

# Solutions entropiques des lois de conservation scalaires unidimensionnelles

Version corrigée du 3 décembre 2008

Nicolas BONNOTTE  
Amaury FRESLON

Sujet proposé par Olivier GLASS

Mémoire de maîtrise 2008  
Première année de la FIMFA  
École normale supérieure, PARIS

## TABLE DES MATIÈRES

<b>§1. INTRODUCTION</b>	<b>2</b>
<b>§2. MÉTHODE DES CARACTÉRISTIQUES</b>	<b>3</b>
2.1. Cas général .....	3
2.2. Application aux lois de conservations .....	4
2.3. Application aux équations d'Hamilton–Jacobi .....	5
<b>§3. ÉQUATIONS DE CONSERVATION</b>	<b>7</b>
3.1. Solution régulière et caractéristiques .....	7
3.2. Solutions faibles .....	10
<b>§4. ÉQUATIONS D'HAMILTON–JACOBI</b>	<b>17</b>
4.1. Calcul des variations .....	18
4.2. Équation d'Hamilton .....	18
4.3. Transformée de Legendre .....	19
4.4. Formule de Lax–Hopf .....	21
4.5. Retour sur la résolution locale .....	26
4.6. Semiconcavité et unicité .....	27
<b>§5. RETOUR SUR LES LOIS DE CONSERVATION</b>	<b>32</b>
5.1. Résolution de la loi de conservation scalaire .....	33
5.2. Quelques propriétés de la formule de Hopf–Lax .....	34
5.3. La formule de Lax–Oleinik .....	35
5.4. Condition d'entropie .....	36
5.5. Un exemple important : le problème de Riemann .....	37
5.6. Décroissance en norme infinie .....	39

### REMARQUE CONCERNANT LES NOTATIONS

Afin d'éviter d'alourdir inutilement les équations, on omettra presque systématiquement, lorsqu'aucune ambiguïté n'existe, les variables. Ainsi, on pourra noter simplement  $u$  au lieu de  $u(\mathbf{x}(s), t(s))$ .

Le gradient de  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  sera noté  $\mathbf{D}f$ . Si  $f$  dépend de variables scalaires  $a, b, \dots$  on notera  $\partial_a f, \partial_b f, \dots$  ou simplement  $f_a, f_b, \dots$  les dérivées partielles. Si  $f$  dépend de plusieurs variables vectorielles  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \dots$  on notera  $\mathbf{D}_a f, \mathbf{D}_b f, \dots$  les différentielles partielles.

De la même manière, la différentielle de  $\mathbf{v} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$  sera noté  $\mathbf{D}\mathbf{v}$ .

## §1. INTRODUCTION

Supposons que nous voulions étudier, dans un milieu donné, l'évolution d'une quantité physique telle que la masse ou la charge électrique. Notons  $\rho$  la densité volumique de cette quantité et  $\mathbf{j}$  son courant volumique. En faisant un bilan dans un élément de volume, on obtient l'équation suivante :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0.$$

Cette équation est fondamentale par exemple en mécanique des fluides, où  $\rho$  représente la densité du fluide. Elle intervient également dans des problèmes de dynamiques de foules ou pour déterminer le comportement d'animaux.

Plus généralement, on appelle *loi de conservation scalaire* toute équation aux dérivées partielles de la forme :

$$\begin{cases} u_t + \operatorname{div} \mathbf{A}(u, \mathbf{x}) = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^n \times ]0, +\infty[, \\ u = g & \text{pour } t = 0. \end{cases}$$

Nous allons ici nous restreindre à des lois de conservation sur  $\mathbb{R} \times ]0, +\infty[$ , en supposant de plus que  $\mathbf{A}$ , désormais à valeurs réelles, ne dépend que de  $u$ . Ainsi, la divergence devient une simple dérivée par rapport à  $x$ . Voici donc l'équation aux dérivées partielles que nous nous proposons d'étudier :

$$\begin{cases} u_t + f(u)_x = 0 & \text{sur } \mathbb{R} \times ]0, +\infty[, \\ u = g & \text{pour } t = 0. \end{cases}$$

où  $u = u(x, t)$  est l'inconnue, à valeurs réelles, et où  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est régulière, au moins  $\mathcal{C}^1$  — il pourra cependant arriver que l'on impose  $f$  de classe  $\mathcal{C}^2$ . On appelle  $f$  la *fonction de flux*. L'équation est ici présentée sous la forme d'un « problème de Cauchy » unidimensionnel, puisque nous avons une équation et une condition initiale. Notre objectif est de donner sur les éventuelles solutions des conditions suffisamment fortes pour qu'il existe une et une seule solution qui les remplisse. Nous obtiendront au passage une formule explicite pour la solution en question.

Mais avant cela, il nous faut développer une méthode fondamentale dans le domaine des équations aux dérivées partielles.

## §2. MÉTHODE DES CARACTÉRISTIQUES

La méthode des caractéristiques est une technique à la fois simple et élégante qui permet d'obtenir des informations sur les solutions d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre et même parfois de la résoudre explicitement. C'est donc un outil fondamental, que nous utiliserons à plusieurs reprises par la suite.

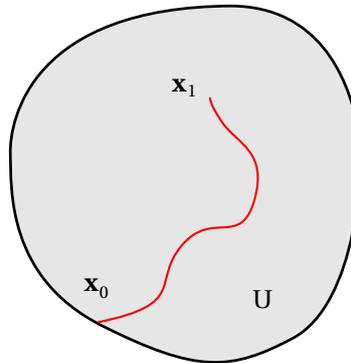
### 2.1. Cas général.

On s'intéresse aux solutions  $u = u(\mathbf{x})$  de l'équation aux dérivées partielles

$$\begin{cases} F(\mathbf{D}u, u, \mathbf{x}) = 0 & \text{dans } U, \\ u = g & \text{sur } \partial U, \end{cases} \quad (2.a)$$

avec  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ . On supposera que  $F = F(\mathbf{p}, z, \mathbf{x})$  et  $g = g(\mathbf{x})$  sont indéfiniment différentiables.

Si  $\mathbf{x}_1$  est un point de  $U$ , il est possible de relier  $\mathbf{x}_1$  à un point  $\mathbf{x}_0$  de la frontière par un chemin  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(s)$ . En déterminant quelles équations sont alors vérifiées par  $u(\mathbf{x})$  si  $u$  est une solution, il doit être possible de calculer  $u(\mathbf{x}_1)$  à partir de la connaissance de  $u(\mathbf{x}_0) = g(\mathbf{x}_0)$  et des variations de  $u$ , si besoin est en jouant sur le chemin  $\mathbf{x}(s)$ .



Considérons  $u$  une solution et  $\mathbf{x}(s)$  un chemin dans  $U$  partant de  $\mathbf{x}_0 \in \partial U$ . Pour chercher ces variations, on pose :

$$\begin{cases} \mathbf{x} = \mathbf{x}(s), \\ \mathbf{p} = \mathbf{D}u(\mathbf{x}(s)), \\ z = u(\mathbf{x}(s)). \end{cases}$$

Si l'on dérive la deuxième et la troisième ligne par rapport à  $s$ , on obtient :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{p}} = \mathbf{D}^2 u \cdot \dot{\mathbf{x}}, \\ \dot{z} = \mathbf{D} u \cdot \dot{\mathbf{x}}. \end{cases}$$

D'un autre côté puisque  $F(\mathbf{D}u, u, \mathbf{x}) = 0$ , en différentiant par rapport à  $\mathbf{x}$ , on a :

$$\mathbf{D}_p F \cdot \mathbf{D}^2 u + (\partial_z F) \mathbf{D} u + \mathbf{D}_x F = 0.$$

Pour simplifier, on peut imposer  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{D}_p F(\mathbf{p}, z, \mathbf{x})$ , et alors on obtient le système :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{D}_p F \\ \dot{\mathbf{p}} = -(\partial_z F) \mathbf{p} - \mathbf{D}_x F \\ \dot{z} = \mathbf{D}_p F \cdot \mathbf{p}. \end{cases} \quad (2.b)$$

## 2.2. Application aux lois de conservations.

Cette méthode peut être utilisée avec profit pour les lois de conservations scalaires, qui peuvent s'écrire :

$$\begin{cases} u_t + f'(u)u_x = 0 & \text{sur } \mathbb{R} \times ]0, +\infty[, \\ u = g & \text{pour } t = 0. \end{cases} \quad (2.c)$$

Dans ce cas,  $\mathbf{x} = (x, t)$  et les équations (2.b) donnent  $s = t$  et :

$$\begin{cases} \dot{x} = f'(u) \\ \dot{z} = 0. \end{cases}$$

En conséquence, puisque  $z = u(x(s))$  est constant, on a le résultat suivant :

**PROPOSITION 2.1.** — *Si  $u$  est une solution de (2.c), alors  $u$  est constante égale à  $g(x_0)$  le long de la demi-droite  $x = x_0 + t f'(g(x_0))$ .*

*Exemple.* — Ce résultat permet de résoudre l'équation :

$$\partial_t \rho + v \partial_x \rho = 0,$$

où  $\rho$  représente par exemple une densité de charge, et où  $v$  est constante. Si  $\rho_0$  est la répartition des charges au temps  $t = 0$ , on a  $\rho(x, t) = \rho(x_0 + tv, t) = \rho_0(x_0)$ , c'est-à-dire :

$$\rho = \rho_0(x - tv).$$

La figure I donne l'allure de la solution dans le cas où  $\rho_0(x) = \exp(-x^2)$  : il y a propagation de la gaussienne à la vitesse  $v$ .

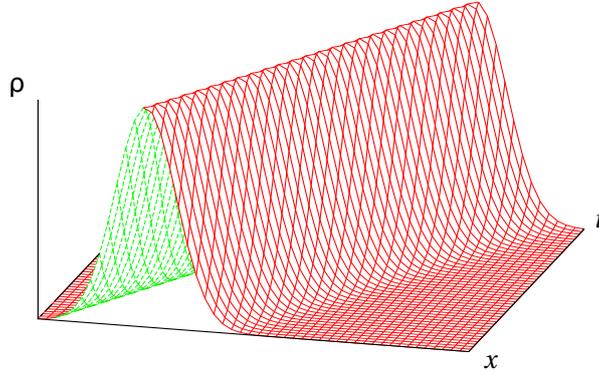


FIG. I – Solution de  $\partial_t \rho + v \partial_x \rho = 0$ , lorsque  $\rho_0(x) = \exp(-x^2)$

### 2.3. Application aux équations d'Hamilton–Jacobi.

La méthode des caractéristiques peut aussi être utilisée pour résoudre les équations d'Hamilton–Jacobi :

$$\begin{cases} u_t + H(\mathbf{D}_x u) = 0 & \text{sur } \mathbb{R}^n \times ]0, +\infty[, \\ u = g & \text{sur } \mathbb{R}^n \times \{0\}, \end{cases} \quad (2.d)$$

et ce au moins au voisinage de  $\mathbb{R}^n \times \{0\}$ . Ici,  $H = H(\mathbf{p})$  et  $g = g(\mathbf{x})$  sont fixés,  $u = u(\mathbf{x}, t)$  est l'inconnue. Nous étudierons plus en détail ces équations au paragraphe 4, qui leur est consacré.

Pour ces équations, le système (2.b) obtenu par la méthode des caractéristiques donne aussi  $s = t$  et

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{D}H, \\ \dot{\mathbf{p}} = 0, \\ \dot{z} = \mathbf{D}H \cdot \mathbf{p} - H. \end{cases}$$

Par conséquent, puisque  $\mathbf{p}$  est constant, les caractéristiques sont encore une fois des droites. En intégrant la première équation, on obtient :

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + t\mathbf{D}H.$$

En intégrant ensuite la dernière équation, il vient :

$$z = g(\mathbf{x}_0) + t(\mathbf{D}H \cdot \mathbf{p} - H).$$

Enfin, puisque  $u(\mathbf{x}, 0) = g(\mathbf{x})$  et que  $\mathbf{p}$  est constant, on a :

$$\mathbf{p} = \mathbf{D}g.$$

Ceci nous permet de résoudre l'équation d'Hamilton–Jacobi (2.d) au voisinage de  $\mathbb{R}^n \times \{0\}$ . En effet ces fonctions  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{p}$  et  $z$  peuvent être vues comme fonctions du temps  $t$  et du point d'origine  $\mathbf{x}_0$ , c'est-à-dire  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t)$ ,  $\mathbf{p} = \mathbf{p}(\mathbf{x}_0, t)$  et  $z = z(\mathbf{x}_0, t)$ . Le lemme suivant montre que de plus  $(\mathbf{x}_0, t) \mapsto (\mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t), t)$  est bijective au voisinage de  $\mathbb{R}^n \times \{0\}$  : on pourra donc voir  $\mathbf{x}_0$  comme une fonction de  $\mathbf{x}$  et de  $t$ , en suivant l'usage venant de la physique qui consiste à confondre variable et fonction.

