

Cônes Asymptotiques de Groupes

Emmanuel Boissard et Eddy Routin, sur un sujet proposé par Frédéric Paulin

21 octobre 2005

Introduction.

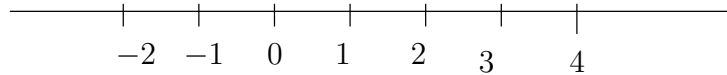
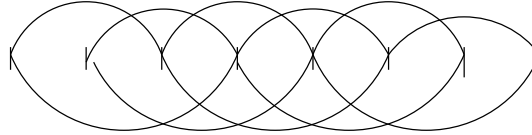
On veut étudier les propriétés asymptotiques des espaces métriques. Pour cela, on associe à un espace métrique une image de cet espace "vu de loin", de la façon suivante. On s'éloigne à une vitesse donnée de l'espace métrique de départ au dessus d'un point donné, et on effectue des observations à intervalles réguliers. On essaie de voir si ces observations convergent en un certain sens. L'utilisation des ultrafiltres permet de garantir une convergence dans tous les cas : on appelle cône asymptotique l'espace métrique qui est la "limite" de ces observations.

La structure géométrique des cônes asymptotiques d'un espace ne dépend en quelque sorte que de son allure à grande échelle, car le fait de s'éloigner écrase les détails trop petits. Néanmoins, l'étude de ces cônes donne de nombreux renseignements sur l'espace de départ.

Dans cet exposé, on va voir que l'on peut naturellement munir certains groupes d'une structure métrique, et que l'étude de leurs cônes asymptotiques renseigne sur les propriétés algébriques de ces groupes. Le dernier paragraphe est consacré au calcul des cônes asymptotiques de quelques groupes.

Table des matières

1	Méthodes géométriques pour l'étude des groupes	2
1.1	Définition des outils géométriques	2
1.2	Que peut-on faire avec ces instruments?	4
2	Cônes asymptotiques de groupes	5
2.1	Cônes asymptotiques	5
2.2	Premiers résultats	6
2.3	Un exemple d'application	8
3	Calcul de certains cônes asymptotiques	9
3.1	Le groupe libre à deux générateurs \mathbb{F}_2	9
3.1.1	Les arbres réels	9
3.1.2	Cônes asymptotiques des espaces δ -hyperboliques (et donc des arbres)	11
3.1.3	Calcul des cônes asymptotiques de \mathbb{F}_2	11
3.2	Le groupe modulaire $PSL_2(\mathbb{Z})$	13
3.2.1	Introduction de $PSL_2(\mathbb{Z})$	13
3.2.2	Le cône asymptotique de $PSL_2(\mathbb{Z})$	13
3.3	Le plan hyperbolique \mathbb{H}_2	17
3.3.1	Notions élémentaires sur \mathbb{H}_2	17
3.3.2	Le cône asymptotique de \mathbb{H}_2	17
3.4	Groupes fondamentaux de surfaces	18
3.5	Remarque	18
A	Ultrafiltres	19
A.1	Définitions	19
A.2	Intérêt des ultrafiltres	19

FIG. 1 – Le graphe de Cayley de \mathbb{Z} pour la partie génératrice $\{1\}$ FIG. 2 – Le graphe de Cayley de \mathbb{Z} pour la partie génératrice $\{2, 3\}$

1 Méthodes géométriques pour l'étude des groupes

1.1 Définition des outils géométriques

Pour toute cette partie on renvoie par exemple à [8], [3] ou encore [5].

La distance des mots, ou « les groupes de type fini comme objets géométriques »

Si Γ est un groupe de type fini, et S une partie génératrice finie, on définit la *longueur* $l_S(\gamma)$ d'un élément γ de Γ de la façon suivante :

$$l_S(\gamma) = \min \{n \in \mathbb{N}, \exists s_1, \dots, s_n \in S \cup S^{-1} \quad s_1 \dots s_n = \gamma\}.$$

On définit alors la distance d_S entre deux points γ_1 et γ_2 de Γ par

$$d_S(\gamma_1, \gamma_2) = l_S(\gamma_1^{-1}\gamma_2).$$

On vérifie que ceci définit bien une distance sur Γ appelée *distance des mots*. De plus, elle vérifie la propriété importante d'être invariante à gauche sous l'action naturelle de Γ sur lui-même (*i.e.* par les translations à gauche).

Cette construction permet de voir les groupes de type fini comme des espaces métriques de façon assez naturelle, avec de plus la propriété d'invariance par translation. Remarquons que cet espace métrique est discret puisque les distances entre deux points sont des entiers. Pour permettre une meilleure compréhension géométrique d'un tel espace, on peut construire son *graphe de Cayley*.

Le graphe de Cayley d'un groupe de type fini

Soit Γ un groupe de type fini muni d'une partie génératrice S et de la distance des mots associée d_S . Le graphe de Cayley de Γ , noté $\text{Cay}(\Gamma, S)$, est le graphe qui a pour sommets les points de Γ , et tel que deux sommets sont les extrémités d'une arête si et seulement s'ils sont à distance 1 pour la distance des mots.

Identifions chaque arête du graphe de Cayley à une copie du segment $[0, 1]$, de telle façon que l'action de Γ sur le graphe de Cayley soit équivariante : si $x, y \in \Gamma$, la translation par $g \in \Gamma$ envoie isométriquement le segment reliant x à y sur le segment reliant $g.x$ à $g.y$. On définit de façon naturelle la longueur d'un chemin entre deux points du graphe comme la somme des longueurs des chemins restreints à chaque arête. On définit alors la distance entre deux points du graphe comme la borne inférieure des longueurs des chemins reliant ces deux points. Ainsi, $\text{Cay}(\Gamma, S)$ est un espace métrique et Γ agit sur cet espace par isométries.

Un espace métrique X est dit *géodésique* lorsque pour tous points x, y de X , si $d = d(x, y)$, il existe une application isométrique de $[0, d]$ dans X valant x en 0 et y en d (une telle application s'appelle un *segment géodésique entre x et y*). Un graphe de Cayley muni de la distance ci-dessus est géodésique. Avec cette structure, l'inclusion $\Gamma \subset \text{Cay}(\Gamma, S)$ est un plongement isométrique.

Les figures 1 et 2 sont des exemples de graphes de Cayley. On en rencontrera d'autres dans la troisième partie de ce texte.

Les quasi-isométries

Considérons deux espaces métriques (X, d) , (X', d') . Une application $\phi : X \rightarrow X'$ est appelée un *plongement quasi-isométrique* s'il existe des constantes $\lambda \geq 1$, $C \geq 0$ telles que :

$$\frac{1}{\lambda}d(x, y) - C \leq d'(\phi(x), \phi(y)) \leq \lambda d(x, y) + C$$

pour tous $x, y \in X$.

L'application ϕ est appelée une *quasi-isométrie* s'il existe également une constante $D \geq 0$ telle que tout point de X' soit à une distance inférieure à D d'un point de $\phi(X)$. On dit alors que X et X' sont *quasi-isométriques*.

Si ϕ est une quasi-isométrie pour des constantes λ, C , on dit que c'est une (λ, C) -quasi isométrie.

Remarque. (i) La définition précédente sera la seule utilisée par la suite. À titre indicatif, nous donnons deux autres définitions équivalentes de la relation de quasi-isométrie.

En utilisant l'axiome du choix, on peut montrer que les espaces métriques X, X' sont quasi-isométriques si et seulement s'il existe deux applications

$$\phi : X \rightarrow X', \quad \psi : X' \rightarrow X$$

et des constantes $\lambda \geq 1, C \geq 0, D \geq 0$ telles que

$$\begin{aligned} d'(\phi(x), \phi(y)) &\leq \lambda d(x, y) + C & d(\psi(x'), \psi(y')) &\leq \lambda d'(x', y') + C \\ d(\psi \circ \phi(x), x) &\leq D & d(\phi \circ \psi(x'), x') &\leq D \end{aligned}$$

pour tous $x, y \in X$ et $x', y' \in X'$.

Dans [11], M. Gromov donne une définition plus conceptuelle, pour laquelle nous devons introduire quelques définitions.

Soient (A, d_A) et (B, d_B) deux espaces métriques. Si A et B sont deux sous-espaces d'un espace métrique (Z, δ) munis des métriques induites, on peut définir leur distance de Hausdorff $H_Z^\delta(A, B)$: c'est la borne inférieure des nombres $\varepsilon > 0$ tels que A soit inclus dans le ε -voisinage de B et réciproquement. Maintenant, si A et B sont quelconques, on peut encore définir une distance entre eux, que l'on appelle leur distance de Hausdorff abstraite, ou distance de Hausdorff-Gromov, de la façon suivante : appelons Z la réunion disjointe de A et B , on dit qu'une métrique δ sur Z est *admissible* si ses restrictions à A et B coïncident avec d_A et d_B . On pose alors $H(A, B) = \inf_\delta H_Z^\delta(A, B)$, où δ parcourt toutes les métriques admissibles sur Z .

Deux espaces métriques A, B sont dits *équivalents au sens de Hausdorff*, ce que l'on note $A \underset{Hau}{\sim} B$ si leur distance de Hausdorff-Gromov est finie.

Des espaces métriques A, B sont dits *équivalents au sens de Lipschitz*, ou Lipschitz-équivalents, ce que l'on note $A \underset{Lip}{\sim} B$, s'il existe une bijection bilipschitzienne de A vers B .

On peut maintenant donner la définition de Gromov, qui est équivalente aux deux précédentes. Les espaces métriques X et Y sont quasi-isométriques si et seulement s'il existe deux autres espaces métriques X', Y' tels que

$$X \underset{Hau}{\sim} X' \underset{Lip}{\sim} Y' \underset{Hau}{\sim} Y$$

Cette version est moins effective mais permet de se faire une bonne idée de ce qu'est la quasi-isométrie.

- (ii) On vérifie facilement que la relation de quasi-isométrie est une relation d'équivalence entre les espaces métriques. On peut se la représenter comme une relation de ressemblance asymptotique : "*deux espaces métriques quasi-isométriques sont Lipschitz-équivalents si on les observe d'assez loin*" (moralement, on peut négliger la constante de quasi-isométrie C si les points que l'on observe sont à distance très grande les uns des autres). Ce point sera précisé par la suite lorsque nous introduirons les cônes asymptotiques.

Exemples. (i) Tout espace métrique de diamètre fini est quasi-isométrique à un point. En particulier, tout groupe fini G muni d'une distance des mots est quasi-isométrique au groupe trivial à un élément via une $(1, d)$ -quasi-isométrie où $d = \sup_{p \in G} d(e, p)$.

