

Chaos Quantique, États propres et Résonances

Yannick Bonthonneau

Septembre 2012

En vue d'une thèse sous la direction de Nalini Anantharaman et la codirection de
Colin Guillarmou

Table des matières

1	Contexte	2
1.1	Classique	2
1.2	Quantique	3
1.2.1	Quantification de la dynamique	3
1.2.2	Auto-adjonction	4
1.3	Quantification des observables et théorème d'Egorov	5
2	Ergodicité quantique, take 1	6
2.1	États propres	6
2.2	Loi de Weyl semi-classique	6
2.3	Théorème de Schnirelman	7
3	Résonances	9
3.1	Prolongement de la résolvante	9
3.2	Série d'Eisenstein	11
3.3	Distribution des résonances	11
3.4	Ergodicité, take 2	12

Il s'agit ici de présenter les idées principales de ce qu'on appelle l'étude du Chaos Quantique. La dynamique classique exhibe des propriétés chaotiques, et on espère donc continuer à les observer dans le formalisme quantique, dont la dynamique classique est l'approximation. Il s'agit d'abord de déterminer quelle peuvent être des propriétés chaotiques dans le monde quantique.

1 Contexte

Commençons par rappeler ce que l'on entend par dynamique classique et quantique.

1.1 Classique

Dans tout ce qui suit, on se place dans un cadre non-relativiste. On suppose donc que l'espace est bien décrit par une variété riemannienne M . Si on a une seule particule dans l'espace normalement, ce devrait être une variété de dimension 3. Mais on peut aussi considérer un système de plusieurs particules. La formulation rigoureuse des équations de la dynamique de Newton dans ce contexte est celle de la dynamique hamiltonnienne. Autrement dit, il existe une fonction d'énergie H sur le fibré tangent de la variété M (l'espace des phases) appelée hamiltonien, telle que les trajectoires possibles des particules sont les solutions du système suivant :

$$\partial_t x = \partial_p H \quad \partial_t p = -\partial_x H. \quad (1)$$

Ceci détermine un flot que l'on note G_t . Dans les cas les plus simples (sans interaction électromagnétique), le hamiltonien s'écrit :

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(x) \quad (2)$$

où V est le potentiel dans lequel évolue le système. La norme p^2 s'entend au sens de la norme riemannienne dans $T_x M$. Les équations se réécrivent alors :

$$\nabla_x \dot{x} = -\partial_x V. \quad (3)$$

Observons le cas prototype : $V = 0$, et la variété M est compacte, de courbure strictement négative. Dans ce cas on peut montrer que le flot hamiltonien (qui se réduit au flot géodésique dans ce contexte) est ergodique par rapport à la mesure de Liouville ω , et qu'il est mélangeant. Autrement dit, si a et b sont deux fonctions à support compact sur l'espace des phases, alors pour ω -presque tout point $\mathbf{v} = (x, \xi)$

$$\int a \circ G_t(\mathbf{v}) b(\mathbf{v}) dt \rightarrow \int a d\omega \int b d\omega \quad (4)$$

On peut même estimer la vitesse de convergence, qui est exponentielle, dans certains cas. On appelle ce phénomène la «décroissance des corrélations», et c'est toute une industrie. C'est en ce sens que l'on dit que le système est chaotique. En effet, la précision nécessaire sur les conditions initiales pour déterminer la position d'une particule en temps long est exponentiellement grande.

Quand le potentiel est non nul, on peut identifier la dynamique à celle du flot géodésique d'un espace finslérien (autrement dit une variété munie d'une métrique qui ne correspond plus à une forme quadratique), sur une partie de l'espace des phases, qui correspond à des vitesses assez grandes. Ceci permet d'étendre au moins partiellement ces résultats. Quand la courbure n'est plus strictement négative, c'est un problème relativement compliqué de savoir si on conserve les propriétés évoquées ci dessus.

1.2 Quantique

En mécanique quantique, on suppose que les particules sont décrites par une fonction d'onde ψ , autrement dit une fonction sur M à valeurs dans \mathbb{C} de carré intégrable. On suppose aussi que la probabilité de trouver la particule dans un ouvert U est proportionnelle à l'intégrale sur U de $|\psi|^2$. L'équation qui régit l'évolution de ψ avec le temps est l'équation de Schrödinger :

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \mathcal{H}\psi = \left(-\frac{\hbar^2}{2} \Delta + V \right) \psi \quad (5)$$

où \hbar est un nombre dont nous verrons par la suite pourquoi il est intéressant de le faire tendre vers zéro. Même quand ce n'est pas écrit, \mathcal{H} dépend de \hbar .