LEMME 2.2. — *Quel que soit  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ , il existe  $\varepsilon > 0$ ,  $V$  et  $W$  deux voisinages de  $\mathbf{x}_0$  dans  $\mathbb{R}^n$  tels que pour tout  $\mathbf{y} \in V$ ,  $t < \varepsilon$ , il existe un unique  $\mathbf{y}_0 \in W$  tel que  $\mathbf{y} = \mathbf{x}(t, \mathbf{y}_0)$ .*

*Démonstration.* — Puisque  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + t\mathbf{D}H$ , on a  $\mathbf{D}_{\mathbf{x}_0}\mathbf{x}(\mathbf{x}_0, 0) = \mathbf{1}$ , donc  $\mathbf{D}_{\mathbf{x}_0}\mathbf{x}$  est inversible en  $(\mathbf{x}_0, 0)$ . Le théorème d'inversion locale appliqué à  $(\mathbf{x}_0, t) \mapsto (\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0), t)$  permet de conclure.  $\square$

Nous obtenons donc finalement le résultat suivant :

PROPOSITION 2.3. — *En posant  $\mathbf{p} = \mathbf{p}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{D}g(\mathbf{x}_0)$ , la fonction*

$$u(\mathbf{x}, t) = g(\mathbf{x}_0) + t[\mathbf{D}H(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{p} - H(\mathbf{p})]$$

*est solution de l'équation d'Hamilton–Jacobi au voisinage de  $\mathbb{R}^n \times \{0\}$ .*

*Démonstration.* — On a  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x} - t\mathbf{D}H$ , donc  $\dot{\mathbf{x}}_0 = -\mathbf{D}H - t\mathbf{D}^2H \cdot (\mathbf{D}^2g \cdot \dot{\mathbf{x}}_0)$ , et par suite,

$$\begin{aligned} u_t &= \mathbf{D}g \cdot \dot{\mathbf{x}}_0 + \mathbf{D}H \cdot \mathbf{p} - H + t[\mathbf{D}^2H \cdot (\mathbf{D}^2g \cdot \dot{\mathbf{x}}_0)] \cdot \mathbf{p} \\ &= \dot{\mathbf{x}}_0 \cdot \mathbf{p} + \mathbf{D}H \cdot \mathbf{p} - H - (\mathbf{D}H + \dot{\mathbf{x}}_0) \cdot \mathbf{p} \\ &= -H(\mathbf{p}). \end{aligned}$$

Il ne reste plus qu'à montrer que  $\mathbf{p} = \mathbf{D}_{\mathbf{x}}u$ . Mais on a :

$$\mathbf{D}_{\mathbf{x}}\mathbf{x}_0 = \mathbf{1} - t\mathbf{D}^2H \cdot (\mathbf{D}^2g \cdot \mathbf{D}_{\mathbf{x}}\mathbf{x}_0)$$

donc par conséquent :

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_{\mathbf{x}}u &= \mathbf{D}g \cdot \mathbf{D}_{\mathbf{x}}\mathbf{x}_0 + t[\mathbf{D}^2H \cdot (\mathbf{D}^2g \cdot \mathbf{D}_{\mathbf{x}}\mathbf{x}_0)] \cdot \mathbf{p} \\ &= \mathbf{D}\mathbf{x}_0 \cdot \mathbf{p} + (\mathbf{1} - \mathbf{D}_{\mathbf{x}}\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{p} \\ &= \mathbf{p} \end{aligned} \quad \square$$

### §3. ÉQUATIONS DE CONSERVATION

Rappelons qu'une équation de conservation scalaire unidimensionnelle est une équation de la forme :

$$\begin{cases} u_t + f(u)_x = 0 & \text{sur } \mathbb{R} \times ]0, +\infty[, \\ u = g & \text{pour } t = 0, \end{cases} \quad (3.a)$$

où  $u = u(x, t)$  est l'inconnue et où  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est régulière.

#### 3.1. Solution régulière et caractéristiques.

*Recherche d'une solution régulière.*

Notre première question est de savoir si le problème (3.a) admet en général au moins une solution régulière. Nous supposons ici que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  et que  $g$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ .

La façon la plus naturelle d'aborder ce problème est d'étudier les propriétés d'une éventuelle solution, ce que nous allons faire en employant la méthode des caractéristiques. Soit  $x_0 \in \mathbb{R}$ , alors si  $(x, t) = (x(s), t(s))$  est un chemin dans  $\mathbb{R} \times ]0, +\infty[$  partant de  $(x_0, 0)$ , et si  $z(s) = u(x(s), t(s))$ , le système (2.b), obtenu grâce à cette méthode, donne ici :

$$\begin{cases} \dot{x} = f'(u) \\ \dot{t} = 1 \\ \dot{z} = 0, \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} x(s) = x_0 + s f'(g(x_0)) \\ t(s) = s \\ z(s) = g(x_0) \end{cases}$$

Donc  $u$  est constante sur les demi-droites de pente  $f'(g(x_0))$  quel que soit  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Nous venons ainsi de prouver ceci :

PROPOSITION 3.1. — *Les caractéristiques d'une loi de conservation scalaire unidimensionnelle sont toujours des demi-droites sur lesquelles les solutions sont constantes, et la caractéristique issue de  $x_0$  est donnée par :*

$$x = x_0 + t f'(g(x_0))$$

Nous voyons alors survenir un problème : les caractéristiques risquent de se couper. Or si elles se coupent,  $u$  ne peut être définie au point d'intersection car elle devrait prendre en ce point deux valeurs distinctes,  $g$  ne pouvant prendre

la même valeur à la base des deux demi-droites car alors elles auraient même pente et ne se couperaient pas.

Pour voir un peu plus précisément ce qui se passe, nous pouvons utiliser nos résultats pour donner une équation fonctionnelle vérifiée par  $u$ . Pour ce faire, prenons  $x_0 \in \mathbb{R}$  et  $x = x(t)$  un paramétrage de la caractéristique issue de  $x_0$ . Alors  $u(x, t)$  est constante égale à  $g(x_0)$  sur cette demi-droite. D'autre part, on connaît explicitement le paramétrage  $x = x_0 + t f'(g(x_0))$ , on a donc :

$$x_0 = x - t f'(g(x_0)) = x - t f'(u(x, t)).$$

On en déduit donc que

$$u = g(x - t f'(u)).$$

Inversement, si on suppose que  $u$  vérifie l'équation fonctionnelle précédente, on trouve :

$$u_t + f'(u)u_x = -t[u_t + f'(u)u_x]f''(u)g'(x - t f'(u)),$$

ce qui donne en regroupant les termes :

$$(1 + t f''(u)g'(x - t f'(u)))(u_t + f'(u)u_x) = 0.$$

On en déduit donc le résultat suivant :

PROPOSITION 3.2. — Si  $u : U \times [0, \varepsilon[ \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^1$  vérifie :

$$u = g(x - t f'(u)), \tag{3.b}$$

alors pour que  $u$  soit solution de :

$$\begin{cases} u_t + f'(u)u_x = 0 & \text{sur } U \times [0, \varepsilon[, \\ u = g & \text{pour } t = 0, \end{cases}$$

il suffit que :

$$\forall x \in U, \forall t \in [0, \varepsilon[, 1 + t f''(u)g'(x - t f'(u)) \neq 0. \tag{3.c}$$

Pour tout  $x$ , ce facteur est non nul pour  $t$  assez petit : il est donc peut-être possible de trouver une solution régulière qui convient au moins au voisinage de  $\mathbb{R} \times \{0\}$ . C'est ce que nous allons voir maintenant.

### Résolution locale.

Ce que nous venons de voir montre qu'il n'y a pas en général de solution régulière globale à l'équation. Avant d'envisager une autre approche du problème, nous pouvons tout de même tirer des résultats précédents une propriété d'existence locale de solution.

Cherchons une solution définie sur un voisinage  $V$  d'un certain  $y_0$  pendant une courte période de temps. Il suffit pour qu'une telle solution existe que les caractéristiques définies précédemment ne se coupent pas. En effet, elles détermineront alors la valeur de  $u$  en chaque point de  $V \times [0, \varepsilon[$ . Nous devons donc regarder l'application  $\psi : (x_0, t) \mapsto (x_0 + t f'(g(x_0)), t)$  et tenter de l'inverser sur un voisinage de  $(y_0, 0)$ . Pour cela, il nous faut calculer sa différentielle au point  $(y_0, 0)$  en vue d'appliquer le théorème d'inversion locale. Or on a :

$$\mathbf{D}\psi(y_0, 0) = \begin{pmatrix} 1 & f'(g(y_0)) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et donc  $\mathbf{D}\psi$  est inversible en  $(y_0, 0)$ . Par le théorème d'inversion locale,  $x_0$  peut être vu comme une fonction de  $x$  et de  $t$  définie sur un voisinage  $V \times [0, \varepsilon[$  de  $(y_0, 0)$ , c'est-à-dire  $x_0 = x_0(x, t)$ . On peut donc poser  $u(x, t) = g(x_0(x, t))$ , et cette fonction est alors de classe  $\mathcal{C}^1$ . De plus, on a :

$$\begin{aligned} u(x, t) &= g(x_0) \\ &= g(x - t f'(g(x_0))) \\ &= g(x - t f'(u)) \end{aligned}$$

et l'équation fonctionnelle (3.b) est par conséquent bien satisfaite. De plus, la condition (3.c) est vérifiée, car on constate que

$$\det \mathbf{D}\psi = 1 + t f''(u) g'(x - t f'(u))$$

ce qui est nécessairement non nul sur  $V \times [0, \varepsilon[$  puisque  $\psi$  y est inversible.

Ajoutons qu'en tout point de  $V \times [0, \varepsilon[$ , il existe une et une seule caractéristique qui passe par ce point, et donc la valeur d'une éventuelle solution en ce point est entièrement déterminée. Par conséquent, la solution locale du paragraphe précédent est unique :

PROPOSITION 3.3. — *L'équation de conservation (3.a) possède exactement une solution de classe  $\mathcal{C}^1$  sur un voisinage de  $\mathbb{R} \times \{0\}$ .*

Mais puisque l'on a vu que les caractéristiques pouvaient se couper, il nous faut essayer de trouver d'autres solutions globales, moins régulières.

### 3.2. Solutions faibles.

Les équations de conservations scalaires n'admettent donc en général pas de solutions régulières sur  $\mathbb{R} \times ]0, +\infty[$ . Cependant, elles correspondent souvent à des problèmes physiques, problèmes que la Nature sait « résoudre ». Il faut donc étendre le concept de solution d'une équation aux dérivées partielles : c'est ce que nous allons faire maintenant.

Remarquons en effet que si  $v$  est une fonction indéfiniment dérivable à support compact dans  $\mathbb{R} \times ]0, +\infty[$  et que  $u$  est une (hypothétique) solution régulière à notre problème, on doit avoir

$$\int_{t=0}^{+\infty} \int_{x=-\infty}^{+\infty} (u_t + f(u)_x) v = 0.$$

Or, en intégrant par parties,

$$\begin{aligned} \int_{t=0}^{+\infty} \int_{x=-\infty}^{+\infty} (u_t + f(u)_x) v &= \int_x \int_t u_t v + \int_t \int_x f(u)_x v \\ &= - \int_x uv \Big|_{t=0} - \int_t \int_x uv_t - \int_t \int_x f(u) v_x \\ &= - \int_x gv \Big|_{t=0} - \int_t \int_x uv_t + f(u) v_x. \end{aligned}$$

La réciproque est vraie. En conséquence, on peut énoncer le résultat suivant :

PROPOSITION 3.4. — Une fonction  $u$  de classe  $\mathcal{C}^1$  telle que  $u(x, 0) = g(x)$  est solution du problème (3.a) si et seulement si, pour toute fonction  $v$  de classe  $\mathcal{C}^\infty$  à support compact dans  $\mathbb{R} \times ]0, +\infty[$ , on a :

$$\iint uv_t + f(u) v_x + \int gv \Big|_{t=0} = 0. \quad (3.d)$$

Cependant, cette condition ne fait pas intervenir les dérivées de  $u$ , et peut donc être vérifiée par une fonction qui serait simplement dans  $\mathbb{L}^\infty$ . On parle alors de *solution intégrale*.

*Existence et unicité pour l'équation de Burgers.*

Avant de poursuivre, il nous faut être sûr que notre démarche de généralisation ait un intérêt. Nous allons donc regarder en détails un exemple simple, l'équation de Burgers :

$$\begin{cases} u_t + \left(\frac{u^2}{2}\right)_x = 0 & \text{sur } \mathbb{R} \times ]0, +\infty[, \\ u = g & \text{pour } t = 0. \end{cases}$$

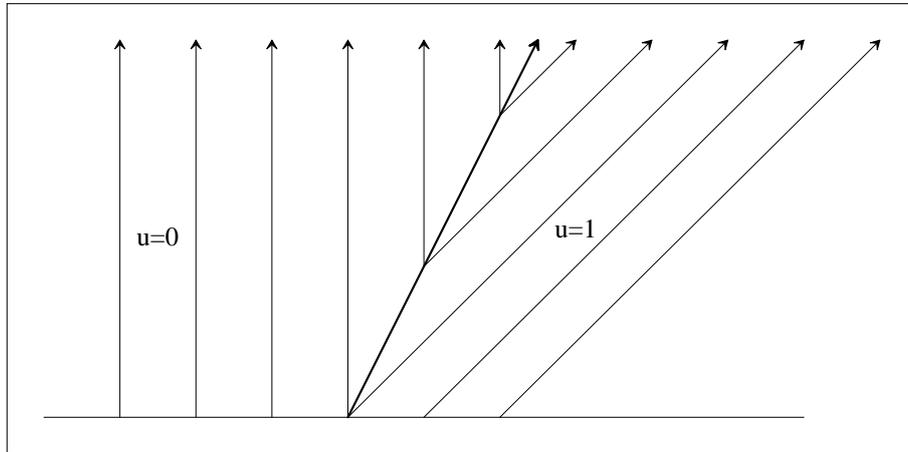


FIG. II – Onde de choc : ligne de discontinuité qui se propage

Nous allons résoudre cette équation en prenant pour condition initiale  $g$  la fonction d'Heaviside :

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ 1 & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

On remarquera que la continuité de  $g$  n'est *a priori* pas une condition nécessaire à l'existence de solutions faibles.

D'après la proposition 3.1, les caractéristiques sont des demi-droites toujours de pente 0 ou 1 et l'on connaît la valeur des solutions dessus. Cependant, la méthode des caractéristiques ne nous donne aucune information pour les points  $(x, t) \in \mathbb{R} \times ]0, +\infty[$  vérifiant  $0 < x < t$ . Cela n'empêche pas de trouver une première solution, par exemple en posant :

$$u_1(x, t) := \begin{cases} 0 & \text{si } x < t/2, \\ 1 & \text{si } x > t/2. \end{cases}$$

On vérifie aisément que  $u_1$  est une solution intégrale de l'équation. Nous avons représenté sur la figure II quelques caractéristiques de l'équation avec les valeurs de  $u_1$ . Nous voyons alors apparaître une *onde de choc*, c'est-à-dire une ligne de discontinuité qui se propage au cours du temps.

Toutefois, il s'avère que nous pouvons trouver d'autres solutions intégrales à l'équation de Burgers avec cette donnée initiale, par exemple :

$$u_2(x, t) := \begin{cases} 1 & \text{si } x > t, \\ x/t & \text{si } 0 < x < t, \\ 0 & \text{si } x < 0, \end{cases}$$

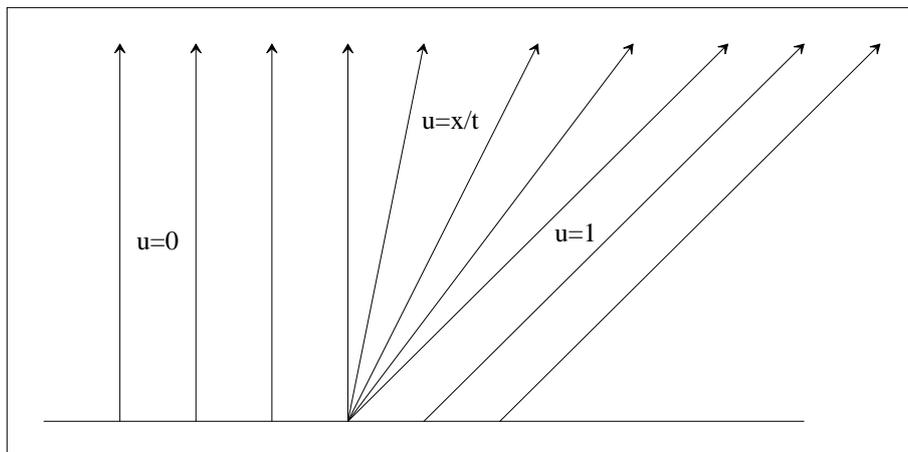


FIG. III – Onde de détente : la solution s'étale, sans discontinuité.

convient aussi. Pour voir la différence entre ces deux solutions, il nous suffit de représenter également  $u_2$  (figure III). Nous nous apercevons alors que  $u_2$  n'est pas une onde de choc comme  $u_1$ . Au lieu d'avoir une ligne de discontinuité qui se propage,  $u_2$  s'étale à mesure que le temps augmente. C'est pourquoi on dit que  $u_2$  est *onde de détente*.