- (ii) \mathbb{Z}^n muni de la distance des mots associée à sa partie génératrice canonique (et donc de n'importe quelle distance des mots d'après (iv)) est quasi-isométrique à \mathbb{R}^n muni de la distance d_1 définie par $d_1(a, b) = \sum_{i=1}^n |b_i - a_i|$ via une $(1, d)$ -quasi-isométrie pour un certain d . Remarquons que l'on peut en fait choisir la distance définie par une norme quelconque sur \mathbb{R}^n puisque les distances associées à deux normes équivalentes sont quasi-isométriques.

- (iii) Soit Γ un groupe muni d'une partie génératrice S . Alors l'injection canonique $(\Gamma, d_S) \hookrightarrow \text{Cay}(\Gamma, S)$ est une quasi-isométrie, et on peut prendre $\lambda = 1$ dans la définition de la quasi-isométrie.
- (iv) Si Γ est de type fini et si S, S' sont deux parties génératrices finies, alors $\text{Cay}(\Gamma, S)$ et $\text{Cay}(\Gamma, S')$ sont quasi-isométriques. En effet, si on pose

$$\lambda_1 = \max_{s \in S} l_{S'}(s), \quad \lambda_2 = \max_{s' \in S'} l_S(s'),$$

$$\lambda = \max(\lambda_1, \lambda_2),$$

alors on vérifie que pour tous $x, y \in \Gamma$,

$$\frac{1}{\lambda} d_{S'}(x, y) \leq d_S(x, y) \leq \lambda d_{S'}(x, y),$$

ce qui permet de voir l'application identité comme une quasi-isométrie de (Γ, d_S) vers $(\Gamma, d_{S'})$.

- (v) Soit G un groupe, muni d'une distance invariante à gauche sous l'action de G , et G' un sous-groupe de G d'indice fini (que l'on munit naturellement de la distance induite). Alors G et G' sont quasi-isométriques.

Faisons une remarque importante dans le cas des groupes de type fini. Soit Γ de type fini. Comme la distance des mots sur Γ ne dépend que de Γ à quasi-isométrie près, toute propriété invariante par quasi-isométrie qui est démontrée pour (Γ, d_S) , où S est une certaine partie génératrice, est vraie pour $(\Gamma, d_{S'})$ où S' est une autre partie génératrice de Γ : c'est donc une propriété du groupe Γ . On dit qu'une propriété du groupe de type fini Γ est *géométrique* lorsque c'est un invariant de quasi-isométrie.

Donnons avant de terminer ce paragraphe un résultat technique qui nous servira par la suite (on peut par exemple en trouver la démonstration dans [3]) :

Proposition 1.1. Soit (X, d) un espace métrique géodésique complet localement compact, soit Γ un groupe agissant proprement discontinûment sur X par isométries tel que $\Gamma \backslash X$ soit compact. Alors Γ est de type fini, et Γ muni de la distance des mots associée à une de ses parties génératrices finies est quasi-isométrique à (X, d) .

1.2 Que peut-on faire avec ces instruments ?

Dans toute cette partie, on renvoie à [11] pour plus de précisions.

Un fait crucial est que deux groupes quasi-isométriques ont beaucoup de propriétés algébriques communes. Autrement dit, un certain nombre de propriétés algébriques des groupes de type fini est invariant par quasi-isométries.

Soit \mathcal{P} une propriété, on dit qu'un groupe est virtuellement \mathcal{P} s'il admet un sous-groupe d'indice fini qui a la propriété \mathcal{P} . Comme un groupe de type fini est quasi-isométrique à ses sous-groupes d'indice fini, toute propriété algébrique qui est géométrique au sens donné ci-dessus est virtuelle.

Voici deux propriétés géométriques des groupes de type fini :

- Être à croissance polynômiale est une propriété géométrique des groupes de type fini.

Si G est de type fini, on le munit de la distance des mots associée à une partie génératrice finie S , et on définit la fonction de croissance du couple (G, S) , notée $\gamma_S : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^*$, par

$$\gamma_S(n) = |\{x \in G, l_S(x) \leq n\}|.$$

On dit que le couple (G, S) est à *croissance polynômiale* s'il existe $K > 0$ et $d \in \mathbb{N}$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\gamma_S(n) \leq Kn^d$.

Il est facile de vérifier que l'existence de tels nombres K et d ne dépend pas de la partie génératrice choisie. On dit alors que G est à croissance polynômiale quand il existe une partie génératrice finie S telle que (G, S) est à croissance polynômiale.

La propriété énoncée plus haut affirme donc que tout groupe quasi-isométrique à un groupe de croissance polynômiale a une croissance polynômiale.

Démonstration. En effet, soit G un groupe de type fini à croissance polynômiale, muni d'une partie génératrice S et de la distance des mots d_S : il existe K, d tels que $\gamma_S(n) \leq Kn^d$. Considérons alors un groupe de type fini G' muni d'une partie génératrice S' et de la distance des mots $d_{S'}$. Si G et G' sont quasi-isométriques, il existe $\phi : G' \rightarrow G$, λ, C comme dans la définition.

Comme d_S est invariante par les translations à gauche, on peut toujours supposer que $\phi(e') = e$ où e, e' sont les éléments neutres respectifs de G, G' . Notons $B(r)$ la boule de G de centre e et de rayon r , et $B'(r)$ son homologue dans G' . Avec les inégalités ci-dessus, on obtient que :

$$x \in B'(r) \Rightarrow \phi(x) \in B(\lambda r + C)$$

donc $|\phi(B'(r))| \leq K(\lambda r + C)^d$. Remarquons d'autre part le fait suivant : si a, b ont la même image par ϕ , alors $d_{S'}(a, b) \leq \lambda C$, donc pour tout x de G , $\phi^{-1}(x)$ est inclus dans une boule de rayon λC . Comme la distance $d_{S'}$ est invariante par translation, toutes les boules de rayon fixé ont même cardinal. En particulier, en posant $\theta = |B(\lambda C)|$, on a, pour tout x dans G' , $|\phi(x)| \leq \theta$. En associant ce fait et la minoration $|\phi(B'(r))| \leq K(\lambda r + C)^d$, on obtient que

$$|B'(r)| \leq \theta K(\lambda r + C)^d \leq K' r^d$$

pour un certain K' et pour tous les r supérieurs à 1, ce qui donne le résultat. \square

– Etre virtuellement nilpotent est une propriété géométrique des groupes de type fini.

Rappelons ce qu'est un groupe nilpotent : si G est un groupe quelconque, on considère la suite $G^{(n)}$ définie par $G^{(0)} = G$ et $G^{(n+1)} = [G^{(n)}, G]$. On dit que G est nilpotent s'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $G^{(N)} = \{1_G\}$.

Le résultat provient du point précédent et du *théorème de croissance polynômiale* de Gromov (voir [10]), qui est un des grands résultats de la théorie géométrique des groupes : *un groupe de type fini est à croissance polynômiale si et seulement s'il est virtuellement nilpotent* (ou plus exactement, le théorème de Gromov démontre le sens le plus délicat : la croissance polynômiale implique l'existence d'un sous-groupe nilpotent d'indice fini). Signalons au passage que l'article [10] utilise lui-même des techniques de géométrie des groupes : en particulier, c'est à l'occasion de cette démonstration que M. Gromov fait intervenir pour la première fois des cônes asymptotiques d'espaces métriques.

2 Cônes asymptotiques de groupes

2.1 Cônes asymptotiques

Ici on renvoie par exemple à [7] pour plus de détails.

Soit (X, d) un espace métrique. On cherche comme on l'a annoncé dans l'introduction à "l'observer" d'infiniment loin. Concrètement, on se fixe une suite $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans \mathbb{R}^+ avec $\varepsilon_n \xrightarrow{\infty} 0$, un ultrafiltre non principal ω (on renvoie à l'annexe pour les définitions et propriétés des ultrafiltres), et on essaie de construire la limite des espaces métriques $(X, \varepsilon_n d)$. Pour cela, considérons l'ensemble $X^{\mathbb{N}}$ des suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de X , et tentons de le munir d'une métrique de la façon suivante :

$$d_\omega(x, y) = \lim_{\omega} \varepsilon_n d(x_n, y_n)$$

Hélas ceci ne définit pas directement une distance vu que la limite ci-dessus peut être égale à $+\infty$ ou encore à 0 pour deux éléments distincts de $X^{\mathbb{N}}$. Pour résoudre ce problème, on va se donner une suite de points-base $e = (e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et considérer non plus $X^{\mathbb{N}}$ mais se restreindre à l'ensemble

$$X_e^{\mathbb{N}} = \{(x_n) \in X^{\mathbb{N}} \mid \lim_{\omega} \varepsilon_n d(x_n, e_n) < \infty\}$$

Enfin, pour que la distance d_ω ainsi obtenue possède bien les propriétés d'une distance, on va classiquement quotienter $X_e^{\mathbb{N}}$ par la relation d'équivalence

$$x \sim y \Leftrightarrow d_\omega(x, y) = 0.$$

L'espace quotient $X_e^{\mathbb{N}} / \sim$ sera noté par la suite X_ω . L'application d_ω passe au quotient et définit une distance sur l'espace quotient. L'espace métrique obtenu (X_ω, d_ω) sera appelé *cône asymptotique* de X relativement à l'ultrafiltre ω , l'échelle d'observation $d_n = (1/\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$, et la suite de points-base $e = (e_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Dans la suite, on omettra souvent de préciser l'échelle d'observation, l'ultrafiltre ou encore la suite de points-base considérée, et on utilisera toujours les mêmes notations que ci-dessus. On commettra également l'abus de langage qui consiste à assimiler un point du cône asymptotique et une suite qui le définit.

Exemple. Un premier calcul facile de cône asymptotique.

Munissons \mathbb{R}^n d'une distance d homogène, par exemple une distance issue d'une norme. On fixe un ultrafiltre ω , une échelle $(1/\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$, on choisit comme suite de points-base la suite constante nulle (on verra plus loin que cela suffit pour obtenir tous les cônes asymptotiques). Alors le cône asymptotique $(\mathbb{R}_\omega^n, d_\omega)$ est isométrique à (\mathbb{R}^n, d) .

Moralement, ce résultat provient du fait que l'espace de départ est invariant par les dilatations, donc par les renormalisations successives. Établissons la preuve : si la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définit un point du cône asymptotique, par définition $\lim_\omega \varepsilon_n d(a_n, 0) = \lim_\omega d(\varepsilon_n a_n, 0)$ est finie. La suite $(\varepsilon_n a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc bornée sur un sous-ensemble de \mathbb{N} qui est dans l'ultrafiltre. Par conséquent, $\varepsilon_n a_n$ tend vers un certain $a \in \mathbb{R}^n$ au sens de l'ultrafiltre. Ceci implique que les suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\varepsilon_n^{-1} a)_{n \in \mathbb{N}}$ définissent un même point du cône asymptotique. On vérifie facilement que l'application $a \mapsto \varepsilon_n^{-1} a$ de \mathbb{R}^n dans son cône asymptotique est un plongement isométrique, et d'après ce qui précède c'est une surjection, ce qui établit donc le résultat.

