# Opérateurs de représentation des charges

Philippe Bouafia
sous la direction de Thierry de Pauw

23 Octobre 2009

# Table des matières



# 1 Autour de l'équation $\operatorname{div} v = F$

## 1.1 Fonctions à variation bornée

On introduit dans ce paragraphe les fonctions à variation bornée sur $\mathbb{R}^n$, *i.e.* les fonctions dont les dérivées partielles d'ordre un sont des mesures de Radon. On renvoie à [7] pour un traitement complet. Du point de vue de la théorie de la mesure, c'est la notion la plus faible de différentiabilité que l'on puisse exiger. Il faut bien avoir à l'esprit que les fontions à variation bornée sont des objets de nature géométrique. Ainsi, un ensemble $E \subseteq \mathbb{R}^n$ tel que la fonction indicatrice $\chi_E$ soit à variation bornée est précisément un ensemble de mesure de Lebesgue finie, et dont le périmètre est fini (un tel ensemble est appelé un ensemble de Caccioppoli). Cette double condition fait d'un ensemble de Caccioppoli (à une orientation près) un courant normal au sens de Federer : nous verrons les généralisations multidimensionnelles de l'espace des fonctions à variation bornée à la section 4.

**Définition 1.1.1.** Une fonction $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ est de variation bornée si

$$\int_{\mathbb{R}^n} d||\nabla f|| := \sup\left\{\int_{\mathbb{R}^n} f \operatorname{div} \varphi dx : \varphi \in C^1_c(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n), ||\varphi||_\infty \leq 1\right\}$$

est fini. L'ensemble des fonctions à variation bornée est noté $\mathbf{BV}(\mathbb{R}^n)$. On le munit de la norme

$$||f||_{\mathbf{BV}(\mathbb{R}^n)} := \int_{\mathbb{R}^n} |f| + \int_{\mathbb{R}^n} d||\nabla f||$$

qui en fait un espace de Banach.

$\mathbf{BV}(\mathbb{R}^n)$ contient comme sous-espace $W^{1,1}(\mathbb{R}^n)$, l'espace des fonctions de Sobolev dont la dérivée est de régularité $L_1$. Signalons que les propriétés élémentaires des fonctions de Sobolev sont également vérifiées par les fonctions à variation bornée (en particulier la théorie de la trace). Et ces propriétés sont d'ailleurs plus faciles à établir pour $\mathbf{BV}(\mathbb{R}^n)$, puisque les fonctions à variations bornées peuvent de se permettre de présenter des sauts, ce qui évite des procédés de régularisations.

**Théorème 1.1.2** (Théorème isopérimétrique)**.** *Il existe une constante $C_n$ telle que pour tout $f \in \mathbf{BV}(\mathbb{R}^n)$, on ait*

$$\left( \int_{\mathbb{R}^n} |f|^{n/(n-1)} \right)^{(n-1)/n} \leq C_n \int_{\mathbb{R}^n} d||\nabla f||.$$

Voir [7, 5.6] pour une démonstration. La constante $C_n$ peut être déterminée géométriquement, l'inégalité est optimale lorsque $f$ est la fonction indicatrice d'une boule. Ce théorème montre que l'inclusion $\mathbf{BV}(\mathbb{R}^n)$ dans $L_{n/(n-1)}(\mathbb{R}^n)$ est continue.

## 1.2 Divergence de fonctions continues

Le but de cette partie est de déterminer les conditions d'existence d'une solution de l'équation $\operatorname{div} v = F$, lorsque $F$ est une distribution. D'après la théorie des équations elliptiques, une solution de l'équation de Poisson $\operatorname{div} \nabla u = f$ a une régularité $C^{1,1-n/p}(\mathbb{R}^n)$ lorsque $f$ a la régularité $L_p$, avec $p > n$. Par ailleurs, si $p = \infty$, $\nabla u$ peut ne pas être lipschitzien. En fait, plus généralement, l'équation $\operatorname{div} v = F$ peut ne pas avoir de solution lipschitzienne $v$ si $F$ est borné.