Ainsi nous pouvons tirer deux conclusions de cet exemple : premièrement, nous avons maintenant des solutions et deuxièmement, nous en avons plusieurs. Toutes ne sont pourtant pas acceptables, et il va nous falloir trouver des critères pour distinguer une solution « physique » parmi toutes les solutions intégrales.

*Condition de Rankine-Hugoniot et condition d'entropie.*

Nous allons maintenant étudier les propriétés des solutions intégrales. Ces propriétés seront bien sûr liées à leurs discontinuités, dont l'étude générale est complexe et hors de notre propos. Nous allons donc plutôt faire des hypothèses simplificatrices.

Soit  $u : \mathbb{R} \times [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $u(x, 0) = g(x)$  et telle que pour toute fonction  $v \in \mathcal{C}^\infty$  à support compact inclus dans  $\mathbb{R} \times [0, +\infty[$ , on ait :

$$\iint uv_t + f(u)v_x + \int gv|_{t=0} = 0.$$

On suppose maintenant que les points de discontinuités de  $u$  forment une seule courbe de classe  $\mathcal{C}^1$ , notée  $\Gamma$ , que l'on suppose paramétrée par une application  $t \mapsto (x(t), t)$  de classe  $\mathcal{C}^1$ . On suppose de plus que  $u$  est de classe  $\mathcal{C}^1$

sur chacun des deux ouverts  $V_d$  et  $V_g$  que sépare  $\Gamma$ , et aussi que  $u$  admet des limites de chaque côté en tout point de la courbe, notées  $u_g$  et  $u_d$ .

Introduisons quelques notations. On définit d'abord le *saut* de  $u$  à travers  $\Gamma$  comme étant :

$$[u] = u_g - u_d.$$

On pose de même  $[f(u)] = f(u_g) - f(u_d)$ , le saut de  $f(u)$ . Enfin, on pose :

$$\sigma = \dot{x}.$$

On a alors le résultat suivant :

THÉORÈME 3.5 (Condition de Rankine–Hugoniot). — *En tout point de  $\Gamma$ , on a :*

$$[f(u)] = \sigma [u].$$

*Démonstration.* — En utilisant des fonctions  $v \in \mathcal{C}^\infty$  à support compact inclus dans  $V_g$  ou  $V_d$ , on voit que  $u_t + f(u)_x = 0$  sur chacun de ces deux ouverts. On y a donc :

$$\operatorname{div}[v(u, f(u))] = uv_t + f(u)v_t + v[u_t + f(u)_x] = uv_t + f(u)v_t.$$

Par conséquent, la formule de Stokes donne, en prenant le même paramétrage de  $\Gamma$  à chaque fois :

$$\iint_{V_g} uv_t + f(u)v_x = \int_{\Gamma} v(f(u_g), u_g) \cdot \mathbf{n} \, dl$$

$$\iint_{V_d} uv_t + f(u)v_x = - \int_{\Gamma} v(f(u_d), u_d) \cdot \mathbf{n} \, dl$$

avec  $\mathbf{n}$  la normale à  $\Gamma$ , c'est-à-dire  $\mathbf{n}$  proportionnel à  $(1, -\dot{x})$ . Puisque la somme de ces deux intégrales est nulle, et que ce résultat est vrai quel que soit  $v$ , on obtient :

$$[f(u)] - [u]\dot{x} = 0$$

le long de  $\Gamma$ , d'où le résultat recherché. □

Cette égalité que doit vérifier une telle solution  $u$  est la *condition de saut de Rankine-Hugoniot*. Les valeurs de  $[u]$ ,  $[f(u)]$  et  $\sigma$  peuvent bien sur varier le long de la courbe, mais elles doivent toujours vérifier cette condition.

Cependant, cette égalité ne permet donc pas de caractériser une solution particulière. Pour obtenir une condition forçant l'unicité et permettant d'obtenir la solution « physique », nous allons nous inspirer d'un cas particulier,

l'équation de Burgers, mais que nous allons modifier en rajoutant un terme d'ordre 2.

$$u_t + \left(\frac{u^2}{2}\right)_x = \mu u_{xx}.$$

Ici,  $\mu > 0$ . On appelle  $\mu u_{xx}$  le *terme de diffusion*, et le coefficient  $\mu$  peut par exemple traduire la viscosité en mécanique des fluides. Son ajout n'a cependant rien d'anodin, car la nouvelle équation admet des solutions régulières que l'on sait calculer explicitement en fonction du paramètre  $\mu$ . On peut alors montrer que lorsque  $\mu \rightarrow 0$ , les solutions tendent vers des solutions (généralement discontinues) de l'équation sans second membre. Les solutions ainsi atteintes peuvent *a priori* avoir un sens physique puisque ce sont des limites de solutions physiques pour de très faible viscosités. On peut montrer, ce que nous ne ferons pas ici, que ces solutions vérifient de plus la propriété suivante :

PROPOSITION 3.6. — *Les discontinuités des solutions de l'équation de Burgers obtenues comme limite des solutions de l'équation diffusive sont formées des points d'intersection des caractéristiques. De plus, les caractéristiques sont toujours définies à partir de  $t = 0$ .*

Ceci signifie tout d'abord que les caractéristiques ne peuvent pas « sortir » de la courbe de discontinuité, autrement dit si l'on remonte une caractéristique, c'est-à-dire si on la parcourt en remontant le temps, on finit par arriver à l'instant  $t = 0$  sans couper de ligne de discontinuité. Ce résultat permet de démontrer la propriété suivante, qui est donc vérifiée pour les solutions « physiques » :

PROPOSITION 3.7. — *Les solutions de l'équation de Burgers ainsi obtenues vérifient les inégalités de Lax :*

$$f'(u_g) > \sigma > f'(u_d),$$

*Démonstration.* — Rappelons tout d'abord que les caractéristiques ont pour équation :

$$x = x_0 + t f'(g(x_0)) t.$$

Regardons maintenant un point d'une ligne de discontinuité d'une solution  $u$ , qui est constante égale à  $g(x_0)$  sur les caractéristiques, et deux caractéristiques qui se coupent en ce point. D'après ce qui précède, celles-ci sont issues de deux abscisses  $x_0^g < x_0^d$  et le coefficient directeur de celle de gauche est plus grand que celui de celle de droite, c'est-à-dire :

$$f'(g(x_0^g)) > f'(g(x_0^d)).$$

Il suffit pour conclure de remarquer que le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point d'intersection doit être compris entre ces deux valeurs (figure IV), et que  $g(x_0^g)$  et  $g(x_0^d)$  sont les limites  $u_g$  et  $u_d$  de  $u$  de chaque côté de la courbe.  $\square$

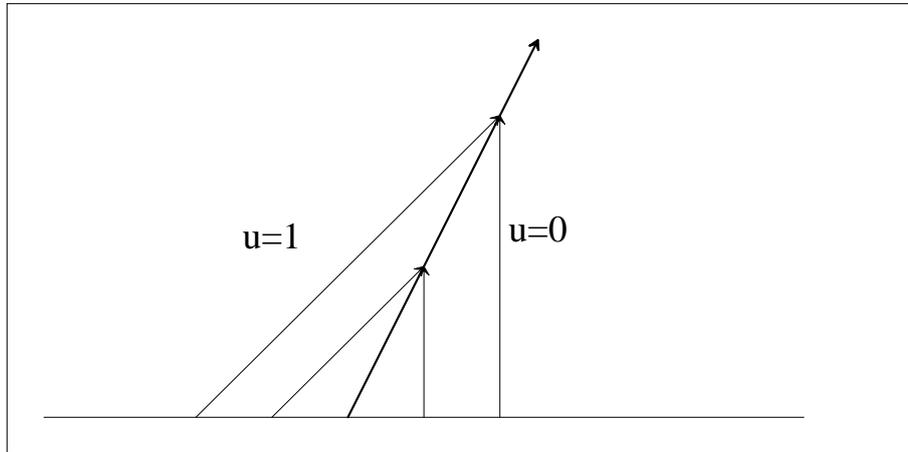


FIG. IV – La tangente à la courbe est entre les caractéristiques.

De nouveau, comme pour la condition de saut de Rankine-Hugoniot, cette égalité doit être vérifiée en tout point de la courbe de discontinuité. Les inégalités de Lax impliquent notamment que :

$$f'(u_g) \geq f'(u_d). \quad (3.e)$$

Cette condition est appelée *condition d'entropie*.

Nous pouvons remarquer par exemple que l'onde de choc que nous avons obtenue comme solution de l'équation de Burgers dans la section précédente, bien qu'elle vérifie la condition de saut de Rankine-Hugoniot, ne vérifie pas la condition d'entropie, c'est pourquoi on la qualifie généralement d'*onde de choc non-physique*. La condition d'entropie donne donc un critère restrictif pour le choix des solutions. Nous montrerons qu'une version modifiée de cette condition permet d'assurer l'unicité de la solution.

Cette condition d'entropie, que nous venons de voir dans le cas particulier de l'équation de Burgers, peut cependant être exigée de la part de solutions d'autres équations pour pouvoir qualifier celles-ci d'acceptables — nous venons en effet de voir qu'au moins dans le cas de l'équation de Burgers, cette condition devait être vérifiée par les solutions « physiques ». C'est ce que nous ferons désormais.

*Retour sur l'équation de Burgers.*

Afin de voir plus précisément ce qu'est une solution faible acceptable, nous allons une nouvelle fois regarder l'équation de Burgers :

$$\begin{cases} u_t + \left(\frac{u^2}{2}\right)_x = 0 & \text{sur } \mathbb{R} \times ]0, +\infty[, \\ u = g & \text{pour } t = 0, \end{cases}$$

avec la nouvelle condition initiale :

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ 1 & \text{si } 0 \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

Nous pouvons combiner les deux exemples vu précédemment en ajoutant une onde de choc à côté de la zone où la solution forme une détente. Nous obtenons alors la solution suivante pour  $0 \leq t \leq 2$  :

$$u(x, t) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ x/t & \text{si } 0 < x < t, \\ 1 & \text{si } t < x < 1 + t/2, \\ 0 & \text{si } x > 1 + t/2. \end{cases}$$

Il nous faut maintenant prolonger  $u$  pour des temps  $t \geq 2$ . Supposons que la seconde ligne de discontinuité se poursuive tout en gardant les valeurs  $u = x/t$  à gauche et  $u = 0$  à droite, et essayons de déterminer son équation en respectant la condition de saut. Remarquons que la condition au niveau de la discontinuité pour  $x = 0$  continue d'être vérifiée. Notons  $(x, t) = (x(t), t)$  un paramétrage de la seconde discontinuité, on a alors :

$$[u] = \frac{x}{t} \quad [F(u)] = \frac{1}{2} \left(\frac{x}{t}\right)^2 \quad \sigma = \dot{x}.$$

Écrivons maintenant la condition de saut de Rankine-Hugoniot  $[F(u)] = \sigma[u]$  le long de la courbe pour  $t \geq 2$  :

$$\dot{x} = \frac{x}{2t}.$$

Nous avons de plus la condition initiale  $x(2) = 2$ , ce qui permet de résoudre l'équation différentielle pour obtenir  $x = \sqrt{2t}$ . Nous pouvons donc prolonger notre solution en posant, pour  $t \geq 2$  :

$$u(x, t) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ x/t & \text{si } 0 < x < \sqrt{2t}, \\ 0 & \text{si } x > \sqrt{2t}. \end{cases}$$

On vérifie que cette solution est de classe  $\mathcal{C}^1$  sauf sur un ensemble de mesure nulle, et que hors de cet ensemble  $u_t + uu_x = 0$ . Par conséquent, c'est bien une solution intégrale. De plus, elle vérifie bien la condition d'entropie.

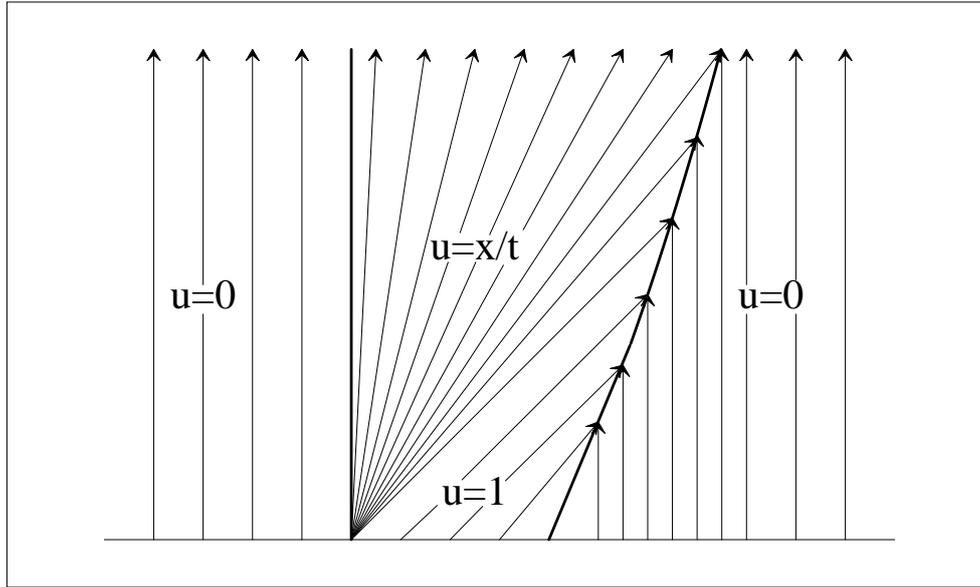


FIG. V – Solution de l'équation de Burgers vérifiant la condition d'entropie

#### §4. ÉQUATIONS D'HAMILTON-JACOBI

Nous allons maintenant étudier plus en détail les équations d'Hamilton-Jacobi, que nous avons introduites en exemple à la fin de la section précédente, mais dans un cas un peu plus général en ajoutant une dépendance en  $\mathbf{x}$  et en considérant :

$$\begin{cases} u_t + H(\mathbf{D}_x u, \mathbf{x}) = 0 & \text{sur } \mathbb{R}^n \times ]0, +\infty[, \\ u = g & \text{sur } \mathbb{R}^n \times \{0\}, \end{cases} \quad (4.a)$$

En effet, si l'on sait les résoudre, alors en particulier on saura résoudre

$$\begin{cases} w_t + f(w_x) = 0 & \text{sur } \mathbb{R} \times ]0, +\infty[, \\ w = h & \text{pour } t = 0, \end{cases}$$

avec  $h$  une primitive de  $g$ . En dérivant par rapport à  $x$ , on obtient alors

$$\begin{cases} w_x t + f(w_x)_x = 0 & \text{sur } \mathbb{R} \times ]0, +\infty[, \\ w_x = g & \text{pour } t = 0, \end{cases}$$

ce qui revient exactement à dire que  $w_x$  est solution de l'équation de conservation scalaire.