1.2.1 Quantification de la dynamique

Pour expliquer le lien entre les deux descriptions, commençons par rappeler cette définition : on dit que P est un opérateur *pseudo-différentiel* s'il envoie $C^\infty(M)$ dans lui-même et si dans toute carte (U, f) , et pour toutes fonctions lisses $\phi_{0,1}$ telles que ϕ_0 vaut 1 sur un voisinage de $\text{supp}\phi_1$, supportées dans U , l'opérateur :

$$\tilde{P}u = \phi_1.P(\phi_0.u \circ f) \quad (6)$$

Peut s'écrire

$$\tilde{P}u(x) = \int \tilde{P}(y, \xi) u(y) e^{\frac{i}{\hbar} \langle \xi, x-y \rangle} dy d\xi. \quad (7)$$

Où on demande que les $\tilde{P}(x, \xi)$ soient des symboles. C'est une hypothèse sur leur comportement à l'infini : on impose qu'il existe un (k, n) tel que pour tout α, β ,

$$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \tilde{P}(x, \xi)| \leq C_{\alpha, \beta} \hbar^{-k} \langle \xi \rangle^{n-|\beta|} \quad (8)$$

Le couple (k, n) est l'ordre du symbole. On note $\Psi^{k, n}(\mathbb{R}^n)$ l'ensemble des tels symboles. On définit à l'aide des cartes $\Psi^{k, n}(M)$. On veut associer un symbole intrinsèque aux opérateurs

pseudo-différentiels. En essayant de recoller des symboles locaux, on peut observer que c'est possible *modulo* un symbole d'ordre inférieur ($k - 1, n - 1$). On appelle symbole principal cette classe d'équivalence, ou par abus un de ces représentants.

Donnons quelques exemples. D'abord, tous les opérateurs différentiels usuels sont dans des $\Psi^{n,k}$. Dans \mathbb{R}^n , pour un polynôme $P : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, on écrit en Fourier

$$P_h(\nabla)u(x) = \int P(\xi)u(y)e^{\frac{i}{h}\langle \xi, x-y \rangle} dy d\xi. \quad (9)$$

On obtient de cette façon la divergence ou surtout le laplacien euclidien dont le symbole principal est ξ^2 . Pour passer au laplacien d'une métrique g , on a la formule :

$$\Delta f = \frac{1}{\sqrt{\det g}} \frac{\partial}{\partial x^j} \left(g^{jk} \sqrt{\det g} \frac{\partial f}{\partial x^k} \right) \quad (10)$$

d'où l'on tire que le symbole principal en est $g(\xi, \xi)$, ce qui rappelle la partie $p^2/2m$ du hamiltonien classique. De fait, \mathcal{H} a pour symbole

$$\frac{1}{2m} |\xi|^2 + V(x) \quad \text{mod}(\Psi^{-1,1}) = H(x, \xi) \in \Psi^{0,2} \quad (11)$$

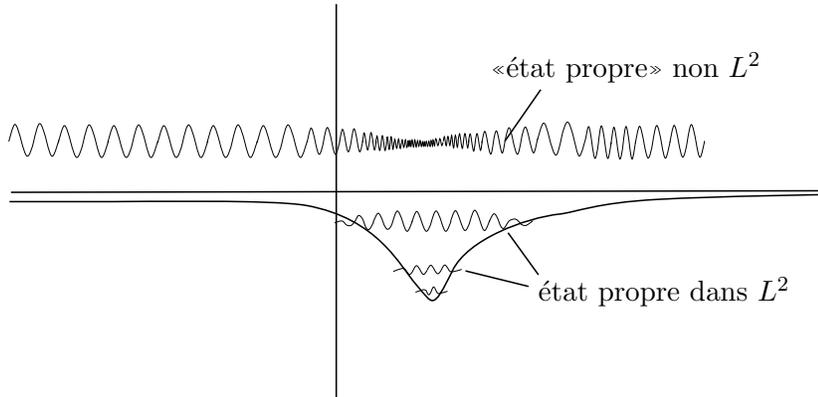
On dit que \mathcal{H} est le *quantifié* de H .