2.2 Premiers résultats

Proposition 2.1. Un cône asymptotique est toujours un espace métrique complet.

Démonstration. Soit (X, d) un espace métrique et (X_ω, d_ω) son cône asymptotique relativement à l'échelle $(d_n)_{n \in \mathbb{N}} = (\frac{1}{\varepsilon_n})_{n \in \mathbb{N}}$, aux points-base $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et à l'ultrafiltre ω . Soit $(x^n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de X_ω : posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x^n = (x_k^n)_{k \in \mathbb{N}}$, $x_k^n \in X$. On peut toujours supposer que $x_0^n = e_n$.

Posons $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N}$. Pour chaque $j \in \mathbb{N}$, on construit par récurrence un sous-ensemble \mathbb{N}_j de \mathbb{N} qui appartient à l'ultrafiltre ω , tel que $\mathbb{N}_j \subset \mathbb{N}_{j-1}$ et :

$$\forall k, l \leq j, \forall i \in \mathbb{N}_j, |d_i(x_i^k, x_i^l) - d_\omega(x^k, x^l)| \leq \frac{1}{2^j}.$$

Comme ω est plus fin que le filtre de Fréchet, on peut toujours supposer que $\mathbb{N}_j \cap \{0, \dots, j-1\} = \emptyset$. Posons alors, pour tout i , $j(i) = \max\{j \mid i \in \mathbb{N}_j\}$, et $y_i = x_i^{j(i)}$. La suite $(y_i)_{i \in \mathbb{N}}$ définit alors un point y du cône asymptotique : en effet, soit i dans \mathbb{N} , comme $i \in \mathbb{N}_{j(i)}$ on a

$$\begin{aligned} d_i(x_i^{j(i)}, e_i) &\leq \frac{1}{2^{j(i)}} + d_\omega(x^{j(i)}, e) \\ &\leq 1 + M. \end{aligned}$$

donc $\lim_\omega d_i(x_i^{j(i)}, e_i) \leq M + 1$.

On va montrer que $d_\omega(x^n, y) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Fixons $\varepsilon > 0$. Comme la suite x^n est de Cauchy, il existe N tel que si $k, l \geq N$, alors $d_\omega(x^k, x^l) \leq \varepsilon$. Choisissons $k \geq N$: on va montrer que $d_\omega(x^k, y) \leq \varepsilon$, ce qui conclut.

Par définition, on a $d_\omega(x^k, y) = \lim_{\omega, i \rightarrow \infty} d_i(x_i^k, x_i^{j(i)})$. Choisissons i tel que $j(i) \geq k$. Alors :

$$\begin{aligned} d_i(x_i^k, x_i^{j(i)}) &\leq \frac{1}{2^{j(i)}} + d_\omega(x^k, x^{j(i)}) \\ &\leq \frac{1}{2^{j(i)}} + \varepsilon. \end{aligned}$$

Comme $\lim_\omega j(i) = \infty$, en passant à la limite selon ω on obtient que $d_\omega(x^k, y) \leq \varepsilon$. □

Proposition 2.2. Soit (X, d) , (X', d') deux espaces métriques. On suppose qu'ils sont quasi-isométriques. Soit $\phi : X \rightarrow X'$ une telle quasi-isométrie. On fixe un ultrafiltre ω , une suite de points-base $e = (e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans X et une échelle $(\frac{1}{\varepsilon_n})_{n \in \mathbb{N}}$. On se fixe également une suite de points-base $e' = (e'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans X' , telle que $\lim_\omega d(e'_n, \phi(e_n)) < +\infty$. Alors les cônes asymptotiques (X_ω, d_ω, e) et $(X'_\omega, d'_\omega, e')$ sont Lipschitz-équivalents.

Démonstration. Soit $\phi : X \rightarrow X'$, λ, C, D tels que pour tous x, y dans X

$$\frac{1}{\lambda}d(x, y) - C \leq d'(\phi(x), \phi(y)) \leq \lambda d(x, y) + C$$

et $d(\phi(X), x') \leq D$ pour tout $x' \in X'$. En remarquant que ϕ envoie une suite de $X_e^{\mathbb{N}}$ sur une suite de $X'_e^{\mathbb{N}}$, on peut définir une application $X_\omega \rightarrow X'_\omega$, que l'on notera également ϕ par commodité, en posant $\phi((x_i)_{i \in \mathbb{N}}) = (\phi(x_i))_{i \in \mathbb{N}}$.

On a alors

$$\frac{1}{\lambda}d_i(x_i, y_i) - C \varepsilon_i \leq d'_i(\phi(x_i), \phi(y_i)) \leq \lambda d_i(x_i, y_i) + C \varepsilon_i$$

où $d_i = \varepsilon_i d$, et, en passant à la limite suivant ω , on obtient que pour deux points x_ω, y_ω du cône asymptotique X_ω de X ,

$$\frac{1}{\lambda}d_\omega(x_\omega, y_\omega) \leq d'_\omega(\phi(x_\omega), \phi(y_\omega)) \leq \lambda d_\omega(x_\omega, y_\omega).$$

Pour terminer la preuve, il suffit maintenant de montrer que ϕ est une bijection de X_ω vers X'_ω . L'injectivité est évidente avec les inégalités précédentes. Pour la surjectivité, prenons un point $x'_\omega = (x'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de X'_ω : pour chaque $n \in \mathbb{N}$, il existe $y_n = \phi(x_n) \in \phi(X)$ tel que $d(x'_n, y_n) \leq D$. Alors il est clair que $(x'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définissent un même point x'_ω du cône asymptotique de X' , que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définit un point x_ω du cône asymptotique de X et que $\phi(x_\omega) = x'_\omega$. □

Remarque. Cette proposition nous sera utile quand on calculera des cônes asymptotiques particuliers : elle permet d'identifier des cônes asymptotiques d'espaces qui se ressemblent.

Exemple. Donnons une application immédiate : on munit \mathbb{Z}^n de la distance des mots associée à sa partie génératrice canonique, notée d . On munit \mathbb{R}^n de la distance $d_1(a, b) = \sum_{i=1}^n |b_i - a_i|$. Alors on a :

$$(\mathbb{Z}_\omega^n, d_\omega) \text{ est isométrique à } (\mathbb{R}^n, d_1).$$

En effet on a déjà vu que (\mathbb{Z}^n, d) est quasi-isométrique à (\mathbb{R}^n, d_1) de constante $\lambda = 1$ (avec λ comme dans la définition). Leurs cônes asymptotiques sont donc Lipschitz-équivalents avec constante de Lipschitz 1 : ils sont isométriques. Le calcul du cône asymptotique de \mathbb{R}^n munie d'une distance homogène effectué plus haut permet de conclure.

Proposition 2.3. Le cône asymptotique d'un espace géodésique est géodésique.

Démonstration. L'idée de la preuve est que la limite de segments géodésiques est un segment géodésique. Soit (X, d) un espace métrique. Choisissons deux points $x_\omega = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}, y_\omega = (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ du cône asymptotique X_ω . Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$ $l_n = d(x_n, y_n)$. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$ il existe un segment géodésique reliant x_n et y_n , i.e. une isométrie

$$\begin{aligned} s_n : [0, l_n] &\rightarrow X \\ t &\rightarrow s_n(t) \end{aligned}$$

telle que $s_n(0) = x_n$ et $s_n(l_n) = y_n$.

On définit alors les fonctions $f_n : [0, 1] \rightarrow X$ par $f_n(t) = s_n(l_n t)$. On vérifie les points suivants :

- (i) Pour $t \in [0, 1]$ fixé, la suite $(f_n(t))_{n \in \mathbb{N}}$ définit un point de X_ω . On le vérifie facilement en écrivant que $\forall t \in [0, 1], d(x_n, f_n(t)) \leq d(x_n, y_n)$.
- (ii) On définit alors $f : [0, 1] \rightarrow X_\omega$ en posant $f(t) = (f_n(t))_{n \in \mathbb{N}}$. L'application f vérifie $f(0) = x_\omega, f(1) = y_\omega$, et si on pose $l = d_\omega(x_\omega, y_\omega)$, l'application $g : [0, l] \rightarrow X_\omega$ qui à s associe $f(\frac{s}{l})$ est une isométrie. La première partie de l'assertion se vérifie immédiatement. Pour la deuxième partie, il suffit de voir que

$$\begin{aligned} d_\omega(f(t), f(t')) &= \lim_{\omega} d_n(f_n(t), f_n(t')) \\ &= \lim_{\omega} \varepsilon_n l_n |t - t'| \\ &= l |t - t'|. \end{aligned}$$

□

Corollaire 2.4. En particulier, le cône asymptotique d'un groupe de type fini est toujours géodésique.

Démonstration. En effet, par la proposition 2.2, le cône asymptotique d'un groupe est isométrique à celui de son graphe de Cayley muni de la distance mentionnée dans le paragraphe 1.1, qui est un espace métrique géodésique. □

Proposition 2.5. Le cône asymptotique d'un groupe Γ ne dépend à isométrie près pas de la suite de points-base choisie : en effet, si $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de points-base et si $e = (e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est la suite constante égale au neutre, les cônes asymptotiques de points-base x et e sont isométriques.

Démonstration. Notons $\Gamma_{\omega, e}$ (resp. $\Gamma_{\omega, x}$) le cône asymptotique de Γ relativement aux points-base e_n (resp. x_n). La suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définit un point de $\Gamma_{\omega, e}$ si et seulement si la suite $(x_n^{-1}a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définit un point de $\Gamma_{\omega, x}$. L'isométrie cherchée est l'application-quotient dans les cônes asymptotiques de l'application

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \Gamma^{\mathbb{N}} \mapsto (x_n^{-1}a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \Gamma^{\mathbb{N}}.$$

□

Proposition 2.6. Si Γ est un groupe de type fini, muni d'une distance des mots d , les cônes asymptotiques de (Γ, d) sont homogènes (un espace métrique est *homogène* s'il existe un groupe d'isométries sur cet espace dont l'action est transitive).

