Équations différentielles stochastiques en dimension finie et infinie

Vincent Bénézech, Philippe Bouafia

Nous tenons à remercier chaleureusement Arnaud Basson, qui nous a encadré avec constance et nous a orienté vers des résultats fascinants sur les équations en dimension infinie.

En l'absence de précision, on travaillera sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Table des matières

1 Introduction

Le concept d'équation différentielle stochastique[1] généralise celui d'équation différentielle ordinaire aux processus stochastiques. La formalisation théorique de ce problème à elle seule a posé problème aux mathématiciens, et il a fallu attendre les années 1940 et les travaux du mathématicien japonais Itô Kiyoshi pour la définition de l'intégrale stochastique. Il s'agit d'étendre la notion d'intégrale de Lebesgue aux processus stochastiques selon un mouvement brownien. On construira cette intégrale, et on donnera un sens à l'expression

$$\int_S^T f(s,\omega)\,\mathrm{d}B_s$$

où $f(t,\cdot)$ est un processus stochastique muni de propriétés de régularité suffisantes.

À partir de la théorie de l'intégration, on construit la théorie des EDS. Les EDS sont utilisées dans différentes branches des sciences pour modéliser dans processus familiers, qui sont « bruités ». Une équation typique est la suivante :

$$\mathrm{d}X_t = \alpha X_t\,\mathrm{d}t + \beta X_t\,\mathrm{d}B_t(\omega)$$

ce qui n'est qu'une notation pour exprimer

$$X_t = X_0 + \alpha\int_0^t X_s\,\mathrm{d}s + \beta\int_0^t X_s\,\mathrm{d}B_s$$

C'est l'équation de croissance exponentielle d'une population à un taux α dont le bruit, l'incertitude est proportionnelle à la taille de la population. C'est également l'équation du modèle de Black-Scholes pour l'évaluation du prix X_t d'une option sous-jacente à une action de volabilité β, lorsque le taux d'intérêt est α.

2 L'intégrale d'Itô en dimension finie

Dans cette partie, nous allons essayer de donner un sens, pour certaines fonctions, à l'expression

$$\int_S^T f(s,\omega)\,\mathrm{d}B_s(\omega)$$

présentée dans l'introduction. Pour cela, on va tout d'abord définir cette intégrale pour une certaine classe de fonctions, dites élémentaires, puis on étendra cette définition par « densité »à un ensemble plus large de fonctions.

On considérera dans presque toute cette partie (sauf en 2.4) un mouvement brownien $(B_t)_{t\geq 0}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On note $\mathcal{F}_t$ la sous-tribu de $\mathcal{F}$ engendrée par les B_s pour $s \leq t$ et $\mathcal{B}$ la tribu borélienne sur $[0,+\infty[$. Définissons enfin l'ensemble des fonctions pour lesquelles on va pouvoir construire l'intégrale d'Itô.

[1] souvent abrégé en EDS, et SDE dans les ouvrages anglo-saxons

Définition 2.1. Soient $S, T \in \mathbb{R}^+$ $(S < T)$ et $(\mathcal{H}_t)_{t\geq 0}$ une famille croissante de sous-tribus de $\mathcal{F}$, on définit $\mathcal{V}_{\mathcal{H}}(S,T)$ comme l'ensemble des fonctions $f : [0,+\infty[\times\Omega \to \mathbb{R}$ vérifiant les trois conditions suivantes :

1. $(t,\omega) \mapsto f(t,\omega)$ est $\mathcal{B}\times\mathcal{F}$-mesurable.
2. (B_t) est une martingale relativement à $(\mathcal{H}_t)$ et le processus $\omega \mapsto f(t,\omega)$ est $\mathcal{H}_t$-adapté.
3. $\mathbb{E}\left[\int_S^T f^2(t,\omega)\,\mathrm{d}t\right] < \infty$

On a toujours $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{H}_t$ et dans la plupart des cas, on pourra prendre $\mathcal{H}_t = \mathcal{F}_t$ pour définir les intégrales qui nous intéressent. Dans les deux parties qui suivent, on pourra de fait supposer que $\mathcal{H}_t = \mathcal{F}_t$. Afin d'alléger les notations, on notera $\mathcal{V}(S,T)$ plutôt que $\mathcal{V}_{\mathcal{F}}(S,T)$. En revanche, en 2.4, le choix de la filtration $(\mathcal{H}_t)$ interviendra de façon cruciale.

