{Q_0}$.

Donc, dans \mathbb{Q}^{Q_0} , on a :

$$\hat{\alpha} = g\left(\frac{1}{n}\alpha'\right)$$

^[f]Dans ces égalités, $Q' \subseteq Q_0$ est l'ensemble des sommets voisins à w et $q'_u = -n$ avec n le nombre de flèches entre w et n .

De plus $\alpha' \in \mathbb{Z}^{Q_0}$ (car $[\mathfrak{g}] g(\frac{1}{n}\alpha') \in \mathbb{Z}^{Q_0}$) et donc, $\alpha' \in F \cup (-F)$ (car $F \cup (-F)$ est un cône); ce qui montre que $\hat{\alpha} \in Ri$.

Aussi, si $\alpha \in Ri$, il existe $\alpha' \in F \cup (-F)$ et $g \in W$ tels que $\alpha = g(\alpha')$. Ainsi, pour $n \in \mathbb{Z}$, $n\alpha = g(n\alpha')$ et comme $F \cup (-F)$ est un cône, $n\alpha' \in F \cup (-F)$. Cela montre que $n\alpha \in Ri$. □

4 Problème de Deligne-Simpson additif

4.1 Énoncé du problème

Soit $(C_1 \dots C_m)$ un m -uplet de classes de conjugaison de matrices de $M_n(k)$.

Le problème est le suivant :

À quelle condition sur les C_i existe-t-il des matrices $A_i \in C_i$ n'ayant aucun sous-espace (non-trivial) stable commun telles que $\sum_{i=1}^m A_i = 0$?

On cherche tout d'abord à caractériser entièrement ces classes de conjugaison. Soit $A_i \in C_i$. Introduisons les nombres $\xi_{i,j}$ comme étant les racines des polynômes minimaux de A_i :

$$\min_{A_i} (X) = \prod_{j=1}^{d_i} (X - \xi_{i,j})$$

Introduisons aussi les nombres $r_{i,j}$ définis par :

$$r_{i,j} = \text{rg} \left(\prod_{l=1}^j (A - \xi_{i,l} 1) \right)$$

Lemme 4.1.1 :

Les nombres $\xi_{i,j}$ et $r_{i,j}$ ne dépendent que de C_i (et pas du A choisi) et la classe de conjugaison est entièrement déterminée par la donnée de ces nombres.

Démonstration. Cela se voit facilement si l'on considère le réduct de Jordan des matrices de C_i . Il est formé de d_i blocs diagonaux (pour $j \in \{1 \dots d_i\}$) chacun de hauteur $r_{i,j} - r_{i,j-1}$ (on pose $r_{i,0} = 0$) et de la forme :

$$\begin{pmatrix} \xi_{i,j} & 1 & & & \\ & \xi_{i,j} & \ddots & & \\ & & \ddots & 1 & \\ & & & & \xi_{i,j} \end{pmatrix}$$

□

^[g]En effet, si $g \in W$ et $\beta \in \mathbb{Q}^{Q_0}$ sont tels que $g(\beta) \in \mathbb{Z}^{Q_0}$ alors $\beta \in \mathbb{Z}^{Q_0}$. Il suffit pour montrer cela de considérer les cas $g = s_w$ pour $w \in Q_0$ (on pose $\beta' = s_w(\beta)$). On a alors $\beta'_u = \beta_u \in \mathbb{Z}^{Q_0}$ pour $u \in Q_0 \setminus \{w\}$; et $\alpha'_w = \alpha_w - \sum_{u \in Q'} q'_u \alpha_u \in \mathbb{Z}^{Q_0}$ donc $\alpha_w \in \mathbb{Z}^{Q_0}$.

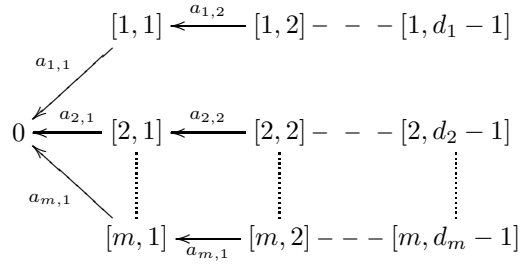
4.2 Vers la théorie des carquois

4.2.1 Carquois associé

Au m -uplet de classes de conjugaison de matrices, on associe le carquois $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$:

$$\begin{aligned} Q_0 &= \{0\} \cup \{[i, j] \mid 1 \leq i \leq m \text{ et } 1 \leq j \leq d_i - 1\} \\ Q_1 &= \{a_{i,j} \mid 1 \leq i \leq m \text{ et } 1 \leq j \leq d_i - 1\} \\ s &: a_{i,j} \mapsto [i, j] \\ t &: a_{i,j} \mapsto [i, j - 1] \end{aligned}$$