Nirenberg a donné l'exemple suivant :

$$u(x) := \varphi(x) x_1 |\ln ||x|||^{\alpha}$$

où $\alpha \in (0, (n-1)/n)$ et $\varphi$ est une fonction lisse définie sur un voisinage de l'origine. On vérifie (à la suite d'un calcul fastidieux) que $\Delta u \in L_n(\mathbb{R}^n)$ et $\nabla u$ n'est même pas localement borné ! Si la régularité lipschitzienne est inenvisageable, on se résigne à prouver l'existence d'une solution $v$ continue. On montre dans [3, section 3]

**Théorème 1.2.1** (Bourgain, Brézis, 2003)**.** *Si $f \in L_n([0,1]^n)$, alors il existe $v \in C([0,1]^n; \mathbb{R}^n)$ tel que $\int_{[0,1]^n} v = 0$ et $\operatorname{div} v = f$. De plus, on peut prendre $v$ telle que $||v||_\infty \leq C_n ||f||_{L_n}$, pour une constante universelle $C_n$ (qui n'a rien à voir avec celle du théorème isopérimètrique).*

Prenons une application continue $v \in C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, la distribution $\operatorname{div} v$ possède une propriété de régularité forte : si $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ et $w \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, alors

$$\begin{aligned} |\langle \varphi, \operatorname{div} v \rangle| &= \left| \int \langle \nabla \varphi, v \rangle \right| \leq \left| \int \langle \nabla \varphi, w \rangle \right| + \left| \int \langle \nabla \varphi, v - w \rangle \right| \\ &= \left| \int \varphi \operatorname{div} w \right| + \left| \int \langle \nabla \varphi, v - w \rangle \right| \end{aligned}$$

Étant donné $\epsilon > 0$, on peut choisir $w$ tel que $||v - w||_{\infty, B(0,\epsilon^{-1})} \leq \epsilon$, donc

$$|\langle \varphi, \operatorname{div} v \rangle| \leq \theta_{v,\epsilon} ||\varphi||_{L_1} + \epsilon ||\nabla \varphi||_{L_1},$$

où $\theta_{v,\epsilon} = ||\operatorname{div} w||_{\infty, B(0,\epsilon^{-1})}$.

**Définition 1.2.2.** Une charge dans $\mathbb{R}^n$ est une distribution $F \in \mathscr{D}'(R^n)$ telle que pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\theta > 0$ telle que

$$|\langle \varphi, \operatorname{div} F \rangle| = \theta ||\varphi||_{L_1} + \epsilon ||\nabla \varphi||_{L_1}$$

si $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ et $\operatorname{supp} \varphi \subseteq B(0, \epsilon^{-1})$. L'espace des charges sur $\mathbb{R}^n$ est noté $\mathbf{CH}^n(\mathbb{R}^n)$.

Une charge s'étend alors de manière unique à $\mathbf{BV}_c(\mathbb{R}^n)$ (les fonctions à variation bornée et à support compact). Le théorème (voir [6, Théorème 5.7]) suivant montre que toute charge est la divergence d'un champ continu, c'est la réciproque de la discussion ci-dessus qui est plus difficile à démontrer.

**Théorème 1.2.3** (De Pauw, Pfeffer, 2008)**.** *L'opérateur linéaire* $\operatorname{div} : C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \to \mathbf{CH}^n(\mathbb{R}^n)$ *est surjectif.*

En travaillant la preuve de Bourgain et Brézis (*i.e.* on travaille sur $\mathbb{R}^n$ au lieu du tore), on montre que toute fonction $f \in L_{n,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ est une charge. Mentionnons que la preuve du théorème de représentation de De Pauw et Pfeffer n'est pas constructive. Représenter les charges revient à inverser (à droite) cet opérateur, c'est-à-dire intégrer des charges.

Enfin, à des complications techniques près, il est possible de définir les charges supportées sur un sous-ensemble $X \subseteq \mathbb{R}^n$. $\mathbf{CH}^n(X)$ est dans le cas général un espace de Fréchet, et si $X$ est borné, c'est un espace de Banach.