1.2.2 Auto-adjonction

L'opérateur \mathcal{H} est un opérateur auto-adjoint non borné sur $L^2(M)$, donc il admet une résolution spectrale : on écrit

$$\mathcal{H} = \int_{\mathbb{R}} \lambda \mathcal{H}_\lambda d\mu(\lambda) \quad (12)$$

Où les \mathcal{H}_λ sont des projecteurs orthogonaux deux à deux, de rang fini. La mesure μ peut être décomposée en une partie atomique μ_p et une partie sans atomes μ_c . La première correspond aux états liés que l'on peut décrire relativement simplement et les autres aux états qui se propagent, plus difficiles à décrire.



Dans le spectre continu, les \mathcal{H}_λ sont des projecteurs sur des fonctions qui ne sont pas L^2 et donc ne sont pas des états observables. Par contre on peut sommer de tels états pour obtenir des «paquets d'onde» qui se propagent, et ce sont effectivement ces états que l'on observe en laboratoire. Formellement, on a donc

$$\psi_t = \int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda t/\hbar} \mathcal{H}_\lambda \psi_0 d\mu(\lambda) \quad (13)$$

c'est une somme (certe infinie...) de mouvements périodiques qui sont tous très simples, dénués de tout phénomènes chaotiques. Comme la description classique est une approximation de la description quantique, il s'agit de comprendre où est «caché» le chaos classique de la dynamique quantique.

1.3 Quantification des observables et théorème d'Egorov

Nous n'avons pas encore identifié dans quelle limite la dynamique quantique redevient classique. Supposons que l'on veuille mesurer la quantité a qui est une fonction de la position et de la vitesse. Par exemple, a est une fonction cut-off qui vaut 1 sur une petite partie de l'espace des phases, et mesurer a revient grosso modo à déterminer si la particule est ou non dans cet ouvert. En pratique on travaille avec des fonction lisses, mais on pense à des fonction indicatrices. En mécanique quantique, effectuer cette mesure revient à évaluer :

$$\langle A \rangle := \langle A\psi, \psi \rangle \quad (14)$$

où A est un opérateur pseudo-différentiel de symbole principal a , appelé $Op_h(a)$. On se demande quel sera le résultat de la mesure si on laisse le système évoluer pendant un temps t . Si la dynamique était classique, cela reviendrait à remplacer a par son propagé par le flot hamiltonien $a \circ G_t$. Dans le cas quantique, cela revient à mesurer

$$\langle Ae^{it\mathcal{H}/\hbar}\psi, e^{it\mathcal{H}/\hbar}\psi \rangle = \langle e^{-it\mathcal{H}/\hbar} Ae^{it\mathcal{H}/\hbar} \rangle \quad (15)$$

Le théorème d'Egorov dit précisément qu'il existe un $\kappa > 0$ tel que :

$$e^{it\mathcal{H}/\hbar} Ae^{-it\mathcal{H}/\hbar} = Op_h(a \circ G_t) + O(\hbar e^{\kappa t}). \quad (16)$$

On peut interpréter cette formule de deux manières. D'abord, si on fait tendre $\hbar \rightarrow 0$ à t fixé, on retrouve la dynamique et c'est en ce sens que l'on dit que la dynamique classique est la limite $\hbar \rightarrow 0$ de la dynamique quantique. On appelle cette limite la limite «semi-classique». Mais on peut aussi fixer \hbar et dire que la dynamique classique approxime bien la dynamique quantique jusqu'à des temps en $|\log \hbar|$. On peut prouver ceci rigoureusement dans le cas où l'espace est compact, ou si a est à support compact. On appelle cette échelle de temps le «temps d'Ehrenfest»

2 Ergodicité quantique, take 1

Commençons par considérer le cas où la variété M est compacte.

2.1 États propres

Quand l'espace est compact sans bords, les fonctions L^2_{loc} sont les fonctions L^2 . Sous cette remarque innocente ce cache le fait que les \mathcal{H}_λ sont L^2 et que l'intégrale (13) est donc plus facile à manipuler. La mesure μ est atomique et :

$$\mathcal{H} = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_j \psi_j \langle \psi_j, \cdot \rangle. \quad (17)$$

Si on fait apparaître dans la somme des $\lambda_j = 0$ éventuels, on peut s'assurer que les ψ_j forment une base orthogonale de L^2 .

