

Identification d'une conductivité par mesure sur le bord.

Yannick Bonthonneau et Rémi Jaoui

Sous la direction de Colin Guillarmou

La conductivité électrique d'un objet est une donnée physique qui peut permettre d'identifier les matériaux qui le composent, sa densité locale, sa conductivité thermique. La tomographie par impédance électrique a pour objet de déterminer la conductivité interne d'un objet à partir de mesure physique non destructive donc à partir de mesures sur le bord de l'objet. Nous allons montrer ici que ce programme n'est pas vain, en l'espèce, que les données de Cauchy formées des couples (V, j) où V est le potentiel électrique imposé au bord de l'objet, et j le courant électrique normal sortant, déterminent de façon unique la conductivité dans tout l'objet. Nous ne nous occuperons pas ici d'étudier des moyens (algorithmiques), qui existent, pour reconstituer cette conductivité de façon numérique. En toute généralité, γ est une métrique i.e. pour un ouvert de \mathbb{R}^n la donnée (lisse dans la suite) d'une matrice symétrique définie positive en tout point. Elle régit le champ V dans l'ouvert par l'équation

$$\operatorname{div} \gamma \nabla V = 0.$$

Nous allons démontrer le théorème suivant qui s'applique à des conductivités isotropes $\gamma = c(x)Id$:

Théorème (Uhlmann-Sylvester-Nachmann). *On fixe un ouvert borné Ω à bord lisse de \mathbb{R}^n , $n \geq 2$. On se donne γ_0 et γ_1 deux fonctions C^∞ réelles positives sur Ω telles que :*

- *Il existe $c > 0$ tel que $\gamma_0, \gamma_1 > c$ sur Ω (condition d'ellipticité).*
- *Pour $f \in H^{1/2}(\partial\Omega)$, si on note $u_i (i = 0, 1)$ la solution faible dans $H^1(\Omega)$ de $\operatorname{div}(\gamma_i \nabla u) = 0$ ($i = 0, 1$) et $u|_{\partial\Omega} = f$, alors sur $\partial\Omega$, on a $\partial_\nu u_0 = \partial_\nu u_1$.*

Alors $\gamma_0 = \gamma_1$.

Remarque. *La cas d'une conductivité qui ne serait pas isotrope est encore ouvert en dimension ≥ 3 . En dimension 2, on le traite en se ramenant au cas d'une conductivité isotrope*

Nous allons commencer par rappeler des généralités sur les espaces de Sobolev, puis nous allons démontrer le théorème de Kohn-Vogelius, qui énonce que si les conditions du théorème précédent sont réunies, les deux conductivités sont déjà égales, ainsi que toutes leurs dérivées, sur le bord de Ω . Ensuite nous exposerons la preuve du théorème en dimension $n \geq 3$ due à Sylvester-Uhlmann en 1987 puis une variation de la preuve de Bukhgeim pour la dimension 2 qui date de 2008. Notons que le théorème a été démontré en dimension 2 par Nachmann en 1996. Par convention, nous noterons toutes les constantes strictement positives C .

Table des matières

1 Préliminaires

3

1.1	Espaces de Sobolev dans \mathbb{R}^n	3
1.1.1	Distributions tempérées	3
1.1.2	Espaces de Sobolev dans \mathbb{R}^n	4
1.1.3	Propriétés de $\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^n)$	5
1.2	Espaces de Sobolev sur une variété compacte et sur un ouvert borné	5
1.2.1	Espace de Sobolev entier sur un ouvert de \mathbb{R}^n	5
1.2.2	Prolongement d'un élément de $\mathcal{H}^k(\Omega)$	6
1.2.3	Espaces de Sobolev sur une variété compacte	7
1.2.4	Théorème de trace	7
1.2.5	Etude de $\mathcal{H}_0^1(\Omega)$	9
1.3	Régularité elliptique	9
1.3.1	Opérateur elliptique	9
1.3.2	Majoration de la norme de u	10
1.3.3	Opérateur taux d'accroissement dans $\mathcal{H}^k(\mathbb{R}^n)$ et $\mathcal{H}^k(\mathbb{H})$	10
1.3.4	Théorème de régularité elliptique	11
1.4	Introduction des notations, première approche du problème	12
1.4.1	Existence de solutions au problème de Dirichlet	12
1.4.2	L'application de Dirichlet-to-Neumann	13
2	Le théorème de Kohn-Vogelius	14
2.1	Preuve du théorème	15
2.2	Démonstration des trois lemmes	16
2.2.1	Preuve du lemme 1	16
2.2.2	Preuve du lemme 2	17
2.2.3	Preuve du lemme 3	18
3	Démonstration du théorème en dimension ≥ 3	20
3.1	Réduction à une équation de Schrödinger	20
3.2	Une condition suffisante	20
3.2.1	Optiques géométriques	21
3.3	Retour aux conductivités	21
3.4	Construction des optiques géométriques	21
4	Démonstration en dimension 2	25
4.1	Première approche	25
4.2	Estimée de Carleman	25
4.2.1	Preuve du lemme 4	26
4.2.2	Preuve du lemme 5	27
4.3	Construction d'un terme correctif	28
4.4	Fin de la démonstration	31
	Références	33

1 Préliminaires

1.1 Espaces de Sobolev dans \mathbb{R}^n

1.1.1 Distributions tempérées

Nous avons décidé de présenter les espaces de Sobolev dans le cadre des distributions tempérées sur \mathbb{R}^n , puis des distributions sur une variété M , pour pouvoir combiner deux types de raisonnements sur les espaces de Sobolev : parfois par dualité à l'aide des distributions (ce qui permet des définitions directes), parfois par densité (ce qui permet des constructions simples).

On note $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ l'espace de Schwartz (à valeur dans \mathbb{C}) muni de sa topologie d'espace de Fréchet usuel.

Définition. On appelle *distribution tempérée sur \mathbb{R}^n* toute forme linéaire continue sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ muni de sa topologie usuelle. On note $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ l'ensemble de ces distributions sur \mathbb{R}^n muni de la topologie faible - étoile associée à la topologie sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

On note $\langle u, \omega \rangle$ l'action d'une distribution ω pour $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Ces distributions définissent un cadre naturel pour les opérations définies usuellement pour les fonctions \mathcal{C}^∞ . Ainsi, $L^p(\mathbb{R}^n)$ s'injecte dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ par :

$$\begin{aligned} L^p(\mathbb{R}^n) &\longrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)' \\ f &\longmapsto \left(u \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} f(x)u(x)dx \right). \end{aligned}$$

Comme $u \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, l'image de f est bien une distribution continue et l'injection est continue.

On définit maintenant les opérations usuelles sur les distributions.

Définition. On appelle *j -ème dérivée partielle d'une distribution $\omega \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$* , la distribution définie par :

$$\langle u, D_j \omega \rangle = -\langle D_j u, \omega \rangle \text{ où } D_j u = i \partial_j u.$$

Définition. Soit $v \in \mathbb{R}^n$ On définit la translation $\tau_v u$ pour $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ par

$$\langle f, \tau_v u \rangle = \langle \tau_{-v} f, u \rangle \text{ pour } f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

L'utilisation de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ comme ensemble de fonctions test sur \mathbb{R}^n s'explique par la régularité des fonctions tests mais aussi par son lien étroit avec la transformée de Fourier : $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ qui est une bijection linéaire et unitaire.

Définition. On appelle *transformée de Fourier d'une distribution tempérée ω* , la distribution tempérée définie par :

$$\langle u, \mathcal{F}\omega \rangle = \langle \mathcal{F}u, \omega \rangle \text{ où } u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

Ainsi, on prolonge \mathcal{F} par $(\mathcal{F})^*$ qui coïncide avec \mathcal{F} sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ car \mathcal{F} est autoadjointe. La transformée de Fourier étant bijective, par dualité, on obtient le théorème suivant :

Théorème. La transformée de Fourier ainsi définie, réalise un isomorphisme linéaire continu de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ sur lui même.

1.1.2 Espaces de Sobolev dans \mathbb{R}^n

Définition (Espaces de Sobolev entier). On appelle espace de Sobolev d'ordre $p \in \mathbb{N}$ de \mathbb{R}^n et on note $\mathcal{H}^p(\mathbb{R}^n)$ l'espace défini par :

$$\mathcal{H}^p(\mathbb{R}^n) = \{f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n), \forall \alpha \in \mathbb{N}^n, \text{ tel que } |\alpha| \leq p, D^\alpha f \in L^2(\mathbb{R}^n)\}.$$

On munit $\mathcal{H}^p(\mathbb{R}^n)$ du produit scalaire

$$(f, g)_{\mathcal{H}^p(\mathbb{R}^n)} = \sum_{|\alpha| \leq p} (D^\alpha f, D^\alpha g)_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

Proposition. $\mathcal{H}^p(\mathbb{R}^n)$ est un espace de Hilbert.

Démonstration. Il suffit de voir que $\mathcal{H}^p(\mathbb{R}^n)$ est complet. Cela résulte du fait que $L^2(\mathbb{R}^n)$ est complet et qu'une suite converge dans $\mathcal{H}^p(\mathbb{R}^n)$ si et seulement si elle et toutes ses dérivées jusqu'à l'ordre p convergent dans $L^2(\mathbb{R}^n)$. □

On s'intéresse maintenant au lien avec la transformée de Fourier. On note $\langle \xi \rangle = (1 + |\xi|^2)^{1/2}$.

Proposition. $u \in \mathcal{H}^p(\mathbb{R}^n) \iff \langle \xi \rangle^p \hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)$. De plus, le produit scalaire définie sur $\mathcal{H}^p(\mathbb{R}^n)$ par

$$(u, v)_{\mathcal{H}^p(\mathbb{R}^n)} = (\langle \xi \rangle^p \hat{u}, \langle \xi \rangle^p \hat{v})_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

est équivalent au précédent, dans le sens où les normes définies sont équivalentes et qu'il définit la même notion d'orthogonalité.

Démonstration. \mathcal{F} réalise un isomorphisme de $L^2(\mathbb{R}^n)$ sur $L^2(\mathbb{R}^n)$. L'équivalence des normes résulte de la continuité de \mathcal{F} et \mathcal{F}^{-1} et l'orthogonalité découle de leur caractère autoadjoint. □

Définition (Espaces de Sobolev non entiers). Soit $s \in \mathbb{R}$. On appelle espace de Sobolev d'ordre s de \mathbb{R}^n et on note $\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^n)$ l'espace défini par

$$\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^n) = \{f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n), \langle \xi \rangle^s \hat{f}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^n)\}.$$

On le munit du produit scalaire

$$(u, v)_{\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^n)} = (\langle \xi \rangle^s \hat{u}, \langle \xi \rangle^s \hat{v})_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

Proposition. Muni de ce produit scalaire, $\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^n)$ est un Hilbert.

1.1.3 Propriétés de $\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^n)$

Proposition (Résultat de densité). $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ et $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ sont denses dans $\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^n)$.

Démonstration. Soit $u \in \mathcal{H}^s(\mathbb{R}^n)$. On a $\langle \xi \rangle^s \hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Comme $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $L^2(\mathbb{R}^n)$, on peut trouver une suite $(u_n) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, telle que $u_n \rightarrow \langle \xi \rangle^s \hat{u}$ puis qu'on relève en $\phi_n = \mathcal{F}^{-1}(\langle \xi \rangle^{-s} u_n)$ (on peut car $\langle \xi \rangle$ ne s'annule pas). Comme $u_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, on a $\phi_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et par la définition de la norme sur $\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^n)$, on a $\phi_n \rightarrow u \in \mathcal{H}^s(\mathbb{R}^n)$. Comme \mathbb{R}^n est non borné, $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ce qui conclut. \square

Proposition (Injection de Sobolev). Si $s > \frac{n}{2} + k$ alors $\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{C}^k(\mathbb{R}^n)$.

Démonstration. Il suffit de traiter le cas $k = 0$. De nouveau, on lit f à travers sa transformée de Fourier. Soit $f \in \mathcal{H}^s(\mathbb{R}^n)$. $\langle \xi \rangle^s \hat{f}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Ainsi, par l'inégalité de Cauchy-Schwartz on obtient :

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\hat{f}(\xi)| d\xi \leq \int_{\mathbb{R}^n} \langle \xi \rangle^{2s} |\hat{f}(\xi)| d\xi \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} \langle \xi \rangle^{-2s} d\xi}_{< \infty} \text{ car } s > n/2.$$

D'où $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ et f est continue. \square

Proposition (Dérivation dans $\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^n)$). Soit $u \in \mathcal{H}^s(\mathbb{R}^n)$ On a équivalence entre :

- (i) $D_j u \in \mathcal{H}^s(\mathbb{R}^n)$.
- (ii) $\{ \frac{1}{h} (\tau_{he_j} u - u) \text{ où } h \in]0; 1] \}$ est borné dans $\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^n)$.