Démonstration. Il suffit d'après la proposition précédente de vérifier que le cône asymptotique de point base l'élément neutre e , d'échelle $(1/\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$, est homogène. Définissons $\Gamma^{\mathbb{N}}$ comme l'ensemble des suites à valeurs dans Γ , et $G = \Gamma_e^{\mathbb{N}}$ le sous-ensemble des suites $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que $\lim_{\omega} d_n(g_n, e) < \infty$. G est un groupe, qui agit sur Γ_{ω} par

$$(g_n) \lim_{\omega} (x_n) = \lim_{\omega} (g_n x_n).$$

Cette action est clairement isométrique, et si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définissent des points du cône asymptotique, $(y_n x_n^{-1})_{n \in \mathbb{N}}$ appartient à G et envoie $\lim_{\omega} (x_n)$ sur $\lim_{\omega} (y_n)$. Ceci montre que l'action de G est transitive. □

2.3 Un exemple d'application

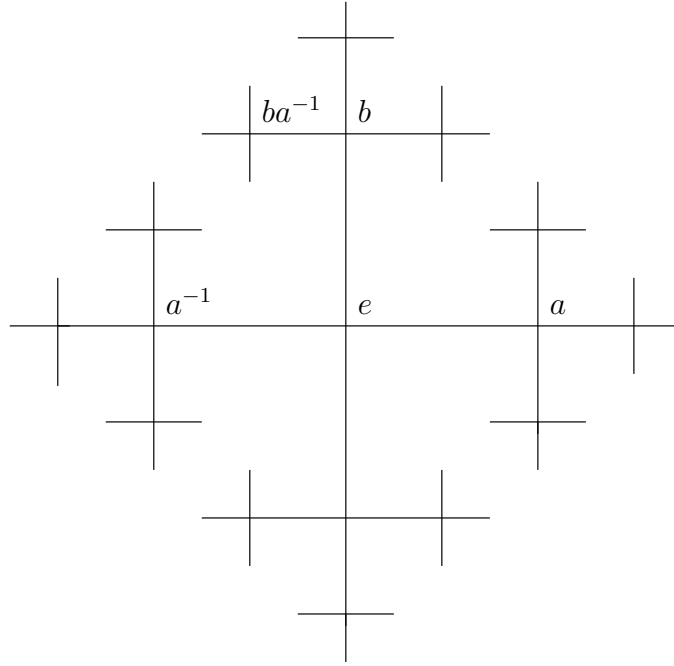
Théorème 2.7. Soit Γ un groupe discret, muni d'une distance invariante à gauche, telle que toutes les boules de rayon fini soient finies. Si tous les cônes asymptotiques du groupe Γ sont connexes par arcs, alors Γ est de type fini.

Remarque. Une distance de ce type peut être obtenue dans le cas suivant : si Γ agit proprement discontinûment et librement par isométries sur un espace métrique propre X , en choisissant $x \in X$, on peut identifier Γ et l'orbite $\Gamma.x$, et munir Γ de la distance induite.

La preuve donnée ci-dessous provient de [5].

Démonstration. Première étape : si on se donne $M > 1$, il existe un entier $N \geq 2$ et un réel $D > 0$ tels que pour tous $x, y \in \Gamma$ vérifiant $d(x, y) \geq D$, il existe un chemin discret d'au plus N pas reliant x et y , chaque pas étant de longueur au plus $\frac{d(x, y)}{M}$. Autrement dit, il existe une suite finie de points $t_0 = x, t_1, \dots, t_m = y$ avec $m \leq N$ tels que $d(t_i, t_{i+1}) \leq \frac{d(x, y)}{M}$.

Supposons que ce ne soit pas le cas. Il existe alors un réel M et deux suites de points x_n, y_n de Γ vérifiant $d(x_n, y_n) = d_n \geq n$ et telles que tout chemin discret d'au plus n pas reliant x_n et y_n comporte un pas de longueur supérieure à $\frac{d_n}{M}$. Passons dans le cône asymptotique Γ_{ω} de points-base x_n , d'échelle d_n : les deux suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définissent deux points x_{ω} et y_{ω} à distance 1 l'un de l'autre, tels que pour tout n , un chemin discret comportant n pas admet au moins un pas de longueur supérieure à $\frac{1}{M}$.

FIG. 3 – Le graphe de Cayley de \mathbb{F}_2

Mais comme le cône asymptotique est connexe par arcs, il existe un arc topologique qui relie x_ω et y_ω , i.e. une application continue $\phi : [0, 1] \rightarrow \Gamma_\omega$ telle que $\phi(0) = x_\omega$ et $\phi(1) = y_\omega$. Comme ϕ est continue sur $[0, 1]$ compact, elle est uniformément continue, et il existe p dans \mathbb{N} , $x_\omega = x_0, x_1, \dots, x_p = y_\omega$ tels que $\forall 0 \leq k \leq p-1$, on ait $d(\phi(x_k), \phi(x_{k+1})) \leq \frac{1}{M}$. Ceci donne une contradiction.

Deuxième étape : une récurrence immédiate montre alors que deux points x, y sont reliés par un nombre fini de pas de longueur inférieure à D . Par conséquent la boule de centre l'élément neutre et de rayon D , qui est de cardinal fini, engendre le groupe. \square

3 Calcul de certains cônes asymptotiques

3.1 Le groupe libre à deux générateurs \mathbb{F}_2

Nous renvoyons à [13] pour plus de détails sur les groupes libres. On s'intéresse ici à \mathbb{F}_2 , groupe libre à deux générateurs. Notons $\{x, y\}$ un système de générateurs de \mathbb{F}_2 , et munissons \mathbb{F}_2 de la distance des mots associée à cette partie génératrice. Son graphe de Cayley a alors l'allure de la figure 3.

Ce graphe de Cayley est un *arbre réel* pour la distance induite par la distance des mots sur \mathbb{F}_2 .

3.1.1 Les arbres réels

Un *arbre réel* est un espace métrique géodésique dans lequel deux points sont reliés par un unique arc topologique (un arc topologique est simplement une application continue injective d'un segment de \mathbb{R} dans un espace topologique).

Une définition équivalente est la condition de 0-hyperbolicité. Considérons un espace métrique géodésique X , pour tous points x, y , on note $[x, y]$ un segment géodésique reliant x à y . On dit qu'un espace métrique géodésique X est δ -hyperbolique ($\delta \geq 0$) si, pour chaque triplet de points (x, y, z) de X , chaque côté du triangle géodésique $[x, y] \cup [y, z] \cup [z, x]$ est inclus dans le δ -voisinage de la réunion des deux autres

côtés (tout point d'un des deux côtés est à une distance inférieure à δ d'un point inclus dans l'un des autres côtés).

La preuve de l'équivalence entre arbre réel et espace géodésique 0-hyperbolique que nous donnons ici est inspirée de [2].

- (i) L'implication directe est facile, à cause de l'unicité de l'arc topologique reliant deux points : s'il existait un triangle non-aplati, on pourrait trouver deux points reliés par deux arcs distincts.
- (ii) Pour l'implication réciproque, considérons un espace métrique géodésique 0-hyperbolique (X, d) . Choisissons deux points x, y de X , et notons $[x, y]$ un segment hyperbolique entre ces deux points. Si \mathcal{S} est un segment topologique quelconque entre x et y , montrons que $\mathcal{S} = [x, y]$. Il existe $\phi : [0, 1] \rightarrow X$ continue injective telle que $\phi(0) = x$, $\phi(1) = y$ et $\phi([0, 1]) = \mathcal{S}$. Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Par uniforme continuité de ϕ sur $[0, 1]$ compact, on peut trouver un entier n , une suite $x = x_0, \dots, x_n = y$ de points consécutifs sur \mathcal{S} vérifiant, pour $0 \leq i \leq n-1$, $d(x_i, x_{i+1}) \leq \varepsilon$. D'autre part, on sait par 0-hyperbolicité de X que si $1 \leq i \leq n-1$, $[x_{i-1}, x_{i+1}] \subset [x_{i-1}, x_i] \cup [x_i, x_{i+1}]$ (car le triangle géodésique $\{x_{i-1}, x_i, x_{i+1}\}$ est dégénéré). Donc on a en itérant

$$[x, y] = [x_0, x_n] \subset \bigcup_{0 \leq i \leq n-1} [x_i, x_{i+1}].$$

Mais on a aussi, par construction des x_i ,

$$\bigcup_{0 \leq i \leq n-1} [x_i, x_{i+1}] \subset V_\varepsilon(\mathcal{S})$$

où $V_\varepsilon(\mathcal{S})$ est l' ε -voisinage de \mathcal{S} . Faisant tendre ε vers 0 on obtient $[x, y] \subset \mathcal{S}$. Mais comme ce sont deux arcs topologiques entre x et y on en déduit qu'ils sont égaux. Il y a donc bien un unique arc topologique entre deux points de X et X est un arbre réel.

Donnons quelques définitions supplémentaires sur les arbres réels, avant de passer au calcul proprement dit du cône asymptotique de \mathbb{F}_2 .

Soit T un arbre réel. Soit x un point de T . La *valence* de T au point x est le nombre de composantes connexes de $T \setminus \{x\}$. Soit

$$\mathcal{R}_p = \{r : [0, a) \rightarrow T \mid a > 0, r \text{ isométrie et } r(0) = p\}.$$

On dira que $r_1 \sim r_2$ si et seulement s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $r_{1|_{[0, \varepsilon)}} = r_{2|_{[0, \varepsilon)}}$. On définit alors l'*ensemble des directions* en x , noté Σ_x : c'est le quotient \mathcal{R}_p / \sim . Un *point de branchement* de T est un point x tel que Σ_x soit de cardinal au moins 3.

Le cardinal de Σ_x est égal à la valence de T au point x . En effet, posons

$$\Phi : (r \text{ isométrie définie sur } [0, a[, r(0) = x) \mapsto \text{la composante connexe contenant } r(]0, a[).$$

Cette application est surjective (en prenant un point dans une des composantes connexes, considérer le segment géodésique reliant x et ce point). Elle passe au quotient pour \sim et induit une application bijective de Σ_x dans l'ensemble des composantes connexes de $T \setminus \{x\}$ (l'injectivité découle de l'unicité de l'arc reliant deux points).

On va maintenant définir un arbre particulier. Pour toute cette partie, se référer à [9]. Soit \mathcal{A} l'ensemble des fonctions $f : [0, \rho_f[\rightarrow [0, 1]$, $0 < \rho_f < +\infty$ telles que $f(0) = 0$ et f est constante par morceaux à droite, *i.e.* pour tout $0 < t < \rho_f$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que f soit constante sur $[t, t + \varepsilon]$. On munit \mathcal{A} de la distance suivante :

$$d_{\mathcal{A}}(f, g) = (\rho_f - s) + (\rho_g - s)$$

où s est le temps de bifurcation de f et g , c'est à dire la borne supérieure des nombres t tel que f et g coïncident sur $[0, t]$.