Physiquement, dans un domaine borné, il ne peut y avoir que des états liés, répartis de façon discrète. C'est ce qui donne son nom à la physique quantique : dans un domaine borné (aussi en énergie), il y a un nombre fini d'états possibles du système, auquel on peut associer un numéro.

2.2 Loi de Weyl semi-classique

Commençons par évoquer le théorème de Weyl classique (voir [7] pour la preuve). Le petit paramètre h n'intervient pas, il faut donc définir le symbole principal d'une autre manière. Pour le faire, on est amené à supposer que l'opérateur est «classique». C'est une hypothèse technique qui revient à supposer que l'on peut décomposer le symbole en une somme de symboles homogènes. On obtient alors

Théorème 1 (Weyl). *Si A est un opérateur d'ordre 1 classique, de symbole principal classique $p(x, \xi)$, alors*

$$\#\{\lambda \in \text{spec}(A) \cap [-\infty, T]\} = T^n \frac{1}{(2\pi)^n} \text{vol}(\{p(x, \xi) \leq 1\}) + O(T^{n-1}) \quad (18)$$

Dans ce théorème classique, on s'intéresse à la limite en grande énergie. Dans le cas semi-classique, on fixe l'énergie mais on fait tendre $h \rightarrow 0$. On obtient alors ce théorème :

Théorème 2. *Pour $a > b$ fixés, quand $h \rightarrow 0$*

$$\#\{E_h \in \text{spec}(\mathcal{H}) \cap [a, b]\} = \frac{1}{(2\pi h)^n} \text{vol}(\{H(x, \xi) \in [a, b]\}) \quad (19)$$

2.3 Théorème de Schnirelman

Le théorème de Schnirelman concerne les fonctions propres du laplacien (il a été établi par les travaux de Schnirelman [6], Zelditch [8] et Y. Colin de Verdière [1]). Nous allons écrire ici une version généralisée pour des potentiels non nuls. Il s'agit de montrer que si le flot classique est ergodique, le système quantique présente des caractéristiques « ergodiques » dans la limite semi-classique. On suppose donc que le flot hamiltonien de $H(x, \xi)$ est ergodique sur les niveaux d'énergie $E \in [a, b]$. On dit qu'un opérateur A est admissible s'il admet un symbole σ tel que la valeur moyenne de σ sur les niveaux d'énergie $E \in [a, b]$ soit constante, on la note alors $\bar{\sigma}$.

Théorème 3. *Sous la condition d'ergodicité, il existe une famille d'ensembles $\Lambda(h) \subset \{E_h \in \text{spec}(\mathcal{H}) \cap [a, b]\}$ telle que :*

$$\frac{\Lambda(h)}{\{E_h \in \text{spec}(\mathcal{H}) \cap [a, b]\}} \rightarrow 1 \quad (20)$$

et pour tout A admissible

$$\sup_{E_i \in \Lambda(h)} |\langle Au_i, u_i \rangle - \bar{\sigma}_{[a,b]}(A)| \rightarrow 0 \quad (21)$$

Nous allons esquisser la preuve de ce résultat (pour plus de détails [10]). On peut déjà supposer que $\bar{\sigma} = 0$, quitte à remplacer A par $A - \bar{\sigma}I$. Commençons par montrer que

$$(2\pi h)^n \sum_{E_i \in [a,b]} \langle Au_i, u_i \rangle^2 \rightarrow 0. \quad (22)$$

On désigne par $\epsilon(h)$ le membre de gauche. On utilise ici une version localisée de la loi de Weyl : pour un pseudo-différentiel B ,

$$(2\pi h)^n \sum_{E_i \in [a,b]} \langle Bu_i, u_i \rangle \rightarrow \int_{H \in [a,b]} \sigma(B) dx d\xi. \quad (23)$$

Les états propres sont par définition invariants par la dynamique quantique donc :

$$\langle Au, u \rangle = \langle e^{it\mathcal{H}/h} A e^{-it\mathcal{H}/h} u_i, u_i \rangle \quad (24)$$

$$= \left\langle \underbrace{\frac{1}{T} \int_{[0,T]} e^{it\mathcal{H}/h} A e^{-it\mathcal{H}/h} dt}_{\bar{A}_T} u_i, u_i \right\rangle. \quad (25)$$