Démonstration. On considère $u \in \mathcal{H}^s(\mathbb{R}^n)$:

$$\mathcal{F}(h^{-1}(\tau_{he_j} u - u) - D_j u) = (h^{-1}(e^{ih\xi_j} - 1) - \xi_j) \hat{u}.$$

Comme $|h^{-1}(e^{ih\xi_j} - 1) - \xi_j| \leq C\xi_j$ pour $h \in]0; 1]$, par convergence dominée :

- si $D_j u \in \mathcal{H}^s(\mathbb{R}^n)$ alors $h^{-1}(\tau_{he_j} u - u) \rightarrow D_j u$ dans $\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^n)$ donc bornée dans $\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^n)$.
- si $\{h^{-1}(\tau_{he_j} u - u) \text{ où } h \in]0; 1] \}$ est borné dans $\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^n)$ alors on peut extraire une suite $h_n \rightarrow 0$ telle que $h_n^{-1}(\tau_{h_n e_j} u - u)$ converge au sens de la convergence faible (théorème de Banach - Alaoglu) vers $w \in \mathcal{H}^s(\mathbb{R}^n)$ (en particulier, $h_n^{-1}(\tau_{h_n e_j} u - u)$ converge vers w pour la convergence faible associée à $\mathcal{H}^{s-1}(\mathbb{R}^n)$). Enfin d'après le premier cas $h^{-1}(\tau_{he_j} u - u) \rightarrow D_j u$ dans $\mathcal{H}^{s-1}(\mathbb{R}^n)$ donc la topologie faible-étoile étant séparée, $w = D_j u \in \mathcal{H}^s(\mathbb{R}^n)$, ce qui prouve l'unicité de w et permet de conclure. \square

1.2 Espaces de Sobolev sur une variété compacte et sur un ouvert borné

Dans cette section, M désigne une variété compacte, Ω un ouvert de \mathbb{R}^n et \mathbb{H}^n le demi espace supérieur, ie $\{x \in \mathbb{R}^n, x_1 > 0\}$.

1.2.1 Espace de Sobolev entier sur un ouvert de \mathbb{R}^n

Définition. On appelle distribution sur Ω , toute forme linéaire continue sur $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ muni de sa topologie usuelle. On note $\mathcal{D}'(\Omega)$ l'ensemble des distributions sur M muni de la topologie faible - étoile associé à la topologie sur $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$.

L'opération de dérivée par un rapport à un vecteur se définit de manière analogue à \mathbb{R}^n . On munit Ω de la mesure de Lebesgue de \mathbb{R}^n .

Définition. On appelle espace de Sobolev d'ordre $p \in \mathbb{N}$ sur Ω ,

$$\mathcal{H}^p(\Omega) = \{f \in \mathcal{D}(\Omega) , \forall \alpha \in \mathbb{N}^n, \text{ tel que } |\alpha| \leq p , D^\alpha f \in \mathbb{L}^2(\Omega)\},$$

où la dérivée est prise au sens des distributions. On le munit du produit scalaire défini par

$$(f, g)_{\mathcal{H}^p(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq p} (D^\alpha f, D^\alpha g)_{\mathbb{L}^2(\Omega)}.$$

Proposition. Muni de ce produit scalaire, $\mathcal{H}^k(\Omega)$ est un espace de Hilbert.

Démonstration. Cela résulte de la définition de la définition de la norme et du fait que $\mathbb{L}^2(\Omega)$ est un Hilbert. \square

1.2.2 Prolongement d'un élément de $\mathcal{H}^k(\Omega)$

Le but est de montrer que si Ω est un ouvert borné à bord lisse alors tout élément de $\mathcal{H}^k(\Omega)$ se prolonge en un élément de $\mathcal{H}^k(\mathbb{R}^n)$. On étudie d'abord le cas "à une carte" du demi espace supérieur $\mathbb{H} = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^{n-1}$. On note $\mathcal{S}(\overline{\mathbb{H}})$ les restrictions d'éléments de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ à \mathbb{H} .

Proposition. $\mathcal{S}(\overline{\mathbb{H}})$ est dense dans $\mathcal{H}^k(\mathbb{H})$.

Démonstration. On a bien sûr $\mathcal{S}(\overline{\mathbb{H}}) \subset \mathcal{H}^k(\mathbb{H})$. Si $u \in \mathcal{H}^k(\mathbb{H})$, on a $\tau_s u \rightarrow u$ quand $s \rightarrow 0$. Or $\tau_s u$ étant définie pour les éléments de $\mathcal{S}(\overline{\mathbb{H}})$, elle définit une distribution sur \mathbb{R}^n . Ainsi, on peut approcher $\tau_s u$ et donc u par des fonctions de $\mathcal{S}(\overline{\mathbb{H}})$. \square

Par le théorème de prolongement des applications uniformément continues sur les espaces complets, on a une application $\rho : \mathcal{H}^k(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{H}^k(\mathbb{H})$ continue et linéaire qui à une distribution sur \mathbb{R}^n associe la distribution sur \mathbb{H} qui coïncide avec elle sur $\mathcal{S}(\overline{\mathbb{H}})$ qui est unique car $\mathcal{S}(\overline{\mathbb{H}})$ est dense dans $\mathcal{H}^k(\mathbb{H})$.

Proposition. Il existe une fonction continue $\mathcal{E} : \mathcal{H}^k(\mathbb{H}) \rightarrow \mathcal{H}^k(\mathbb{R}^n)$ telle que $\rho \mathcal{E} = id$ sur $\mathcal{H}^k(\mathbb{H})$.

Démonstration. Les fonctions $\mathcal{C}_c^\infty(\overline{\mathbb{H}})$ sont denses dans $\mathcal{H}^k(\mathbb{H})$ On définit \mathcal{E} pour $u \in \mathcal{C}_c^\infty(\overline{\mathbb{H}})$. On pose

$$\begin{aligned} \mathcal{E}u(x) &= u(x) \text{ si } x_1 \geq 0 \\ \mathcal{E}u(x) &= \sum_{j=1}^{k+1} a_j u(-jx_1, x') \text{ pour } x_1 < 0. \end{aligned}$$

La fonction \mathcal{E} , ainsi définie est linéaire. $\mathcal{E}u \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}^n)$ ssi les dérivées normales jusqu'à l'ordre k coïncident en $x_1 = 0$. On peut choisir les a_i dans un tel but si le système

$$\sum_{j=1}^{k+1} a_j (-j)^p = 1 \text{ pour } p = 0, 1, \dots, k$$

a une solution. Son déterminant est un Vandermonde non nul ce qui permet de conclure. On a de plus une majoration de la norme \mathbb{L}^2 de toute les dérivées jusqu'à l'ordre k . Ainsi, \mathcal{E} est une application linéaire et continue dans un espace complet. Elle se prolonge donc (par densité) en une unique application linéaire sur $\mathcal{H}^k(\mathbb{H})$. Comme $\rho \mathcal{E} = id$ sur $\mathcal{C}_0^\infty(\overline{\mathbb{H}})$, par continuité, cette égalité reste vraie sur $\mathcal{H}^k(\mathbb{H})$. \square

Théorème. Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^n borné à bord lisse. Tout élément de $\mathcal{H}^k(\Omega)$ se prolonge en un élément de $\mathcal{H}^k(\mathbb{R}^n)$.

Démonstration. En tout point $x \in \overline{\Omega}$, on peut trouver une carte locale (U, ϕ) tel que

- si $x \in \Omega$ alors $\phi(U) = \mathbb{R}^n$.
- si $x \in \partial\Omega$ alors $\phi(U) = \mathbb{H}$ et $\phi(U \cap \partial\Omega) = \mathbb{R}^{n-1}$.

Comme $\overline{\Omega}$ est compact, on extrait un sous recouvrement fini $(U_i, \phi_i)_{i \leq n}$. On considère (ψ_i) une partition de l'unité associée. Soit $u \in \mathcal{H}^k(\Omega)$. Pour chaque $i \leq n$,

- Si $U_i \cap \partial\Omega = \emptyset$, on pose $f_i(x) = \psi_i u$.
- Si $U_i \cap \partial\Omega \neq \emptyset$, on prolonge $\phi_i(\psi_i u)$ en $v_i \in \mathcal{H}^k(\mathbb{R}^n)$. De plus, comme $\phi_i(\psi_i u)$ est à support compact, on peut supposer v_i à support compact et on pose $f_i = \phi_i^{-1} v_i$.

La somme $\sum_i f_i$ (prolongé par 0) convient. L'opération sur chaque U_i est linéaire et continue et comme on en prend la somme, l'opération de prolongement est linéaire et continue. \square

1.2.3 Espaces de Sobolev sur une variété compacte

Définition. On appelle espace de Sobolev d'ordre $s \in \mathbb{R}$ sur M , l'ensemble $\mathcal{H}^s(M)$ des fonctions $u \in L^2(M)$ telle que pour toute carte (U, ϕ) telle que $\phi(U) = \mathbb{R}^n$ et toute fonction $\psi \in \mathcal{C}_0^\infty(U)$ à support compact dans U , $\phi(\psi u) \in \mathcal{H}^s(\mathbb{R}^n)$. On peut le munir d'un produit scalaire en utilisant les cartes.

Plusieurs remarques s'imposent :

- Comme M est compacte, si μ_1, μ_2 sont deux mesures obtenues en transportant la mesure de Lebesgue par des cartes sur M , alors la dérivée de Radon-Nikodym de l'une par rapport à l'autre est une fonction lisse, donc elle atteint ses bornes qui sont strictement positives, et elles sont absolument continues l'une par rapport à l'autre. Ceci nous assure que $L^2(M)$ est bien définie, ce qui n'est pas le cas si M n'est pas compacte.
- Il suffit de vérifier la propriété pour un recouvrement par des ouverts de cartes. En effet, $\mathcal{H}^s(M)$ est trivialement un espace vectoriel, et si la propriété est vraie pour un recouvrement ouvert, on peut par compacité en extraire un sous recouvrement fini puis faire la somme finie (avec partition de l'unité) pour retrouver f .
- La définition donnée ici n'est pas très robuste. La condition $\phi(U) = \mathbb{R}^n$ n'est en fait pas nécessaire. Elle est liée à la difficulté de définir les espaces de Sobolev non entiers sur un ouvert quelconque.
- Dans le cas entier, cette condition peut être oubliée. Sur une variété compacte orientable, les notions de distributions et $L^2(M)$ ont un sens contrairement à la notion de dérivée partielle. On peut néanmoins définir l'espace de Sobolev de manière analogue au cas d'un ouvert de \mathbb{R}^n $f \in \mathcal{H}^p(M)$ si et seulement si pour tout champs de vecteurs $X_1 \dots X_l$, $X_1 \dots X_l f \in L^2(M)$.
- Pour définir de manière propre $\mathcal{H}^s(M)$, il faut utiliser le procédé fonctoriel d'interpolation. Dans le cadre de cet exposé, cette définition nous suffira.

1.2.4 Théorème de trace

Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^n à bord lisse. On ne peut pas restreindre une fonction dans $L^2(\Omega)$ au bord de Ω puisqu'elle est définie à un ensemble de mesure nulle près et $\partial\Omega$ est de mesure nulle. Cependant, comme l'indique notamment le théorème précédent ou l'injection de Sobolev, les fonctions de $\mathcal{H}^1(\Omega)$ sont beaucoup plus régulières ce qui permet de définir leur trace. On traite comme précédemment l'exemple à une carte.

On s'intéresse donc à l'application trace τ de \mathbb{R}^{n+1} dans $\mathbb{R}^n \simeq \{0\} \times \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ définie par :

$$\begin{aligned} \tau : \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n+1}) &\longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \\ u &\mapsto x \mapsto u(x, 0). \end{aligned}$$

Proposition. *Pour $k \geq 1$, τ s'étend de manière unique en une application de $\mathcal{H}^k(\mathbb{R}^{n+1})$ dans $\mathcal{H}^{k-1/2}(\mathbb{R}^n)$ et cette application est surjective.*

Démonstration. Comme τ est linéaire et que les fonctions $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{n+1})$ sont denses dans $\mathcal{H}^k(\mathbb{R}^{n+1})$, il suffit de montrer que τ est continue sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{n+1})$. Par le théorème de prolongement des applications uniformément continues, on aura la proposition.