2.1 L'intégrale d'Itô pour les fonctions élémentaires

Définition 2.2. Une fonction $\phi \in \mathcal{V}(S,T)$ est dite élémentaire s'il existe une subdivision $S = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = T$ et des fonctions $e_0, ..., e_{N-1} : \Omega \to \mathbb{R}$ telles que :

$$\phi(t,\omega) = \sum_{j=1}^{N-1} e_j(\omega)\chi_{[t_j,t_{j+1}[}(t)$$

où χ est la fonction caractéristique d'intervalle.

Ces fonctions élémentaires sont l'équivalent stochastique des fonctions étagées servant à définir l'intégrale de Lebesgue. On remarque que chacun des e_j est $\mathcal{H}_{t_j}$-mesurable.

Pour les fonctions élémentaires, on pose, toujours par analogie avec la construction de l'intégrale de Lebesgue[2] :

$$\int_S^T \phi(t,\omega)\,\mathrm{d}B_t(\omega) = \sum_{j=0}^{N-1} e_j(\omega)[B_{t_{j+1}} - B_{t_j}](\omega)$$

Lemme 1 (Isométrie d'Itô pour les fonctions élémentaires)**.** *Soit ϕ une fonction élémentaire bornée. Alors :*

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_S^T \phi(t,\omega)\,\mathrm{d}B_t(\omega)\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\int_S^T \phi^2(t,\omega)\,\mathrm{d}t\right]$$

Démonstration. Posons, pour simplifier les notations, $\Delta B_j = B_{t_{j+1}} - B_{t_j}$. Alors, en utilisant l'indépendance de $e_ie_j\Delta B_i$ et de ΔB_j pour $i < j$,

$$\mathbb{E}[e_ie_j\Delta B_i\Delta B_j] = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ \mathbb{E}[e_j^2](t_{j+1} - t_j) & \text{si } i = j \end{cases}$$

[2]On définit ici l'intégrale stochastique par rapport au mouvement brownien. La généralisation à des intégrales stochastiques par rapport à une martingale quelconque ne sera pas traîtée.

On obtient alors :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\left(\int_S^T \phi \,\mathrm{d}B\right)^2\right] &= \sum_{i,j} \mathbb{E}[e_i e_j \Delta B_i \Delta B_j] \\
&= \sum_j \mathbb{E}[e_j^2]\dot{(}t_{j+1} - t_j) \\
&= \mathbb{E}\left[\int_S^T \phi^2 \,\mathrm{d}t\right]
\end{aligned}$$

□

2.2 Extension aux fonctions de $\mathcal{V}(S,T)$

Pour définir l'intégrale d'Itô pour une fonction f de $\mathcal{V}(S,T)$, on va approcher f par une suite (ϕ_n) de fonctions élementaires au sens suivant :

$$\mathbb{E}\left[\int_S^T \Big(f(t,\omega) - \phi_n(t,\omega)\Big)^2 \,\mathrm{d}t\right] \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Cela va se faire en trois étapes.

Etape 1. Soit $f \in \mathcal{V}(S,T)$. Alors il existe une suite de fonctions (h_n) de $\mathcal{V}(S,T)$ telle que h_n est bornée pour tout n et

$$\mathbb{E}\left[\int_S^T (f - h_n)^2 \,\mathrm{d}t\right] \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Démonstration. Posons

$$h_n(t,\omega) = \left\{\begin{array}{cl} -n & \text{si } f(t,\omega) < -n \\ f(t,\omega) & \text{si } -n \leq f(t,\omega) \leq n \\ n & \text{si } f(t,\omega) > n \end{array}\right.$$