Nous allons maintenant montrer que sous certaines hypothèses, une formule semi-explicite en donne une solution dont la dérivée sera solution de notre problème.

#### 4.1. Calcul des variations.

La méthode des caractéristiques vue à la section 2 permet d'obtenir le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{D}_{\mathbf{p}}H, \\ \dot{\mathbf{p}} = -\mathbf{D}_{\mathbf{x}}H. \end{cases} \quad (4.b)$$

Nous allons maintenant chercher à réobtenir ces équations par une méthode variationnelle, en partant d'un problème différent qui semble n'être en rien lié à notre sujet.

Soit  $L = L(\mathbf{q}, \mathbf{x})$  une fonction indéfiniment dérivable de  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}$ , représentant par exemple un coût lié à la position  $\mathbf{x}$  et la vitesse  $\mathbf{q}$ . On fixe  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$  et  $t > 0$ ; notre problème est alors le suivant : quelle trajectoire partant de  $\mathbf{x}$  et arrivant en  $\mathbf{y}$  au temps  $t$  permet de minimiser le coût total du trajet? Mathématiquement parlant, on cherche la trajectoire  $\mathbf{w} : [0, t] \rightarrow \mathbb{R}^n$  de classe  $\mathcal{C}^2$  telle que  $\mathbf{w}(0) = \mathbf{y}$  et  $\mathbf{w}(t) = \mathbf{x}$ , et qui minimise

$$I[\mathbf{w}] := \int_0^t L(\dot{\mathbf{w}}(s), \mathbf{w}(s)) ds.$$

Cette fonction  $I[\mathbf{w}]$  est appelée l'*action*.

PROPOSITION 4.1. — Si  $\mathbf{x}$  minimise  $I$ , alors  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(s)$  est solution de :

$$\frac{d}{ds} [\mathbf{D}_{\mathbf{q}}L(\dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x})] - \mathbf{D}_{\mathbf{x}}L(\dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x}) = 0. \quad (4.c)$$

*Démonstration.* — Soit  $\mathbf{v}$  de  $[0, t]$  dans  $\mathbb{R}^n$  et de classe  $\mathcal{C}^2$  telle que  $\mathbf{v}(0) = \mathbf{v}(t) = 0$ . On pose alors pour  $h \in \mathbb{R}$ ,  $f(h) := I[\mathbf{x} + h\mathbf{v}] \geq I[\mathbf{x}]$ . On a donc  $f'(0) = 0$ . Or d'un autre côté

$$\begin{aligned} f'(0) &= \int_0^t \mathbf{D}_{\mathbf{q}}L \cdot \dot{\mathbf{v}} + \mathbf{D}_{\mathbf{x}}L \cdot \mathbf{v} ds \\ &= [\mathbf{D}_{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{v}]_0^t - \int_0^t \frac{d}{ds} [\mathbf{D}_{\mathbf{q}}L] \cdot \mathbf{v} ds + \int_0^t \mathbf{D}_{\mathbf{x}}L \cdot \mathbf{v} ds \\ &= \int_0^t \left( \mathbf{D}_{\mathbf{x}}L - \frac{d}{ds} [\mathbf{D}_{\mathbf{q}}L] \right) \cdot \mathbf{v} ds. \end{aligned}$$

Cette intégrale est donc nulle quel que soit  $\mathbf{v}$ . Par conséquent, ce qui est entre parenthèses doit être nul quel que soit  $s$ .  $\square$

#### 4.2. Équations d'Hamilton.

On suppose maintenant que  $L = L(\mathbf{q})$  ne dépend plus de  $\mathbf{x}$ , et on ajoute l'hypothèse qu'il existe une fonction  $\mathbf{q} = \mathbf{q}(\mathbf{p})$  indéfiniment dérivable telle que, pour

tout  $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{q}$  soit l'unique solution de l'équation :

$$\mathbf{p} = \mathbf{D}_q L(\mathbf{q}). \quad (4.d)$$

Cette condition n'est pas déraisonnable : il suffit que  $\mathbf{D}_q L$  soit injective et que  $\mathbf{D}_q^2 L$  soit inversible, d'après le théorème d'inversion globale.

On associe alors à  $L$  le hamiltonien :

$$H(\mathbf{p}) := \mathbf{p} \cdot \mathbf{q} - L(\mathbf{q}). \quad (4.e)$$

Si  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(s)$  désigne de nouveau un point critique de  $I$ , on pose :

$$\mathbf{p} := \mathbf{D}_q L(\dot{\mathbf{x}}). \quad (4.f)$$

PROPOSITION 4.2. — *Les fonctions  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{p}$  ainsi définies forment une solution de (4.b) :*

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{D}_p H, \\ \dot{\mathbf{p}} = 0, \end{cases}$$

et  $H = H(\mathbf{p})$  est une fonction constante de  $s$ .

*Démonstration.* — Le résultat (4.c) donne la 2<sup>e</sup> équation. Pour obtenir la 1<sup>re</sup> et puisque  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{q}(\mathbf{p})$ , il suffit de différencier :

$$\mathbf{D}_p H = \mathbf{q} + \mathbf{p} \cdot \mathbf{D}_p \mathbf{q} - \mathbf{D}_q L \cdot \mathbf{D}_p \mathbf{q} = \dot{\mathbf{x}}. \quad \square$$

### 4.3. Transformée de Legendre.

À partir d'un lagrangien  $L$ , on a pu déterminer un hamiltonien tel que si  $\mathbf{x}$  minimise l'action  $I$ , alors  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{p} = \mathbf{D}_q L(\dot{\mathbf{x}})$  sont solution des équations d'Hamilton associées. On rappelle que des équations de cette forme sont apparues naturellement par la méthode des caractéristiques. On cherche maintenant à faire l'inverse : à partir du hamiltonien, peut-on trouver un lagrangien tel que la minimisation de l'action associée soit équivalente à la résolution des équations d'Hamilton ?

Pour définir précédemment, à partir du lagrangien  $L$ , le hamiltonien  $H$ , on avait dû supposer l'existence d'une fonction  $\mathbf{q}$  donnant l'unique solution de l'équation  $\mathbf{p} = \mathbf{D}_q L(\mathbf{p})$  en fonction de  $\mathbf{p}$ . Cherchons d'abord à nous passer de cette hypothèse. Soit donc le lagrangien  $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . On suppose d'une part que  $L$  est convexe, donc continu, et d'autre part que

$$\frac{L(\mathbf{q})}{|\mathbf{q}|} \xrightarrow{q \rightarrow \infty} +\infty.$$

On introduit alors la *transformée de Legendre* de  $L$ , définie par :

$$L^*(\mathbf{p}) := \sup_{\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n} \{\mathbf{p} \cdot \mathbf{q} - L(\mathbf{q})\}.$$

On remarque que si cette borne supérieure est atteinte en  $\mathbf{q}$ , alors on a  $\mathbf{p} = \mathbf{D}_{\mathbf{q}}L$ , et dans ce cas  $L^*$  coïncide avec le hamiltonien  $H$  défini par (4.e) lorsqu'on avait supposé l'existence d'une fonction donnant  $\mathbf{q}$  à partir de  $\mathbf{p}$ . On est donc amené à poser, dans le cas général,

$$H := L^*.$$

La proposition suivante montre qu'il existe en fait un lien symétrique entre  $H$  et  $L$  et qu'il est possible d'obtenir l'un à partir de l'autre.

PROPOSITION 4.3. — *Si le lagrangien  $L = L(\mathbf{q})$  est convexe et tel que*

$$\frac{L(\mathbf{q})}{|\mathbf{q}|} \xrightarrow{\mathbf{q} \rightarrow \infty} +\infty,$$

*alors  $H = H(\mathbf{p})$  est aussi convexe et*

$$\frac{H(\mathbf{p})}{|\mathbf{p}|} \xrightarrow{\mathbf{p} \rightarrow \infty} +\infty.$$

*De plus,  $L = H^*$ .*

*Démonstration.* — Remarquons tout d'abord que la fonction  $H = L^*$  est convexe comme supremum de fonctions linéaires.

Étudions maintenant  $H(\mathbf{p})$  en  $+\infty$ . Posons pour cela  $\lambda > 0$  et  $\mathbf{p} \neq 0$ , alors en prenant  $\mathbf{q} = \lambda \frac{\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|}$  on obtient :

$$H(\mathbf{p}) \geq \lambda |\mathbf{p}| - L\left(\lambda \frac{\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|}\right) \geq \lambda |\mathbf{p}| - \max_{|\mathbf{q}| \leq \lambda} L(\mathbf{q}).$$

On en déduit que  $\liminf \frac{H(\mathbf{p})}{|\mathbf{p}|} \geq \lambda$ , et donc :

$$\frac{H(\mathbf{p})}{|\mathbf{p}|} \xrightarrow{\mathbf{p} \rightarrow \infty} +\infty.$$

Nous pouvons donc maintenant regarder  $H^*$ . D'après la définition de  $H$ , on a  $H(\mathbf{p}) + L(\mathbf{q}) \leq \mathbf{p} \cdot \mathbf{q}$  pour tous  $\mathbf{p}$  et  $\mathbf{q}$  dans  $\mathbb{R}^n$ . Par conséquent,

$$L(\mathbf{q}) \leq \sup_{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n} \{\mathbf{p} \cdot \mathbf{q} - H(\mathbf{p})\} = H^*(\mathbf{q}).$$

D'autre part,

$$H^*(\mathbf{q}) = \sup_{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n} \left\{ \mathbf{p} \cdot \mathbf{q} - \sup_{\mathbf{r} \in \mathbb{R}^n} \{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r} - L(\mathbf{r})\} \right\} = \sup_{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n} \left\{ \inf_{\mathbf{r} \in \mathbb{R}^n} \{\mathbf{p} \cdot (\mathbf{q} - \mathbf{r}) + L(\mathbf{r})\} \right\}.$$

L'application  $\mathbf{q} \mapsto L(\mathbf{q})$  étant convexe, en utilisant le théorème d'Hahn–Banach géométrique on montre qu'il existe  $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^n$  tel que :

$$\forall \mathbf{r} \in \mathbb{R}^n, L(\mathbf{r}) \geq L(\mathbf{q}) + \mathbf{s} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{q}).$$

En prenant  $\mathbf{p} = \mathbf{s}$ , on obtient :

$$H^*(\mathbf{q}) \geq \inf_{\mathbf{r} \in \mathbb{R}^n} \{ \mathbf{s} \cdot (\mathbf{q} - \mathbf{r}) + L(\mathbf{r}) \} \geq L(\mathbf{q}),$$

ce qui conclut la preuve. □

#### 4.4. Formule de Lax–Hopf.

Revenons maintenant à notre problème initial, à savoir la résolution des équations d'Hamilton–Jacobi :

$$\begin{cases} u_t + H(\mathbf{D}_x u) = 0 & \text{sur } \mathbb{R}^n \times ]0, +\infty[, \\ u = g & \text{sur } \mathbb{R}^n \times \{0\}, \end{cases} \quad (4.g)$$

Lorsque l'on s'était donné un lagrangien  $L$ , on avait cherché à minimiser l'action  $I[\mathbf{w}] = \int L(\dot{\mathbf{w}}) ds$ . Pour prendre en compte la condition initiale portée par  $g$ , on peut chercher à minimiser  $\int L(\dot{\mathbf{w}}) ds + g(\mathbf{w}(0))$ . On pose donc :

$$u(\mathbf{x}, t) := \inf \left\{ g(\mathbf{w}(0)) + \int_0^t L(\dot{\mathbf{w}}) ds \mid \mathbf{w} \in \mathcal{C}^1 \text{ et } \mathbf{w}(t) = \mathbf{x} \right\}. \quad (4.h)$$

On avait supposé  $H$  de classe  $\mathcal{C}^\infty$ , convexe et tel que

$$\frac{H(\mathbf{p})}{|\mathbf{p}|} \xrightarrow{|\mathbf{p}| \rightarrow \infty} +\infty.$$

On ajoute maintenant l'hypothèse que  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  est lipschitzienne. Le théorème suivant donne une forme plus agréable à la fonction  $u$  définie par (4.h).