Soient $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n+1})$ et $f = \tau(u)$. On utilise la transformée de Fourier pour évaluer la norme de f :

$$\hat{f}(\xi') = \int_{\mathbb{R}} \hat{u}(\xi) d\xi_1 \text{ où } \xi' = (\xi_2, \dots, \xi_n).$$

Donc comme $k \geq 1$, par Cauchy Schwartz, on obtient :

$$|\hat{f}(\xi')|^2 \leq \int_{\mathbb{R}} |\hat{u}(\xi)|^2 \langle \xi \rangle^{2k} d\xi_1 \int_{\mathbb{R}} \langle \xi \rangle^{-2k} d\xi_1.$$

La dernière intégrale est convergente car $k \geq 1$ et on peut écrire

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \langle \xi \rangle^{-2k} d\xi_1 &= \int_{\mathbb{R}} (1 + |\xi'|^2 + \xi_1^2)^{-k} d\xi_1 \\ &= C(1 + |\xi'|^2)^{-k+1/2}. \end{aligned}$$

Ainsi, on obtient :

$$\|f\|_{\mathcal{H}^{k-1/2}(\mathbb{R}^n)}^2 \leq C \|u\|_{\mathcal{H}^k(\mathbb{R}^{n+1})}^2.$$

Pour voir que τ est surjective, on utilise de nouveau la transformée de Fourier. Soit $g \in \mathcal{H}^{k-1/2}(\mathbb{R}^n)$. On considère l'élément $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+1})$ défini par :

$$\langle \xi \rangle^{2k} \hat{u}(\xi) = \hat{g}(\xi') \langle \xi' \rangle^{(k-1/2)}.$$

On a alors $u(x, 0) = cg(x)$ pour un certain $c \neq 0$ ce qui permet de conclure. □

Théorème (Théorème de trace). *Soit Ω un ouvert borné à bord lisse de \mathbb{R}^n . Si $k > 0$, l'application de $\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$ qui à une fonction associe sa restriction à $\partial\Omega$ se prolonge en une unique application linéaire continue $\tau : \mathcal{H}^k(\Omega) \longrightarrow \mathcal{H}^{k-1/2}(\partial\Omega)$. De plus, τ est surjective.*

Démonstration. Comme $\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$ est dense dans $\mathcal{H}^k(\Omega)$, si τ existe, elle est unique. Le cas étudié plus haut permet à l'aide de cartes de traiter le cas de Ω quelconque. □

1.2.5 Etude de $\mathcal{H}_0^1(\Omega)$

Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^n borné à bord lisse.

Définition. On définit $\mathcal{H}_0^1(\Omega)$ comme l'adhérence dans $\mathcal{H}^1(\Omega)$ de $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$.

Comme les normes induites sur $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ par $\mathcal{H}^1(\Omega)$ et $\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^n)$ coïncident et que ces espaces sont complets, $\mathcal{H}_0^1(\Omega)$ est le complété de $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ pour cette norme ou l'adhérence dans $\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^n)$ des fonctions \mathcal{C}^∞ à support compact dans Ω

Proposition (Inégalité de Poincaré). *On suppose que Ω est connexe. Il existe une constante $C > 0$ ne dépendant que de Ω telle que*

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \text{ pour } u \in \mathcal{H}_0^1(\Omega).$$

Démonstration. Il suffit de l'établir pour $u \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$. Pour x dans Ω , on considère la droite D parallèle à $\mathbb{R} \times \{0\}^{n-1}$ passant par x , puis la composante connexe I de x de $\overline{\Omega} \cap D$ (c'est un segment). Sur ce segment de longueur $L \leq \text{diam}(\Omega)$, on a par série de Fourier :

$$\int_I |u|^2 \leq L \int_I |\partial_1 u|^2.$$

Ensuite, on majore L par $\text{diam}(\Omega)$ et on intègre sur tout le domaine (la manipulation est facile car Ω est à bord lisse), et on peut conclure. □

Remarque. on vient de montrer le théorème dans le cas plus fort où l'ouvert n'est borné que dans une direction.

1.3 Régularité elliptique

1.3.1 Opérateur elliptique

Définition. Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^n . On appelle opérateur elliptique d'ordre 2 sur Ω tout opérateur différentiel de la forme

$$Pu = \sum_{|\alpha| \leq 2} (-1)^{|\alpha|} a_\alpha(x) D^\alpha u$$

où les $a_\alpha(x)$ sont des fonctions dans $\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$ tels que la partie principale vérifie la condition d'ellipticité :

$$\exists C > 0, \forall x \in \Omega, \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \sum_{i,j} a_{i,j}(x) \xi_i \xi_j \geq C |\xi|^2.$$

Lemme. Si P est un opérateur elliptique d'ordre 2 alors pour tout $u \in \mathcal{H}_0^1(\Omega)$,

$$|\langle u, P_2 u \rangle| \geq C \|u\|_{\mathcal{H}_0^1(\Omega)}^2.$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
|\langle u, P_2 u \rangle| &= \sum_{i,j} a_{i,j} \langle D_i u, D_j u \rangle \\
&\geq C \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
&\geq C \|u\|_{\mathcal{H}^1(\Omega)} \text{ par Poincaré.}
\end{aligned}$$

□

1.3.2 Majoration de la norme de u

Lemme (Majoration de $\|u\|_{\mathcal{H}^1(\Omega)}$). *Avec les hypothèses du théorème précédent, on a*

$$\|u\|_{\mathcal{H}^1(\Omega)}^2 \leq C \|Pu\|_{\mathcal{H}^{-1}(\Omega)}^2 + C \|u\|_{\mathcal{H}^0(\Omega)}^2.$$

Démonstration. On décompose $P = P_2 + P_{0,1}$ et on traite les parties indépendamment. On a :

$$\begin{aligned}
\langle P_2 u, u \rangle &\geq C \|u\|_{\mathcal{H}^1(\Omega)}^2 \\
\langle P_{0,1} u, u \rangle &\leq C \|u\|_{\mathcal{H}^0(\Omega)} \|u\|_{\mathcal{H}^1(\Omega)} \\
&\leq \frac{C}{2} (\epsilon \|u\|_{\mathcal{H}^1(\Omega)}^2 + \frac{1}{\epsilon} \|u\|_{\mathcal{H}^0(\Omega)}^2).
\end{aligned}$$

Ainsi, en revenant à l'opérateur P , on obtient en prenant ϵ assez petit :

$$\langle Pu, u \rangle \geq C \|u\|_{\mathcal{H}^1(\Omega)}^2 - C \|u\|_{\mathcal{H}^0(\Omega)}^2.$$

On a de plus

$$\begin{aligned}
\langle Pu, u \rangle &\leq C \|Pu\|_{\mathcal{H}^{-1}(\Omega)} \|u\|_{\mathcal{H}^1(\Omega)} \\
&\leq \frac{C}{2} (\epsilon \|u\|_{\mathcal{H}^1(\Omega)}^2 + \frac{1}{\epsilon} \|Pu\|_{\mathcal{H}^{-1}(\Omega)}^2).
\end{aligned}$$

On en déduit donc la condition suivante en prenant une nouvelle fois ϵ assez petit.

$$\|u\|_{\mathcal{H}^1(\Omega)}^2 \leq C \|P(x, D)u\|_{\mathcal{H}^{-1}(\Omega)}^2 + C \|u\|_{\mathcal{H}^0(\Omega)}^2.$$

□

1.3.3 Opérateur taux d'accroissement dans $\mathcal{H}^k(\mathbb{R}^n)$ et $\mathcal{H}^k(\mathbb{H})$

On considère

$$D_{j,h} u = \frac{1}{h} [\tau_{j,h}(u)(x) - u(x)] = \frac{1}{h} [(u)(x + h e_j) - u(x)].$$

$D_{j,h}$ est définie pour tout $j \leq n$ dans \mathbb{R}^n et pour $j \leq n - 1$ dans \mathbb{H} . Ω désigne l'un de ces deux espaces dans la suite de ce paragraphe.

Lemme. Quand $h \rightarrow 0^+$, $[P, D_{j,h}]$ est une famille bornée d'opérateurs d'ordre 2 ie, pour $u \in \mathcal{H}^{k+1}(\Omega)$

$$\|[P, D_{j,h}]u\|_{\mathcal{H}^{k-1}(\Omega)} \leq C\|u\|_{\mathcal{H}^{k+1}(\Omega)}.$$

Démonstration. Comme les $D_{j,h}$ commutent avec la dérivation, il suffit de montrer que

$$\|[M_\phi, D_{j,h}]u\|_{\mathcal{H}^k(\Omega)} \leq C\|u\|_{\mathcal{H}^k} \text{ pour } \phi \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$$

où M_ϕ désigne la multiplication par la fonction $\phi \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$. Cette identité est facile à montrer puisque

$$[M_\phi, D_{j,h}]u = -M_{D_{j,h}\phi} \circ \tau_{j,h}u$$

et comme $\phi \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$, on obtient

$$\|[M_\phi, D_{j,h}]u\|_{\mathcal{H}^k(\Omega)} \leq \|\nabla\phi\|_\infty \|u\|_{\mathcal{H}^k}.$$

□

Lemme. Si $v \in \mathcal{H}^k(\mathbb{R}^n)$, alors $\|D_{j,h}v\|_{\mathcal{H}^{k-1}(\Omega)} \leq \|v\|_{\mathcal{H}^k(\Omega)}$.

Démonstration. Cela résulte de la transformée de Fourier (cf lemme dérivation dans les espaces de Sobolev dans \mathbb{R}^n). □

1.3.4 Théorème de régularité elliptique

Théorème (Théorème de régularité elliptique). Soient P un opérateur elliptique d'ordre 2 et $u \in \mathcal{H}_0^1(\Omega)$ telle que $Pu = f \in \mathcal{H}^{k-1}(\Omega)$. Alors $u \in \mathcal{H}^{k+1}(\Omega)$ et :

$$\|u\|_{\mathcal{H}^{k+1}(\Omega)}^2 \leq C\|Pu\|_{\mathcal{H}^{k-1}(\Omega)}^2 + C\|u\|_{\mathcal{H}^k(\Omega)}^2.$$

Démonstration. On raisonne par récurrence sur $k \geq 0$.

– Si $k = 0$, c'est exactement le lemme 1.3.2.

– Si $k > 0$, on suppose le résultat vrai au rang k . On suppose que $Pu \in \mathcal{H}^k(\Omega)$ alors $Pu \in \mathcal{H}^{k-1}(\Omega)$ et donc $u \in \mathcal{H}^{k+1}(\Omega)$. Montrons que $u \in \mathcal{H}^{k+2}(\Omega)$.

On commence par localiser le problème pour pouvoir utiliser des cartes. Si $\psi \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$, alors

$$P(\psi u) = \overbrace{\psi Pu}^{\in \mathcal{H}^k(\Omega)} + \underbrace{[P, \psi]u}_{\in \mathcal{H}^k(\Omega)}.$$

Or $[P, \psi]$ est un opérateur de dérivation d'ordre 1 donc on a les deux équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} \forall j \in \mathbb{N}, \\ u \in \mathcal{H}^j(\Omega) &\iff \forall \psi \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega}), \psi u \in \mathcal{H}^j(\Omega) \\ P(u) \in \mathcal{H}^k(\Omega) &\iff \forall \psi \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega}), P(\psi u) \in \mathcal{H}^k(\Omega) \quad (\text{hypothèse de récurrence}). \end{aligned}$$

On se place alors dans une carte locale d'image \mathbb{R}^n ou \mathbb{H} et on applique l'hypothèse de récurrence à $D_{j,h}u \in \mathcal{H}^k(\Omega)$. On obtient alors :

$$\begin{aligned} \|D_{j,h}u\|_{\mathcal{H}^{k+1}(\Omega)} &\leq C\|P(x,D)D_{j,h}u\|_{\mathcal{H}^{k-1}(\Omega)}^2 + C\|D_{j,h}u\|_{\mathcal{H}^k(\Omega)}^2 \\ &\leq C\|D_{j,h}P(x,D)u\|_{\mathcal{H}^{k-1}(\Omega)}^2 + C\|[P(x,D), D_{j,h}]u\|_{\mathcal{H}^{k-1}(\Omega)}^2 + C\|D_{j,h}u\|_{\mathcal{H}^k(\Omega)}^2 \\ &\leq C\|P(x,D)u\|_{\mathcal{H}^k(\Omega)}^2 + C\|u\|_{\mathcal{H}^{k+1}(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Ainsi, en passant à la limite $h \rightarrow 0^+$, on obtient :

$$D_j u \in \mathcal{H}^{k+1}(\Omega) \text{ et } \|D_{j,h}u\|_{\mathcal{H}^{k+1}(\Omega)}^2 \leq C\|P(x,D)u\|_{\mathcal{H}^k(\Omega)}^2 + C\|u\|_{\mathcal{H}^{k+1}(\Omega)}^2.$$

Dans le cas de \mathbb{H} , seul $D_1 u$ pose problème. Pour montrer que $D_1 u \in \mathcal{H}^{k+1}(\Omega)$, on montre que pour tout i , $D_i D_1 u \in \mathcal{H}^k(\Omega)$. Or si $i \neq 1$, $D_i D_1 u = D_1 D_i u \in \mathcal{H}^k(\Omega)$. Reste à montrer que $D_1^2 u \in \mathcal{H}^k(\Omega)$ ce qui est trivial car il s'écrit en fonction des autres dérivations secondes et de P . \square

1.4 Introduction des notations, première approche du problème

1.4.1 Existence de solutions au problème de Dirichlet

Dans toute la suite, on note Γ le bord lisse de Ω un ouvert borné, et tous les espaces fonctionnels sont entendus (sauf mention du contraire) comme ceux associés à Ω . Par exemple, $L^2 = L^2(\Omega)$. On note aussi les normes $\|\cdot\|_0 = \|\cdot\|_{L^2}$, $\|\cdot\|_p = \|\cdot\|_{H^p}$.