**Proposition 1.2.4.** *L'application d'évaluation* $\mathbf{BV}_c(X) \to \mathbf{CH}^n(X)^*$ *est une bijection. Si $X$ est compact, alors* $\mathbf{CH}^n(X)$ *est un prédual de* $\mathbf{BV}(X)$*.*

## 1.3 Un peu de géométrie des espaces de Banach

Ici, on traite dans un cadre plus abstrait le problème de la recherche d'inverse à droite à un opérateur surjectif entre espaces de Banach. Si

$$0 \to X \to Y \to Z \to 0$$

est une suite exacte d'espaces de Banach, elle est scindée à droite si et seulement si elle est scindée à gauche. Dans ce cas $X$ est dit *complémenté* dans $Y$. Des exemples triviaux de sous-espaces complémentés sont les espaces de codimension finie, et les espaces de dimension finie (ce qui est plus ou moins une conséquence du théorème de Hahn-Banach). Un sous-espace fermé d'un espace de Banach n'a moralement aucune chance d'être complémenté. En fait, on a le résultat suivant :

**Théorème 1.3.1** (Lindenstrauss, Tzafriri, 1971)**.** *Soit $X$ un espace de Banach. Tous les sous-espaces fermés de $X$ sont complémentés si et seulement si $X$ est hilbertisable.*

On renvoie à [4, chapitre 7] pour une esquisse de démonstration. Le premier exemple de sous-espace non complémenté ($c_0$ dans $\ell_\infty$) n'a été trouvé qu'en 1941 par Sobczyk, de manière élémentaire et difficile. Heureusement, depuis, plusieurs outils ont été développés pour le problème de la complémentation (principalement sous l'implusion de Grothendieck). On aura besoin d'introduire la notion d'opérateur absolument sommant, qui est une généralisation au cadre des espaces de Banach de la notion d'opérateur de Hilbert-Schmidt.

**Définition 1.3.2.** Soient $X$ et $Y$ deux espaces de Banach, et $T : X \to Y$ un opérateur linéaire, et $1 \leq p < \infty$. On dit que $T$ est $p$-absolument sommant s'il existe $C > 0$ tel que pour toute suite finie $x_1, \ldots, x_m$ dans $X$, on ait

$$\left(\sum_k ||T(x_k)||^p\right)^{1/p} \leq C \sup_{\xi \in X^*, ||\xi|| \leq 1} \left(\sum_k |\langle x_k, \xi\rangle|\right)^{1/p}$$

En particulier, un opérateur linéaire entre deux espaces de Hilbert est $p$-absolument sommant si et seulement si c'est un opérateur de Hilbert-Schmidt. On montre (facilement) que les opérateurs absolument sommants forment un idéal, *i.e.* c'est une classe stable par composition à droite et à gauche avec des opérateurs linéaires bornés. On énonce le théorème de Grothendieck (voir [1, théorème 3.4.1])

**Théorème 1.3.3** (Grothendieck)**.** *Soit* $(X, \Sigma, \mu)$ *un espace mesuré et* $H$ *un espace de Hilbert. Tout opérateur linéaire borné* $L_1(X, \Sigma, \mu) \to H$ *est* $p$*-absolument sommant, pour tout* $p \geq 1$*.*

Ces résultats permettent de montrer qu'il est impossible de trouver un opérateur linéaire borné de représentation des charges.

**Théorème 1.3.4** (Bouafia, 2009)**.** *Supposons* $n \geq 2$*,* $K$ *un espace compact dont l'intérieur est non vide. L'application* $\operatorname{div} : C(K, \mathbb{R}^n) \to \mathbf{CH}^n(K)$ *n'a pas d'inverse à droite.*

*Ébauche de preuve.* Pour simplifier, on suppose que $n = 2$ et $K = [0,1]^n$. Supposons par l'absurde l'existence d'un opérateur de représentation $\Psi : \mathbf{CH}^n(K) \to C(K, \mathbb{R}^n)$. En dualisant, on obtient que $\Psi^* : C(K, \mathbb{R}^n)^* \to \mathbf{BV}(K)$ est un inverse à gauche de $\operatorname{div}^*$.