Appliquons la loi de Weyl puis le théorème d'Egorov :

$$\epsilon(h)(A) = \epsilon(h)(\overline{A}_T) \tag{26}$$

$$\leq (2\pi h)^n \sum_{E \in [a,b]} \langle \overline{A}_T \overline{A}_T^* u_i, u_i \rangle \tag{27}$$

$$\leq 2 \int_{H \in [a,b]} \sigma(\overline{A}_T \overline{A}_T^*) dx d\xi \text{ pour } h \text{ assez petit (Weyl)} \tag{28}$$

$$\leq 2 \int_{H \in [a,b]} |\sigma(\overline{A}_T)|^2 dx d\xi \tag{29}$$

$$\leq 4 \int_{H \in [a,b]} \left| \frac{1}{T} \int dt \sigma(A) \circ G_t \right|^2 dx d\xi \text{ (Egorov, pour } T \leq |\log h|) \tag{30}$$

$$\epsilon(h)(A) \leq 4 \int_{H \in [a,b]} dx d\xi \left| \frac{1}{T} \int_{[0,T]} \sigma(A) \circ G_t \right|^2 \text{ (} h \ll 1 \text{ et } T \leq |\log h|). \tag{31}$$

Si on prend la limite en $h \rightarrow 0$ de cette inégalité, le membre de droite dépend de T et la condition d'ergodicité nous assure qu'il tend vers 0 :

$$\epsilon(h)(A) \rightarrow 0. \tag{32}$$

Maintenant, on peut facilement construire des ensembles Λ qui dépendent de A :

$$\Lambda(h)(A) = \{E \in [a,b] \mid |\langle Au, u \rangle| \leq \epsilon(h)(A)^{1/4}\} \tag{33}$$

le résultat précédent montre que

$$\sup_{E_i \in \Lambda(h)} |\langle Au_i, u_i \rangle - \overline{\sigma}_{[a,b]}(A)| \leq \epsilon(h)(A)^{1/2}. \tag{34}$$

Pour trouver des Λ indépendants de A , on applique un argument de densité et un procédé diagonal que nous omettrons ici.

□

Mentionnons ici le fait que l'on peut estimer la vitesse de convergence du ϵ vers 0 en une puissance de $|\log h|$ si on sait que le système classique est mélangeant [5]. On a tiré du résultat de Schnirelman la conjecture que l'ensemble des fonctions propres converge microlocalement vers la mesure de Liouville quand $h \rightarrow 0$. C'est ce qu'on appelle la conjecture d'Unique ergodicité quantique (unique car on postule qu'il n'y a qu'une seule limite). Dans le cas des surfaces arithmétiques, les outils de théorie des nombres permette d'obtenir des résultats plus forts. En particulier, cette conjecture a été prouvée pour toutes ces surfaces récemment par Soundarajan. Il est le dernier à avoir contribué à un édifice auquel ont contribué Lindens-trauss, Sarnak, Watson et d'autres. Par contre on a trouvé des exemples de systèmes qui ne vérifient pas la conjecture.