On cherche à résoudre le problème Dirichlet inhomogène :

$$L_\gamma u := -\operatorname{div}(\gamma \nabla u) = 0 \text{ et } u|_\Gamma = f.$$

Pour ce faire, on va commencer par résoudre le problème homogène de Dirichlet, en le formulant de façon faible sous la forme :

$$\int \gamma \nabla u \cdot \nabla \bar{v} = \int f \bar{v} \text{ pour tout } v \in H_0^1.$$

On vérifie qu'une solution forte du problème, i.e régulière et telle que $L_\gamma u = f$, $u|_\Gamma = 0$, est aussi solution faible. Si la conductivité γ est elliptique, au sens où il existe $c > 0$ tel que $\gamma > c > 0$ sur Ω , alors l'opérateur

$$P(u, v) := \int \gamma \nabla u \cdot \nabla \bar{v}$$

est une forme bilinéaire hermitienne coercive sur H_0^1 (cf. inégalité de Poincaré), donc étant donné $f \in H^{-1}$ le théorème de Lax-Milgram nous assure l'existence d'un u dans H_0^1 tel que

$$\begin{aligned} P(u, v) &= \langle f, v \rangle \\ \frac{1}{2}P(u, u) - \Re \langle f, u \rangle &= \min_{v \in H_0^1} \frac{1}{2}P(v, v) - \Re \langle f, v \rangle \end{aligned}$$

où le minimum est unique. Dans ces conditions, si $f \in H^{1/2}(\Gamma)$, on peut prolonger f à Ω en g avec $\|g\|_1 \leq C\|f\|_{1/2}$. On résout le problème homogène de Dirichlet pour $L_\gamma g$ avec u . On a alors $L_\gamma(g - u) = 0$ et $(g - u)|_\Gamma = g|_\Gamma = f$. Il reste à voir que

$$\|g - u\|_1^2 \leq 2\|g\|_1^2 + 2\|u\|_1^2.$$

Or par Poincaré,

$$\begin{aligned} \|u\|_1^2 &\leq CP(u, u) = C\langle u, L_\gamma u \rangle = CP(u, g) \\ &\leq C\|\nabla u\|_0 \|\nabla g\|_0 \leq C\|\nabla u\|_1 \|\nabla g\|_1. \end{aligned}$$

Il vient $\|g - u\|_1 \leq C\|f\|_{1/2}$. Il faut désormais déterminer la propriété d'extrémalité vérifiée par $g - u$. Pour $v \in H_0^1$, on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}P(v, v) - \Re\langle L_\gamma g, v \rangle &= \frac{1}{2}P(g - v, g - v) - \frac{1}{2}P(g, g) + \Re P(v, g) - \Re P(g, v) \\ &= \frac{1}{2}P(g - v, g - v) - \frac{1}{2}P(g, g). \end{aligned}$$

Ainsi, comme $\frac{1}{2}P(g, g)$ est une constante, $g - u$ est l'unique minimisateur de la fonctionnelle $P(x, x)$ sur l'espace des fonctions H^1 qui valent f sur Γ et c'est bien la solution du problème inhomogène de Dirichlet pour f .

1.4.2 L'application de Dirichlet-to-Neumann

Vu les résultats de la partie précédente, pour un opérateur D différentiel d'ordre 2 elliptique, on pourra considérer $DN(D) : H^{1/2} \rightarrow H^{-1/2}$ qui à des données sur le bord associe la dérivée normale de la solution du problème de Dirichlet. On a bien montré que $DN(L_\gamma)$ est continue. On note aussi, dans le cas de L_γ , $\Lambda_\gamma = \gamma DN(L_\gamma)$. L'hypothèse que l'on fera sur les conductivités dans la suite, sera que $\Lambda_{\gamma_1} = \Lambda_{\gamma_2}$ (on a le même *courant électrique* sortant).

2 Le théorème de Kohn-Vogelius

On va démontrer le théorème suivant, en utilisant la preuve originale de 1983 :

Théorème (Kohn Vogelius, voir [3]). *On se donne deux conductivités isotropes γ_1, γ_2 sur l'ouvert borné Ω de bord Γ lisse dans \mathbb{R}^n avec $n \geq 2$ telles que $\Lambda_{\gamma_1} = \Lambda_{\gamma_2}$. Alors elles sont égales ainsi que toutes leurs dérivées sur le bord de l'ouvert.*

Remarque. *il suffit de supposer que les deux conductivités sont lisses sur un voisinage du bord et dans $L^\infty(\Omega)$ pour conclure. Dans la suite on ne considèrera cependant que des conductivités lisse partout pour le confort.*

Ce théorème va être très utile par la suite pour pouvoir prolonger les deux conductivités à \mathbb{R}^n par une fonction lisse. La preuve repose sur l'idée que l'on peut imposer des données initiales très localisées autour d'un point fixé du bord, et telles que les solutions du problème de Dirichlet associé seront petites dès que l'on s'éloignera de ce point du bord. On utilisera le résultat de régularité elliptique suivant dans les espaces de Sobolev H^s , que nous avons démontré dans le cas où il nous servira, à savoir $s \in \mathbb{N}$:

Théorème (Régularité elliptique). *Si γ est C^∞ sur Ω , minorée par une constante $c > 0$, alors on a pour $u \in L^2$:*

$$\|u\|_s \leq C_s(\|f\|_{s-2} + \|\phi\|_{s-1/2, \Gamma} + \|u\|_0)$$

où $L_\gamma u = f, u|_\Gamma = \phi$, pour $s \geq 2$.

On commence par exposer trois lemmes dont on se sert pour démontrer le théorème, puis on les démontre. Pour les trois lemmes, on fixe une conductivité elliptique γ .

Lemme (1). *Soit $M \in \mathbb{N}^*$, $z \in \Gamma$. Alors il existe une suite (ϕ_N) de fonctions lisses sur Γ telles que :*

- $\|\phi_N\|_{t+1/2, \Gamma} \leq C_t N^t$ pour tout entier $t \geq -M$ (la partie technique est $t < 0$).
- $\|\phi_N\|_{1/2} = 1$.
- $\bigcap \text{supp}(\phi_N) = \{z\}$ avec intersection décroissante.

L'intérêt du lemme est de contrôler en même temps le support et les normes des dérivées. On note alors u_N la solution du problème de Dirichlet pour ϕ_N . Dans la suite on fixe $z \in \Gamma$, et on suppose que l'on a choisi un M dont on ajustera la valeur plus tard.

Lemme (2). *Soit $\Omega' \subset \Omega$ un ouvert tel que $d(z, \Omega') > 0$. Alors il existe une constante $C_{\Omega', \gamma, M} > 0$ telle que pour tout $N > 0$:*

$$\|\nabla u_N\|_{0, \Omega'} \leq C_{\Omega', \gamma, M} N^{-M}.$$

Ceci exprime bien l'idée que loin de z , u_n est très petite ainsi que son gradient (en effet, $u_N|_\Gamma = \phi_N$ est nulle loin de z donc on peut espérer adapter l'inégalité de Poincaré pour contrôler $\|u_N\|$). On notera dans la suite $\rho(x) = d(x, \Gamma)$.

Lemme (3). *Soit U un voisinage de z dans $\bar{\Omega}$. Pour $l \geq 0$ et $\epsilon > 0$, il existe $C_{l, \epsilon} > 0$ telle que pour N assez grand,*

$$\int_U \rho^l |\nabla u_N|^2 \geq C_{l, \epsilon} N^{-(n+\epsilon)l}.$$

2.1 Preuve du théorème

Pour démontrer le théorème, on va raisonner par contraposée. On suppose donc l'existence de l le plus petit entier k tel qu'il existe $z \in \Gamma$ tel que

$$\frac{\partial^k \gamma_1}{\partial \nu^k}(z) \neq \frac{\partial^k \gamma_2}{\partial \nu^k}(z).$$

On veut en déduire que $\Lambda_1 \neq \Lambda_2$. Pour ce faire, il suffit de montrer qu'il existe N tel que

$$\langle \phi_N, \Lambda_1 \phi_N \rangle \neq \langle \phi_N, \Lambda_2 \phi_N \rangle.$$

Mais on a $\langle \phi_N, \Lambda \phi_N \rangle = \int_{\Omega} \gamma |\nabla u_N|^2$, donc on va montrer que tout le poids de cette intégrale est concentré sur un voisinage de z où l'on contrôle la différence $|\gamma_1 - \gamma_2|$ par sa l -ième dérivée, et on pourra conclure.

Remarque. Si toutes les dérivées normales au bord d'ordre successifs de γ_1 et γ_2 sont égales, toutes les dérivées d'ordre successifs sont égales au bord.

Par continuité des conductivités et de leur dérivées, on peut se donner un voisinage U de z sur lequel on a une constante positive C telle que quitte à échanger les indices 1 et 2, on ait :

$$\gamma_1 - \gamma_2 \geq C\rho^l.$$

Dans ces conditions, pour tout $\epsilon > 0$ et tout N assez grand, en appliquant le lemme 3 :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \gamma_1 |\nabla u_N^1|^2 &\geq \int_U \gamma_1 |\nabla u_N^1|^2 \\ &\geq \int_U \gamma_2 |\nabla u_N^1|^2 + \int_U C\rho^l |\nabla u_N^1|^2 \\ &\geq \int_U \gamma_2 |\nabla u_N^1|^2 + CC_{l,\epsilon} N^{-(n+\epsilon)l}. \end{aligned}$$

Ensuite, on pose bien sûr $\Omega' = \Omega \setminus \bar{U}$, on choisit $M > \frac{1}{2}nl$, puis $0 < \epsilon < 2M/l - n$ et on a alors pour N assez grand :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega \setminus U} \gamma_2 |\nabla u_N^1|^2 &\leq \|\gamma_2\|_{\infty} \|\nabla u_N^1\|_0^2 \\ &\leq C' N^{-2M} \text{ d'après le lemme (2)} \\ &= o\left(N^{-(n+\epsilon)l}\right) \end{aligned}$$

Ainsi, pour N assez grand :

$$\int_{\Omega} \gamma_1 |\nabla u_N^1|^2 > \int_U \gamma_2 |\nabla u_N^1|^2 + \int_{\Omega \setminus U} \gamma_2 |\nabla u_N^1|^2.$$

Mais le théorème de Lax-Milgram qui nous a permis d'établir l'existence et l'unicité des solutions au problème de Dirichlet nous montre aussi une propriété d'extrémalité qui est la suivante :

$$\int_{\Gamma} \phi \Lambda_{\gamma} \phi = \inf \left\{ \int_{\Omega} \gamma |\nabla u|^2 \mid u \in H^1(\Omega), u|_{\Gamma} = \phi \right\}.$$

On en déduit que pour N assez grand,

$$\int_{\Gamma} \phi_N \Lambda_{\gamma_1} \phi_N > \int_{\Gamma} \phi_N \Lambda_{\gamma_2} \phi_N$$

ce qui termine la preuve.

2.2 Démonstration des trois lemmes

Lemme (1). *Soit $M \in \mathbb{N}^*$, $z \in \Gamma$. Il existe une suite (ϕ_N) de fonctions lisses sur Γ telles que :*

- $\|\phi_N\|_{t+1/2, \Gamma} \leq C_t N^t$ pour tout entier $t \geq -M$.
- $\|\phi_N\|_{1/2} = 1$.
- $\bigcap \text{supp}(\phi_N) = \{z\}$ avec intersection décroissante.