(par commodité de notations, on considère que $[i, 0] = 0$, quelque soit i)



Une fois ce carquois défini, on se dote de tout ce qui a été défini à la section 3.2. À savoir, la matrice de Cartan généralisée associée, la structure pré-hilbertienne sur \mathbb{R}^{Q_0} associée et le système de racines associé.

4.2.2 Matrice de Cartan généralisée associée

La définition nous donne directement sa forme explicite :

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & \mathbf{v}_i^t & \mathbf{v}_i^t & \dots \\ \mathbf{v}_i & \mathbf{p}_i & & \\ \mathbf{v}_i & & \mathbf{p}_i & \\ \vdots & & & \ddots \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} m+1 \text{ blocs} \\ \text{de hauteur} \end{array}$$

$$\text{où } \mathbf{p}_i = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & \\ -1 & 2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ & & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et } \mathbf{v}_i = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{chacune de} \\ \text{hauteur } d_i - 1 \end{array}$$

4.2.3 Racines associées

Comme expliqué à la section 3.2.2, on a alors R , système de racines de l'algèbre de Lie de Kac-Moody associée à la matrice de Cartan généralisée \mathbf{C} .

On notera R_λ^+ (pour $\lambda \in k^{Q_0}$) l'ensemble des racines positives $\alpha \in \mathbb{N}^{Q_0}$ telles que $\sum_{u \in Q_0} \alpha_u \lambda_u = 0$.

Posons, pour $\alpha \in \mathbb{Z}^I$, $p(\alpha) = 1 - \frac{1}{2}\alpha^t \mathbf{C} \alpha = 1 - \frac{1}{2}q(\alpha)$.

Lemme 4.2.1 :

Pour toute racine α , $p(\alpha) \geq 0$; et on a égalité si et seulement si α est une racine réelle.

Démonstration. Cela est clair vu la remarque 3.2.3. \square

DÉFINITION (Σ_λ) :

Notons Σ_λ l'ensemble des racines $\alpha \in R_\lambda^+$ telles que, si $\alpha = \beta_1 + \dots + \beta_l$ avec $\beta_i \in R_\lambda^+$ alors $p(\alpha) \geq p(\beta_1) + \dots + p(\beta_l)$.

4.2.4 Algèbre préprojective déformée

Nous introduisons cette structure dans le but d'imposer des relations supplémentaires aux représentations de \overline{Q} . Ceci sera précisé à la remarque 4.2.3.

DÉFINITION (*algèbre préprojective déformée*) :

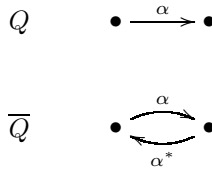
L'algèbre préprojective déformée associée au carquois Q et au vecteur $\lambda \in k^{Q_0}$ est l'algèbre :

$$\Pi^\lambda = k\overline{Q} / \left(\sum_{\rho \in Q_1} (\rho\rho^* - \rho^*\rho) - \sum_{u \in Q_0} \lambda_u u \right)$$

où \overline{Q} , le *doublé* du carquois Q est le carquois $\overline{Q} = (Q_0, \overline{Q}_1, \overline{s}, \overline{t})$, pour ^[h] :

$$\overline{Q}_1 = \bigcup_{\rho \in Q_1} \{\rho, \rho^*\}, \overline{s} : \begin{cases} \rho & \mapsto s(\rho) \\ \rho^* & \mapsto t(\rho) \end{cases} \text{ et } \overline{t} : \begin{cases} \rho & \mapsto t(\rho) \\ \rho^* & \mapsto s(\rho) \end{cases}$$

Intuitivement, on a doublé chaque flèche ρ de Q_1 d'une flèche ρ^* qui va dans l'autre sens.



DÉFINITION (*poids, moment*) :

Le *poids* d'une représentation \mathcal{X} de Q (ou \overline{Q}) est le vecteur $\dim \mathcal{X}$ indicée par Q_0 de composantes $(\dim \mathcal{X})_u = \dim_k \mathcal{X}_u$.