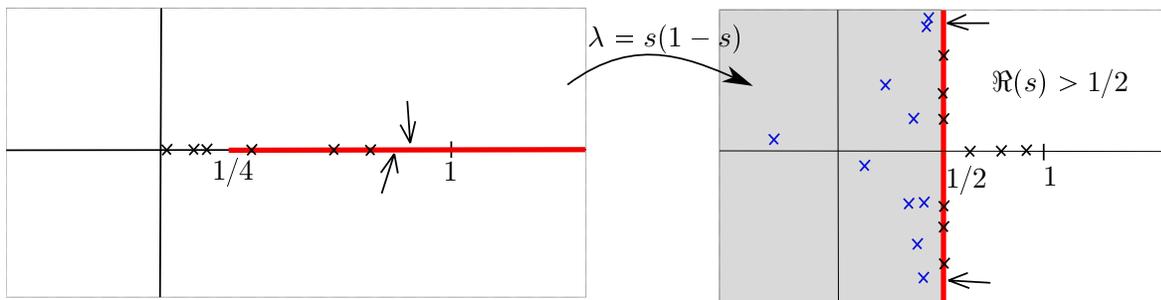
3 Résonances

On considère maintenant une variété non compacte. On veut étudier la limite semi-classique quand il n'y a pas que du spectre discret. Par exemple, l'oscillateur harmonique vit dans \mathbb{R}^n tout entier, mais le potentiel croît suffisamment rapidement pour que tous les états soient liés, et il n'y a donc pas de spectre discret. Nous allons dans ce qui suit considérer que le potentiel est nul, et que l'on travaille sur une variété qui est une perturbation compacte d'une surface hyperbolique non compacte, mais de volume fini. Comme le potentiel est nul, l'opérateur de Schrödinger se réduit à $-h^2\Delta$. Il y a donc équivalence entre faire tendre h vers 0 et considérer des valeurs spectrales qui tendent vers $+\infty$ en $1/h^2$.

3.1 Prolongement de la résolvante

Dans cette situation, le spectre du laplacien est constitué de valeurs propres et d'une partie de spectre continu $[1/4, +\infty[$. La résolvante du laplacien $(-\Delta - \lambda)^{-1}$ est donc définie pour λ qui évite cette demi-droite et un nombre fini de points. On peut décrire très précisément son comportement près des valeurs propres (un pôle de l'ordre de la multiplicité de la valeur propre), mais au voisinage du spectre, c'est plus compliqué.

Grâce à l'hypothèse que nous avons faite sur le comportement à l'infini de la variété, on peut observer que la résolvante admet un prolongement analytique des deux côtés du spectre continu. Si on relâchait cette hypothèse, on pourrait obtenir éventuellement un prolongement sur un voisinage du spectre. L'hypothèse que nous avons faite est assez forte pour que le prolongement soit défini sur \mathbb{C} tout entier. Pour plus de clarté, écrivons $\lambda = s(1 - s)$, pour $\Re(s) > 1/2$. Alors la résolvante se prolonge en une fonction méromorphe de s .



Les petites croix noires sont les valeurs propres. Le prolongement de la résolvante n'est pas holomorphe, mais méromorphe : des pôles apparaissent dans la partie $\Re(s) < 1/2$. On en a fait figurer en bleu sur le dessin.

Donnons une idée de la preuve (pour toutes sortes de détails sur ces questions, on peut aussi se référer à [3]). On commence par saucissonner la variété M . D'après la définition, on sait que c'est l'union de $X = C_0$, et d'un certain nombre de points hyperboliques C_j de la forme $S^1 \times \mathbb{R}^+$ avec une métrique $ds^2 = dr^2 + e^{-2r}d\theta$, de sorte que X déborde sur les pointes.

On peut donc prendre une partition de l'unité $\sum \phi_i = 1$ et des ψ_i supportés dans leur ouvert C_i tels que $\psi_i \phi_i = \phi_i$. Dans chaque C_i on choisit des conditions de Dirichlet (par exemple) pour pouvoir parler de $R_i = (-\Delta - \lambda)_i^{-1}$. On considère l'expression :

$$P = \sum \psi_i R_i \phi_i \quad (35)$$

$$K = (-\Delta - \lambda)P - 1 \quad (36)$$

$$= -\sum [\Delta, \psi_i] R_i \phi_i \quad (37)$$

avec

$$(-\Delta - \lambda)^{-1} = P(1 + K)^{-1} \quad (38)$$

Quand λ n'est pas dans le spectre, K est compact. Si les R_i admettent un prolongement méromorphe sur une certaine surface de Riemann, alors K aussi et la résolvante du laplacien aussi. De plus les pôles de cette résolvante sont exactement les pôles de P augmentés des points où -1 est valeur propre de K .

Ensuite on élimine la partie C_0 puisque c'est compact : il n'y a que du spectre discret. Et le spectre discret donne une résolvante qui est déjà méromorphe sur \mathbb{C} . Il reste à étudier le laplacien sur les pointes avec condition de Dirichlet. On fait quelques calculs pour montrer qu'il y a un isomorphisme :

$$(L^2(C_i), -\Delta) \xrightarrow{\pi} \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \left(L^2(\mathbb{R}, dx), L_k = -\Delta + k^2 e^{2x} + \frac{1}{4} \right) \quad (39)$$