**THÉORÈME 4.4 (Lax–Hopf).** — *La fonction  $u = u(\mathbf{x}, t)$  définie précédemment vérifie :*

$$u(\mathbf{x}, t) = \min_{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n} \left\{ tL\left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{y}}{t}\right) + g(\mathbf{y}) \right\}. \quad (4.i)$$

*Démonstration.* — Fixons  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$  et posons  $\mathbf{w}(s) := \mathbf{y} + \frac{s}{t}(\mathbf{x} - \mathbf{y})$ . On a alors :

$$u(\mathbf{x}, t) \leq g(\mathbf{y}) + \int_0^t L(\dot{\mathbf{w}}) ds = g(\mathbf{y}) + tL\left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{y}}{t}\right),$$

donc en prenant l'infimum sur  $\mathbf{y}$ , on obtient :

$$u(\mathbf{x}, t) \leq \inf_{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n} \left\{ g(\mathbf{y}) + tL\left(\frac{\mathbf{x}-\mathbf{y}}{t}\right) \right\}.$$

Prouvons maintenant l'autre inégalité. Si  $\mathbf{w}$  est une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  telle que  $\mathbf{w}(t) = \mathbf{x}$ , par l'inégalité de Jensen on a :

$$L\left(\frac{1}{t} \int_0^t \dot{\mathbf{w}}(s) ds\right) \leq \frac{1}{t} \int_0^t L(\dot{\mathbf{w}}(s)) ds.$$

En posant  $\mathbf{y} = \mathbf{w}(0)$ , on obtient :

$$g(\mathbf{y}) + tL\left(\frac{\mathbf{x}-\mathbf{y}}{t}\right) \leq g(\mathbf{w}(0)) + \int_0^t L(\dot{\mathbf{w}}),$$

d'où finalement

$$\inf_{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n} \left\{ g(\mathbf{y}) + tL\left(\frac{\mathbf{x}-\mathbf{y}}{t}\right) \right\} \leq u(\mathbf{x}, t).$$

Puisque  $g$  est lipschitzienne et que  $\frac{H(\mathbf{p})}{|\mathbf{p}|} \rightarrow \infty$  quand  $\mathbf{p} \rightarrow \infty$ , l'infimum est bien un minimum.  $\square$

PROPOSITION 4.5. — *La fonction  $u$  définie précédemment vérifie, pour  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  et  $0 \leq s < t$  :*

$$u(\mathbf{x}, t) = \min_{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n} \left\{ (t-s)L\left(\frac{\mathbf{x}-\mathbf{y}}{t-s}\right) + u(\mathbf{y}, s) \right\}. \quad (4.j)$$

*Démonstration.* — Soit  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ , alors par la formule de Lax–Hopf (4.i) il existe  $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$  tel que :

$$u(\mathbf{y}, s) = sL\left(\frac{\mathbf{y}-\mathbf{z}}{s}\right) + g(\mathbf{z}).$$

Mais puisqu'on a :

$$\frac{\mathbf{x}-\mathbf{z}}{t} = \left(1 - \frac{s}{t}\right) \frac{\mathbf{x}-\mathbf{y}}{t-s} + \frac{s}{t} \frac{\mathbf{y}-\mathbf{z}}{s},$$

en utilisant la convexité de  $L$ , on obtient :

$$\begin{aligned} u(\mathbf{x}, t) &\leq tL\left(\frac{\mathbf{x}-\mathbf{z}}{t}\right) + g(\mathbf{z}) \\ &\leq (t-s)L\left(\frac{\mathbf{x}-\mathbf{y}}{t-s}\right) + s\left(\frac{\mathbf{y}-\mathbf{z}}{s}\right) + g(\mathbf{z}) \\ &\leq (t-s)L\left(\frac{\mathbf{x}-\mathbf{y}}{t-s}\right) + u(\mathbf{y}, s). \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$u(\mathbf{x}, t) \leq \min_{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n} \left\{ (t-s)L\left(\frac{\mathbf{x}-\mathbf{y}}{t-s}\right) + u(\mathbf{y}, s) \right\}.$$

Pour démontrer l'autre inégalité, prenons  $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$  tel que :

$$u(\mathbf{x}, t) = tL\left(\frac{\mathbf{x}-\mathbf{z}}{t}\right) + g(\mathbf{z}),$$

et posons :

$$\mathbf{y} := \frac{s}{t}\mathbf{x} + \left(1 - \frac{s}{t}\right)\mathbf{z}.$$

On a alors :

$$\frac{\mathbf{x}-\mathbf{y}}{t-s} = \frac{\mathbf{x}-\mathbf{z}}{t} = \frac{\mathbf{y}-\mathbf{z}}{s},$$

et, par conséquent,

$$\begin{aligned} u(\mathbf{x}, t) &= tL\left(\frac{\mathbf{x}-\mathbf{z}}{t}\right) + g(\mathbf{z}) \\ &= (t-s)L\left(\frac{\mathbf{x}-\mathbf{y}}{t-s}\right) + sL\left(\frac{\mathbf{y}-\mathbf{z}}{s}\right) + g(\mathbf{z}) \\ &\geq (t-s)L\left(\frac{\mathbf{x}-\mathbf{y}}{t-s}\right) + u(\mathbf{y}, s). \end{aligned}$$

Donc, et ceci conclut,

$$u(\mathbf{x}, t) \geq \min_{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n} \left\{ (t-s)L\left(\frac{\mathbf{x}-\mathbf{y}}{t-s}\right) + u(\mathbf{y}, s) \right\}. \quad \square$$

Les résultats suivants permettent de démontrer que la fonction  $u$  ainsi définie est effectivement une solution de (4.a) : en effet, elle est lipschitzienne (proposition 4.6), or une fonction lipschitzienne est différentiable presque partout (théorème 4.7, dû à Rademacher) et si  $u$  est différentiable en  $(\mathbf{x}, t)$ , alors  $u_t + H(\mathbf{D}_{\mathbf{x}}u) = 0$  (proposition 4.8), donc  $u$  est bien solution presque partout.

**PROPOSITION 4.6.** — *La fonction  $u$  définie par la formule de Lax–Hopf (4.i) est lipschitzienne sur  $\mathbb{R}^n \times [0, +\infty[$ . De plus  $u = g$  pour  $t = 0$ .*

*Démonstration.* — Montrons d'abord que  $u$  est lipschitzienne en  $\mathbf{x}$ . Fixons pour cela  $t > 0$  et  $\mathbf{x}, \hat{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$ . Soit  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$  tel que

$$u(\mathbf{x}, t) = g(\mathbf{y}) + tL\left(\frac{\mathbf{x}-\mathbf{y}}{t}\right).$$

On a alors :

$$\begin{aligned} u(\hat{\mathbf{x}}, t) - u(\mathbf{x}, t) &= \min_{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n} \left\{ tL\left(\frac{\hat{\mathbf{x}}-\mathbf{z}}{t}\right) + g(\mathbf{z}) \right\} - g(\mathbf{y}) - tL\left(\frac{\mathbf{x}-\mathbf{y}}{t}\right) \\ &\leq g(\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x} + \mathbf{y}) - g(\mathbf{y}) \\ &\leq C|\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}| \end{aligned}$$

En échangeant les rôles de  $\mathbf{x}$  et  $\hat{\mathbf{x}}$ , on obtient

$$|u(\hat{\mathbf{x}}, t) - u(\mathbf{x}, t)| \leq C|\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}|.$$

Regardons maintenant ce qui se passe par rapport à la variable  $t$ , après avoir fixé  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ . En prenant  $\mathbf{y} = \mathbf{x}$  dans la formule de Lax–Hopf (4.i), on voit que

$$u(\mathbf{x}, t) \leq t\bar{L}(0) + g(\mathbf{x}).$$

De plus, en notant  $C$  la constante de Lipschitz de  $g$ , on a :

$$\begin{aligned} u(\mathbf{x}, t) &\geq \min_{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n} \left\{ g(\mathbf{x}) - C|\mathbf{x} - \mathbf{y}| + tL\left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{y}}{t}\right) \right\} \\ &\geq g(\mathbf{x}) + \min_{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n} \left\{ -C|\mathbf{x} - \mathbf{y}| + tL\left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{y}}{t}\right) \right\} \\ &\geq g(\mathbf{x}) - t \max_{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n} \{C|\mathbf{z}| - L(\mathbf{z})\}. \end{aligned}$$

Par conséquent, en posant  $B = B(0, C)$  la boule de centre 0 et de rayon  $C$ , on obtient

$$u(\mathbf{x}, t) \geq g(\mathbf{x}) - t \max_{\mathbf{w} \in B} \max_{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n} \{\mathbf{w} \cdot \mathbf{z} - L(\mathbf{z})\} = g(\mathbf{x}) - t \max_{\mathbf{p} \in B} H(\mathbf{p}).$$

Cette inégalité implique donc, en posant  $C := \max\{|L(0)|, \max_B H\}$ , que

$$|u(\mathbf{x}, t) - g(\mathbf{x})| \leq Ct,$$

et donc  $u$  est aussi lipschitzienne en  $t$ . □

**THÉORÈME 4.7 (Rademacher).** — *Une fonction lipschitzienne  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  est différentiable presque partout au sens de Lebesgue.*

Nous admettrons ce théorème, qui va bien au-delà de notre propos.

**PROPOSITION 4.8.** — *Soit  $u$  la fonction définie par la formule de Lax–Hopf (4.i), alors si  $u$  est différentiable en un point  $(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^n \times ]0, +\infty[$ , on a :*

$$u_t(\mathbf{x}, t) + H(\mathbf{D}_{\mathbf{x}}u(\mathbf{x}, t)) = 0.$$

*Démonstration.* — Nous allons procéder en deux temps pour montrer qu'effectivement on a  $u_t(\mathbf{x}, t) + H(\mathbf{D}_{\mathbf{x}}u(\mathbf{x}, t)) = 0$ . Soit pour commencer  $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$  et  $h > 0$ . En utilisant (4.j), on obtient :

$$u(\mathbf{x} + h\mathbf{q}, t + h) = \min_{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n} \left\{ hL\left(\frac{\mathbf{x} + h\mathbf{q} - \mathbf{y}}{t}\right) + u(\mathbf{y}, t) \right\} \leq hL(\mathbf{q}) + u(\mathbf{x}, t),$$

donc

$$\frac{u(\mathbf{x} + h\mathbf{q}, t + h) - u(\mathbf{x}, t)}{h} \leq L(\mathbf{q}).$$

En faisant tendre  $h$  vers 0, on obtient

$$\mathbf{q} \cdot \mathbf{D}_x u(\mathbf{x}, t) + u_t(\mathbf{x}, t) \leq L(\mathbf{q}),$$

cette inégalité étant valable pour tout  $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$ . On a donc, en écrivant que  $H = L^*$ ,

$$u_t(\mathbf{x}, t) + H(\mathbf{D}_x u(\mathbf{x}, t)) = u_t(\mathbf{x}, t) + \max_{\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n} \{ \mathbf{q} \cdot \mathbf{D}_x u(\mathbf{x}, t) - L(\mathbf{q}) \} \leq 0.$$

Prenons maintenant  $\mathbf{z}$  tel que  $u(\mathbf{x}, t) = tL\left(\frac{\mathbf{x}-\mathbf{z}}{t}\right) + g(\mathbf{z})$ . Fixons  $h > 0$ , et posons :

$$s = t - h \quad \text{et} \quad \mathbf{y} = \frac{s}{t}\mathbf{x} + \left(1 - \frac{s}{t}\right)\mathbf{z}.$$

Alors  $\frac{\mathbf{x}-\mathbf{z}}{t} = \frac{\mathbf{y}-\mathbf{z}}{s}$  et

$$u(\mathbf{x}, t) - u(\mathbf{y}, s) \geq tL\left(\frac{\mathbf{x}-\mathbf{z}}{t}\right) + g(\mathbf{z}) - \left[ sL\left(\frac{\mathbf{y}-\mathbf{z}}{s}\right) + g(\mathbf{z}) \right] = (t-s)L\left(\frac{\mathbf{x}-\mathbf{z}}{t}\right),$$

ce qui s'écrit

$$\frac{u(\mathbf{x}, t) - u\left(\left(1 - \frac{h}{t}\right)\mathbf{x} + \frac{h}{t}\mathbf{z}, t - h\right)}{h} \geq L\left(\frac{\mathbf{x}-\mathbf{z}}{t}\right).$$

Quand  $h$  tend vers 0, on obtient

$$\left(\frac{\mathbf{x}-\mathbf{z}}{t}\right) \cdot \mathbf{D}u(\mathbf{x}, t) + u_t(\mathbf{x}, t) \geq L\left(\frac{\mathbf{x}-\mathbf{z}}{t}\right).$$

Par conséquent, et ceci termine la preuve, on a :

$$\begin{aligned} u_t(\mathbf{x}, t) + H(\mathbf{D}_x u(\mathbf{x}, t)) &= u_t(\mathbf{x}, t) + \max_{\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n} \{ \mathbf{q} \cdot \mathbf{D}_x u(\mathbf{x}, t) - L(\mathbf{q}) \} \\ &\geq u_t(\mathbf{x}, t) + \left(\frac{\mathbf{x}-\mathbf{z}}{t}\right) \cdot \mathbf{D}_x u(\mathbf{x}, t) - L\left(\frac{\mathbf{x}-\mathbf{z}}{t}\right) \\ &\geq 0, \end{aligned} \quad \square$$

Tout ceci nous permet d'obtenir enfin la proposition suivante :

PROPOSITION 4.9. — *La fonction  $u$  définie par la formule de Lax–Hopf (4.i) est presque partout différentiable et solution de :*

$$\begin{cases} u_t + H(\mathbf{D}_x u) = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^n \times ]0, +\infty[, \\ u = g & \text{pour } t = 0. \end{cases} \quad (4.k)$$

*Démonstration.* — La formule de Hopf–Lax définit une fonction lipschitzienne. Le théorème de Rademacher affirme donc que cette fonction  $u$  est différentiable presque partout. Or nous venons de voir qu'en tout point où elle est différentiable,  $u$  est solution de (4.k). La proposition est ainsi prouvée.  $\square$

#### 4.5. Retour sur la résolution locale.

Lorsqu'au tout début de ce mémoire, nous avons regardé la méthode des caractéristiques, nous avons utilisé celle-ci pour résoudre localement les équations d'Hamilton–Jacobi (section 2.3). Il paraît donc naturel de se demander si la formule de Lax–Hopf prolonge la solution locale obtenue.

Rappelons que pour l'équation d'Hamilton–Jacobi (4.a), on a montré que les caractéristiques sont de la forme :

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + t\mathbf{DH}(\mathbf{p}),$$

avec  $\mathbf{p} = \mathbf{D}g(\mathbf{x}_0)$ . Le théorème d'inversion local nous avait permis de voir  $\mathbf{x}_0$  comme une fonction de  $\mathbf{x}$  et de  $t$  au voisinage de  $\mathbb{R}^n \times \{0\}$ . On avait montré que :

$$u(\mathbf{x}, t) = g(\mathbf{x}_0) + t[\mathbf{DH}(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{p} - H(\mathbf{p})],$$

définissait une solution sur ce même voisinage. Puisque  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + t\mathbf{DH}$ , on peut aussi écrire :

$$u(\mathbf{x}, t) = g(\mathbf{x}_0) + t \left[ \left( \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_0}{t} \right) \cdot \mathbf{p} - H(\mathbf{p}) \right].$$

Pour pouvoir avancer, il nous faut introduire la notion supplémentaire de sous-différentiabilité. Considérons une fonction convexe  $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  ; on appelle *sous-différentielle* de  $\Phi$  en  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  l'ensemble

$$D^- \Phi(\mathbf{x}) = \{ \mathbf{p} \in \mathbb{R}^n \mid \forall \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n, \Phi(\mathbf{y}) - \Phi(\mathbf{x}) \geq \mathbf{p} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y}) \}.$$

En utilisant par exemple le théorème d'Hahn–Banach, on montre que puisque  $\Phi$  est convexe,  $D^- \Phi(\mathbf{x}) \neq \emptyset$ . On montre aussi que  $\Phi$  est différentiable en  $\mathbf{x}$  si et seulement si  $D^- \Phi(\mathbf{x}) = \{ \mathbf{D}\Phi(\mathbf{x}) \}$ .