Il est prouvé dans [9] que \mathcal{A} , muni de cette distance, est un arbre réel de valence 2^{\aleph_0} en chaque point, qui est un arbre *universel* au sens où :

Proposition 3.1. Tout arbre réel qui est de valence inférieure à 2^{\aleph_0} en tout point se plonge isométriquement dans \mathcal{A} , et tout arbre réel de valence exactement 2^{\aleph_0} en tout point est isométrique à \mathcal{A} .

3.1.2 Cônes asymptotiques des espaces δ -hyperboliques (et donc des arbres)

Proposition 3.2. Les cônes asymptotiques d'un espace δ -hyperbolique sont 0-hyperboliques. Ce sont donc des arbres réels.

La démonstration de cette proposition repose sur un fait.

Fait. Si H est un espace δ -hyperbolique, les segments géodésiques d'un cône asymptotique de H sont des limites de segments géodésiques de H . Autrement dit si $\sigma_\omega : [0, 1] \rightarrow H_\omega$ est un segment géodésique renormalisé d'extrémités $a_\omega = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $b_\omega = (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$, il existe des segments géodésiques renormalisés $\sigma_{g,n}$ dans H , d'extrémités a_n et b_n , tels que $\sigma_\omega(t) = (\sigma_{g,n}(t))_{n \in \mathbb{N}}$ pour tout $t \in [0, 1]$.

Démonstration. Choisissons comme ci-dessus deux points a_ω, b_ω du cône asymptotique H_ω et des suites $(a_n), (b_n)$ définissant ces points. On pose $d = d_\omega(a_\omega, b_\omega)$ et $d_n = d(a_n, b_n)$. H_ω est géodésique car H l'est. On se donne un segment géodésique renormalisé entre a_ω et b_ω :

$$s_\omega : [0, 1] \longrightarrow H_\omega \quad s_\omega(0) = a_\omega, s_\omega(1) = b_\omega \quad d_\omega(s(t), s(t')) = d|t - t'|$$

Pour tout t dans $[0, 1]$ on choisit une suite $(s_n(t))$ qui définit $s_\omega(t)$. On choisit aussi un segment géodésique renormalisé $s_{g,n}$ qui relie a_n à b_n . On veut prouver que $s_\omega(t)$ appartient à l'image dans le cône de la suite des images de $s_{g,n}$, pour tout t , c'est-à-dire que le segment géodésique dans le cône est inclus dans l'image des segments géodésiques successifs. Ceci permet de conclure : en définissant $s_{g,\omega}(t) = (s_{g,n}(t))_{n \in \mathbb{N}}$, on constate que s_ω et $s_{g,\omega}$ sont deux segments géodésiques renormalisés de mêmes extrémités, et grâce à l'inclusion précédente on a l'égalité.

Fixons $t, n \in \mathbb{N}$. Considérons un triangle géodésique de sommets $a_n, b_n, s_n(t)$, dont les côtés sont l'image de $s_{g,n}$ et deux segments géodésiques quelconques $\mathcal{S}_a, \mathcal{S}_b$ reliant respectivement a_n et $s_n(t)$, b_n et $s_n(t)$.

Il existe un point de l'image de $s_{g,n}$ qui est à une distance inférieure à δ des deux autres côtés. En effet, comme l'espace H est δ -hyperbolique, la réunion des δ -voisinages de \mathcal{S}_a et \mathcal{S}_b recouvre l'image de $s_{g,n}$. Les segments \mathcal{S}_a et \mathcal{S}_b sont des fermés dans H , donc leurs δ -voisinages sont également fermés. En considérant l'intersection de ces fermés avec l'image de $s_{g,n}$, on en déduit que ce dernier ensemble est la réunion de deux fermés tous deux non-vides (ils contiennent chacun un des sommets), qui ont nécessairement un point commun car l'image de $s_{g,n}$ est connexe.

Notons m_n un tel point. La suite (m_n) définit un point m_ω , qui est dans l'image des segments géodésiques $s_{g,n}$. Par passage à la limite, ce point est à distance nulle de chacun des deux autres côtés du triangle-image. C'est donc un point commun aux trois côtés. Montrons que $m_\omega = s_\omega(t)$. On écrit :

$$\begin{aligned} d(a_\omega, b_\omega) &= d(a_\omega, s_\omega(t)) + d(b_\omega, s_\omega(t)) &= d(a_\omega, m_\omega) + d(m_\omega, s_\omega(t)) + d(b_\omega, m_\omega) + d(m_\omega, s_\omega(t)) \\ & &= d(a_\omega, b_\omega) + d(m_\omega, s_\omega(t)) \end{aligned}$$

d'où le résultat. □

A l'aide de ce résultat, on montre la proposition 3.2.

Soit un triangle géodésique T_ω dans le cône : d'après ce qui précède c'est la limite d'une suite de triangles géodésiques T_n . Pour chacun de ces triangles, un côté quelconque est inclus dans la réunion des δ -voisinages des deux autres côtés. Par conséquent, un côté de T_ω est inclus dans la réunion des deux autres côtés. Ceci étant vrai de tout triangle, le cône H_ω est bien 0-hyperbolique.

3.1.3 Calcul des cônes asymptotiques de \mathbb{F}_2

On fixe pour toute la suite un ultrafiltre ω , une échelle d'observation $d = (1/\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$, et on veut déterminer le cône $(\mathbb{F}_2)_\omega$ relatif à ω, d et à la suite de points-base égale à l'élément neutre e de \mathbb{F}_2 . On notera aussi e l'image de la suite de points-base dans le cône asymptotique. Le résultat est le suivant :

Proposition 3.3. Le cône asymptotique de \mathbb{F}_2 est un arbre réel de valence 2^{\aleph_0} en tout point.

Corollaire 3.4. D'après la proposition mentionnée ci-dessus, $(\mathbb{F}_2)_\omega$ est isométrique à \mathcal{A} .

Comme \mathbb{F}_2 est un arbre réel, il est en particulier 0-hyperbolique. La proposition 3.2 dit donc que le cône asymptotique de \mathbb{F}_2 est un arbre réel. D'après la proposition 2.6, c'est un espace homogène. Sa valence est donc la même en tout point. Il suffit de prouver que sa valence en e est égale à 2^{\aleph_0} .

La démonstration est inspirée de [4]. Cela consiste à montrer que l'ensemble des directions en e dans le cône et le *bord* de \mathbb{F}_2 ont même cardinal.

Définition 3.1. On appelle *bord* de \mathbb{F}_2 , et on note $\partial\mathbb{F}_2$, l'ensemble des rayons géodésiques du graphe de Cayley de \mathbb{F}_2 dont l'extrémité est en e , c'est-à-dire l'ensemble des plongements isométriques $[0, +\infty[\rightarrow \text{Cay}(\mathbb{F}_2)$ envoyant 0 sur e .

Remarquons que si x, y sont deux rayons géodésiques distincts issus de e , il existe un entier n tel que x et y coïncident exactement sur $[0, n]$.

Posons $d(x, y) = 0$ si $x = y$, et sinon :

$$d(x, y) = \exp(-n) \text{ si } x \text{ et } y \text{ coïncident exactement sur } [0, n].$$

On vérifie que cette application définit une distance ultramétrique sur $\partial\mathbb{F}_2$.

Proposition 3.5. Le bord de \mathbb{F}_2 est un espace de Cantor (c'est à dire un espace topologique compact, métrisable, totalement discontinu, sans point isolé). Il est bien connu que tout espace de Cantor est homéomorphe à l'espace triadique de Cantor, dont le cardinal est 2^{\aleph_0} .

Corollaire 3.6. Le cardinal du bord de \mathbb{F}_2 est 2^{\aleph_0} .

Démonstration. On munit $\partial\mathbb{F}_2$ de la distance définie ci-dessus.

- Pour montrer la compacité, on considère une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de rayons géodésiques issus de e . On construit par récurrence un rayon géodésique qui est un point d'adhérence de la suite. La construction repose sur le caractère localement fini du Cayley de \mathbb{F}_2 . Si on restreint les rayons à la première arête, il n'y a que quatre possibilités, donc il existe une infinité de rayons ayant leur première arête en commun. En répétant cet argument, on montre qu'on peut choisir un segment géodésique s_n de longueur n issu de e dans le graphe de Cayley, tel qu'il y ait une infinité de rayons coïncidant avec ce segment sur $[0, n]$, et tel que s_n restreint à $[0, n-1]$ soit égal à s_{n-1} . On obtient un rayon géodésique s en posant $s|_{[0, n]} = s_n$, et en faisant une extraction diagonale, on obtient une sous-suite de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergeant vers s .
- L'ensemble $\partial\mathbb{F}_2$ est un ensemble totalement discontinu. Pour le montrer, on se donne une application continue $\phi : [0, 1] \rightarrow \partial\mathbb{F}_2$, on pose $\phi(0) = x, \phi(1) = y$ et on montre qu'alors $x = y$. Choisissons $n \in \mathbb{N}, t_0 \in [0, 1]$: par continuité de ϕ , si t est suffisamment proche de t_0 , on a $d(\phi(t_0), \phi(t)) \leq \exp(-n)$ donc $\phi(t_0)$ et $\phi(t)$ coïncident sur $[0, n]$. Par un argument de connexité, les rayons géodésiques $\phi(t)$ coïncident donc tous sur $[0, n]$. Si x et y étaient deux points distincts, il existerait $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que $x|_{[0, n_0]} \neq y|_{[0, n_0]}$, ce qui est impossible.
- Il reste à prouver que $\partial\mathbb{F}_2$ est sans point isolé. Si on se donne un rayon géodésique x de $\partial\mathbb{F}_2$ il suffit de choisir une suite de rayons x_n tels que x_n et x coïncident sur $[0, n]$ et ne coïncident plus après : on vérifie immédiatement que $x_n \rightarrow x$. □

Voici maintenant la preuve annoncée.

- (i) Deux rayons géodésiques distincts dans $\partial\mathbb{F}_2$ définissent des directions distinctes en e dans le cône asymptotique.