2.2.1 Preuve du lemme 1

C'est un problème local donc on peut prendre un voisinage de z dans \mathbb{R}^n et prendre une carte qui redresse Γ en $\Gamma = \{x_n = 0\}$. On se donne une fonction lisse φ à support dans $[-1, 1]$ telle que :

$$\int_{\mathbb{R}} t^k \varphi(t) dt = 0 \text{ pour tout entier } k, 0 \leq k \leq M$$

On pose

$$\Phi_N = \prod_1^{n-1} \phi(Nx_i).$$

On a bien $\bigcap \text{supp}(\Phi_N) = \{z\}$. On écrit alors pour $|\alpha| \leq m$

$$\int_{\Gamma} (\partial^\alpha \Phi_N)^2 = N^{2|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \prod \varphi^{(\alpha_i)}(Nx)^2 dx = N^{2|\alpha|-n+1} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \prod \varphi^{(\alpha_i)}(x)^2 dx$$

On en déduit ainsi les inégalités : pour tout $k \geq 0$ il existe $C_k, C'_k > 0$, pour tout $N \geq 0$

$$C_k N^{k-(n-1)/2} \leq \|\Phi_N\|_{k, \Gamma} \leq C'_k N^{k-(n-1)/2}.$$

On rappelle que

$$\|\Phi_N\|_{-k, \Gamma} = \sup \left\{ \frac{\langle \Phi_N, u \rangle}{\|u\|_{k, \Gamma}} \mid u \in \mathcal{D}(\Gamma) \right\}.$$

On va utiliser un argument de transformée de Fourier : pour $0 \leq k \leq M$,

$$\begin{aligned} \langle \Phi_N, u \rangle &= \langle \widehat{\Phi}_N, \widehat{u} \rangle = \langle |\xi|^{-k} \widehat{\Phi}_N, \widehat{u} |\xi|^k \rangle \\ &\leq \left| \int_{\Gamma} |\xi|^{-2k} \prod_1^{n-1} \frac{1}{N^2} \left| \widehat{\varphi}\left(\frac{\xi}{N}\right) \right|^2 \right|^{1/2} \|u\|_k \\ &\leq N^{-k-(n-1)/2} \left| \int_{\Gamma} |\xi|^{-2k} \prod_1^{n-1} |\widehat{\varphi}(\xi)|^2 \right|^{1/2} \|u\|_k \\ &\leq CN^{-k-(n-1)/2} \|u\|_k \end{aligned}$$

car la condition $\int_{\mathbb{R}} t^k \varphi(t) dt = 0$ implique que $\widehat{\varphi}^{(k)}(0) = 0$, et φ étant à support compact, $\widehat{\varphi}$ est dans Schwartz. En appliquant la convexité logarithmique des normes, on obtient bien le résultat cherché sur Φ_N , il ne reste qu'à poser :

$$\phi_N = \Phi_N / \|\Phi_N\|_{1/2, \Gamma}.$$

Pour vérifier que c'est correct, il faut invoquer le théorème d'interpolation (voir [6]) qui montre que $\|\Phi_N\|_{1/2} \sim N^{1-n/2}$. \square

Lemme (2). *Soit $\Omega' \subset \Omega$ un ouvert tel que $d(z, \Omega) > 0$. Soit γ une conductivité elliptique sur Ω . Alors :*

$$\|\nabla u_N\|_{0, \Omega'} \leq C_{\Omega', \gamma, M} N^{-M}.$$

2.2.2 Preuve du lemme 2

On se donne une fonction cut-off η telle que

- $\eta \equiv 1$ sur Ω' .
- $\eta \equiv 0$ sur un voisinage U de $\text{supp}(\phi_N)$ pour $N \geq N_0$.

On écrit :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega'} |\nabla u_N|^2 &\leq \int_{\Omega} |\nabla u_N|^2 \eta^2 \\ \left(\int_{\Omega} |\nabla u_N|^2 \eta^2 \right)^2 &\leq C \left(\int_{\Omega} \gamma \nabla u_N \cdot (\eta^2 \nabla u_N) \right)^2 \quad \text{car } \gamma \text{ est elliptique} \\ &\leq C \left(\int_{\Omega} \gamma \nabla u_N \cdot \nabla (\eta^2) u_N - \int_{\Omega} \gamma \nabla u_N \cdot \nabla (u_N \eta^2) \right)^2 \\ &\leq C \left(\int_{\Omega} \gamma \nabla u_N \cdot \nabla (\eta^2) u_N - \int_{\Gamma} \underbrace{\gamma \eta^2 u_N}_{=0} \partial_{\nu} u_N \right)^2 \\ &\leq C \left(\int_{\Omega} \gamma u_N \nabla \eta \cdot (\eta \nabla u_N) \right)^2 \\ &\leq C \int_{\Omega} |u_N|^2 \chi \cdot \int_{\Omega} (\eta \nabla u_N)^2 \quad \text{par Cauchy-Schwarz} \\ \int_{\Omega'} |\nabla u_N|^2 &\leq C \int_{\Omega} |u_N|^2 \chi \quad \text{en simplifiant} \end{aligned}$$

où $\chi = |\nabla \eta|^2$. On veut donc contrôler $\int_{\Omega} |u_N|^2 \chi$. On se donne $w_N \in H_0^1(\Omega)$ tel que :

$$L_{\gamma} w_N = -\chi u_N.$$

Par ailleurs :

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} |u_N|^2 \chi &= - \int_{\Omega} u_N L_{\gamma} w_N = \int_{\Gamma} \gamma \phi_N \partial_{\nu} w_N \quad \text{par Stokes} \\
&\leq C \|\partial_{\nu} w_N\|_{M-1/2, \Gamma \cap \bar{U}} \|\phi_N\|_{1/2-M, \Gamma} \\
&\leq C \|w_N\|_{M+1, U} N^{-M} \quad \text{th. de trace + lemme 1} \\
&\leq C \left(\underbrace{\|L_{\gamma} w_N\|_{M-1, U}}_{=0 \text{ sur } U} + \|w_N\|_{0, \Omega} \right) N^{-M} \quad \text{par r\u00e9gularit\u00e9 elliptique.}
\end{aligned}$$

Ensuite, on a par Poincar\u00e9 :

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} w_N^2 &\leq C \int_{\Omega} |\nabla w_N|^2 \leq C \int_{\Omega} |w_N| |L_{\gamma} w_N| \quad \text{par Stokes} \\
&\leq C \int_{\Omega} |w_N| |\chi u_N| \leq C \|w_N\|_0 \|\chi u_N\|_0.
\end{aligned}$$

Par suite, $\|w_N\|_0 \leq C \|\chi u_N\|_0$, puis comme χ est born\u00e9e

$$\|\sqrt{\chi} u_N\|_0^2 \leq C \|\chi u_N\|_0 N^{-M} \leq C \|\sqrt{\chi} u_N\|_0 N^{-M}$$

Et enfin :

$$\|\nabla u_N\|_{0, \Omega'} \leq C \|\sqrt{\chi} u_N\|_0 \leq C N^{-M}.$$

□

Lemme (3). *soit U un voisinage de z dans $\bar{\Omega}$. Pour $l \geq 0$ et $\epsilon > 0$, il existe $C_{l, \epsilon}$ telle que pour N assez grand,*

$$\int_U \rho^l |\nabla u_N|^2 \geq C_{l, \epsilon} N^{-(n+\epsilon)l}.$$

2.2.3 Preuve du lemme 3

$l = 0$. On sait que u_N s'annule sur $\Gamma \setminus \text{supp}(\phi_N)$, qui est un ouvert non vide de Γ pour N assez grand. En adaptant l'in\u00e9galit\u00e9 de Poincar\u00e9, le lemme 1, et la r\u00e9gularit\u00e9 elliptique on peut affirmer :

$$\int_{\Omega} |\nabla u_N|^2 \geq C \|u_N\|_1 \geq C \|\phi_N\|_{1/2, \Gamma} \geq C.$$

Et le lemme 2 nous montre aussi que

$$\int_{\Omega \setminus U} |\nabla u_N|^2 \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0.$$

On peut donc \u00e9crire pour N assez grand

$$\int_U |\nabla u_N|^2 \geq \frac{C}{2}.$$

$l > 0$. On utilise l'inégalité de Hölder avec $sq = l$ et $sp < 1$:

$$\begin{aligned} \int_U |\nabla u_N|^2 &= \int_U \rho^s \rho^{-s} |\nabla u_N|^2 \leq \left(\int_U \rho^{-sp} \right)^{1/p} \left(\int_U \rho^{sq} |\nabla u_N|^{2q} \right)^{1/q} \\ &\leq C \left(\int_U \rho^l |\nabla u_N|^{2q} \right)^{1/q}. \end{aligned}$$

D'où il vient :

$$\int_U \rho^l |\nabla u_N|^{2q} \geq C$$

puis

$$\int_U \rho^l |\nabla u_N|^{2q} \leq \sup |\nabla u_N|^{2(q-1)} \int_U \rho^l |\nabla u_N|^2.$$

Or on a $H^t \subset C^1$ avec injection continue si $t > 1 + \frac{n}{2}$, donc :

$$\begin{aligned} \int_U \rho^l |\nabla u_N|^{2q} &\leq C \|u_N\|_t^{2q-2} \int_U \rho^l |\nabla u_N|^2 \\ &\leq C \|\phi_N\|_{t-1/2, \Gamma}^{2q-2} \int_U \rho^l |\nabla u_N|^2 \text{ par ellipticité.} \end{aligned}$$

Il ne reste qu'à appliquer la définition des ϕ_N :

$$\|\phi_N\|_{t-1/2, \Gamma} \leq CN^{t-1} \quad (\text{lemme 1}).$$

D'où :

$$\int_U \rho^l |\nabla u_N|^2 \geq CN^{2(1-t)(q-1)}.$$

On choisit ensuite les coefficients s et q de sorte que $2(1-t)(q-1) > -(n+\epsilon)l$. Mais $2(1-t) = -n - \alpha$ avec $\alpha > 0$ ce qui donne

$$\begin{aligned} n(q-1-l) &< \alpha(1-q) + \epsilon l \\ 0 < \alpha &< \frac{l\epsilon + n(l+1-q)}{q-1}. \end{aligned}$$

On pose donc $q = 1 + l + \frac{\mu}{n}$ avec $\mu < l\epsilon$, et on vérifie les hypothèses de départ :

$$\begin{aligned} - s &:= \frac{nl}{\mu+n(1+l)} \\ - p &:= \frac{\mu+n(1+l)}{nl+\mu} \\ - sp &= \frac{nl}{nl+\mu} < 1 \end{aligned}$$

ceci achève la preuve du théorème de Kohn-Vogelius. □

3 Démonstration du théorème en dimension ≥ 3

On démontre ici le théorème :

Théorème (Sylvester-Uhlmann). *Etant données deux conductivités isotropes lisses γ_1, γ_2 sur un ouvert borné de dimension ≥ 3 telles que $\Lambda_{\gamma_1} = \Lambda_{\gamma_2}$, elles sont identiques.*

On fixe un ouvert $\Omega \subset \subset \mathbb{R}^n$ avec $n > 2$. La preuve se déroule en trois étapes : on commence par réduire l'équation au potentiel à une équation de Schrödinger pour le confort des calculs. Ensuite on montre qu'il suffit de construire une certaine famille de solutions pour conclure à l'unicité en utilisant le théorème de Kohn-Vogelius, et enfin on construit cette famille.

3.1 Réduction à une équation de Schrödinger

On se donne une conductivité isotrope σ sur Ω , et on se donne $u \in H^1(\Omega)$. On pose $v = \sigma^{1/2}u$:

$$\begin{aligned} L_\sigma u &= -\operatorname{div}(\sigma \nabla u) \\ &= -\operatorname{div}\left(\sigma\left(-v \frac{\nabla \sqrt{\sigma}}{\sigma} + \frac{\nabla v}{\sqrt{\sigma}}\right)\right) \\ &= v \Delta \sqrt{\sigma} + \nabla v \cdot \nabla \sqrt{\sigma} - \sqrt{\sigma} \Delta v - \nabla v \cdot \nabla \sqrt{\sigma} \\ &= \sqrt{\sigma}(-\Delta + q)v \end{aligned}$$

où $q = \frac{\Delta \sqrt{\sigma}}{\sqrt{\sigma}}$.

Comme par hypothèse, σ et $1/\sigma$ sont C^∞ et bornées sur Ω , Au lieu de considérer l'opérateur différentiel $L_\sigma : u \mapsto -\operatorname{div}(\sigma \nabla u)$ on pourra considérer $S_q : v \mapsto (-\Delta + q)v$, l'opérateur de Schrödinger associé à q et l'équation

$$-\Delta u + qu = 0. \tag{1}$$

3.2 Une condition suffisante

On se donne deux conductivités elliptiques γ_1, γ_2 telles que $\Lambda_{\gamma_1} = \Lambda_{\gamma_2}$, leur potentiel de Schrödinger associé $q_{1,2}$ ainsi que $u_{1,2}$ tels que $S_{q_i} u_i = 0$, et on note $\phi_{1,2}$ leur restrictions respectives à Γ . Vérifions d'abord que cela implique que $DN(S_{q_1}) = DN(S_{q_2})$. D'après le théorème de Kohn-Vogelius, les deux conductivités sont égales sur le bord, et leur dérivée normale, donc si sur Γ

$$\gamma_1 \partial_\nu \frac{u_1}{\sqrt{\gamma_1}} = \gamma_2 \partial_\nu \frac{u_2}{\sqrt{\gamma_2}}$$

alors $\partial_\nu u_1 = \partial_\nu u_2$ sur Γ . Ensuite, on démontre l'identité suivante qui est à la base de toute la suite :

$$\begin{aligned} \int_\Omega (q_1 - q_2) u_1 \bar{u}_2 &= \int_\Omega \bar{u}_2 \Delta u_1 - u_1 \Delta \bar{u}_2 \\ &= \int_\Gamma \bar{u}_2 \partial_\nu u_1 - u_1 \partial_\nu \bar{u}_2 \quad \text{par Stokes} \\ &= \overline{\langle \phi_2, DN_1 \phi_1 \rangle} - \langle \phi_1, DN_2 \phi_2 \rangle \\ &= \langle \phi_2, DN_1 \phi_1 \rangle - \langle \phi_1, DN_1 \phi_2 \rangle \quad DN_1 = DN_2 \\ &= 0 \quad DN(S_q) \text{ est hermitien si } q \text{ est réel.} \end{aligned}$$

Remarque. *Tout ce que nous avons dit pour l'instant est aussi vrai dans le cas $n = 2$*

3.2.1 Optiques géométriques

On suppose que l'on a construit deux fonctions $\psi_{1,2}$ définies sur $\Omega \times \{\xi \in \mathbb{C}^n | \xi \cdot \xi = 0\}$ telles que :

- pour $\xi \in \{\mu \in \mathbb{C}^n | \mu \cdot \mu = 0\}$ assez grand, $u_\xi : x \mapsto e^{x \cdot \xi} (1 + \psi_i(x, \xi))$ est solution de (1).
- $\psi_{1,2}$ tend vers zéro dans L^2 quand $|\xi| \rightarrow +\infty$.