LEMME 4.10. — *Quels que soient  $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$ ,*

$$\mathbf{p} = \mathbf{DL}(\mathbf{q}) \iff \mathbf{q} = \mathbf{DH}(\mathbf{p}) \iff H(\mathbf{p}) + L(\mathbf{q}) = \mathbf{p} \cdot \mathbf{q}.$$

*Démonstration.* — Il suffit de démontrer le résultat en remplaçant les différentielles par des sous-différentielles. Or par définition  $\mathbf{p} \in D^- L(\mathbf{q})$  si et seulement si on a  $\forall \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{p} \cdot \mathbf{q} - L(\mathbf{q}) \geq \mathbf{p} \cdot \mathbf{y} - L(\mathbf{y})$ , *i. e.*  $H(\mathbf{p}) = \mathbf{p} \cdot \mathbf{q} - L(\mathbf{q})$ , et l'on démontre un résultat similaire en échangeant  $H$  et  $L$ .  $\square$

D'après ce lemme, on a donc :

$$L\left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_0}{t}\right) = \left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_0}{t}\right) \cdot \mathbf{p} - H(\mathbf{p}),$$

et, par conséquent,

$$u(\mathbf{x}, t) = g(\mathbf{x}_0) + tL\left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_0}{t}\right) = \min_{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n} \left\{ tL\left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{y}}{t}\right) + g(\mathbf{y}) \right\}.$$

On a donc le résultat suivant :

PROPOSITION 4.11. — *La fonction régulière obtenue par la méthode des caractéristiques et qui résout l'équation d'Hamilton–Jacobi au voisinage de  $t = 0$  coïncide sur son ensemble de définition avec la solution obtenue par la méthode de Lax–Hopf, qui la prolonge donc sur  $\mathbb{R}^n \times ]0, +\infty[$ .*

#### 4.6. Semiconcavité et unicité.

Nous venons de prouver que le formule de Hopf–Lax donne une solution de l'équation d'Hamilton–Jacobi, au sens où dès qu'elle est différentiable, elle vérifie l'équation. Il semble donc naturel de s'intéresser aux fonctions lipschitziennes qui résolvent cette équation presque partout en remplissant la condition initiale. Cependant, ces solutions lipschitziennes ne sont en général pas uniques.

*Exemple.* — Considérons le problème suivant :

$$\begin{cases} u_t + |u_x|^2 = 0 & \text{sur } \mathbb{R} \times ]0, +\infty[, \\ u = 0 & \text{pour } t = 0. \end{cases}$$

La fonction identiquement nulle est clairement solution presque partout, et même partout, de ce problème. Cependant, on vérifie sans peine que la fonction :

$$u(x, t) := \begin{cases} 0 & \text{si } |x| \geq t, \\ x - t & \text{si } 0 \leq x \leq t, \\ -x - t & \text{si } -t \leq x \leq 0. \end{cases}$$

est également solution du problème presque partout (en fait, elle est solution partout en dehors des droites d'équation  $x = 0$ ,  $x = t$  et  $x = -t$ ).

Il nous faut donc demander plus à une solution faible pour assurer son unicité. L'objectif est de trouver un critère que seule la solution définie par la formule de Hopf–Lax vérifie parmi les solutions de 4.a.

Commençons par une définition : une fonction  $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  est dite *semiconcave* s'il existe une constante  $C > 0$  telle que :

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n, \quad \varphi(\mathbf{x} + \mathbf{z}) - 2\varphi(\mathbf{x}) + \varphi(\mathbf{x} - \mathbf{z}) \leq C|\mathbf{z}|^2.$$

Il se trouve que si  $g$  est semiconcave, alors la solution donnée par la formule de Hopf–Lax vérifie la propriété suivante :

PROPOSITION 4.12. — *Si  $u$  est la solution de (4.a) définie par la formule de Hopf–Lax, et si la condition aux limites  $g$  est semiconcave, alors  $u$  est semiconcave en  $\mathbf{x}$  et ce uniformément en  $t$ .*

*Démonstration.* — Soit  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$  tel que  $u(\mathbf{x}, t) = tL\left(\frac{\mathbf{x}-\mathbf{y}}{t}\right) + g(\mathbf{y})$ , on a alors :

$$\begin{aligned} & u(\mathbf{x} + \mathbf{z}, t) - 2u(\mathbf{x}, t) + u(\mathbf{x} - \mathbf{z}, t) \\ & \leq \left[ tL\left(\frac{\mathbf{x}-\mathbf{y}}{t}\right) + g(\mathbf{y} + \mathbf{z}) \right] - 2 \left[ tL\left(\frac{\mathbf{x}-\mathbf{y}}{t}\right) + g(\mathbf{y}) \right] + \left[ tL\left(\frac{\mathbf{x}-\mathbf{y}}{t}\right) + g(\mathbf{y} - \mathbf{z}) \right] \\ & \leq g(\mathbf{y} + \mathbf{z}) - 2g(\mathbf{y}) + g(\mathbf{y} - \mathbf{z}) \\ & \leq C|\mathbf{z}|^2. \end{aligned} \quad \square$$

On verra que cette condition sur les solutions est presque suffisante pour assurer l'unicité. Il est donc intéressant d'avoir plusieurs façons d'obtenir cette semiconcavité en  $\mathbf{x}$  de  $u$ . C'est pourquoi nous allons montrer qu'il n'est pas nécessaire de supposer  $g$  semiconcave, à condition de faire à la place une hypothèse sur le hamiltonien  $H$ . Pour cela, introduisons une nouvelle définition : une fonction convexe  $K : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^2$  est dite *uniformément convexe* s'il existe une constante  $\theta > 0$  telle que

$$\forall \mathbf{p}, \xi \in \mathbb{R}^n, \quad (\mathbf{D}^2 H(\mathbf{p}) \cdot \xi) \cdot \xi \geq \theta |\xi|^2.$$

LEMME 4.13. — Si  $H$  est uniformément convexe et si  $L = H^*$ , on a :

$$\frac{1}{2}L(\mathbf{q}_1) + \frac{1}{2}L(\mathbf{q}_2) \leq L\left(\frac{\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2}{2}\right) + \frac{1}{8\theta}|\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2|^2.$$

*Démonstration.* — Il suffit de remarquer que pour tout  $\mathbf{q}$ , il existe un unique point  $\mathbf{p}$  tel que  $L(\mathbf{q}) = \mathbf{p} \cdot \mathbf{q} - H(\mathbf{p})$ , qui est donné par  $\mathbf{p} = (\mathbf{D}H)^{-1}(\mathbf{q})$ . En posant  $\mathbf{G} = (\mathbf{D}H)^{-1}$ , on obtient

$$L(\mathbf{q}) = \mathbf{q} \cdot \mathbf{G}(\mathbf{q}) - H(\mathbf{G}(\mathbf{q})),$$

ce qui donne en différenciant  $\mathbf{D}L(\mathbf{q}) = \mathbf{G}(\mathbf{q})$ , donc  $\mathbf{D}^2 L = \mathbf{D}(\mathbf{D}H)^{-1} = (\mathbf{D}^2 H)^{-1}$ . Dire que  $H$  est uniformément convexe est équivalent à dire que  $\mathbf{D}^2 H$  est défini positif et que sa plus petite valeur propre est supérieure à  $\theta$ . Mais alors, l'inverse de cet endomorphisme est aussi défini positif, et sa plus grande valeur propre est inférieure à  $1/\theta$ . On a donc :

$$\forall \mathbf{q}, \xi \in \mathbb{R}^n, \quad (\mathbf{D}^2 L(\mathbf{q}) \cdot \xi) \cdot \xi \leq \frac{1}{\theta} |\xi|^2,$$

La formule de Taylor–Lagrange prise entre  $\frac{\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2}{2}$  et  $\mathbf{q}_1$  puis  $\mathbf{q}_2$  donne alors le résultat annoncé.  $\square$

PROPOSITION 4.14. — Si  $u$  est la solution de (4.a) définie par la formule de Hopf–Lax, et si le hamiltonien  $H$  est uniformément convexe, alors la fonction  $u$  est semiconcave en  $\mathbf{x}$ , et vérifie même :

$$u(\mathbf{x} + \mathbf{z}, t) - 2u(\mathbf{x}, t) + u(\mathbf{x} - \mathbf{z}, t) \leq \frac{1}{\theta t} |\mathbf{z}|^2.$$

*Démonstration.* — Soit  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$  tel que  $u(\mathbf{x}, t) = tL\left(\frac{\mathbf{x}-\mathbf{y}}{t}\right) + g(\mathbf{y})$ , on a alors :

$$\begin{aligned} & u(\mathbf{x} + \mathbf{z}, t) - 2u(\mathbf{x}, t) + u(\mathbf{x} - \mathbf{z}, t) \\ & \leq \left[ tL\left(\frac{\mathbf{x} + \mathbf{z} - \mathbf{y}}{t}\right) + g(\mathbf{y}) \right] - 2 \left[ tL\left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{y}}{t}\right) + g(\mathbf{y}) \right] + \left[ tL\left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{z} - \mathbf{y}}{t}\right) + g(\mathbf{y}) \right] \\ & \leq \frac{2t}{8\theta} \left| \frac{2\mathbf{z}}{t} \right|^2 \\ & \leq \frac{1}{\theta t} |\mathbf{z}|^2, \end{aligned} \quad \square$$

Nous allons maintenant prouver que la formule de Hopf–Lax définit la seule solution de (4.a) vérifiant la condition suivante :

$$\exists C > 0, \forall \mathbf{x}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n, \forall t > 0, u(\mathbf{x} + \mathbf{z}, t) - 2u(\mathbf{x}, t) + u(\mathbf{x} - \mathbf{z}, t) \leq C \left(1 + \frac{1}{t}\right) |\mathbf{z}|^2. \quad (4.1)$$

Remarquons que cette inégalité est, d’après les deux propositions précédentes, vérifiée dès que  $g$  est semiconcave ou que  $H$  est uniformément convexe.

PROPOSITION 4.15. — Soient  $u$  et  $v$  deux solutions lipschitziennes de (4.a) vérifiant la condition (4.1), alors  $u = v$  presque partout.

*Démonstration.* — 1. Notons  $C_u$  et  $C_v$  les constantes de Lipschitz respectivement de  $u$  et  $v$ . Posons  $w = u - v$ , et prenons un point  $(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^n \times ]0, +\infty[$  où  $u$  et  $v$  sont différentiables. On a alors

$$\begin{aligned} w_t(\mathbf{x}, t) &= -H(\mathbf{D}_{\mathbf{x}}u(\mathbf{x}, t)) + H(\mathbf{D}_{\mathbf{x}}v(\mathbf{x}, t)) \\ &= - \int_0^1 \frac{d}{ds} H[s\mathbf{D}_{\mathbf{x}}u(\mathbf{x}, t) + (1-s)\mathbf{D}_{\mathbf{x}}v(\mathbf{x}, t)] ds \\ &= - \int_0^1 \mathbf{D}H[s\mathbf{D}_{\mathbf{x}}u + (1-s)\mathbf{D}_{\mathbf{x}}v] \cdot (\mathbf{D}_{\mathbf{x}}u - \mathbf{D}_{\mathbf{x}}v) ds. \end{aligned}$$

On pose donc :

$$\mathbf{b}(\mathbf{x}, t) := \int_0^1 \mathbf{D}H[s\mathbf{D}_{\mathbf{x}}u(\mathbf{x}, t) + (1-s)\mathbf{D}_{\mathbf{x}}v(\mathbf{x}, t)] ds.$$

On a alors  $w_t + \mathbf{b} \cdot \mathbf{D}_{\mathbf{x}}w = 0$  presque partout.

2. Soit  $(\rho_k)$  une approximation positive de l’unité en 0 sur  $\mathbb{R}$ , à support inclus dans  $[-1/n, 1/n]$ . On pose  $\eta_k(\mathbf{x}, t) = \rho_k(\mathbf{x})\rho_k(t)$ , et on définit  $u^k := \eta_k * u$  ainsi que  $v^k := \eta_k * v$ . Ceci entraîne  $\mathbf{D}_{\mathbf{x}}u_n = \eta_k * \mathbf{D}_{\mathbf{x}}u$  et  $\mathbf{D}_{\mathbf{x}}v_n = \eta_k * \mathbf{D}_{\mathbf{x}}v$ , et donc :

$$|\mathbf{D}_{\mathbf{x}}u^k| \leq C_u \quad \text{et} \quad |\mathbf{D}_{\mathbf{x}}v^k| \leq C_v, \quad (4.m)$$

et de plus :

$$\mathbf{D}_x u^k \rightarrow \mathbf{D}_x u \quad \text{et} \quad \mathbf{D}_x v^k \rightarrow \mathbf{D}_x v \quad \text{p.p. quand } k \rightarrow +\infty. \quad (4.n)$$

De plus, en posant  $\varphi(t) = 1/t$ , la condition (4.l) implique que, dès que la convolution à un sens, par exemple pour  $s > 2/n$  :

$$u^k(\mathbf{x} + \mathbf{z}, t) - 2^k u(\mathbf{x}, t) + u^k(\mathbf{x} - \mathbf{z}, t) \leq C(1 + \rho_k * \varphi(t))|\mathbf{z}|^2.$$

Mais on a alors :

$$\rho_k * \varphi(t) = \int \rho_k(s) \frac{1}{t-s} ds \leq \frac{1}{t - \frac{1}{n}} \leq \frac{2}{t},$$

et, par conséquent,

$$u^k(\mathbf{x} + \mathbf{z}, t) - 2u^k(\mathbf{x}, t) + u^k(\mathbf{x} - \mathbf{z}, t) \leq 2C \left(1 + \frac{1}{t}\right) |\mathbf{z}|^2.$$

Le même résultat étant vrai pour  $v^k$ , on a donc :

$$\mathbf{D}^2 u^k \leq 2C \left(1 + \frac{1}{s}\right) \mathbf{1} \quad \text{et} \quad \mathbf{D}^2 v^k \leq 2C \left(1 + \frac{1}{s}\right) \mathbf{1} \quad (4.o)$$

3. On définit maintenant :

$$\mathbf{b}_k(\mathbf{x}, t) := \int_0^1 \mathbf{D}\mathbf{H}[s\mathbf{D}_x u^k(\mathbf{x}, t) + (1-s)\mathbf{D}_x v^k(\mathbf{x}, t)] ds.$$