Pour $\alpha \in \mathbb{N}^{Q_0}$, on notera $\text{Rep}_\alpha Q$ la catégorie des représentations de Q de poids α .

Le *moment* d'une représentation \mathcal{X} de \overline{Q} de poids α est le vecteur $\mu \in \bigoplus_{u \in Q_0} \text{End}_k(k^{\alpha_u})$ défini par :

$$\mu_u = \sum_{t(\rho)=u} \mathcal{X}_\rho \mathcal{X}_{\rho^*} - \sum_{s(\rho)=u} \mathcal{X}_{\rho^*} \mathcal{X}_\rho$$

^[h]Le * est un symbole inerte. Formellement, on pourrait dire $Q_1 = Q_0 \times \{0, 1\}$ en assimilant $Q_1 = Q_0 \times \{0\}$ à Q_0 et $Q_1 = Q_0 \times \{1\}$ à Q_0^* .

Lemme 4.2.2 :

Il y a une correspondance bijective canonique entre les Π^λ -modules et les représentations de \overline{Q} qui vérifient la relation $\forall u \in Q_0, \mu_u = \lambda_u \text{Id}_{\mathcal{X}_u}$.

Démonstration. Dans toute cette démonstration, nous noterons \widehat{c} la classe d'un élément c de $k\overline{Q}$ dans Π^λ .

Soit X un Π^λ -module. On définit une représentation \mathcal{X} de $k\overline{Q}$ en posant :

$$\mathcal{X}_u = \widehat{u} \cdot X \text{ et } \mathcal{X}_\rho : x \mapsto \widehat{\rho} \cdot x$$

Ceci est bien défini car on a :

$$\mathcal{X}_\rho \left(\widehat{s(\rho)} \cdot x \right) = \widehat{\rho} \cdot \left(\widehat{s(\rho)} \cdot x \right) = \widehat{\rho \cdot s(\rho)} \cdot x = \widehat{t(\rho)} \cdot x$$

Montrons maintenant que cette représentation vérifie les égalités souhaitées (cette vérification consiste en la manipulation d'un jeu d'écritures). Soit $u \in Q_0$ et $x \in X$. On a déjà :

$$\sum_{v \in Q_0} \widehat{\lambda_v v} = \sum_{\rho \in Q_1} \widehat{[\rho, \rho^*]}$$

Ainsi, on a :

$$\begin{aligned} \left(\sum_{v \in Q_0} \lambda_v \widehat{v} \right) \cdot (\widehat{u} \cdot x) &= \left(\sum_{\rho \in Q_1} [\widehat{\rho}, \widehat{\rho^*}] \right) \cdot (\widehat{u} \cdot x) \\ \left(\sum_{v \in Q_0} \lambda_v \widehat{v\widehat{u}} \right) \cdot x &= \left(\sum_{\rho \in Q_1} \widehat{\rho\widehat{\rho^*}\widehat{u}} - \sum_{\rho \in Q_1} \widehat{\rho^*\widehat{\rho}\widehat{u}} \right) \cdot x \\ \left(\sum_{v \in Q_0} \lambda_v \widehat{v\widehat{u}} \right) \cdot x &= \left(\sum_{t(\rho)=u} \widehat{\rho\widehat{\rho^*}\widehat{u}} - \sum_{s(\rho)=u} \widehat{\rho^*\widehat{\rho}\widehat{u}} \right) \cdot x \\ \lambda_u \widehat{u} \cdot x &= \left(\sum_{t(\rho)=u} \widehat{\rho\widehat{\rho^*}} - \sum_{s(\rho)=u} \widehat{\rho^*\widehat{\rho}} \right) \cdot \widehat{u} \cdot x \\ \lambda_u \text{Id}_{\mathcal{X}_u} (\widehat{u} \cdot x) &= \left(\sum_{t(\rho)=u} \mathcal{X}_\rho \mathcal{X}_{\rho^*} - \sum_{s(\rho)=u} \mathcal{X}_{\rho^*} \mathcal{X}_\rho \right) (\widehat{u} \cdot x) \\ \lambda_u \text{Id}_{\mathcal{X}_u} &= \sum_{t(\rho)=u} \mathcal{X}_\rho \mathcal{X}_{\rho^*} - \sum_{s(\rho)=u} \mathcal{X}_{\rho^*} \mathcal{X}_\rho \end{aligned}$$