On a $(f - h_n)^2 \leq 4f^2$ et f^2 est intégrable par rapport à t donc le théorème de convergence dominée donne que, p.s. en ω,

$$\int_S^T (f - h_n)^2 \,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

On réapplique ensuite le théorème de convergence dominée à la suite des intégrales qui sont majorées par $4\int f^2$ qui est intégrable en ω car $f \in \mathcal{V}(S,T)$, ce qui donne :

$$\mathbb{E}\left[\int_S^T (f - h_n)^2 \,\mathrm{d}t\right] \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

La suite (h_n) étant dans $\mathcal{V}(S,T)$ par construction, elle convient. □

Etape 2. Soit $h \in \mathcal{V}(S,T)$ une fonction bornée. Alors il existe une suite (g_n) de fonctions bornées de $\mathcal{V}(S,T)$ telle que $g_n(\cdot,\omega)$ est continue pour tout n et pour tout ω et :

$$\mathbb{E}\left[\int_S^T (h-g_n)^2\,\mathrm{d}t\right] \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Démonstration. On procède par convolution. On considère (ρ_n) une approximation de l'identité à support dans $[0,1/n]$ et on pose :

$$g_n(t,\omega) = \int_0^t \rho_n(t-s)h(s,\omega)\,\mathrm{d}s$$

On sait que $g_n(\cdot,\omega)$ est continue pour tout n et pour tout ω et que (g_n) converge dans $L^2(\mathrm{d}t)$ vers h. De plus, si h est bornée par $M>0$, alors pour tout n, $|g_n(t,\omega)| \leq M$. Par le théorème de convergence dominée, on conclut :

$$\mathbb{E}\left[\int_S^T (h-g_n)^2\,\mathrm{d}t\right] \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Il reste maintenant à voir que les g_n sont dans $\mathcal{V}(S,T)$ pour tout n. Seul le fait que $g_n(t,\cdot)$ soit $\mathcal{H}_t$-mesurable pose problème.

□

Etape 3. Soit $g \in \mathcal{V}(S,T)$ une fonction bornée et telle que $g(\cdot,\omega)$ est continue pour tout ω. Alors il existe une suite de fonctions élémentaires (φ_n) dans $\mathcal{V}(S,T)$ telle que :

$$\mathbb{E}\left[\int_S^T (g-\phi_n)^2\,\mathrm{d}t\right] \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Démonstration. Il s'agit de « sommes de Riemann ». On pose, pour tout n :

$$\phi_n(t,\omega) = \sum_{j=1}^n g\Big(S+(j-1)\frac{(T-S)}{n},\omega\Big)\cdot\chi_{\left[S+(j-1)\frac{(T-S)}{n},S+j\frac{(T-S)}{n}\right]}(t)$$

Les ϕ_n sont élémentaires car $g \in \mathcal{V}(S,T)$ et en utilisant l'uniforme continuité de $g(\cdot,\omega)$ sur [S,T], on prouve que :

$$\int_S^T (g-\phi_n)^2\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to\infty]{p.p.} 0$$

Comme g et donc les ϕ_n sont bornées, le théorème de convergence dominée permet de passer à l'espérance. □

Cela nous permet maintenant de définir l'intégrale d'Itô pour les éléments de $\mathcal{V}(S,T)$:

Définition 2.3. Soit $f \in \mathcal{V}(S,T)$. On définit alors l'intégrale d'Itô entre S et T par :

$$\int_S^T f(t,\omega)\,\mathrm{d}B_t(\omega) = \lim_{n\to\infty} \int_S^T \phi_n(t,\omega)\,\mathrm{d}B_t(\omega)$$

où la limite est prise dans $L^2(P)$ et où (ϕ_n) est une suite de fonctions élémentaires telles que

$$\mathbb{E}\left[\int_S^T \Big(f(t,\omega)-\phi_n(t,\omega)\Big)^2\,\mathrm{d}t\right] \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \qquad (\star)$$

Il faut faire plusieurs remarques :

- Une telle suite (ϕ_n) existe grâce à l'étude précédente.
- La suite $\displaystyle\int \phi_n(t,\omega)\,\mathrm{d}B_t(\omega)$ converge dans $L^2(P)$ car elle est de Cauchy dans ce même espace. En effet, l'isométrie d'Itô donne :