Cela revient à estimer q comme une perturbation du Laplacien. Sous ces hypothèses, on se donne $k \in \mathbb{R}^n$ puis ξ_1 et ξ_2 de la forme :

$$\begin{aligned}\xi_1 &= \iota(k + r\eta) + \zeta \\ \xi_2 &= \iota(k - r\eta) - \zeta\end{aligned}$$

où η, ζ sont des vecteurs de \mathbb{R}^n , r est un réel positif, $\|\eta\| = 1$ et ζ choisi tel que $\xi_1 \cdot \xi_1 = \xi_2 \cdot \xi_2 = 0$ dans \mathbb{C}^n . C'est possible car on est en dimension $n \geq 3$.

Le calcul suit :

$$\begin{aligned}0 &= \int_{\Omega} (q_1 - q_2) e^{x \cdot \xi_1} (1 + \psi_1(x, \xi_1)) e^{x \cdot \xi_2} (1 + \psi_2(x, \xi_2)) \\ &= \int_{\Omega} (q_1 - q_2) e^{2\iota k \cdot x} + o_{r \rightarrow \infty}(1) \\ 0 &= \int_{\Omega} (q_1 - q_2) e^{2\iota k \cdot x}.\end{aligned}$$

Le théorème de Kohn-Vogelius montre que l'on peut prolonger $q_1 - q_2$ au reste de \mathbb{R}^n en une fonction lisse à support compact en posant $(q_1 - q_2)|_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega} = 0$. On en déduit immédiatement par transformée de Fourier que $q_1 = q_2$ sur Ω .

3.3 Retour aux conductivités

On a montré que si $DN_{\sigma_0} = DN_{\sigma_1}$, alors $\frac{\Delta \sqrt{\sigma_0}}{\sqrt{\sigma_0}} = \frac{\Delta \sqrt{\sigma_1}}{\sqrt{\sigma_1}}$.

On remarque que si $q = \frac{\Delta \sqrt{\sigma}}{\sqrt{\sigma}}$, alors $S_q \sqrt{\sigma} = 0$. En particulier, puisqu'elles sont égales sur le bord et solution de la même équation de Schrödinger, $\sqrt{\sigma_0}$ et $\sqrt{\sigma_1}$ sont égales sur Ω , ce qui termine la preuve.

3.4 Construction des optiques géométriques

On cherche à générer des solutions de l'équation $(-\Delta + q)u = 0 \in \Omega$ où le potentiel $q \in L^\infty(\Omega)$. On suppose d'abord $q = 0$, et on cherche les solutions sous la forme $u(x) = e^{i\omega \cdot x}$ où $\omega \in \mathbb{C}^n$.

L'équation $\Delta u = 0$ s'écrit $\omega \cdot \omega e^{i\omega \cdot x} = 0$. Ainsi, les fréquences solutions de cette équation vérifient $\omega \cdot \omega = 0$. On suppose dans toute la suite que $\omega \cdot \omega = 0$ et on cherche les solutions sous la forme

$$u(x) = e^{i\omega \cdot x} (1 + r(x))$$

où r est un terme d'erreur dont la norme tendra vers 0 quand $|\omega| \rightarrow \infty$.

Proposition. u est solution de $(-\Delta + q)u = 0 \iff (\Delta + 2i\omega \cdot \nabla + q)r = -q$.

Démonstration. Par définition, l'équation de Schrodinger est vérifiée par u ssi $e^{-i\omega \cdot x}(-\Delta + q)e^{i\omega \cdot x}(1+r) = 0$. De plus, on a les identités suivantes

$$\begin{aligned} e^{-i\omega \cdot x} D_j (e^{i\omega \cdot x} v) &= (D_j + \omega_j) v \\ e^{-i\omega \cdot x} \Delta (e^{i\omega \cdot x} v) &= (\Delta + 2i\omega \cdot \nabla) v. \end{aligned}$$

Cela permet de conclure. □

Cas linéaire

Proposition (Cas linéaire). *Il existe une constante $C > 0$ dépendant seulement de Ω telle que pour toute fonction $f \in L^2(\Omega)$ et tout $\omega \in \mathbb{C}^n$ tel que $\omega \cdot \omega = 0$, l'équation $(\Delta + 2i\omega \cdot \nabla)r = f$ a une solution $r \in \mathcal{H}^1(\Omega)$ vérifiant*

$$\begin{aligned} \|r\|_{L^2} &\leq \frac{C}{|\omega|} \|f\|_{L^2(\Omega)} \\ \|\nabla r\|_{L^2} &\leq C \|f\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

L'équation $(\Delta + 2i\omega \cdot \nabla)r = f$ est linéaire à coefficients constants. L'idée naturelle consiste donc à utiliser les méthodes de transformation de Fourier. La transformée de Fourier de cette équation est donnée par :

$$(\xi^2 + 2i\omega \cdot \xi)\hat{r}(\xi) = \hat{f}(\xi).$$

Le terme de gauche pouvant s'annuler, on ne peut pas exprimer \hat{r} en fonction de \hat{f} . Pour remédier à ce problème, on utilise les séries de Fourier. Comme Ω est borné, on peut plonger Ω dans \mathbb{T}^n et pour éviter au terme de gauche de s'annuler, on se place sur le réseau $\mathbb{Z}^n + \frac{1}{2}e_2$.

Lemme. *On pose $\tilde{e}_k(x) = e^{i(k+1/2e_2) \cdot x}$ pour $k \in \mathbb{Z}^n$. Les \tilde{e}_k forment une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{T}^n)$. On note $f_k = \langle f, \tilde{e}_k \rangle$.*

Démonstration. Les \tilde{e}_k forment clairement un système orthonormal. Pour vérifier que c'est une base hilbertienne, il suffit de montrer que $(\tilde{e}_k, u) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{Z}^n \implies u = 0$. Or $(\tilde{e}_k, u) = (e^{ikx}, ue^{-i/2x_2}) = 0$ donc cela découle du fait que les $e^{ik \cdot x}$ forment une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{T}^n)$. □

Preuve du Théorème. On écrit $\omega = s(\omega_1 + i\omega_2)$. Comme $\omega \cdot \omega = 0$, quitte à faire tourner les axes, on peut supposer $\omega_1 = e_1$ et $\omega_2 = e_2$.

L'équation transformée en Fourier à l'aide des $(f_k)_{k \in \mathbb{Z}^n}$ s'écrit

$$\begin{aligned} p_k r_k &= f_k \text{ pour } k \in \mathbb{Z}^n \\ \text{où } p_k &= (k + \frac{1}{2}e_2)^2 + 2s(k_1 + i(k_2 + \frac{1}{2})). \end{aligned}$$

On remarque que $\Im(p_k) = 2s(k_2 + \frac{1}{2}) \neq 0$ donc on peut poser

$$r_k = \frac{f_k}{p_k} \text{ et } r = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} r_k \tilde{e}_k.$$

La série converge dans $L^2(\mathbb{T}^n)$ car

$$\begin{aligned} |r_k| &= \frac{|f_k|}{|p_k|} \leq \frac{|f_k|}{2s(k_2 + 1/2)} \leq \frac{|f_k|}{s} \\ \|r\|_{L^2(\mathbb{T}^n)}^2 &= \sum_k |r_k|^2 \leq \frac{1}{s} \sum_k |f_k|^2 \leq \frac{1}{s} \|f\|_{L^2(\mathbb{T}^n)}^2 \quad (s = |\omega|). \end{aligned}$$

Reste à voir que $\nabla r \in L^2(\Omega)$. Pour cela, il suffit de montrer que $|(k + 1/2e_2)r_k| \leq 4|f_k|$ pour $k \in \mathbb{Z}^n$. On distingue deux cas :

si $|k + \frac{1}{2}e_2| \leq 4s$ alors

$$|(k + \frac{1}{2}e_2)r_k| \leq 4s \frac{|f_k|}{|p_k|} \leq 4|f_k|.$$

si $|k + \frac{1}{2}e_2| > 4s$ alors

$$\left| \left| k + \frac{1}{2}e_2 \right|^2 + 2sk_1 \right| \geq \left| k + \frac{1}{2}e_2 \right|^2 - 2s|k_1| \geq \left| k + \frac{1}{2}e_2 \right|^2 - 2s \left| k + \frac{1}{2}e_2 \right| \geq \frac{1}{2} \left| k + \frac{1}{2}e_2 \right|^2.$$

Puis, en minorant le module, non plus par la partie imaginaire mais par la partie réelle, on obtient

$$\left| (k + \frac{1}{2}e_2)r_k \right| \leq \frac{|k + \frac{1}{2}e_2|}{2|k + \frac{1}{2}e_2|^2} \leq \frac{1}{2s} |f_k|.$$

Enfin, on a par Parseval $\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)}$, ce qui conclut la démonstration. \square

Définition. Soit $\omega \in \mathbb{C}^n$ tel que $\omega \cdot \omega = 0$. On définit la fonction

$$\begin{aligned} G_\omega : L^2(\Omega) &\longrightarrow \mathcal{H}^1(\Omega) \\ f &\longmapsto r \text{ tel que } (\Delta + 2\omega \cdot \nabla)r = f \end{aligned}$$

Remarque. Nous venons de montrer que G_ω est continue de norme C .

Cas non linéaire

Proposition. Il existe $C > 0$ tel que pour tout $q \in L^\infty$, tout $\omega \in \mathbb{C}^n$ tel que $\omega \cdot \omega = 0$ et $|\omega| \geq \max(C\|q\|_{L^\infty(\Omega)}, 1)$ et tout $f \in L^2(\Omega)$, l'équation $(\Delta + 2\omega \cdot \nabla + q)r = f$ a une solution $r \in \mathcal{H}^1(\Omega)$ telle que :

$$\begin{aligned} \|r\|_{L^2} &\leq \frac{C}{|\omega|} \|f\|_{L^2(\Omega)} \\ \|\nabla r\|_{L^2} &\leq C \|f\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Démonstration. L'idée de la preuve consiste à chercher \tilde{f} tel que $G_\omega(\tilde{f})$ soit solution, plutôt que de chercher r directement. Comme $(\Delta + 2\omega \cdot \nabla)G_\omega = Id$, on obtient

$$(I + qG_\omega)\tilde{f} = f$$

Or vue comme application de $L^2(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$,

$$\|qG_\omega\| \leq \frac{C}{|\omega|} \|q\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Ainsi si $|\omega| > \max(2C\|q\|_{L^\infty(\Omega)}, 1)$, $\|qG_\omega\| \leq \frac{1}{2}$. Ainsi, comme $L^2(\Omega)$ est un Hilbert $I + qG_\omega \in B(L^2)$ est inversible et

$$\tilde{f} = (I + qG_\omega)^{-1}f.$$

Comme $\|(I + qG_\omega)^{-1}\| \leq \sum_k 2^{-k} = 2$, on a

$$\|\tilde{f}\|_{L^2(\Omega)} \leq 2\|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

Le cas linéaire permet donc de conclure. □

Construction des optiques géométriques proprement dite

Théorème (Existence des optiques géométriques). *Il existe $C > 0$ tel que pour tout $q \in L^\infty$, tout $\omega \in \mathbb{C}^n$ tel que $\omega \cdot \omega = 0$ et $|\omega| \geq \max(C\|q\|_{L^\infty(\Omega)}, 1)$ et tout $a \in \mathcal{H}^2(\Omega)$, tel que $\omega \cdot \nabla a = 0$ l'équation $(-\Delta + q)u = 0$ a une solution $u(x) = e^{i\omega \cdot x}(a + r)$ où $r \in \mathcal{H}^1(\Omega)$ telle que :*

$$\begin{aligned} \|r\|_{L^2} &\leq \frac{C}{|\omega|} \|(-\Delta + q)a\|_{L^2(\Omega)} \\ \|\nabla r\|_{L^2} &\leq C \|(-\Delta + q)a\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Démonstration. $(-\Delta + q)u = 0 \iff e^{-i\omega \cdot x}(-\Delta + q)e^{i\omega \cdot x}(a + r) = 0$. Étant données les hypothèses sur a , on aboutit à

$$(\Delta + 2i\omega \cdot \nabla - q)r = (-\Delta + q)a.$$

Le théorème précédent permet alors de conclure. □

On remarque qu'on peut toujours choisir $a = 1$.