Soit maintenant \mathcal{X} une représentation de \overline{Q} vérifiant ces égalités. Soit X le $k\overline{Q}$ -module associé à cette représentation. Montrons qu'on peut munir X d'une structure de $k\overline{Q}$ -module par passage au quotient. Soit a et b deux éléments de $k\overline{Q}$ tels que $\widehat{a} = \widehat{b}$. On a donc (pour un certain $c \in k\overline{Q}$) :

$$b - a = \left(\sum_{\rho \in Q_1} [\rho, \rho^*] - \sum_{u \in Q_0} \lambda_u u \right) c$$

Comme ce que nous allons faire est linéaire, on peut supposer que c est un chemin ; prenons par exemple $t(x) = u$. On a :

$$\left(\sum_{\rho \in Q_1} [\rho, \rho^*] \right) c = \left(\sum_{t(\rho)=u} \rho \rho^* - \sum_{s(\rho)=u} \rho^* \rho \right) c = \left(\sum_{v \in Q_0} \lambda_v v \right) c$$

donc $a = b$ et on a bien un Π^λ -module.

Montrons que cette correspondance est bijective.

Pour cela, soit \mathcal{X} une représentation de $k\overline{Q}$ vérifiant les conditions demandées. On a donc X , le Π^λ -module associé, et l'on a aussi \mathcal{X}' , la représentation de $k\overline{Q}$ associée à ce Π^λ -module. Montrons que $\mathcal{X} = \mathcal{X}'$.

Déjà, si u est un sommet de Q_0 , on a :

$$\mathcal{X}'_u = \widehat{u} \cdot X = u \cdot \bigoplus_{v \in Q_0} \mathcal{X}_v = \mathcal{X}_u$$

Par ailleurs, pour $x = \sum_{u \in Q_0} x_u \in X$, on a $\widehat{u} \cdot x = x_u$ d'où :

$$\mathcal{X}'_\rho \left(\widehat{s(\rho)} \cdot x \right) = \mathcal{X}'_\rho (x_{s(\rho)}) = \widehat{\rho} \cdot x_{s(\rho)} = \mathcal{X}_\rho (x_{s(\rho)}) = \mathcal{X}_\rho \left(\widehat{s(\rho)} \cdot x \right)$$

Ainsi, $\mathcal{X}_\rho = \mathcal{X}'_\rho$. Comme cela est vrai indépendamment de ρ , les représentations \mathcal{X} et \mathcal{X}' sont rigoureusement les mêmes.

Réciproquement, prenons X un Π^λ -module ; on a \mathcal{X} la représentation de \overline{Q} associée. On a alors X' le Π^λ -module associé à \mathcal{X} . Montrons que $X' = X$.

Tout d'abord, on peut écrire :

$$X' = \bigoplus_{u \in Q_0} \mathcal{X}_u = \bigoplus_{\widehat{u} \in Q_0} u \cdot X = X$$

Montrons que les lois sont les mêmes. Soit $x = \sum_{u \in Q_0} x_u \in M'$. On a d'une part :

$$\widehat{u} \cdot' x = \widehat{u} \cdot' \sum_{v \in Q_0} \widehat{v} \cdot x_v = \widehat{u} \cdot x_u = \sum_{v \in Q_0} \widehat{u} \cdot \widehat{v} \cdot x_v = \widehat{u} \cdot \sum_{v \in Q_0} \widehat{v} \cdot x_v = u \cdot x$$

Et d'autre part on a :

$$\widehat{\rho} \cdot' x = \widehat{\rho} \cdot' \sum_{u \in Q_0} \widehat{u} \cdot x_u = \widehat{\rho} \cdot \left(\widehat{s(\rho)} \cdot x_{s(\rho)} \right) = \widehat{\rho} \cdot \sum_{u \in Q_0} u \cdot x_u = \widehat{\rho} \cdot x$$

Ainsi, les Π^λ -modules X et X' sont rigoureusement les mêmes. \square

Remarque 4.2.3 :

Ainsi, les représentations de Π^λ (ie. les Π^λ -modules) sont exactement les représentations \mathcal{X} de \overline{Q} (vues comme $k\overline{Q}$ -modules) de moment μ tel que :

$$\forall u \in Q_0, \mu_u = \lambda_u \text{Id}_{\mathcal{X}_u} \quad (1)$$

Ce que nous disons là, c'est que la déformation de l'algèbre préprojective (ie. le fait de quotienter $k\overline{Q}$) permet — s'il considère les représentations de Π^λ — d'imposer des relations aux représentations de $k\overline{Q}$. Plus loin, nous fixerons λ pour que ces représentations correspondent à des solutions correctes de notre problème.