$$\begin{tikzcd}
L_2((0,1)^n) \arrow[d, "f"] \arrow[rr, bend left, "\Theta"] & C(K, \mathbb{R}^n)^* \arrow[d, shift left, "\Psi^*"] & L_2((0,1)^n) \\
W^{1,1}((0,1)^n) \arrow[r] & \mathbf{BV}([0,1]^n) \arrow[u, shift left, "\operatorname{div}^*"] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Sur le diagramme commutatif ci-dessus, on a représenté l'inclusion de Sobolev $\mathbf{BV}([0,1]^n) \subseteq L_2((0,1)^n)$, et $f : L_2((0,1)^n) \to W^{1,1}((0,1)^n)$ est l'application linéaire définie par

$$f : \cos(2\pi\alpha \cdot x) \mapsto \frac{\cos(2\pi\alpha \cdot x)}{\sqrt{1 + |\alpha|^2}}, \quad \sin(2\pi\alpha \cdot x) \mapsto \frac{\sin(2\pi\alpha \cdot x)}{\sqrt{1 + |\alpha|^2}}$$

pour tout multi-indice $\alpha \in \mathbb{Z}^n$. On voit facilement que $f$ est continue, car $f$ se factorise à travers $W^{1,2}((0,1)^n)$. On appelle $\Theta$ la composition de toutes les flèches rendant le diagramme commutatif.

La théorie de Kakutani sur les espaces AL (abstract Lebesgue) permet de donner des conditions pour qu'un espace de Banach muni d'un ordre partiel soit (de manière abstraite) un espace $L_1$ (pour un certain espace mesuré). Cette théorie montre en particulier que $C(K, \mathbb{R}^n)^*$ est un $L_1$. Comme $\Theta$ se factorise par $C(K, \mathbb{R}^n)^*$ et qu'il est à valeurs dans un espace de Hilbert, le théorème de Grothendieck nous assure que $\Theta$ est absolument sommant, c'est-à-dire Hilbert-Schmidt. Mais si on calcule la norme de Hilbert-Schmidt de $\Theta$, on trouve

$$\begin{aligned} ||\Theta||_{\mathrm{HS}}^2 &= ||\Theta(1)||^2 + \frac{1}{2^n} \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}} \Big( ||\Theta(\cos(2\pi\alpha \cdot x))||^2 + ||\Theta(\sin(2\pi\alpha \cdot x))||^2 \Big) \\ &= 1 + \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}} \frac{1}{1 + |\alpha|^2} = \infty, \end{aligned}$$

d'où la contradiction. $\square$

# 2 Extension en codimension quelconque

## 2.1 Théorie des courants

Les courants ont été introduits par Federer et Fleming dans les années 1960. C'est une notion faible de surface qui a été introduite pour résoudre des problèmes variationnels (par exemple, le problème de Plateau). On considère l'espace $\mathscr{D}^m(\mathbb{R}^n)$ des formes différentielles lisses à support compact dans $\mathbb{R}^n$, muni de la topologie de la convergence $C^\infty$ sur les compacts (exactement analogue à celle utilisée pour définir les distributions, une distribution n'étant rien d'autre qu'un 0-courant). L'espace des formes linéaires $T : \mathscr{D}^m(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ est noté $\mathscr{D}_m(\mathbb{R}^n)$, c'est l'espace des $m$-courants. On définit le support d'un courant comme on le fait pour une distribution.

On peut définir par dualité sur l'espace des formes différentielles les constructions géométriques de base. Par exemple le bord d'un courant $T$ est le courant $\partial T$ défini pour faire marcher la formule de Stokes :

$$\langle \omega, \partial T \rangle := \langle d\omega, T \rangle.$$

On vérifie ainsi que le bord d'un bord est nul (car $d^2 = 0$). On construit également des produits cartésiens de courants, on peut stratifier des courants (considérer les lignes de niveau d'un courant suivant une fonction lipschitzienne).