Puisque  $w_t + \mathbf{b} \cdot \mathbf{D}_x w = 0$  presque partout, on a  $w_t + \mathbf{b}_k \cdot \mathbf{D}_x w = (\mathbf{b}_k - \mathbf{b}) \cdot \mathbf{D}_x w$ , toujours presque partout. Si  $\varphi$  est une fonction *positive* régulière, que nous pourrions fixer ultérieurement, en multipliant cette dernière égalité par  $\varphi'(w)$ , on obtient que, presque partout,  $\varphi(w)_t + \mathbf{b}_k \cdot \mathbf{D}\varphi(w) = (\mathbf{b}_k - \mathbf{b}) \cdot \mathbf{D}\varphi(w)$ . Puisque l'on a :

$$\operatorname{div}[\varphi(w)\mathbf{b}_k] = \mathbf{D}\varphi(w) \cdot \mathbf{b}_k + \varphi(w) \operatorname{div} \mathbf{b}_k,$$

on en déduit que :

$$\varphi(w)_t + \operatorname{div}[\varphi(w)\mathbf{b}_k] = \varphi(w) \operatorname{div} \mathbf{b}_k + (\mathbf{b}_k - \mathbf{b}) \cdot \mathbf{D}\varphi(w) \quad \text{p.p.}$$

4. Remarquons que :

$$\operatorname{div} \mathbf{b}_k = \int_0^1 \operatorname{Tr} [\mathbf{D}^2 \mathbf{H}(s\mathbf{D}_x u^k + (1-s)\mathbf{D}_x v^k) \cdot (s\mathbf{D}^2 u^k + (1-s)\mathbf{D}^2 v^k)] ds$$

et donc , d'après (4.m) et (4.o), puisque  $\mathbf{D}^2H$  est toujours positive,

$$\operatorname{div} \mathbf{b}_k \leq K \left(1 + \frac{1}{t}\right). \quad (4.p)$$

5. Fixons maintenant  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$  et  $t_0 > 0$ , et posons

$$R := \max \{ |\mathbf{D}H(\mathbf{p})|, |\mathbf{p}| \leq C_u \wedge C_v \} \quad \text{et} \quad B(t) := B(\mathbf{x}_0, (t_0 - t)R).$$

Enfin, posons :

$$e(t) = \int_{B(t)} \varphi(w)(\mathbf{x}, t) \, d\mathbf{x}.$$

Alors, pour presque tout  $t > 0$ , on a :

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= \int_{B(t)} \varphi(w)_t - R \int_{\partial B(t)} \varphi(w) \\ &= \int_{B(t)} -\operatorname{div}(\varphi(w)\mathbf{b}_k) + (\varphi(w) \operatorname{div} \mathbf{b}_k) + (\mathbf{b}_k - \mathbf{b}) \cdot \mathbf{D}\varphi(w) - R \int_{\partial B(t)} \varphi(w) \\ &= - \int_{\partial B(t)} \varphi(w)(\mathbf{b}_\varepsilon \cdot \mathbf{n} + R) + \int_{B(t)} \varphi(w) \operatorname{div} \mathbf{b}_k + (\mathbf{b}_k - \mathbf{b}) \cdot \mathbf{D}\varphi(w) \end{aligned}$$

Or, d'après (4.m) et (4.o) et les définitions de  $\mathbf{b}_k$  et  $R$ , puisque  $\varphi$  est positive, on a

$$\int_{\partial B(t)} \varphi(w)(\mathbf{b}_\varepsilon \cdot \mathbf{n} + R) \geq 0.$$

On en déduit donc que

$$\dot{e}(t) \leq \int_{B(t)} \varphi(w) \operatorname{div} \mathbf{b}_k + (\mathbf{b}_k - \mathbf{b}) \cdot \mathbf{D}\varphi(w) \quad \text{p.p.}$$

La majoration (4.p) donne alors

$$\dot{e}(t) \leq K \left(1 + \frac{1}{t}\right) e(t) + \int_{B(t)} (\mathbf{b}_\varepsilon - \mathbf{b}) \cdot \mathbf{D}\varphi(w) \quad \text{p.p..}$$

Le second terme du membre de droite tend vers 0 d'après (4.n) et (4.m) qui permettent d'appliquer le théorème de convergence dominée. On a donc :

$$\dot{e}(t) \leq K \left(1 + \frac{1}{t}\right) e(t) \quad \text{pour presque tout } 0 < t < t_0.$$

6. Pour terminer, fixons d'abord  $0 < \varepsilon < r < t$  et prenons ensuite  $\varphi(\mathbf{z})$  égal à 0 si  $|\mathbf{z}| \leq \varepsilon(C_u + C_v)$  et strictement positive partout ailleurs. Comme  $u = v$  sur  $\mathbb{R}^n \times \{t = 0\}$ , on a :

$$\varphi(w(\mathbf{x}, \varepsilon)) = \varphi(u(\mathbf{x}, \varepsilon) - v(\mathbf{x}, \varepsilon)) = 0.$$

Donc  $e(\varepsilon) = 0$ . Mais d'après le lemme de Gronwall,

$$e(r) \leq e(\varepsilon) \exp\left(\int_{\varepsilon}^r K\left(1 + \frac{1}{s}\right) ds\right) = 0,$$

donc nécessairement  $\varphi(w)$  est nulle sur  $B(t)$ , ce qui implique  $|w| \leq \varepsilon(C_u + C_v)$ , c'est-à-dire  $|u - v| \leq \varepsilon(C_u + C_v)$ . Cette inégalité étant valable quelque soit  $\varepsilon > 0$ ,  $u = v$  sur  $B(t) := B(\mathbf{x}_0, R(t_0 - t))$ . En particulier,

$$u(\mathbf{x}_0, t_0) = v(\mathbf{x}_0, t_0). \quad \square$$

THÉORÈME 4.16 (Lax–Hopf). — Soit  $H$  de classe  $\mathcal{C}^2$ , convexe et tel que  $\frac{H(\mathbf{p})}{|\mathbf{p}|} \rightarrow +\infty$  lorsque  $\mathbf{p} \rightarrow \infty$ . Soit  $g$  une fonction lipschitzienne; si  $g$  est semiconcave ou que  $H$  est uniformément convexe, alors il existe exactement une fonction  $u$ , appelée solution faible, telle que :

$$\begin{cases} u_t + H(\mathbf{D}_{\mathbf{x}}u, \mathbf{x}) = 0 & p.p. \text{ sur } \mathbb{R}^n \times ]0, +\infty[, \\ u = g & \text{pour } t = 0, \end{cases}$$

et telle que, quels que soient  $\mathbf{x}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$  et  $t > 0$ ,

$$u(\mathbf{x} + \mathbf{z}, t) - 2u(\mathbf{x}, t) + u(\mathbf{x} - \mathbf{z}, t) \leq C \left(1 + \frac{1}{t}\right) |\mathbf{z}|^2.$$

De plus,  $u$  est donnée par la formule de Hopf–Lax :

$$u(\mathbf{x}, t) = \min_{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n} \left\{ tL\left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{y}}{t}\right) + g(\mathbf{y}) \right\}.$$

## §5. RETOUR SUR LES LOIS DE CONSERVATION

Revenons maintenant à notre loi de conservation scalaire unidimensionnelle :

$$\begin{cases} u_t + f(u)_x = 0 & \text{sur } \mathbb{R} \times ]0, +\infty[, \\ u = g & \text{pour } t = 0, \end{cases} \quad (5.a)$$

Rappelons que si  $w$  est une solution de l'équation d'Hamilton–Jacobi associée à cette loi, à savoir :

$$\begin{cases} w_t + f(w_x) = 0 & \text{sur } \mathbb{R} \times ]0, +\infty[, \\ w = h & \text{pour } t = 0, \end{cases} \quad (5.b)$$

avec  $h(x) = \int_0^x g$ , un calcul simple suggère que  $u = w_x$  est solution de l'équation de départ.

Nous venons de voir que, si la fonction  $f$  est uniformément convexe, la formule de Hopf–Lax donne l’unique solution faible  $w$  des équations d’Hamilton–Jacobi, c’est-à-dire la seule solution considérée comme pertinente. Il peut paraître donc raisonnable que  $w_x$  vérifie à son tour des propriétés semblables à celles de  $w$ , voire qu’elle soit la seule solution à vérifier ces propriétés. Si c’était le cas, nous aurions alors résolu notre problème qui consistait à trouver un critère d’existence et d’unicité d’une « bonne » solution. Nous allons maintenant rendre tout cela un peu plus précis.

### 5.1. Résolution de la loi de conservation scalaire.

Nous supposons désormais, et jusqu’à la fin de ce mémoire, que la fonction de flux  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  et est uniformément convexe, c’est-à-dire qu’il existe  $\theta > 0$  tel que  $f'' > \theta$ . Nous allons commencer par montrer que la formule de Hopf–Lax donne bien, après dérivation, une solution du problème (5.a). Rappelons la formule de Hopf–Lax :

$$w(x, t) := \min_{y \in \mathbb{R}^n} \left\{ tL\left(\frac{x-y}{t}\right) + h(y) \right\},$$

où  $L$  désigne la transformée de Legendre  $f^*$  de  $f$ . Rappelons également que la fonction  $w$  ainsi définie est lipschitzienne et par conséquent différentiable presque partout.

**THÉORÈME 5.1 (Lax–Oleinik).** — *La fonction  $w_x$  est solution intégrale de l’équation de conservation scalaire (5.a).*

*Démonstration.* — Soit  $\psi \in \mathcal{C}^\infty$  à support compact. On a :

$$\int_{t=0}^{+\infty} \int_{x=-\infty}^{+\infty} (w_t + f(w_x)) \psi_x = 0.$$

Or, en intégrant par partie en temps, il vient que

$$\begin{aligned} \int_x \int_t w_t \psi_x &= - \int_x \int_t w \psi_{tx} - \int_x w \psi_x |_{t=0} \\ &= \int_t \int_x w_x \psi_t + \int_x w_x \psi |_{t=0}. \end{aligned}$$

De plus,  $w(x, 0) = h(x)$ , donc  $w_x(x, 0) = g(x)$  et ainsi :

$$\int_t \int_x w_t \psi_x = \int_t \int_x w_x \psi_t + \int_x g \psi |_{t=0},$$

et donc, par conséquent,

$$\int_t \int_x w_x \psi_t + f(w_x) \psi_x + \int_x g \psi |_{t=0} = 0. \quad \square$$

## 5.2. Quelques propriétés de la formule de Hopf-Lax.

Nous allons maintenant étudier quelques propriétés de la formule de Hopf-Lax. Avant toute chose, remarquons que puisque  $f$  est uniformément convexe,  $f'$  est une bijection strictement croissante. On pose donc :

$$G = f'^{-1}.$$

La première étape consiste à réécrire la formule de Hopf-Lax sans utiliser de minimisation. Pour cela, nous supposons désormais que  $g$  est bornée et sommable.

PROPOSITION 5.2. — *Pour tout  $t > 0$ , il existe une partie  $A_t$  de  $\mathbb{R}$  au plus dénombrable telle que pour tout  $x \in \mathbb{R} \setminus A_t$ , il existe un unique point  $y(x, t)$  tel que :*

$$\min_{y \in \mathbb{R}} \left\{ tL\left(\frac{x-y}{t}\right) + h(y) \right\} = tL\left(\frac{x-y(x,t)}{t}\right) + h(y(x,t)).$$

De plus, l'application  $x \mapsto y(x, t)$  est croissante.

*Démonstration.* — 1. Remarquons tout d'abord que si  $p^* = G(q)$ , on a :

$$L(q) = \max_{p \in \mathbb{R}} \{qp - f(p)\} = qp^* - f(p^*)$$

et donc  $L(q) = qG(q) - f(G(q))$ . Mais alors, on a :

$$L'(q) = G(q) + qG'(q) - f'(G(q))G'(q) = G(q),$$

donc  $L$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  et  $L''(q) = G'(q) > 1/\theta$ . Nous voyons alors que  $L$  est strictement convexe, nous savons donc désormais que le minimum donné dans l'énoncé est atteint en au moins un point.

2. Fixons, pour  $t > 0$ ,  $x_1 < x_2$ . Il existe alors  $y_1$  tel que

$$\min_{y \in \mathbb{R}} \left\{ tL\left(\frac{x_1-y}{t}\right) + h(y) \right\} = tL\left(\frac{x_1-y_1}{t}\right) + h(y_1).$$

Soit  $y < y_1$ , en utilisant la stricte convexité de  $L$  et la quantité

$$0 < \tau = \frac{y_1 - y}{x_2 - x_1 + y_1 - y} < 1,$$

qui permet d'écrire  $x_2 - y_1 = \tau(x_1 - y_1) + (1 - \tau)(x_2 - y)$  ainsi que

$$\begin{cases} x_2 - y_1 = \tau(x_1 - y_1) + (1 - \tau)(x_2 - y), \\ x_1 - y = (1 - \tau)(x_1 - y_1) + \tau(x_2 - y), \end{cases}$$

on obtient l'inégalité :

$$tL\left(\frac{x_2 - y_1}{t}\right) + h(y_1) < tL\left(\frac{x_2 - y}{t}\right) + h(y).$$

Ainsi, pour trouver

$$\min \left\{ tL\left(\frac{x_2 - y}{t}\right) + h(y) \right\},$$

nous n'avons besoin de regarder que les  $y \geq y_1$ .

Définissons maintenant  $y(x_2, t)$  comme étant le plus petit  $y > y_1$  qui atteint le minimum. La fonction  $x \mapsto y(x, t)$  ainsi définie est alors croissante, donc continue sauf éventuellement sur un ensemble au plus dénombrable. De plus, en tout point  $x$  où cette fonction est continue,  $y(x, t)$  est l'unique point donnant le minimum.  $\square$

### 5.3. La formule de Lax–Oleinik.

Nous pouvons maintenant plus aisément dériver la solution de Hopf–Lax par rapport à  $x$  pour obtenir une expression plus pratique de ce que nous espérons être la « bonne » solution de (5.a).