5 Résolution du problème

Notre but est de démontrer le résultat suivant :

Théorème 5.0.4 :

Le m -uplet de classes de conjugaison de matrices convient ^[i] si et seulement si $\alpha \in \Sigma_\lambda$ lorsque :

$$\alpha_0 = n \quad , \quad \alpha_{[i,j]} = r_{i,j}$$

$$\lambda_0 = - \sum_{i=1}^m \xi_{i,1} \quad , \quad \lambda_{[i,j]} = \xi_{i,j} - \xi_{i,j+1}$$

Pour cela, il nous faudra utiliser le résultat remarquable suivant (dit *théorème de Crawley-Boevey*), que nous admettons ^[j] :

Théorème 5.0.5 :

Il existe une représentation simple de Π^λ de poids α si et seulement si $\alpha \in \Sigma_\lambda$.

5.1 Cadre

Démarche :

Nous allons d'abord montrer (section 5.2) qu'il y a une correspondance bijective entre les m -uplets (A_1, \dots, A_m) vérifiant $\forall i \in \{1 \dots m\}, A_i \in C_i$ et $A_1 + \dots + A_m = 0$ et les représentations \mathcal{X} de Π^λ de poids α pour lesquelles les $a_{i,j}$ sont injectives et les $a_{i,j}^*$ sont surjectives.

Une fois cela prouvé, nous montrerons (section 5.3) que cette correspondance associe une solution irréductible à une représentation simple.

Alors, le théorème 5.0.5 permettra de conclure.

Interprétation :

Intuitivement, chaque branche du graphe (issue de 0) décrit une matrice. Le poids ici choisi assure que :

- les matrices A_i sont dans les classes de conjugaison C_i (par les points $[i, *]$);
- la somme des matrices est nulle (par le point 0).

Cela est fait comme l'explique la remarque 4.2.3.

5.2 Correspondance bijective

5.2.1 Sens direct

Soit une solution $(A_i \in C_i)$ du problème. Construisons \mathcal{X} , une représentation de Π^λ ^[k], de poids α pour laquelle les $a_{i,j}$ sont injectives et les $a_{i,j}^*$ sont surjectives.

^[i]Au sens où, il existe des matrices $A_i \in C_i$ n'ayant aucun sous-espace stable non-trivial en commun et telles que $\sum_i A_i = 0$.

^[j]Ce théorème est démontré dans [1].

^[k]Que nous voyons comme une représentation de \overline{Q} vérifiant la propriété 1.

On définit une représentation \mathcal{X} de $\overline{\mathcal{Q}}$ en posant :

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_0 &= k^n \\ \mathcal{X}_{[i,j]} &= \text{Im} \left(\prod_{l=1}^j (A - \xi_{i,l} 1) \right) \\ a_{i,j} &: \mathcal{X}_{[i,j]} \hookrightarrow \mathcal{X}_{[i,j-1]} \text{ l'injection canonique} \\ a_{i,j}^* &= (A_i - \xi_{i,j} 1) |_{\mathcal{X}_{[i,j-1]}} \text{ (clairement surjective)} \end{aligned}$$

La définition de $a_{i,j}^*$ a bien un sens car $(A_i - \xi_{i,j} 1) (\mathcal{X}_{[i,j-1]}) = \mathcal{X}_{[i,j]}$

Lemme 5.2.1 :

\mathcal{X} est une représentation de Π^λ .

Démonstration. Soient i et j , deux entiers vérifiant $1 \leq i \leq m$ et $0 \leq j \leq d_m - 2$. On peut écrire la relation suivante au point $[i, j]$:

$$a_{i,j+1} a_{i,j+1}^* - a_{i,j}^* a_{i,j} = (A_i - \xi_{i,j+1} 1) - (A_i - \xi_{i,j} 1) = \lambda_{[i,j]} 1$$

De plus, comme $\prod_{j=1}^{d_i} (A - \xi_{i,j} 1) = 0$, la restriction de $(A_i - \xi_{i,d_i} 1)$ à $\mathcal{X}_{[i,d_i-1]}$ est nulle ; on a donc, au point $[i, d_i - 1]$:

$$-a_{i,d_i-1}^* a_{i,d_i-1} = -(A_i - \xi_{i,d_i-1} 1) = \lambda_{[i,d_i-1]} 1$$