L'espace des courants est bien trop gros pour que tous ses éléments puissent avoir une nature géométrique claire. Souvent, on considère des sous-espaces (le plus important étant celui des courants rectifiables à multiplicité entière utilisés pour résoudre partiellement le problème de Plateau). On aura besoin de considérer seulement des sous-espaces grossiers de $\mathscr{D}_m(\mathbb{R}^n)$, qui généralisent en codimension $\geq 0$ l'espace des fonctions à variation bornée. La masse d'un courant

$T \in \mathscr{D}_m(\mathbb{R}^n)$ est

$$\mathbf{M}(T) := \sup\{\langle \omega, T \rangle : \omega \in \mathscr{D}^m(\mathbb{R}^n), ||\omega||_\infty \leq 1\}.$$

Tous les courants ne sont pas de masse finie (même s'ils sont supportés en un point). Un courant est dit normal si $\mathbf{N}(T) := \mathbf{M}(T) + \mathbf{M}(\partial T) < \infty$. Si $X \subseteq \mathbb{R}^n$, l'espace des courants normaux $\mathbf{N}_m(X)$ est constitué des $m$-courants normaux à support dans $X$. Il est muni de la norme $\mathbf{N}$. En particulier, l'espace $\mathbf{N}_n(X)$ est isomorphe à $\mathbf{BV}(X)$.

Il existe une autre fonctionnelle importante, appelée la *flat*[1] norme. Si $T \in \mathbf{N}_m(\mathbb{R}^n)$, elle est définie par

$$\mathbf{F}(T) := \inf\{\mathbf{M}(T - \partial S) + \mathbf{M}(S) : S \in \mathbf{N}_{m+1}(\mathbb{R}^n)\}.$$

## 2.2 Charges dans les espaces euclidiens

Pour définir une charge en dimension intermédiaire, on adapte la définition 1.2.2.

**Définition 2.2.1.** Une $m$-charge sur $X \subseteq \mathbb{R}^n$ est une forme linéaire $\alpha$ sur $\mathbf{N}_m(X)$ qui vérifie la condition de continuité suivante : pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\theta > 0$ tel que

$$|\langle T, \alpha \rangle| \leq \theta \mathbf{F}(T) + \epsilon \mathbf{N}(T)$$

pour tout $T \in \mathbf{N}_m(X)$ dont le support est dans $X \cap B(0, \epsilon^{-1})$. L'espace des $m$-charges est noté par $\mathbf{CH}^m(X)$.

On peut par dualité sur l'espace des courants définir la différentielle (faible) d'une charge $\alpha \in \mathbf{CH}^m(X)$. C'est la charge $d\alpha$ (d'ordre $m+1$) définie de manière à ce que la formule de Stokes soit valide :

$$\langle T, d\alpha \rangle := \langle \partial T, \alpha \rangle,$$

si bien qu'il faut voir les charges comme des généralisations de formes différentielles vivant sur des sous-ensembles de $\mathbb{R}^n$.

Il faut remarquer en passant qu'il existe effectivement une topologie (non métrisable, mais séquentielle) sur $\mathbf{N}_m(X)$ telle que les charges soient les formes linéaires continues sur $\mathbf{N}_m(X)$. Ce fait est nécessaire pour établir les propriétés basiques sur les charges. Tout d'abord, comme vu en codimension nulle, l'espace des charges est un prédual de l'espace des courants.

Les formes différentielles continues sont des charges (on a plus précisement une inclusion $C_u(X, \wedge^m \mathbb{R}^n) \subseteq \mathbf{CH}^m(X)$). Il existe également un théorème de représentation des charges en dimension intermédiaire. Cette fois (en codimension quelconque), il existe des charges non exactes (qui ne soient pas la différentielle d'une charge). En modifiant (substantiellement) la preuve du théorème 1.2.3, on prouve ceci :

1. de l'anglais, signifiant bémol, car cette norme a été introduite par Whitney et était notée $\flat$.