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_S^T \phi_n(t,\omega)\,\mathrm{d}B_t(\omega) - \int_S^T \phi_m(t,\omega)\,\mathrm{d}B_t(\omega)\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\int_S^T \Big(\phi_n(t,\omega)-\phi_m(t,\omega)\Big)^2\,\mathrm{d}t\right]$$

  et $(\star)$ permet de conclure.
- L'isométrie d'Itô montre aussi que la limite ne dépend pas de la suite (ϕ_n) utilisée.
- On peut étendre l'isométrie d'Itô aux fonctions de $\mathcal{V}(S,T)$

2.3 Extension aux fonctions intégrables presque sûrement

2.4 L'intégrale d'Itô en dimension quelconque

On onsidère maintenant $(B_t^1,\cdots,B_t^n)$ un mouvement brownien en dimension n. Lorsque l'on veut définir des intégrales du genre $\int B_t^2(\omega)\,\mathrm{d}B_t^1(\omega)$, la filtration $(\mathcal{F}_t)$ engendrée par B_s^1 pour $s \le t$ ne convient pas. En effet, B_t^2 n'est pas en général $\mathcal{F}_t$ mesurable et la condiion 2. n'est pas remplie. On va donc utiliser la filtration plus grosse $(\mathcal{H}_t)$ où $\mathcal{H}_t$ est engendrée par $B_{s_1},\cdots,B_{s_n}$ pour $s_1,\cdots,s_n \le t$. Grâce à cette filtration, on peut définir l'intégrale d'Itô multidimensionnelle.

Définition 2.4. Soit $v(t,\omega) = (v_{ij}(t,\omega)$ une matrice de taille $m\times n$ telle que v_{ij} soit dans $\mathcal{V}(S,T)$ pour tout i et pour tout j. On définit alors l'intégrale de v par rapport à B comme étant le vecteur colonne de dimension m dont la i^{eme} composante est donnée par :

$$\sum_{j=1}^n \int_S^T v_{ij}(s,\omega)\,\mathrm{d}B_j(s,\omega).$$

On notera $\mathcal{V}^{m\times n}(S,T)$ l'ensemble des telles fonctions v qui admettent une intégrale d'Itô.

3 Formule d'Itô

La définition de l'intégrale d'Itô n'est pas maniable dans la pratique, et, comme pour l'intégrale de Lebesgue, il est nécessaire de faire appel à des résultats puissants, sans chercher à approximer les fonctions considérées par des fonctions élémentaires.

On présente dans cette section une version stochastique de la formule de dérivation des fonctions composées.

3.1 Processus d'Itô

Définition 3.1. On appelle processus d'Itô un processus stochastique $(X_t)_{t\geq 0}$ s'écrivant sous la forme

$$X_t = X_0 + \int_0^t u(s,\omega)\,\mathrm{d}s + \int_0^t v(s,\omega)\,\mathrm{d}B_s$$

où $v \in \mathcal{V}$ et $u(t,\cdot)$ est un processus adapté à $(\mathcal{H}_t)_{t\geq 0}$ tel que

$$P\Big[\forall t \geq 0 \quad \int_0^t |u(s,\omega)|\,\mathrm{d}s < \infty\Big] = 1$$

Afin d'alléger les notations, on préfère écrire sous une forme différentielle

$$\mathrm{d}X_t = u\,\mathrm{d}t + v\,\mathrm{d}B_t$$

On introduit les règles de calcul suivantes : $(\,\mathrm{d}t)^2 = \mathrm{d}t\,\mathrm{d}B_t = \mathrm{d}B_t\,\mathrm{d}t = 0$ et $(\,\mathrm{d}B_t)^2 = \mathrm{d}t$. Par exemple

$$(\,\mathrm{d}X_t)^2 = v^2\,\mathrm{d}t$$

Exemple 1. Montrons que tB_t est un processus d'Itô. Remarquons que

$$\int_0^t s\,\mathrm{d}B_s = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k}{n}t\left(B\Big(\frac{k+1}{n}t\Big) - B\Big(\frac{k}{n}t\Big)\right)$$

où la limite est prise dans $L^2(P)$.