Choisissons r, s deux rayons géodésiques, c'est-à-dire deux isométries $[0, +\infty[\rightarrow \text{Cay}(\mathbb{F}_2)$ valant e en 0. Comme r et s sont des isométries, les suites $(r(\frac{1}{\varepsilon_n}t))_{n \in \mathbb{N}}$ et $(s(\frac{1}{\varepsilon_n}t'))_{n \in \mathbb{N}}$ définissent des points du cône asymptotique pour tous les réels positifs t, t' . On pose

$$\rho_r(t) = (r(\frac{1}{\varepsilon_n}t))_{n \in \mathbb{N}} \quad \rho_s(t') = (s(\frac{1}{\varepsilon_n}t'))_{n \in \mathbb{N}}.$$

Il est facile de vérifier que ρ_r, ρ_s sont des isométries. Montrons que si $r \neq s$, le seul point commun à ρ_r et ρ_s est le point e . Fixons t, t' deux réels strictement positifs : si n est assez grand, $r(\frac{1}{\varepsilon_n}t)$ et $s(\frac{1}{\varepsilon_n}t')$ sont sur deux branches distinctes du graphe de Cayley de \mathbb{F}_2 , et leur distance est

$$d(r(\frac{1}{\varepsilon_n}t), s(\frac{1}{\varepsilon_n}t')) = (\frac{1}{\varepsilon_n}t + \log(d(r, s))) + (\frac{1}{\varepsilon_n}t' + \log(d(r, s))).$$

On fait alors le calcul suivant :

$$\begin{aligned}
d_\omega(\rho_r(t), \rho_s(t')) &= \lim_\omega \varepsilon_n d(r(\frac{1}{\varepsilon_n}t), s(\frac{1}{\varepsilon_n}t')) \\
&= \lim_\omega \varepsilon_n ((\frac{1}{\varepsilon_n}t + \log(d(r, s))) + (\frac{1}{\varepsilon_n}t' + \log(d(r, s)))) \\
&= \lim_\omega t + t' + 2\varepsilon_n \log(d(r, s)) \\
&= t + t' > 0
\end{aligned}$$

Le seul point commun de ρ_r et ρ_s est donc l'origine. Les classes de ρ_r et ρ_s dans Σ_e sont distinctes. On a donc trouvé une application injective $r \rightarrow \rho_r$ de $\partial\mathbb{F}_2$ dans l'ensemble des directions en e de $(\mathbb{F}_2)_\omega$.

- (ii) Ensuite, on construit une surjection de l'ensemble des suites à valeurs dans $\partial\mathbb{F}_2$ dans l'ensemble des directions en e de $(\mathbb{F}_2)_\omega$. Comme $\partial\mathbb{F}_2^{\mathbb{N}}$ a le même cardinal que $\partial\mathbb{F}_2$, cela donne l'égalité des cardinaux voulue et conclut la preuve.

Pour fabriquer une telle surjection, on associe à chaque direction dans $(\mathbb{F}_2)_\omega$ une suite de points du bord de \mathbb{F}_2 , c'est-à-dire une suite de rayons géodésiques d'extrémité e , de la façon suivante. On choisit une direction dans Σ_e : il existe un segment géodésique ayant une extrémité en e qui la définit. D'après le fait établi dans la section 3.1.2, ce segment est une limite de segments géodésiques de \mathbb{F}_2 qui ont une extrémité en e , indexés par \mathbb{N} , dont la longueur croît proportionnellement à $1/\varepsilon_n$. On voit facilement que l'on peut prolonger tout segment géodésique ayant une extrémité en e en un rayon géodésique (il suffit de poursuivre arbitrairement le long d'une branche du graphe de Cayley le segment en question). Deux directions distinctes de Σ_e donnent naissance à deux suites distinctes de rayons géodésiques par la construction précédente : un représentant s d'une direction étant choisi, si on tronque la suite de rayons $(r_{s,n})_{n \in \mathbb{N}}$ qui lui est associée à la longueur $1/\varepsilon_n$ pour le n -ième rayon, on obtient à la limite dans le cône de \mathbb{F}_2 un segment géodésique attaché en e qui définit la même direction que s . On peut donc définir une application surjective comme annoncé.

3.2 Le groupe modulaire $PSL_2(\mathbb{Z})$

3.2.1 Introduction de $PSL_2(\mathbb{Z})$

On s'intéresse maintenant au groupe multiplicatif $PSL_2(\mathbb{Z}) = SL_2(\mathbb{Z})/\{I, -I\}$. Il est de type fini, et isomorphe au groupe $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Si a engendre $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ et b engendre $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, leurs images dans le groupe modulaire, encore notées a et b , engendrent le groupe.

On munit $PSL_2(\mathbb{Z})$ de la distance des mots associée à la partie génératrice $\{a, b\}$, notée d . Son graphe de Cayley a alors l'allure représentée sur la figure 6.

3.2.2 Le cône asymptotique de $PSL_2(\mathbb{Z})$

On va montrer que les cônes asymptotiques de $PSL_2(\mathbb{Z})$ sont également isométriques à \mathcal{A} . On se donne donc une échelle et un ultrafiltre ω , et on a le résultat suivant :

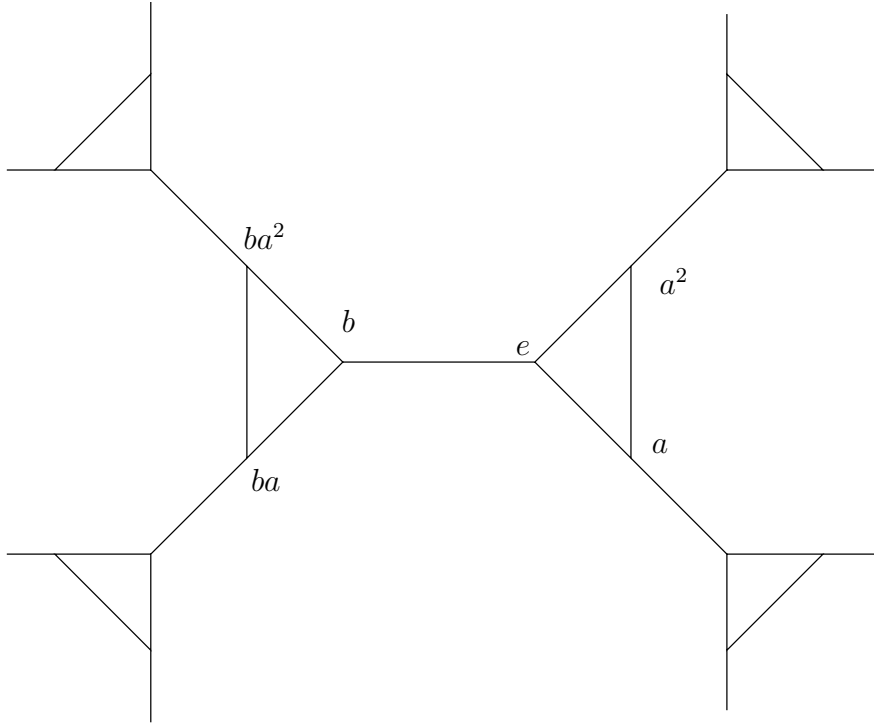
Théorème 3.7. *Le cône asymptotique $(PSL_2(\mathbb{Z})_\omega, d_\omega)$ est un arbre réel isométrique à \mathcal{A} .*

Démonstration. La preuve se fait en trois étapes.

- (i) On montre d'abord que le graphe de Cayley de $PSL_2(\mathbb{Z})$ est quasi-isométrique à l'arbre simplicial réel de valence 3 noté \mathcal{T}_3 .

Il suffit de considérer l'application f de $PSL_2(\mathbb{Z})$ dans \mathcal{T}_3 , indiquée sur la figure 7, qui "écrase" les triangles non-aplatés dans le graphe de Cayley de $PSL_2(\mathbb{Z})$. On vérifie facilement que c'est une quasi-isométrie, car elle est surjective et vérifie :

$$\frac{1}{2}d(x, y) - 1 \leq d(f(x), f(y)) \leq d(x, y).$$

FIG. 4 – $PSL_2(\mathbb{Z})$

- (ii) En reprenant la preuve qui montre que $(\mathbb{F}_2)_\omega$ est quasi-isométrique à \mathcal{A} , on pourrait montrer directement que le cône asymptotique de l'arbre simplicial réel de valence k est quasi-isométrique à \mathcal{A} . A la place, on se ramène au calcul du cône asymptotique de \mathbb{F}_2 fait dans le premier paragraphe grâce au lemme suivant :

Lemme 3.8. Si \mathcal{T}_k et $\mathcal{T}_{k'}$ sont deux arbres réguliers simpliciaux de valences $k, k' \geq 3$, alors \mathcal{T}_k et $\mathcal{T}_{k'}$ sont quasi-isométriques (lorsqu'ils sont munis de leur métrique canonique).

Il suffit de montrer que \mathcal{T}_3 et \mathcal{T}_k sont quasi-isométriques pour $k > 3$. On renvoie à la figure 8 pour la définition de l'application $g : \mathcal{T}_3 \rightarrow \mathcal{T}_k$ qui envoie les arêtes fines sur des arêtes de façon isométrique, et les chemins épaissis de longueur $k - 3$ sur des sommets. L'application g ainsi définie est surjective, et vérifie :

$$\frac{1}{k-2}d(x, y) + 3 - k \leq d(g(x), g(y)) \leq d(x, y).$$

Comme le graphe de Cayley de \mathbb{F}_2 est un arbre simplicial réel de valence 4, on déduit de ce qui précède que \mathbb{F}_2 et $PSL_2(\mathbb{Z})$ sont quasi-isométriques. Leurs cônes asymptotiques sont donc Lipschitz-équivalents par la proposition 2.2.

Le cône asymptotique de $PSL_2(\mathbb{Z})$ est géodésique, d'après la proposition 2.3, et comme une application bilipschitzienne envoie deux arcs topologiques distincts reliant deux points sur deux arcs topologiques distincts reliant leurs images, l'unicité de l'arc reliant tout couple de points dans le cône asymptotique de $PSL_2(\mathbb{Z})$ découle de l'unicité dans le cône de \mathbb{F}_2 . Le cône asymptotique de $PSL_2(\mathbb{Z})$ est donc un arbre réel.

- (iii) Reste à voir que cet arbre réel est isométrique à \mathcal{A} . Mais la valence étant un invariant topologique, et étant donné qu'on a un homéomorphisme entre le cône asymptotique de $PSL_2(\mathbb{Z})$ et celui de \mathbb{F}_2 d'après ce qui précède, l'arbre réel $PSL_2(\mathbb{Z})_\omega$ a en chaque point une valence 2^{\aleph_0} . Ceci permet donc de conclure comme dans le paragraphe précédent que $(PSL_2(\mathbb{Z})_\omega, d_\infty)$ est isométrique à $(\mathcal{A}, d_{\mathcal{A}})$.