**Théorème 2.2.2** (De Pauw, Pfeffer, Moonens, 2009)**.** *Soit* $\alpha \in \mathbf{CH}^m(X)$*, il existe une forme* $\beta$ *continue de degré* $m$*, une forme continue* $\gamma$ *de degré* $m-1$ *telles que* $\alpha = \beta + d\gamma$*.*

Voir l'article [5] pour une démonstration. Le problème de la représentation des charges en codimension quelconque est de trouver un inverse à droite à l'opérateur $C_u(X, \wedge^m \mathbb{R}^n) \times C_u(X, \wedge^{m-1}\mathbb{R}^n) \to \mathbf{CH}^m(X)$ qui à $(\beta, \gamma)$ associe la charge $\beta + d\gamma$.

Il est impossible de représenter linéairement les charges en codimension nulle, et ce résultat s'étend par un argument géométrique simple en codimension quelconque. Le problème ouvert est de déterminer la régularité optimale d'un inverse à droite (qui ne peut être linéaire continu).

## 2.3 Cohomologie des charges

Les charges permettent de définir une cohomologie analogue à celle de de Rham. On a un complexe

$$\cdots \xrightarrow{d} \mathbf{CH}^{m-1}(X) \xrightarrow{d} \mathbf{CH}^m(X) \xrightarrow{d} \mathbf{CH}^{m+1}(X) \xrightarrow{d} \cdots$$

qui donne naissance à des groupes de cohomologie

$$\mathbf{H}^m_{\mathbf{CH}}(X) := \frac{\ker d : \mathbf{CH}^m(X) \to \mathbf{CH}^{m+1}(X)}{\operatorname{im} d : \mathbf{CH}^{m-1}(X) \to \mathbf{CH}^m(X)}.$$

Si $X$ est une variété lipschitzienne plongée dans $\mathbb{R}^n$, alors sa cohomologie des charges coïncide avec sa cohomologie singulière. Hormis les propriétés communes partagées avec toute théorie cohomologique, peu de choses concernant la cohomologie des charges sont connues. Par exemple, si $X$ est connexe par arcs lipschitziens, alors $\mathbf{H}^0_{\mathbf{CH}}(X) = \mathbb{R}$, mais on ne sait même pas si la réciproque est vraie.

Une construction adjacente à celle de la représentation des charges est celle de construire une théorie de Hodge (forcément non linéaire) pour la cohomologie des charges. Évidemment, les propriétés fonctionnelles de l'espace $\mathbf{CH}^m(X)$ sont mauvaises (par exemple, cet espace est réflexif si et seulement s'il est réduit à $\{0\}$), et la théorie de Hodge classique sélectionne parmi les classes de cohomologie de de Rham des représentants harmoniques ne se transpose pas au cas des charges.

## Références


[1] F. Albiac et N.J. Kalton, *Topics in Banach Space Theory*, Springer-Verlag, New-York, 2006.

[2] Y. Benyamini et J. Lindenstrauss, *Geometric Nonlinear Functional Analysis*, AMS, Colloquium Publications, **48**, 1991.

[3] J. Bourgain et H. Brézis, *On the equation* $\operatorname{div} Y = f$ *and applications to the control of phases*, J. Amer. Math. Soc. **16** (2003), 393-426.

[4] D. Choimet et H. Queffélec, *Analyse Mathématiques, Grands Théorèmes du Vingtième Siècle*, Calvage & Mounet, Paris, 2009.

[5] T. De Pauw, L. Moonens et W.F. Pfeffer, *Charges in middle dimensions*, prochaînement publié.

[6] T. De Pauw et W.F. Pfeffer, *Distributions for which* $\operatorname{div} v = F$ *has a continuous solution*, Comm. Pure and Appl. Math, **LXL** (2008), 230-260.

[7] L.C. Evans et R.F. Gariepy, *Measure Theory and Fine Properties of Functions*, CRC Press, Boca Raton, 1992.

[8] H.Federer, *Geometric Measure Theory*, Springer-Verlag, New York, 1991.

[9] H. Whitney, *Geometric Integration Theory*, Dover Publications, 2005.