Finalement, comme $A_1 + A_2 + \dots + A_m = 0$, on a, en 0 :

$$\sum_{i=1}^m a_{i,1} a_{i,1}^* = \sum_{i=1}^m (A_i - \xi_{i,1} 1) = \lambda_0 1$$

Donc, la représentation \mathcal{X} de $\overline{\mathcal{Q}}$ définie plus haut induit une représentation de Π^λ . \square

5.2.2 Sens indirect

Soit \mathcal{X} une représentation de Π^λ de poids α telle que les $a_{i,j}$ soient injectives et les $a_{i,j}^*$ soient surjectives. Construisons les matrices A_i , solution du problème.

Comme $\alpha_0 = n$, on peut identifier \mathcal{X}_0 à k^n .

On pose $A_i = a_{i,1} a_{i,1}^* + \xi_{i,1} 1$.

Lemme 5.2.2 :

$$\sum_{i=1}^m A_i = 0 \text{ et } \forall i \in \{1, \dots, n\}, A_i \in C_i$$

Démonstration. Soient i et j , deux entiers vérifiant $1 \leq i \leq m$

et $0 \leq j \leq d_i - 2$. La relation qui exprime que \mathcal{X} est une représentation de Π^λ au point $[i, j]$ est $a_{i,j+1} a_{i,j+1}^* - a_{i,j}^* a_{i,j} = \lambda_{[i,j]} 1$. Pour $c \in k$, on peut donc écrire :

$$a_{i,j}^* (a_{i,j} a_{i,j}^* + (\xi_{i,j} + c) 1) = (a_{i,j+1} a_{i,j+1}^* + (\xi_{i,j+1} + c) 1) a_{i,j}^*$$

On a donc :

$$\begin{aligned}
a_{i,j}^* \dots a_{i,2}^* a_{i,1}^* (A_i + c1) &= a_{i,j}^* \dots a_{i,2}^* a_{i,1}^* (a_{i,1} a_{i,1}^* + (\xi_{i,1} + c) 1) \\
&= a_{i,j}^* \dots a_{i,2}^* (a_{i,2} a_{i,2}^* + (\xi_{i,2} + c) 1) a_{i,1}^* \\
&\vdots \\
&= a_{i,j}^* (a_{i,j} a_{i,j}^* + (\xi_{i,j} + c) 1) a_{i,j-1}^* \dots a_{i,1}^* \\
&= (a_{i,j+1} a_{i,j+1}^* + (\xi_{i,j+1} + c) 1) a_{i,j}^* \dots a_{i,1}^*
\end{aligned} \tag{2}$$

La relation qui exprime que \mathcal{X} est une représentation de Π^λ au point $[i, d_i - 1]$ est $-a_{i,d_i-1}^* a_{i,d_i-1} = \lambda_{[i,d_i-1]} 1$. Pour $c \in k$, on peut donc écrire :

$$a_{i,d_i-1}^* (a_{i,d_i-1} a_{i,d_i-1}^* + (\xi_{i,j} + c) 1) = (\xi_{i,j+1} + c) a_{i,d_i-1}^*$$

Ainsi, en utilisant l'équation (2) :

$$a_{i,d_i-1}^* a_{i,d_i-2}^* \dots a_{i,1}^* (A_i + c1) = (\xi_{i,d_i} + c) a_{i,d_i-1}^* a_{i,d_i-2}^* \dots a_{i,1}^* \tag{3}$$

Si l'on pose $c = -\xi_{i,j+1}$ dans l'équation (2), on a :

$$a_{i,j}^* \dots a_{i,2}^* a_{i,1}^* (A_i - \xi_{i,j+1} 1) = a_{i,j+1} a_{i,j+1}^* a_{i,j}^* \dots a_{i,1}^*$$

D'où, par récurrence (rappelons que $0 \leq j \leq d_i - 2$) :

$$\prod_{l=1}^j (A_i - \xi_{i,l}) = a_{i,1} a_{i,2} \dots a_{i,j} a_{i,j}^* \dots a_{i,2}^* a_{i,1}^*$$

De plus, l'équation (3) donne :

$$\prod_{l=1}^{d_i} (A_i - \xi_{i,l}) = 0$$

Comme les $a_{i,j}$ sont injectives et les $a_{i,j}^*$ sont surjectives, les deux formules précédentes expriment le fait que $A_i \in C_i$.