4 Démonstration en dimension 2

En dimension 2, on ne peut plus choisir trois vecteurs indépendants, ce qui empêche d'appliquer le même raisonnement. Néanmoins, on va voir que l'on peut tout de même réutiliser une partie de la preuve précédente. On réduit encore une fois l'équation du potentiel électrique à l'équation de Schrödinger. Il va s'agir de construire des solutions de la forme :

$$e^{\theta(x)}(1+r)$$

où θ est une phase holomorphe, et r est assez petit pour pouvoir être négligé. En choisissant bien les points critiques de $\Im\theta$, on pourra appliquer un argument de phase stationnaire et identifier les potentiels point par point.

4.1 Première approche

On se donne un petit paramètre $h > 0$ et on écrit les solutions de l'équation au potentiel 1 sous la forme :

$$\begin{aligned} - u_1 &= e^{\theta/h}(1+r_h^1) \\ - u_2 &= e^{-\theta/h}(1+r_h^2). \end{aligned}$$

Si on réussit à obtenir $r_h \rightarrow 0$ pour une norme L^2 par exemple, alors on pourra écrire :

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Omega} (q_1 - q_2) u_1 \bar{u}_2 \\ &= \int_{\Omega} (q_1 - q_2) e^{2i\Im\theta/h} (1+r_h^1)(1+\bar{r}_h^2) \\ &= \int_{\Omega} (q_1 - q_2) e^{2i\Im\theta/h} + O(\|r_h\|_{L^1}). \end{aligned}$$

Ensuite, si on trouve une phase complexe telle que $p \in \Omega$ soit le seul point critique de $\Im(\theta)$, non dégénéré, on applique :

Théorème (Phase stationnaire). *On se donne une fonction f sur \mathbb{R}^2 lisse telle que x_0 est le seul point critique de f et que ce zéro est non dégénéré. Alors pour une fonction g lisse à support compact,*

$$\int_{\mathbb{R}^2} g(x) e^{if(x)/h} dx = \frac{h\pi}{i} g(x_0) e^{if(x_0)/h} + o(h).$$

On admet ce théorème. Si on a $\|r_h\|_{L^1} = o(h)$ on aura montré que les potentiels sont égaux en p car le théorème de Kohn-Vogelius permet de prolonger $g := q_1 - q_2$ en un élément de $C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$.

4.2 Estimée de Carleman

Quitte à translater l'espace, on peut toujours supposer que $p = 0$. On veut une fonction de phase dont le seul point critique soit zéro et que ce point critique soit non dégénéré. On pose donc $\theta(z) = az^2$ avec $a \in \{\pm 1\}$. On établit l'équation vérifiée par les $r_{h,\theta}$:

$$\begin{aligned} (-\Delta + q)e^{\theta/h}(1+r_h) &= 0 \\ e^{-\theta/h}(-\Delta + q)e^{\theta/h}(1+r_h) &= 0 \\ e^{-\theta/h}(-\Delta + q)e^{\theta/h}r_h &= -q. \end{aligned}$$

On pose donc

$$\mathcal{L}_h^{\theta,q} = e^{-\theta/h}(-\Delta + q)e^{\theta/h}.$$

Pour contrôler les solution de cette équation, on va avoir besoin de montrer que $\mathcal{L}_h^{\theta,q}$ est elliptique et contrôler cette ellipticité avec h . On commence par traiter le cas de $\mathcal{L}_h^\theta = \mathcal{L}_h^{\theta,0}$ car le terme en q pourra être absorbé dans le constantes plus tard (il n'intervient pas dans la partie principale de l'opérateur). C'est l'objet des "estimés de Carleman". On "convexifie" la phase en lui ajoutant $-\epsilon|z|^2$ pour que les termes en $\Delta(\text{phase})$ ne disparaissent pas : on note $\kappa = \theta - \frac{h}{\epsilon}|z|^2$ et $\kappa' = \Re\kappa$, où $\epsilon > 0$ est un réel fixé a priori ne dépendant pas de h , assez petit.

On profite de la structure complexe pour factoriser le laplacien :

$$\Delta = 4\partial\bar{\partial} = 4\bar{\partial}\partial.$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_h^\theta &= \bar{\partial}e^{-2i\Im\theta/h}\partial e^{-2i\Im\theta/h} \quad (\partial(\theta + \bar{\theta}) = \partial\theta) \\ &= e^{-2i\Im\theta/h}\partial e^{-2i\Im\theta/h}\bar{\partial}. \end{aligned}$$

Lemme (4). *Pour h assez petit (par rapport à ϵ) et u réelle dans H_0^1 :*

$$\|e^{-\kappa/h}\partial e^{\kappa/h}u\|_0^2 \geq C\left(\frac{1}{h}\|u\|_0^2 + \|\nabla u\|_0^2 + \|u\frac{\partial\theta}{h}\|_0^2\right).$$

Lemme (5). *Pour u à valeur dans \mathbb{C} , on a :*

$$\|e^{-\kappa'/h}\bar{\partial}e^{\kappa'/h}u\|_0^2 \geq \frac{1}{\epsilon}\|u\|_0^2.$$

4.2.1 Preuve du lemme 4

On va donc procéder en deux fois pour montrer l'ellipticité. On commence par $e^{-\kappa/h}\partial e^{\kappa/h}$. Comme \mathcal{L}_h^θ est à coefficients réels, on peut supposer que r_h est réel. On se donne donc $u \in H_0^1$ réelle.

$$\begin{aligned} \|e^{-\kappa/h}\partial e^{\kappa/h}u\|_0^2 &= \|\partial u + u\frac{\partial\kappa}{h}\|_0^2 \\ &= \|\nabla u\|_0^2 + \|u\frac{\partial\kappa}{h}\|_0^2 + 2\Re\langle\partial u, u\frac{\partial\kappa}{h}\rangle \quad (\partial u = \nabla u \text{ car } u \text{ est réelle}) \\ &= \|\nabla u\|_0^2 + \|u\frac{\partial\kappa}{h}\|_0^2 + \Re\langle u^2, \frac{1}{h}\partial^*\partial\kappa\rangle \\ &= \|\nabla u\|_0^2 + \|u\frac{\partial\kappa}{h}\|_0^2 + \frac{1}{\epsilon}\|u\|_0^2. \end{aligned}$$

Ensuite on calcule :

$$\begin{aligned} \|u\frac{\partial\kappa}{h}\|_0^2 &= \|u\frac{\partial\theta}{h}\|_0^2 + \|u\frac{\bar{z}}{\epsilon}\|_0^2 - \frac{2a}{h\epsilon} \int u^2\Re(z^2) \\ &\geq \left[\frac{4}{h^2} + \frac{1}{\epsilon^2} - \frac{4a}{h\epsilon}\right] \int |uz|^2 \\ &\geq \frac{1}{h^2} \int |uz|^2 \quad \text{pour } h \text{ assez petit.} \end{aligned}$$

Par ailleurs on peut écrire :

$$\begin{aligned}
\int u^2 &= \int u^2 \partial z \\
&= - \int zu \partial u \quad \text{par Stokes car } u|_{\Gamma} = 0 \\
&\leq \frac{1}{h} \int |zu|^2 + h \int (\partial u)^2.
\end{aligned}$$

Donc pour pour h assez petit, on a bien :

$$\|e^{-\kappa/h} \partial e^{\kappa/h} u\|_0^2 \geq C \left(\frac{1}{h} \|u\|_0^2 + \|\nabla u\|_0^2 + \|u \frac{\partial \theta}{h}\|_0^2 \right).$$

4.2.2 Preuve du lemme 5

$$\begin{aligned}
\|e^{-\kappa'/h} \bar{\partial} e^{\kappa'/h} u\|_0^2 &= \|\bar{\partial} u + u \frac{\bar{\partial} \kappa'}{h}\|_0^2 \\
&\geq 2\Re \langle \partial_x u + u \frac{\partial_y \kappa'}{h}, \imath \partial_y u + u \frac{\partial_x \kappa'}{h} \rangle \\
&\geq \int -\imath (\partial_x u \partial_y \bar{u} - \partial_y u \partial_x \bar{u}) + 2\Re \frac{1}{h} (\bar{u} \partial_x u \partial_x \kappa' + u \partial_y \bar{u} \partial_y \kappa') \\
&\geq - \int \frac{1}{h} |u|^2 \Delta \kappa' \quad \text{par Stokes car } \Delta \kappa' = 4 \frac{h}{\epsilon} \\
&\geq \frac{4}{\epsilon} \int |u|^2.
\end{aligned}$$

On peut désormais énoncer :

Théorème (Estimée de Carleman). *Etant donné un potentiel V dans $C^\infty(\bar{\Omega})$ et un $\epsilon > 0$ assez petit, il existe une constante $C > 0$ telle que pour $h > 0$ assez petit, pour tout u dans H_0^1 réelle on ait :*

$$\|\mathcal{L}_h^{\theta, V} u\|_0^2 \geq C \left(\frac{1}{h\epsilon} \|u\|_0^2 + \frac{1}{\epsilon} \|\nabla u\|_0^2 + \frac{1}{h^2 \epsilon} \|u \partial \theta\|_0^2 \right).$$

Démonstration. Sur Ω on a $0 < B \leq e^{\frac{h}{\epsilon}|z|^2} \leq B'$. Puis au prix de quelques manipulations :

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{L}_h^{\theta, V} u\|_0^2 &\geq 1/B' \left\| \left(e^{-\kappa'/h} \bar{\partial} e^{\kappa'/h} \right) \left(e^{\imath \Im \theta / h - \kappa/h} \partial e^{\kappa/h} \right) \left(e^{\frac{h}{\epsilon}|z|^2} u \right) \right\|_0^2 \\
&\geq 1/(B'\epsilon) \left\| \left(e^{-\kappa/h} \partial e^{\kappa/h} \right) \left(e^{\frac{h}{\epsilon}|z|^2} u \right) \right\|_0^2 \\
&\geq C/(B'\epsilon) \left(\frac{1}{h} \|u e^{\frac{h}{\epsilon}|z|^2}\|_0^2 + \|\nabla \left(u e^{\frac{h}{\epsilon}|z|^2} \right)\|_0^2 + \|u e^{\frac{h}{\epsilon}|z|^2} \frac{\partial \theta}{h}\|_0^2 \right) \\
&\geq CB/(B'\epsilon) \left(\frac{1}{h} \|u\|_0^2 + \|u \frac{\partial \theta}{h}\|_0^2 + \|\nabla u + \frac{h}{\epsilon} u \nabla |z|^2\|_0^2 \right) \\
&\leq CB/(B'\epsilon) \left[\frac{1}{h} \|u\|_0^2 + \|u \frac{\partial \theta}{h}\|_0^2 + \|\nabla u\|_0^2 + \frac{h}{\epsilon} \Re \underbrace{\langle \nabla u, u \nabla |z|^2 \rangle}_{\leq \frac{h}{2\epsilon} \|\nabla u\|_0^2 + \frac{\epsilon}{2h} \|u \nabla |z|^2\|_0^2} \right].
\end{aligned}$$

On peut désormais conclure, pour h assez petit. □

On peut en déduire :

Corollaire. On pose $\mathcal{H} = H^2 \cap H_0^1$, et on le munit de la norme $\|u\|^2 = \|\mathcal{L}_h^{\theta,V} u\|_{L^2}^2$. Elle lui donne une structure d'espace de Hilbert pour h assez petit. En particulier, si on a une fonction f dans L^2 , c'est une forme linéaire sur \mathcal{H} de norme majorée par $\|f\|_0 \sqrt{h\epsilon/C}$. Le théorème de Lax-Milgram montre donc qu'il existe $v \in \mathcal{H}$ tel que sur \mathcal{H} :

$$\langle \mathcal{L}_h^{\theta,V} v, \mathcal{L}_h^{\theta,V} u \rangle = \langle f, u \rangle$$

Et on a $(\mathcal{L}_h^{\theta,V})^* (\mathcal{L}_h^{\theta,V} v) = f$ avec $\|\mathcal{L}_h^{\theta,V} v\|_0 \leq \|f\|_0 \sqrt{h\epsilon/C}$

4.3 Construction d'un terme correctif

L'estimée de Carleman ne permet que de construire un terme d'erreur "exact" en $O(\sqrt{h})$ de l'erreur, alors qu'il nous faut $o(h)$. Pour s'en sortir, on va construire un terme correctif qui ne résout pas exactement le problème mais réduit suffisamment le terme d'erreur pour que Carleman permette de conclure. On cherche donc à priori un terme r qui satisfait aux conditions :

$$\begin{aligned} r &= O(h) \\ \mathcal{L}_h^{\theta,q}(1+r) &= O(h) \end{aligned}$$

Après avoir développé les calculs, on trouve que cela équivaut à demander

$$\begin{aligned} r &= O(h) \\ e^{-\theta/h} \Delta e^{\theta/h} r &= q + O(h) \end{aligned}$$

Pour continuer, on va avoir besoin de l'outil suivant :

Lemme (6). Les opérateurs ∂ et $\bar{\partial}$ peuvent être inversés dans $W^{1,p}(\Omega)$ pour $1 < p < \infty$. On pose pour f dans L^p :

$$\begin{aligned} \partial^{-1} f(z) &= \int_{\Omega} \frac{f(\xi)}{\bar{z} - \xi} d\xi_1 d\xi_2 \\ \bar{\partial}^{-1} f(z) &= \int_{\Omega} \frac{f(\xi)}{z - \xi} d\xi_1 d\xi_2 \end{aligned}$$

Alors $\partial^{-1} f$ et $\bar{\partial}^{-1} f$ sont dans $W^{1,p}$ et on a

$$\partial \bar{\partial}^{-1} f = f$$

de plus, si $f \in W_0^{1,p}$,

$$\partial^{-1} \partial f = f.$$

Enfin, les applications ∂^{-1} et $\bar{\partial}^{-1}$ sont continues.