PROPOSITION 5.3 (Formule de Lax–Oleinik). — Soit  $w(x, t)$  la fonction définie par la formule de Hopf–Lax. Pour tout  $t > 0$  on a pour presque tout  $x$  la formule :

$$w_x(x, t) = G\left(\frac{x - y(x, t)}{t}\right).$$

*Démonstration.* — Nous savons que :

$$w(x, t) = \min_{z \in \mathbb{R}} \left\{ tL\left(\frac{x - z}{t}\right) + h(z) \right\} = tL\left(\frac{x - y(x, t)}{t}\right) + h(y(x, t))$$

est différentiable en  $x$  presque partout. De plus,  $x \mapsto y(x, t)$  étant monotone, elle est également différentiable presque partout d'après un théorème de Lebesgue. On peut ainsi calculer

$$w_x = L'\left(\frac{x - y}{t}\right)(1 - y_x) + h(y)_x.$$

Mais si  $x \in \mathbb{R}$  est fixé,

$$z \mapsto L\left(\frac{x - z}{t}\right) + h(z)$$

atteint un minimum en  $z = y(x, t)$ , par conséquent

$$z \mapsto L\left(\frac{x - y(z, t)}{t}\right) + h(y(z, t))$$

atteint un minimum en  $z = x$ , et donc en différentiant on obtient :

$$-L' \left( \frac{x-y}{t} \right) y_x + h(y)_x = 0.$$

De cela, on infère que :

$$w_x = L' \left( \frac{x-y}{t} \right) = G \left( \frac{x-y}{t} \right). \quad \square$$

Posons maintenant :

$$u(x, t) = w_x(x, t) = G \left( \frac{x - y(x, t)}{t} \right). \quad (5.c)$$

C'est donc une formule semi-explicite donnant une solution intégrale de notre loi de conservation. Nous allons maintenant établir une propriété que  $u$  est seule à vérifier parmi les solutions, ce qui nous donnera un critère d'unicité.

#### 5.4. Condition d'entropie.

Dans le cas des équations d'Hamilton–Jacobi précédemment, nous avons utilisé la semiconcavité comme condition à imposer pour assurer l'unicité de la solution, qui se trouvait être celle obtenue par la formule de Lax–Hopf. Nous allons maintenant établir une condition similaire pour la fonction  $u$  donnée par la formule de Lax–Oleinik. Cependant, à cause de la perte de régularité lors de la dérivation qui permet de passer de  $w$  à  $u = w_x$ , nous n'obtenons une inégalité que d'un seul côté :

PROPOSITION 5.4. — *Soit  $u$  la fonction définie par la formule de Lax–Oleinik, alors il existe une constante  $C > 0$  telle que :*

$$u(x+z, t) - u(x, t) \leq \frac{C}{t} z \quad (5.d)$$

pour tous  $t > 0$  et  $x, z \in \mathbb{R}$  avec  $z > 0$ .

C'est cette inégalité que nous appellerons désormais *condition d'entropie*, et que nous imposerons aux solutions. Une fonction  $u \in \mathbb{L}^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+*})$  est donc appelée *solution d'entropie* de (5.a) si  $u$  est une solution intégrale vérifiant cette condition d'entropie.

*Démonstration.* — Remarquons tout d'abord que comme  $f'' > \theta > 0$ , on a  $0 \leq G' < 1/\theta$ , et donc  $G$  est croissante et lipschitzienne. Notons  $C$  sa constante de Lipschitz. On a alors pour  $z > 0$ , puisque  $y$  est croissante,

$$G \left( \frac{x - y(x, t)}{t} \right) \geq G \left( \frac{x - y(x+z, t)}{t} \right) \geq G \left( \frac{x+z - y(x+z, t)}{t} \right) - \frac{C}{t} z,$$

c'est-à-dire

$$u(x, t) \geq u(x + z, t) - \frac{C}{t}z. \quad \square$$

Remarquons que pour  $t > 0$ , la fonction

$$x \mapsto u(x, t) - \frac{C}{t}x$$

est croissante et possède donc des limites à gauche et à droite. Il en est alors de même pour

$$x \mapsto u(x, t),$$

ces limites vérifiant de plus

$$u_g(x, t) \geq u_d(x, t).$$

Cette inégalité, dans le cas où  $f$  est uniformément convexe, est équivalente à l'ancienne notion de condition d'entropie (3.e) que nous avons formulée.

Nous pouvons maintenant énoncer le résultat que nous recherchions :

**THÉORÈME 5.5 (Oleinik).** — *Soit  $f$  uniformément convexe et régulière et  $g \in \mathbb{L}^\infty$ . Il existe alors, à un ensemble de mesure nulle près, une unique solution d'entropie à la loi de conservation scalaire unidimensionnelle :*

$$\begin{cases} u_t + f(u)_x = 0 & \text{sur } \mathbb{R} \times ]0, +\infty[, \\ u = g & \text{pour } t = 0, \end{cases}$$

La démonstration de ce théorème suit le même cheminement que dans le cas des équations d'Hamilton-Jacobi et nous ne la présenterons donc pas ici. Il faut tout de même noter que cette démonstration est un peu plus délicate dans la mesure où la formule de Lax–Oleinik ne définit pas comme celle de Hopf–Lax une fonction différentiable au sens usuel.

### 5.5. Un exemple important : le problème de Riemann.

Nous savons donc que si  $f$  est uniformément convexe, il existe une unique solution d'entropie et que celle-ci est donnée par la formule de Lax–Oleinik. Cependant, il est difficile de voir à quoi ressemble la fonction que définit cette formule. C'est pourquoi nous allons maintenant donner à titre d'exemple les solutions d'entropie de certaines lois de conservation scalaires unidimensionnelles. Il s'agit des lois dont la fonction de flux  $f$  est uniformément convexe, et dont la condition initiale est

$$g(x) = \begin{cases} u_g & \text{si } x < 0, \\ u_d & \text{si } x > 0, \end{cases}$$

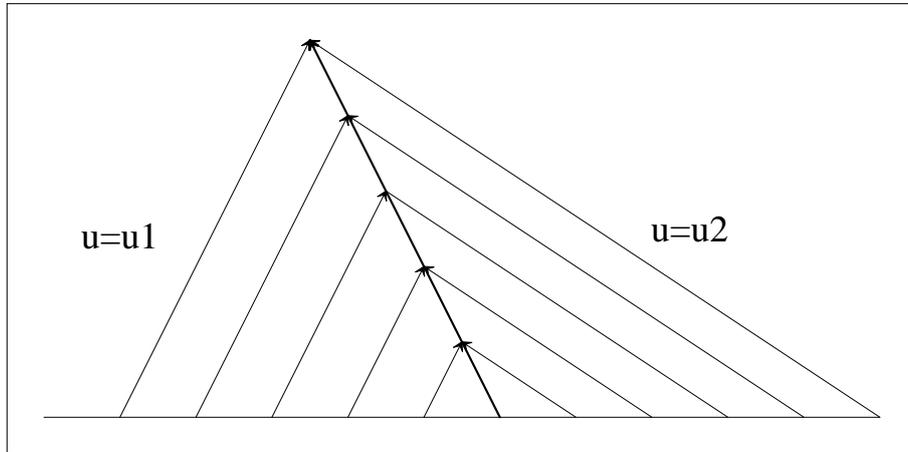


FIG. VI – Onde de choc pour le problème de Riemann

où les constantes  $u_g$  et  $u_d$  sont les états initiaux gauche et à droite du système. Un tel problème est appelé *problème de Riemann*. Nous allons distinguer deux cas et donner pour chacun d'eux la solution d'entropie. Le théorème précédent assurera alors que la solution est celle donnée par la formule de Lax–Oleinik.

THÉORÈME 5.6 (Rankine, Hugoniot, Lax). — Supposons  $u_g > u_d$ , et posons :

$$\sigma = \frac{f(u_g) - f(u_d)}{u_g - u_d}.$$

Alors la solution d'entropie du problème de Riemann est :

$$u(x, t) = \begin{cases} u_g & \text{si } x/t < \sigma, \\ u_d & \text{si } x/t > \sigma. \end{cases}$$

*Démonstration.* — La fonction  $u$  définie dans l'énoncé est clairement une solution intégrale du problème (1). De plus, puisque  $u_g > u_d$ , on a pour  $t > 0$  fixé et  $z > 0$  :

- soit  $u(x+z, t) - u(x, t) = 0$ ;
- soit  $u(x+z, t) - u(x, t) = u_d - u_g < 0$ ;

et donc n'importe quelle constante  $C > 0$  convient pour la condition d'entropie. □

Nous avons représenté ci-dessous cette solution. Il s'agit à nouveau d'une onde de choc se déplaçant à vitesse constante.

Regardons maintenant l'autre cas, qui est un peu plus compliqué.

PROPOSITION 5.7. — Si  $u_g < u_d$  alors la solution d'entropie du problème de Riemann est :

$$u(x, t) = \begin{cases} u_g & \text{si } x/t < f'(u_g), \\ G(x/t) & \text{si } f'(u_g) \leq x/t \leq f'(u_d), \\ u_d & \text{si } x/t > f'(u_d). \end{cases}$$

*Démonstration.* — La fonction  $u$  vérifie de façon évidente l'équation sur les ensembles

$$\{(x, t) \mid x/t < f'(u_g)\} \quad \text{et} \quad \{(x, t) \mid x/t > f'(u_d)\}.$$

Il nous reste donc à étudier  $u$  sur  $\{(x, t) \mid f'(u_g) \leq x/t \leq f'(u_d)\}$ . Nous avons alors :

$$u_t + u_x f'(u) = -\frac{x}{t^2} G' \left( \frac{x}{t} \right) + \frac{1}{t} G' \left( \frac{x}{t} \right) f' \left( G \left( \frac{x}{t} \right) \right) = 0$$

puisque par définition  $f'(G(z)) = z$ . Ainsi  $u$  est bien solution intégrale. D'autre part, comme  $G$  est  $C$ -lipschitzienne, nous pouvons écrire :

$$u(x+z, t) - u(x, t) = G \left( \frac{x+z}{t} \right) - G \left( \frac{x}{t} \right) \leq \frac{C}{t} z$$

dès que

$$f'(u_g) t \leq x < x+z \leq f'(u_d) t,$$

ce qui prouve que  $u$  satisfait la condition d'entropie.  $\square$

Nous avons de nouveau représenté ci-dessous cette solution. Il s'agit cette fois-ci une onde de détente.

## 5.6. Décroissance en norme infinie.

La formule de Lax–Oleinik présente de nombreux avantages. Elle permet notamment d'étudier le comportement asymptotique des solutions. Il y a de très nombreux résultats à ce sujet, mais nous n'allons présenter ici que le plus simple d'entre eux.

PROPOSITION 5.8. — Soit  $u$  l'unique solution d'entropie de l'équation de conservation scalaire (5.a). Il existe une constante  $C$  telle que

$$\forall t > 0, x \in \mathbb{R}, \quad |u(x, t)| \leq \frac{C}{\sqrt{t}}$$

*Démonstration.* — Posons  $\sigma = f'(0)$ , c'est-à-dire  $G(\sigma) = 0$ . Nous avons alors :

$$L(\sigma) = \sigma G(\sigma) - f(G(\sigma)) = 0 \quad \text{et} \quad L'(\sigma) = 0.$$

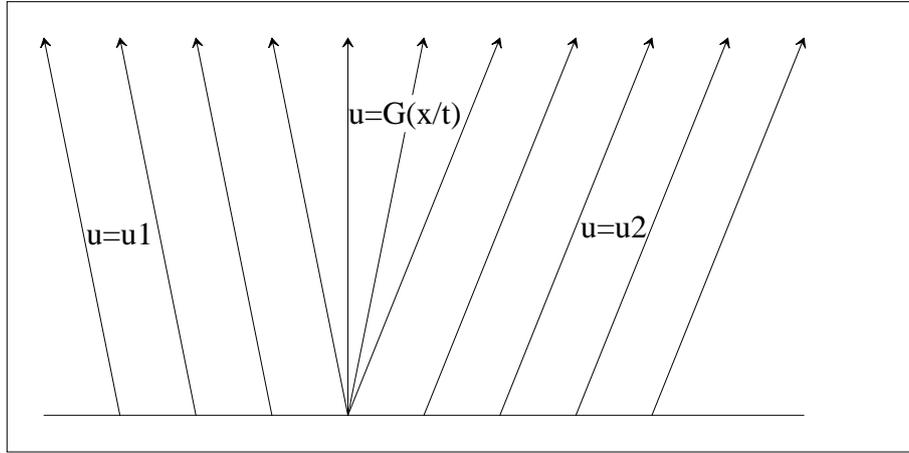


FIG. VII – Onde de détente pour le problème de Riemann

$L$  étant uniformément convexe, il existe une constante  $\theta > 0$  telle que

$$tL\left(\frac{x-y-\sigma t}{t} + \sigma\right) \geq t\left(L(\sigma) + L'(\sigma)\left(\frac{x-y-\sigma t}{t}\right) + \theta\left(\frac{x-y-\sigma t}{t}\right)^2\right).$$

On a donc

$$tL\left(\frac{x-y}{t}\right) \geq \theta \frac{|x-y-\sigma t|^2}{t}.$$

D'autre part, nous savons que  $h$  est bornée par  $M = \|g\|_1$ , d'où

$$h(y) + tL\left(\frac{x-y}{t}\right) \geq \theta \frac{|x-y-\sigma t|^2}{t} - M.$$

Remarquons maintenant que, si  $y = y(x, t)$ ,

$$tL\left(\frac{x-y}{t}\right) + h(y) \leq tL\left(\frac{x-(x-\sigma t)}{t}\right) + h(x-\sigma t) \leq M,$$

et on a par conséquent :

$$\theta \frac{|x-y-\sigma t|^2}{t} \leq 2M.$$

Ainsi il existe une constante  $A$  telle que :

$$\left|\frac{x-y(x, t)}{t} - \sigma\right| \leq \frac{A}{\sqrt{t}}.$$

Rappelons que nous pouvons considérer  $G$  lipschitzienne pour une certaine constante  $C$  et que nous avons choisi  $G(\sigma) = 0$ . Nous avons maintenant :

$$\begin{aligned}
 |u(x, t)| &= \left| G\left(\frac{x-y}{t}\right) \right| \\
 &= \left| G\left(\frac{x-y}{t} - \sigma + \sigma\right) - G(\sigma) \right| \\
 &\leq C \left| \frac{x-y}{t} - \sigma \right| \\
 &\leq \frac{AC}{\sqrt{t}} \quad \square
 \end{aligned}$$

## RÉFÉRENCES

- [CS] CANNARSA (Piermarco) et SINISTRARI (Carlo), *Semiconcave Functions, Hamilton-Jacobi Equations, and Optimal Control*. Birkhäuser, coll. « Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications », 2004.
- [EV] EVANS (Lawrence C.), *Partial Differential Equations*. American Mathematical Society, coll. « Graduate Studies in Mathematics », 1998.
- [GT] GONNORD (Stéphane) et TOSEL (Nicolas), *Thèmes d'analyse pour l'Agrégation : Calcul différentiel*. Ellipses, coll. « CAPES / Agrégation », 1998.
- [HO] HOPF (Eberhard), « The Partial Differential Equation  $u_t + uu_x = \mu u_{xx}$  », *Communications On Pure & Applied Mathematics*, 3 (1950), p. 201-230.