De plus, la relation qui exprime que \mathcal{X} est une représentation de Π^λ au point 0 est :

$$-\sum_{i=1}^m a_{i,1} a_{i,1}^* = \lambda_0 1$$

Elle exprime bien le fait que $A_1 + \dots + A_m = 0$ puisqu'on a :

$$\lambda_0 1 = -\left(\sum_{i=1}^m \xi_{i,1}\right) 1 = -\sum_{i=1}^m (A_i - a_{i,1} a_{i,1}^*)$$

□

5.3 Solution irréductible \leftrightarrow représentation simple

5.3.1 Sens direct

Soit (A_i) une solution irréductible de notre problème et supposons que \mathcal{X}' est une sous-représentation de la représentation \mathcal{X} associée à cette solution.

Comme les matrices A_i n'admettent pas de sous-espace stable non-trivial en commun, nécessairement, $\mathcal{X}'_0 = 0$ ou \mathcal{X}_0 :

- Si $\mathcal{X}'_0 = 0$, l'injectivité des applications linéaires $\mathcal{X}_{a_{i,j}}$ implique que $\mathcal{X}' = 0$.
- Si $\mathcal{X}'_0 = \mathcal{X}_0$, la surjectivité des applications linéaires $\mathcal{X}_{a_{i,j}^*}$ implique que $\mathcal{X}' = \mathcal{X}$.

Donc \mathcal{X} est simple.

5.3.2 Sens indirect

Soit \mathcal{X} une représentation simple.

Montrons d'abord que les applications linéaires $a_{i,j}$ sont injectives (et alors, par un argument de dualité, on aura la surjectivité des $a_{i,j}^*$).

Supposons que ce ne soit pas le cas, et soit donc $x \in \text{Ker } a_{i,l}$ tel que $x \neq 0$. Définissons, pour $j \geq l$, $x_j \in \mathcal{X}_{[i,l]}$ par $x_l = x$ et $x_{j+1} = a_{i,j+1}^*(x_j)$.

Par récurrence, et en utilisant la relation (issue de la propriété 1) :

$$a_{i,j+1}a_{i,j+1}^* - a_{i,j}^*a_{i,j} = \lambda_{[i,j]}1$$

on montre que $a_{i,j+1}(x_{j+1})$ est colinéaire à x_j .

La restriction de \mathcal{X} aux sous-espaces $kx_j \subseteq \mathcal{X}_{[i,j]}$ est donc bien une sous-représentation \mathcal{X}' de Q . C'est une sous-représentation propre car $\mathcal{X}'_0 = 0$ mais elle n'est pas nulle.

Cela contredit la simplicité de \mathcal{X} .

Montrons maintenant que la solution A_i associée est irréductible.

Supposons que $\mathcal{Y}_0 \subseteq \mathcal{X}_0 = k^n$ est un sous-espace non-trivial stable par tous les A_i . On peut définir par récurrence d'autres sous-espaces

$$\mathcal{Y}_{[i,j]} = a_{i,j}^*(\mathcal{Y}_{[i,j-1]}) \subseteq \mathcal{X}_{[i,j]}$$

La restriction de \mathcal{X} à ces sous-espaces définit une sous-représentation non-triviale de \mathcal{X} .

Comme \mathcal{X} est simple, on a une contradiction.

Donc, la solution (A_i) est irréductible.

Références

- [1] W. CRAWLEY-BOEVEY, *Geometry of the moment map for representations of quivers*, Compositio Math., 126 (2001), 257-293
- [2] W. CRAWLEY-BOEVEY, *Lectures on representations of quivers*, graduate course at Oxford University (1992)
- [3] W. CRAWLEY-BOEVEY, *On matrices in prescribed conjugacy classes with no common invariant subspace and sum zero*, Duke Math. J., 118 (2003), 339-352
- [4] W. CRAWLEY-BOEVEY, *Representations of quivers, preprojective algebras and deformations of quotient singularities*, lectures from a DMV Seminar "Quantizations of Kleinian singularities" (1999)
- [5] J.-P. SERRE, *Algèbres de Lie semi-simples complexes*, W. A. Benjamin inc., New York – Amsterdam (1966)