On admet ce lemme. On pose $\varphi = 2i\Im\theta$ et on se rappelle que $\partial\varphi = \partial\theta$. On va poser :

$$r = e^{-\varphi/h} \partial^{-1} e^{\varphi/h} (\omega + \bar{\partial}^{-1} q)$$

ou ω est une constante (donc une fonction holomorphe) choisie de sorte que $\omega + \bar{\partial}^{-1} q$ s'annule en p . Dans ce cas, on vérifie aisément que :

$$\mathcal{L}_h^{\theta, q}(1+r) = qr.$$

L'estimée de Carleman ne donne qu'un $O(\sqrt{h})$ pour r donc il faut raffiner les arguments pour conclure. On va travailler sur la famille d'opérateurs R_h définis par :

$$R_h f = e^{-\varphi/h} \bar{\partial}^{-1} e^{\varphi/h} f$$

On va montrer le lemme :

Lemme (7). *Étant donné une fonction f lisse à support dans $\bar{\Omega}$ qui s'annule en p , quand h tend vers 0, on a :*

$$\|R_h f\|_{\infty} = O(h)$$

Preuve du lemme 7 On va utiliser l'écriture sous forme d'opérateur à noyau de $\bar{\partial}^{-1}$. Pour séparer les phénomènes critique du reste, on se donne un petit paramètre $\delta > 0$. On déterminera la valeur optimale de δ par rapport à h à la fin des calculs. On se donne ensuite une fonction de troncature χ_{δ} supportée dans $B(p, \delta)$ et à variation dans $B(p, \delta) \setminus B(p, \delta/2)$. On écrit donc :

$$|R_h f(z)| = \left| \int_{\Omega} (\chi_{\delta} + (1 - \chi_{\delta})) \frac{e^{\varphi/h}}{\bar{z} - \bar{\xi}} f(\xi) d\xi_1 d\xi_2 \right|.$$

On sépare l'intégrale en deux parties.

Intégrale 1.0 On commence par écrire

$$|f(\xi)| = |\xi - p| |g(\xi)|$$

où g est une fonction bornée. On peut continuer :

$$|I_{1.0}| \leq C \int_{B(p, \delta)} \frac{|\xi - p|}{|z - \xi|} d^2 \xi = C \delta^2 \int_{B(0, 1)} \frac{|\xi| d^2 \xi}{|\xi - (z - p)/\delta|}$$

Ici, il n'y a pas vraiment de problème de singularité, donc on peut utiliser $|\xi| \leq 1$. On pose $u = (z - p)/\delta$ et on a donc :

$$|I_{1.0}| \leq C \int_{B(u, 1)} \frac{d^2 \xi}{|\xi|} < C \int_{R-1 < |\xi| < R+1} \frac{d^2 \xi}{|\xi|} \leq 4\pi C$$

Ainsi, on a :

$$|I_{1.0}| < C \delta^2$$

Pour la deuxième intégrale, on intègre par partie et on obtient trois nouvelles intégrales à traiter :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (1 - \chi_{\delta}) \frac{e^{\varphi/h}}{\bar{z} - \bar{\xi}} f(\xi) d\xi_1 d\xi_2 &= h \int (1 - \chi_{\delta}) \frac{e^{\varphi/h}}{\bar{z} - \bar{\xi}} \frac{\partial f(\xi)}{\partial \varphi} d\xi_1 d\xi_2 \\ &\quad - h \int (1 - \chi_{\delta}) \frac{e^{\varphi/h}}{\bar{z} - \bar{\xi}} \frac{f(\xi)}{(\xi - p)^2} d\xi_1 d\xi_2 \\ &\quad - h \int \partial \chi_{\delta} \frac{e^{\varphi/h}}{\bar{z} - \bar{\xi}} \frac{f(\xi)}{\partial \varphi} d\xi_1 d\xi_2 \end{aligned}$$

intégrale 2.1 et 2.2 Pour $i = 1, 2$, on peut majorer en norme infinie :

$$|I_{2,i}| \leq Ch \int_{|\xi-p|>\delta/2, \xi \in \Omega} \frac{1}{|z-\xi| \cdot |\xi-p|} d^2\xi.$$

On adimensionne le problème d'abord, en posant $A = \text{diam}(\Omega)/\delta$:

$$|I_{2,i}| \leq Ch \int_{1/2 < |\xi| < A} \frac{1}{|\xi-u| \cdot |\xi|} d^2\xi.$$

Il faut distinguer les cas. On traite d'abord du cas où $|u| \leq 1/4$:

$$\begin{aligned} |I_{2,i}| &\leq Ch \int_{1/2 < |\xi| < A} \frac{1}{|\xi-1/4| \cdot |\xi|} d^2\xi \\ &\leq Ch \int_{1/2}^A dr \frac{1}{r-1/4} = Ch(\log(A) + o(\log(A))). \quad \text{en passant en polaire en 0.} \end{aligned}$$

Ainsi, pour δ assez petit, on a :

$$|I_{2,i}| \leq Ch \log \delta.$$

Maintenant, on traite le cas où z est plus loin de p : $|z-p| > \delta/4$. Le problème n'étant plus dans la proximité entre z et p , on peut procéder à cette estimation :

$$|I_{2,i}| \leq Ch \int_{|\xi| < \mathbf{A}} \frac{1}{|\xi-u| \cdot |\xi|} d^2\xi.$$

Puis on adimensionne encore :

$$|I_{2,i}| \leq Ch \int_{|\xi| < \mathbf{A}/|u|} \frac{1}{|\xi-1| \cdot |\xi|} d^2\xi.$$

Pour δ assez petit, on a $4A > A/|u| > 1/\delta > 2$

$$\begin{aligned} |I_{2,i}| &\leq Ch \int_{|\xi| < 4A} \frac{1}{|\xi-1| \cdot |\xi|} d^2\xi \\ &\leq Ch + C'h \int_{2 < |\xi| < 4A} \frac{1}{|\xi-1| \cdot |\xi|} d^2\xi \quad \text{en coupant l'intégrale en deux} \\ &\leq Ch + C'h \int_{2 < r < 4A} \frac{1}{r-1} dr \\ &\leq Ch \log A + o(h \log A) \\ &\leq O(h \log \delta). \end{aligned}$$

intégrale 2.3 On peut décider de donner une forme pratique à notre fonction de troncature :

$$\chi_\delta(\xi) = \chi(\xi/\delta).$$

Dans ce cas, on obtient en dérivant χ_δ :

$$\begin{aligned} |I_{2.3}| &\leq \frac{Ch}{\delta} \int_{\delta/2 < |\xi| < \delta} \frac{d^2\xi}{|\xi-(z-p)|} \\ &\leq Ch \int_{1/2 < |\xi| < 1} \frac{d^2\xi}{|\xi-u|} \\ &\leq Ch \quad \text{d'après les calculs déjà effectués pour } I_{1,0}. \end{aligned}$$

L'intégrale est bornée en $O(h)$ tout court, ce qui nous suffit.

Si on récapitule, on obtient que

$$\|R_h f\|_\infty = O(\delta^2, h \log(\delta))$$

Il suffit de choisir $\delta = \sqrt{h}$, et on peut conclure. \square

On prend le v donné par les estimées de Carleman qui donne une solution exacte $e^{\theta/h}(1+r+v)$, v qui est alors en $O(h^{3/2}|\log h|)$. Le v va disparaître tranquillement dans l'intégrale finale.

4.4 Fin de la démonstration

On indice désormais les objets en fonction de s'ils se rapportent aux potentiels q_1 ou q_2 . On a :

$$\mathcal{L}_h^{\theta_i, q_i}(1+r_i) = q_i(1+r_i) - q_i = q_i r_i.$$

On fixe $\theta = \theta_1 = -\theta_2 = z^2$. On note v_i l'élément de \mathcal{H}_i tel que $\mathcal{L}_h^{\theta_i, q_i} v_i = -q_i r_i$, qui est donné par l'estimée de Carleman et par Lax-Milgram, avec $\|v_i\|_0 \leq \sqrt{h}\|q_i r_i\|_0 = O(h^{3/2}|\log h|)$.

On peut alors développer :

$$\begin{aligned} 0 &= \int (q_1 - q_2) u_1 \bar{u}_2 = \int q e^{\varphi/h} (1 + h(r_1 + \bar{r}_2)) + O(h^{3/2}|\log h|) \quad \text{où } q = q_1 - q_2 \\ &= \int q e^{\varphi/h} \\ &\quad + \int q \bar{\partial}^{-1} \left[e^{\varphi/h} (w_1(z) + \bar{\partial}^{-1} q_1) \right] \\ &\quad + \int q \bar{\partial}^{-1} \left[e^{-\varphi/h} (w_2(z) + \partial^{-1} q_2) \right] + O(h^{3/2}|\log h|). \end{aligned}$$

Par symétrie, il ne reste qu'à prouver que $\int q \bar{\partial}^{-1} \left[e^{\varphi/h} (w_1(z) + \bar{\partial}^{-1} q_1) \right] = o(h)$, puis appliquer la phase stationnaire pour trouver que $q(p) = q_1(p) - q_2(p) = 0$. On utilise une partition de l'unité $1 = \chi + (1 - \chi)$ de sorte que χ soit supportée autour de p et localement constante dans un voisinage de p .

$$\begin{aligned} \int q \bar{\partial}^{-1} \left[e^{\varphi/h} (w_1(z) + \bar{\partial}^{-1} q_1) \right] &= \int e^{\varphi/h} (\chi + (1 - \chi)) \left[(w_1(z) + \bar{\partial}^{-1} q_1) \overline{(\partial^{-1})^* q} \right] \\ &= \int e^{\varphi/h} (f_1 + g_1) \\ &= \int e^{\varphi/h} \underbrace{f_1}_{\text{lisse à support compact}} + \int e^{\varphi/h} \underbrace{g_1}_{\text{lisse, nulle autour de } p}. \end{aligned}$$

Pour la première intégrale, il suffit d'appliquer la phase stationnaire car $f_1(p) = 0$. Pour la deuxième intégrale, on procède par intégration par partie :

$$\begin{aligned} \int e^{\varphi/h} g_1 &= \int_\Gamma e^{\varphi/h} \frac{h g_1}{\partial \varphi} - \int e^{\varphi/h} \partial \left(\frac{h g_1}{\partial \varphi} \right) \\ &= - \int_\Gamma e^{\varphi/h} \partial \left(\frac{h^2 g_1}{(\partial \varphi)^2} \right) - \int_\Gamma e^{\varphi/h} \frac{h}{\partial \varphi} \partial \left(\frac{h g_1}{\partial \varphi} \right) + \int e^{\varphi/h} \partial \left[\frac{h}{\partial \varphi} \partial \left(\frac{h g_1}{\partial \varphi} \right) \right] \\ &= O(h^2). \end{aligned}$$

Ceci termine la variante de la preuve du théorème de Bukhgeim.

Remarque. *La preuve originale de Nachmann ne reposait pas sur les estimées de Carleman, mais plutôt sur des arguments de scattering inverse.*

Références

- [1] A.L. Bukhgeim. Recovering a potential from cauchy data in the two-dimensional case. *J. Inverse Ill-posed Probl.* 16(2008), no.1, 19-33.
- [2] Guillaume Carlier. Notes de cours d'analyse fonctionnelle, 2008.
- [3] Robert Kohn and Michael Vogelius. Determining conductivity by boundary measurements. *Comm. Pure Appl. Math.* 37 (1984), no.3, 289-298.
- [4] Adrian.I Nachmann. Global uniqueness for a two-dimensional inverse boundary value problem. *Ann of Math. (2)* 143 (1996), no. 1, 71-96.
- [5] Mikko Salo. Calderón problem lecture notes, 2008.
- [6] Michael E. Taylor. *Partial differential equations 1*. Springer, 1996.
- [7] Gunther Uhlmann and John Sylvester. A global uniqueness theorem for an inverse boundary problem. *Ann. of Math. (2)* 125 (1987), no.1, 153-169.