□

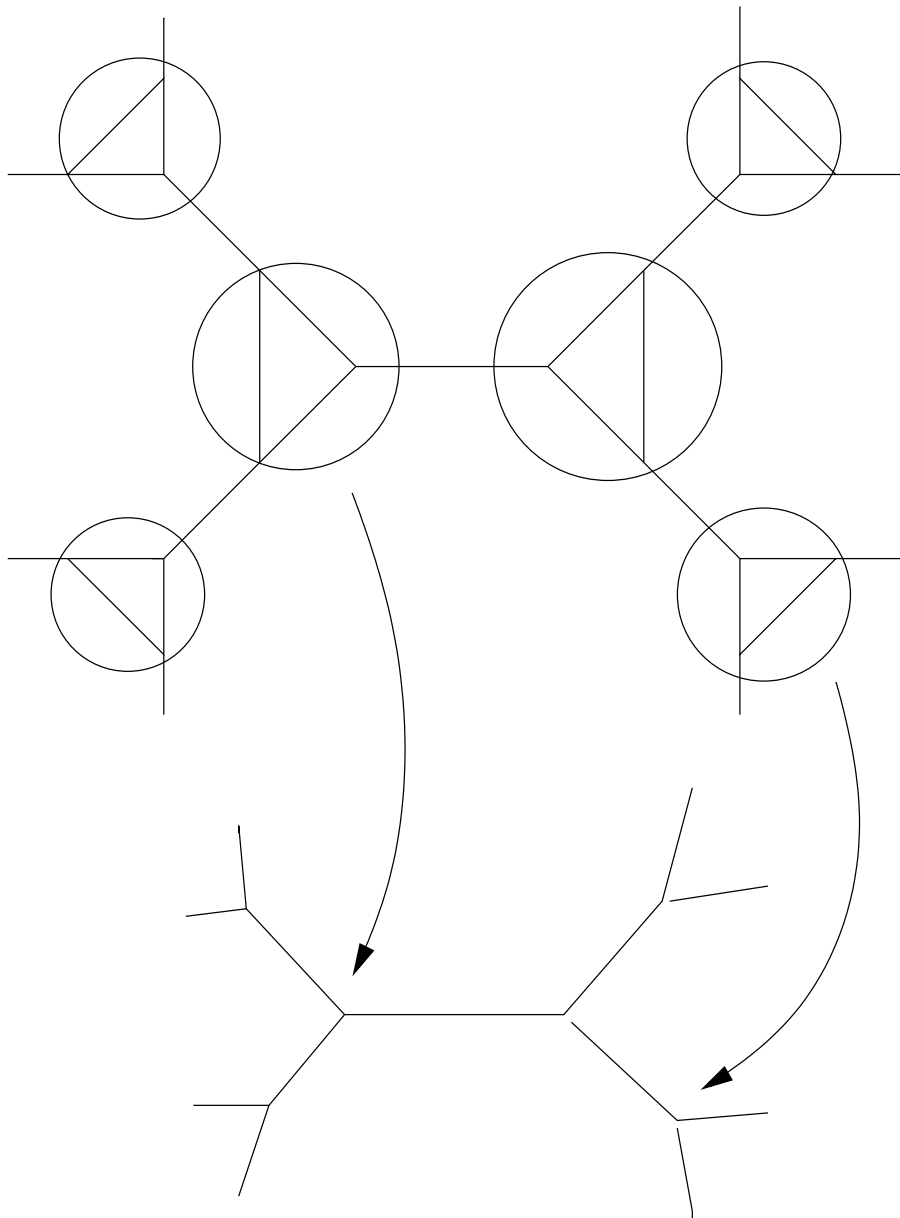
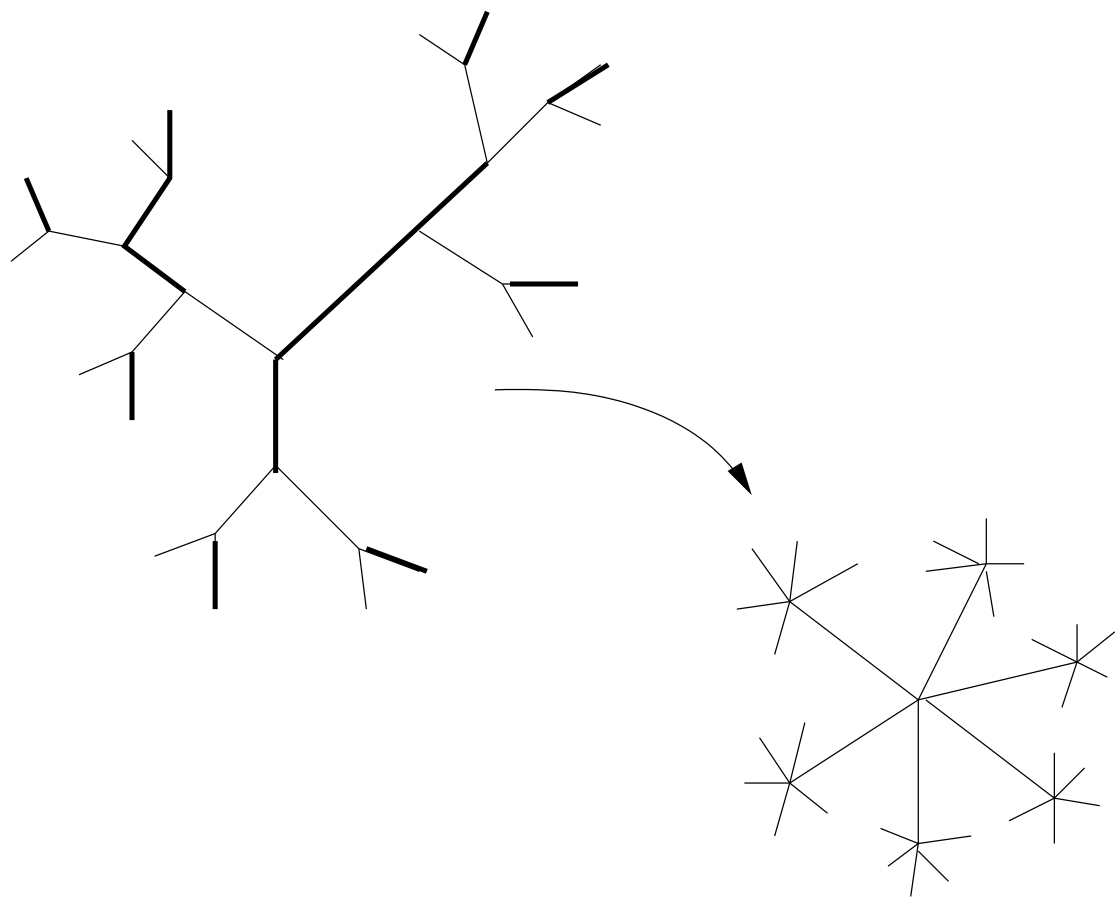


FIG. 5 – Une quasi-isométrie $PSL_2(\mathbb{Z}) \rightarrow \mathcal{T}_3$

FIG. 6 – Une quasi-isométrie $\mathcal{T}_3 \rightarrow \mathcal{T}_6$

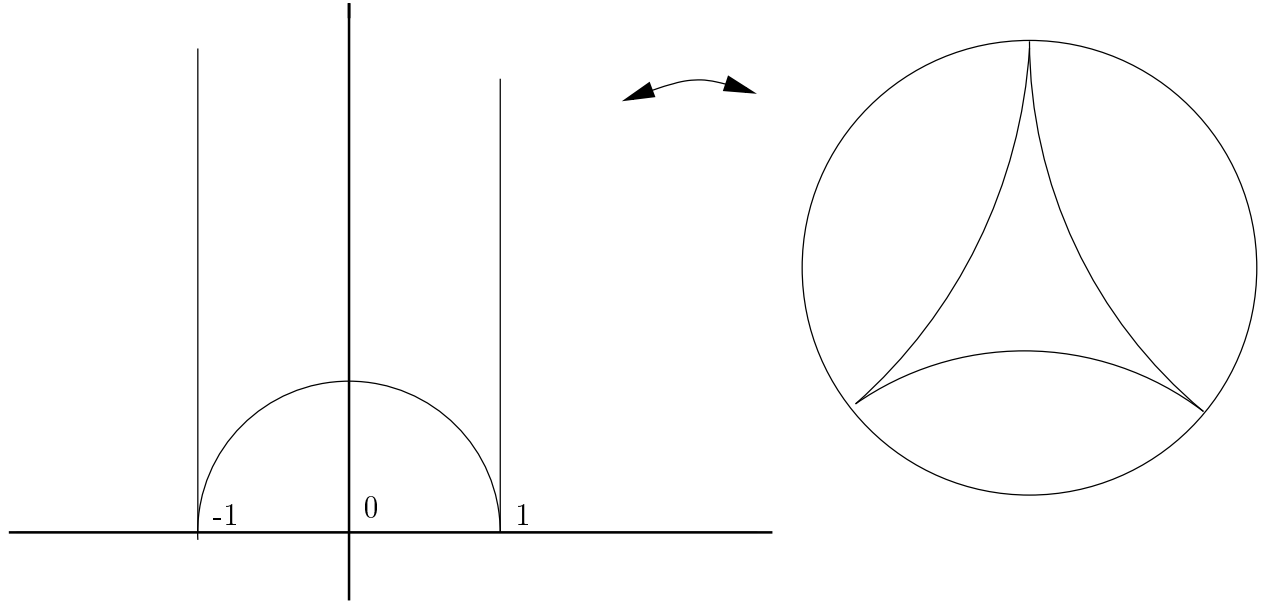


FIG. 7 – Deux réalisations du plan hyperbolique, dans lesquelles on a tracé le triangle de la partie 3.3.2

3.3 Le plan hyperbolique \mathbb{H}_2

3.3.1 Notions élémentaires sur \mathbb{H}_2

Pour toutes les preuves, on renvoie par exemple à [12].

On considère simultanément deux modèles du plan hyperbolique que l'on munit des éléments de distance hyperbolique :

- (i) Le demi plan supérieur $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) > 0\}$ muni de $ds_{hyp}(z) = \frac{ds_{euc}}{r \text{Im}(z)}$
- (ii) Le disque de Poincaré $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ muni de $ds_{hyp}(z) = \frac{2ds_{euc}}{1-|z|^2}$

où ds_{euc} désigne un élément de distance euclidienne. L'application $z \rightarrow 2\frac{z-i}{z+1}$ est une isométrie de \mathbb{D} sur \mathbb{H} .

On définit la distance hyperbolique $d_{hyp}(x, y)$ entre deux points x et y comme étant la borne inférieure sur l'ensemble des chemins γ de classe C^1 par morceaux reliant x à y , de l'intégrale $\int_0^1 ds_{hyp}(\gamma(t))dt$

Cette borne inférieure est atteinte par un unique chemin (à reparamétrage près), qui est une géodésique entre x et y . Le plan hyperbolique (ainsi muni de la distance hyperbolique) est donc un espace métrique géodésique.

Notons que dans \mathbb{H} les géodésiques complètes sont les droites perpendiculaires à l'axe réel et les demi-cercles centrés sur cet axe. Dans \mathbb{D} , ce sont les diamètres du cercle et les arcs de cercles perpendiculaires au bord.