Les parties de l'opérateur qui correspondent à un k non nul ne produisent pas de spectre continu. En effet moralement elles correspondent à l'évolution d'une particule confinée dans un potentiel qui tend vers $+\infty$. Pour être rigoureux, on montre que pour un λ bien choisi (typiquement de partie réelle très négative), la résolvante de L_k en λ est coercive de L^2 dans un H^2 avec un poids exponentiel. Sobolev nous dit alors que ceci s'injecte compactement dans L^2 . Ainsi, L_k est compacte donc de spectre discret. Quand $k = 0$ on a la même injection, mais sans le poids, et ça ne marche pas. Reste donc le cas du laplacien sur \mathbb{R}^+ avec condition de Dirichlet. Mais on connaît l'expression de la résolvante dans le cas de \mathbb{R} , avec $\Im(\kappa) > 0$:

$$R_0(x, y, \kappa^2) = \frac{e^{i\kappa|x-y|}}{i\kappa} \quad (40)$$

Puisque l'on veut des conditions de Dirichlet, la résolvante cherchée est le noyau de

$$(-\Delta - \kappa^2)_{\mathbb{R}^+}^{-1} u = (-\Delta - \kappa^2)_{\mathbb{R}}^{-1} u - e^{i\kappa x} \left((-\Delta - \kappa^2)_{\mathbb{R}}^{-1} u \right) (0) \quad (41)$$

$$= (-\Delta - \kappa^2)_{\mathbb{R}}^{-1} u - \int_{\mathbb{R}^+} \frac{e^{i\kappa(x+y)}}{i\kappa} u(y) dy \quad (42)$$

Autrement dit

$$R(x, y, \kappa^2) = \frac{e^{\iota\kappa|x-y|} - e^{\iota\kappa(x+y)}}{\iota\kappa} \quad (43)$$

On a ainsi montré que les noyaux des R_i sont des fonctions méromorphes d'un paramètre κ avec $\Im(\kappa) > 0$, où le paramètre spectrale est $\lambda - \frac{1}{4} = \kappa^2$. De plus, on observe facilement sur la formule (43) que l'on peut prolonger cette fonction en une fonction méromorphe de κ sur \mathbb{C} tout entier. On peut ensuite réécrire les choses en fonction du paramètre $s : \kappa^2 = s(1-s) - \frac{1}{4}$, donc $\kappa = \iota(s - \frac{1}{2})$. Si on peut prolonger les noyaux, on peut prolonger les opérateurs, qui n'agissent plus sur L^2 , mais sont définis par exemple pour les données lisses à support compact, et leurs associent même des fonctions lisses.

3.2 Série d'Eisenstein

Nous avons montré que la résolvante se prolonge, et nous avons vu que les pôles qui apparaissent sont liés au spectre continu. Les séries d'Eisenstein sont des fonctions qui portent ces informations. Commençons par les décrire. Pour $\Re(s) > 1/2$, $E_j(s, m)$ est l'unique fonction sur M telle que $E_j - \mathbf{1}_{C_j} e^{(s-\frac{1}{2})r}$ soit dans L^2 et $\Delta E = s(1-s)E$. On se donne une fonction cutoff χ qui vaut 1 pour r assez grand dans C_j et 0 dans les autres bouts C_i . Alors

$$E_j(s, m) = \chi e^{(s-\frac{1}{2})r} + (-\Delta - s(1-s))^{-1} \underbrace{[\Delta, \chi] e^{(s-\frac{1}{2})r}}_{\in C_0^\infty(M)} \quad (44)$$

Cette écriture nous apprend tout de suite que les séries d'Eisenstein se prolongent en des fonctions méromorphes en s et lisses en m . L'unicité est assurée par le fait que $s(1-s)$ n'est pas dans le spectre. Maintenant, dans la pointe C_i , dans la partie qui correspond à $k=0$ dans l'isomorphisme π , E_j s'écrit

$$\delta_{ij} e^{(s-\frac{1}{2})r} + C_{ij}(s) e^{(\frac{1}{2}-s)r} \quad (45)$$

On peut montrer que les résonances sont exactement les pôles de la matrice C ainsi définie qui est une fonction méromorphe de s . C'est contenu dans la formule suivante qui est une décomposition de Fourier : pour $f \in L^2$,

$$f = \sum_i \langle f, \phi_i \rangle \phi_i + \frac{1}{4} \sum_j \int_{\mathbb{R}} E(\frac{1}{2} + it, \cdot) \langle f, E(\frac{1}{2} - it, \cdot) \rangle dt \quad (46)$$

où la première somme est sur les fonctions propres et la deuxième sur les pointes.