3.3.2 Le cône asymptotique de \mathbb{H}_2

Proposition 3.9. L'espace métrique \mathbb{H}_2 est 2-hyperbolique.

Démonstration. On peut trouver la preuve dans [2]. On veut montrer qu'un point d'un côté du triangle est inclus dans le 2-voisinage de la réunion des deux autres côtés. Il suffit de le vérifier pour des triangles ayant leurs sommets à l'infini. En effet, considérons un triangle géodésique du plan hyperbolique : si on fait tendre un sommet vers le cercle à l'infini le long d'un des côtés adjacents, la distance maximale d'un point du triangle à la réunion des côtés opposés à ce point croît. Par conséquent, cette distance est plus grande pour un triangle ayant ses trois sommets à l'infini. D'autre part, à isométrie près, un tel triangle est unique. Il suffit donc de faire la vérification pour un de ces triangles. Prenons pour modèle de \mathbb{H}_2 le

demi-plan supérieur, et considérons par exemple le triangle avec sommets à l'infini de sommets 1 , -1 et ∞ (voir figure 9).

Si on regarde la réalisation de ce triangle dans le disque de Poincaré, on voit qu'il suffit de vérifier que l'un des côtés est dans le 2-voisinage de la réunion des deux autres côtés. En résumé, il suffit de montrer que $[-1, \infty]$ est à une distance inférieure à 2 de la réunion des autres côtés dans le demi-plan. Et il est facile de le vérifier : il suffit de regarder une horizontale en chaque point de ce côté.

Remarque. En fait 2 n'est pas la meilleure constante (voir [2]), mais nous n'aurons pas besoin d'un résultat plus fin ici. \square

Remarque. Ceci prouve donc que le plan hyperbolique est bien hyperbolique selon notre définition, c'est-à-dire δ -hyperbolique pour un certain $\delta \geq 0$.

Corollaire 3.10. En vertu de la proposition 3.2, les cônes asymptotiques de \mathbb{H}_2 sont des arbres réels.

En fait, en généralisant le calcul des cônes asymptotiques de \mathbb{F}_2 , on peut prouver que les cônes de \mathbb{H}_2 sont isométriques à l'arbre universel \mathcal{A} .

3.4 Groupes fondamentaux de surfaces

On va indiquer dans cette partie une application de la proposition 1.1, que nous rappelons ici :

Proposition 1.1. Soit (X, d) un espace métrique géodésique complet localement compact, soit Γ un groupe agissant proprement discontinûment sur X par isométries, à quotient compact. Alors Γ est de type fini, et Γ muni de la distance des mots associée à une de ses parties génératrice finies est quasi-isométrique à (X, d) .

Pour les démonstrations de topologie et de géométrie de cette partie, nous renvoyons par exemple à [14].

On se donne une variété topologique compacte et connexe V . Rappelons les deux résultats de topologie suivants :

Théorème 3.11. *Il existe un revêtement universel $\tilde{V} \rightarrow V$, c'est-à-dire un revêtement $\tilde{V} \rightarrow V$ où \tilde{V} est une variété topologique simplement connexe. De plus, si Γ est le groupe des automorphismes de revêtement de $\tilde{V} \rightarrow V$ (c'est-à-dire l'ensemble des homéomorphismes de \tilde{V} dans lui-même qui commutent avec la projection canonique $p : \tilde{V} \rightarrow V$), alors le groupe Γ agit librement et proprement sur \tilde{V} et la projection p induit un homéomorphisme $\tilde{V}/\Gamma \rightarrow V$.*

Théorème 3.12. (Théorème d'uniformisation de Riemann.) *Si S est une surface topologique compacte connexe non-homéomorphe à la sphère \mathbb{S}_2 , au plan projectif \mathbb{P}_2 , au tore \mathbb{T}^2 et à la bouteille de Klein, alors il existe un revêtement universel $\mathbb{H}_2 \rightarrow S$ tel que le groupe des automorphismes de revêtement agisse par isométries sur \mathbb{H}_2 .*

La preuve de ce résultat célèbre peut par exemple être trouvée dans [6].

Forts de ces résultats, on remarque que si une surface compacte connexe S n'est pas l'une des surfaces exceptionnelles précédentes, son groupe d'automorphismes de revêtement vérifie les hypothèses de la proposition 1.1 : on en déduit donc que tous les cônes asymptotiques du groupe des automorphismes de revêtement d'une telle surface sont des arbres réels (un tel cône asymptotique est Lipschitz-équivalent à un cône de \mathbb{H}_2 et géodésique comme cône asymptotique d'un groupe de type fini, et le raisonnement est le même que pour $PSL_2(\mathbb{Z})$).

3.5 Remarque

Il ne faut pas croire que tous les cônes asymptotiques de groupes sont des arbres ! Les similitudes observées dans les résultats précédents proviennent du fait que les groupes que l'on a considérés étaient tous hyperboliques. Un résultat de [11], chap. 2.A, affirme qu'un espace métrique est hyperbolique si et seulement si ses cônes asymptotiques sont des arbres réels. Mentionnons pour indication deux autres classes importantes de résultats (voir encore [11]) : les cônes asymptotiques des groupes abéliens de type fini sont isométriques à un espace \mathbb{R}^n muni d'une bonne distance ; les cônes asymptotiques des groupes de type fini nilpotents sont des groupes de Lie nilpotents.

Annexes

A Ultrafiltres

Dans toute cette partie, on renvoie à [1].

A.1 Définitions

Un *filtre* \mathcal{F} sur un ensemble I est une partie de $\mathcal{P}(I)$ satisfaisant les conditions suivantes :

- (i) Si $A \in \mathcal{F}$, $A \subseteq B \subseteq I$, alors $B \in \mathcal{F}$.
- (ii) Si $A, B \in \mathcal{F}$, alors $A \cap B \in \mathcal{F}$.
- (iii) $\emptyset \notin \mathcal{F}$.

Exemple. Donnons l'exemple important du *filtre de Fréchet* : si I est un ensemble infini, l'ensemble des *complémentaires des parties finies de I* est un filtre, appelé *filtre de Fréchet*.

On appelle *ultrafiltre* sur un ensemble I un élément maximal de l'ensemble des filtres sur I ordonné par l'inclusion.

Proposition A.1. Pour tout filtre \mathcal{F} sur un ensemble I , il existe un ultrafiltre le contenant.

Démonstration. Ceci vient du fait que l'ensemble ordonné par l'inclusion des filtres sur un ensemble I est inductif. Le lemme de Zorn permet alors de conclure. \square

On appelle *ultrafiltre non principal* tout ultrafiltre sur \mathbb{N} qui contient le filtre de Fréchet. Comme tous les ultrafiltres considérés par la suite seront de ce type, on omettra cet adjectif dans la suite de ce document.

Enfin on dit qu'une propriété (\mathcal{P}_i) dépendant d'un entier i est vraie ω -presque sûrement si elle est vraie pour tout i dans un ensemble de ω .

A.2 Intérêt des ultrafiltres

Si on se donne un ultrafiltre ω sur \mathbb{N} et une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans un espace topologique X , on peut définir la limite, si elle existe, de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suivant l'ultrafiltre ω , notée $\lim_{\omega} x_n$: c'est un point x de X tel que pour tout voisinage U de x dans X , l'ensemble $\{n \in \mathbb{N} \mid x_n \in U\}$ est dans ω . Lorsque X est séparé, cette limite, si elle existe, est unique.

Proposition A.2. Si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est relativement compacte dans X (i.e. à valeurs dans un compact), sa limite suivant ω existe toujours.

Démonstration. Supposons par l'absurde que ce ne soit pas vrai, i.e. qu'il n'existe pas de point x dans X vérifiant cette propriété. Alors tout point z de X possède un voisinage U_z tel que l'ensemble $\{n \in \mathbb{N} \mid x_n \in U_z\}$ n'est pas dans ω . Par compacité de X , on peut le recouvrir par une réunion finie de tels voisinages. Il suit que \mathbb{N} n'appartient pas à ω , ce qui est absurde par définition d'un ultrafiltre. \square

Ainsi un ultrafiltre est un outil qui permet de sélectionner d'une manière cohérente une valeur d'adhérence pour n'importe quelle suite relativement compacte. Cela permet donc de faire converger presque toute suite un tant soit peu raisonnable. On voit bien l'intérêt d'un tel outil pour construire les cônes asymptotiques par exemple. Notons toutefois que la preuve de l'existence d'un ultrafiltre nécessite l'utilisation de l'axiome du choix, on paie donc un prix non négligeable pour se munir d'un tel outil.

Références

- [1] Nicolas Bourbaki. *Topologie générale*. Hermann, Paris, quatrième édition, 1965.
- [2] Coornaert, Delzant, and Papadopoulos. *Géométrie et théorie des groupes, les groupes hyperboliques de Gromov*. Lecture notes in mathematics, 1989. Pages 24-57.
- [3] P. de la Harpe. *Topics in geometric group theory*. Chicago lectures in mathematics, 2000. pages 87-89.
- [4] Cornélia Drutu. Quasi-isometry invariants and asymptotic cones. *Int. J. of Algebra and Computation*, 12, 2002. pages 99-135.
- [5] Cornélia Drutu. Quasi-isometry rigidity of groups, 2004.
- [6] Farkas et Kra. *Riemann surfaces*. Graduate Texts in Mathematics (vol. 71), Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New-York, 1980. Page 182.
- [7] Kapovich et Leeb. On asymptotic cones and quasi-isometry classes of fundamental groups of 3-manifolds. 1995.
- [8] E. Ghys et P. de la Harpe. Infinite groups as geometric objects, after m. gromov. *Oxford Sci. Publ.*, 1991.
- [9] Dyubina et Polterovich. The structure of hyperbolic spaces at infinity. *Comm. Moscow Math. Soc.*, 5, 1998. Pages 1093-1094.
- [10] M. Gromov. Groups of polynomial growth and expanding maps. 1981. Pages 53-73.
- [11] M. Gromov. *Asymptotic Invariants of Infinite Groups, Geometric Group Theory (vol. 2)*. London Mathematical Society, 1993. Pages 22-48.
- [12] S. Katok. *Fuchsian groups*. Chicago Univ. Press, 1992. Pages 1-21.
- [13] F. Paulin. Topologie algébrique élémentaire, 2001-2002. Cours de l'ENS, page 58, <http://www.dma.ens.fr/edition/NotesCours/index.html>.
- [14] F. Paulin. Topologie algébrique élémentaire, 2001-2002. Cours de l'ENS, pages 23-51, <http://www.dma.ens.fr/edition/NotesCours/index.html>.