3.3 Distribution des résonances

Dans le cas d'une surface compacte, on dispose d'une Loi de Weyl évoquée plus haut. Dans le cas présent, il y a un équivalent, établi par W. Müller [4]. On note $\phi(s) = \det C(s)$.

Alors si $N(T)$ compte les valeurs propres dans $[0, T^2]$,

$$N(T) - \frac{1}{4\pi} \int_{-T}^T \frac{\phi'}{\phi} \left(\frac{1}{2} + it \right) dt \underset{T \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{|M|}{4\pi} T^2. \quad (47)$$

Le deuxième terme compte moralement les résonances. C'est effectivement le cas si on sait qu'elles sont situées dans une bande $\Im(s) \in [1/2 - \sigma, 1/2]$, et ce d'autant plus que σ est proche de zéro. Quand ce n'est pas le cas, la signification du deuxième terme est bien moins claire. On le note $N'(T)$.

3.4 Ergodicité, take 2

Nous pouvons citer ici le résultat de Zelditch [9] qui généralise la formule (22). Pour un symbole semi-classique σ à support compact en espace et d'ordre 1, si $\bar{\sigma}$ est la valeur moyenne de σ sur le cercle unité,

$$\begin{aligned} \frac{1}{N(T) + N'(T)} & \left(\sum_{E_i \leq T^2} |\langle Op(\sigma)\phi_i, \phi_i \rangle - \bar{\sigma}| \right. \\ & \left. + \int_{-T}^T \left| \sum_j \langle Op(\sigma)E_{j,1/2+it}, E_{j,1/2+it} \rangle + \bar{\sigma} \frac{\phi'}{\phi} (1/2 + it) \right| dt \right) \underset{T \rightarrow \infty}{\rightarrow} 0 \end{aligned} \quad (48)$$

D'après cette formule, les $E_{j,1/2+it}$ tendent *en moyenne* microlocalement vers la mesure de Liouville pondérée par un facteur ϕ'/ϕ . C'est en ce sens que l'on généralise la notion d'ergodicité quantique. De nouveau, montrer l'unicité ergodique reviendrait à se débarrasser de l'intégrale et évaluer le comportement individuel des $E(1/2 + it)$. Dans cette direction le seul résultat positif connu est celui de Semyon Dyatlov [2] qui donne les limites microlocales des E_j en dehors du spectre : si $\nu > 0$, on connaît exactement les

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} E(1/2 + \nu + it) \quad (49)$$

Références

- [1] Y. Colin de Verdière. Ergodicité et fonctions propres du laplacien. *Comm. Math. Phys.*, 102(3) :497–502, 1985.
- [2] Semyon Dyatlov. Microlocal limits of Eisenstein functions away from the unitarity axis. *J. Spectr. Theory*, 2(2) :181–202, 2012.
- [3] Laurent Guillopé. Fonctions zêta de Selberg et surfaces de géométrie finie. In *Zeta functions in geometry (Tokyo, 1990)*, volume 21 of *Adv. Stud. Pure Math.*, pages 33–70. Kinokuniya, Tokyo, 1992.

- [4] Werner Müller. Spectral geometry and scattering theory for certain complete surfaces of finite volume. *Invent. Math.*, 109(2) :265–305, 1992.
- [5] Roman Schubert. Upper bounds on the rate of quantum ergodicity. *Ann. Henri Poincaré*, 7(6) :1085–1098, 2006.
- [6] A. I. Šnirel'man. Ergodic properties of eigenfunctions. *Uspehi Mat. Nauk*, 29(6(180)) :181–182, 1974.
- [7] Christopher D. Sogge. *Fourier integrals in classical analysis*, volume 105 of *Cambridge Tracts in Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1993.
- [8] Steven Zelditch. Uniform distribution of eigenfunctions on compact hyperbolic surfaces. *Duke Math. J.*, 55(4) :919–941, 1987.
- [9] Steven Zelditch. Mean Lindelöf hypothesis and equidistribution of cusp forms and Eisenstein series. *J. Funct. Anal.*, 97(1) :1–49, 1991.
- [10] Maciej Zworski. *Semi-classical analysis*. 2012.