Puisque les trajectoires du mouvement brownien sont presque partout continues, on a similairement

$$\int_0^t B_s\,\mathrm{d}s = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n-1} B\Big(\frac{k+1}{n}t\Big)\Big(\frac{k+1}{n} - \frac{k}{n}\Big)t$$

En additionnant les deux quantités, on trouve que

$$\int_0^t s\,\mathrm{d}B_s + \int_0^t B_s\,\mathrm{d}s = tB_t$$

ce qui se réecrit

$$\mathrm{d}(tB_t) = t\,\mathrm{d}B_t + B_t\,\mathrm{d}t$$

Exemple 2. Montrons que B_t^2 est un processus d'Itô, et que plus exactement $\mathrm{d}B_t^2 = 2B_t\,\mathrm{d}B_t + \mathrm{d}t$. Posons $\phi_n(s,\omega) = \sum_j B_{t_j}(\omega)\chi_{[t_j,t_{j+1}[}(s)$. Alors

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\int_0^t (\phi_n - B_s)^2\,\mathrm{d}s\right] &= \mathbb{E}\left[\sum_j \int_{t_j}^{t_{j+1}} (B_j - B_s)^2\,\mathrm{d}s\right] \\ &= \sum_j \int_{t_j} t_{j+1}(s-t_j)\,\mathrm{d}s \\ &= \frac{1}{2}\sum_j (t_{j+1}-t_j)^2 \xrightarrow[\Delta t\to 0]{} 0\end{aligned}$$

On en déduit donc que

$$\int_0^t B_s\,\mathrm{d}B_s = \lim_{\Delta t\to 0}\int_0^t \phi_n\,\mathrm{d}B_s = \lim_{\Delta t\to 0}\sum_j B_{t_j}(B_{t_{j+1}} - B_{t_j})$$

Or on voit facilement que

$$\sum_j B_{t_j}(B_{t_{j+1}} - B_{t_j}) = \frac{1}{2}B_t^2 - \frac{1}{2}\sum_j (B_{t_{j+1}} - B_{t_j})^2$$

et par un passage à la limite dans $L^2(P)$ on déduit que

$$\int_0^t B_s\,\mathrm{d}B_s = \frac{1}{2}B_t^2 - \frac{1}{2}t$$

3.2 Formule d'intégration par parties

Théorème 1 (Règle du produit d'Itô)**.** *Soit X_1 et X_2 deux processus d'Itô.*

$$\begin{aligned}\mathrm{d}X_1 &= F_1\,\mathrm{d}t + G_1\,\mathrm{d}B_t \\ \mathrm{d}X_2 &= F_2\,\mathrm{d}t + G_2\,\mathrm{d}B_t\end{aligned}$$

Alors le produit X_1X_2 est un processus d'Itô, et

$$\mathrm{d}(X_1X_2) = X_2\,\mathrm{d}X_1 + X_1\,\mathrm{d}X_2 + \mathrm{d}X_1\,\mathrm{d}X_2$$

L'expression $\mathrm{d}X_1\,\mathrm{d}X_2$ est le terme correctif d'Itô. L'intégration de la règle du produit d'Itô donne la formule d'intégration par parties

$$\int_0^t X_2\,\mathrm{d}X_1 = \Big[X_1X_2\Big]_0^t - \int_0^t X_1\,\mathrm{d}X_2 - \int_0^t G_1G_2\,\mathrm{d}t$$

Démonstration. Quitte à remplacer X_i par $X_i - X_{i,0}$, on se ramène au cas où $X_{i,0} = 0$

Etape 1. On suppose que les F_i et G_i sont indépendantes du temps t, $\mathcal{F}_0$-mesurables.

On a alors

$$
\begin{aligned}
\int_0^t (X_2\,\mathrm{d}X_1 + X_1\,\mathrm{d}X_2 + G_1G_2\,\mathrm{d}s) &= \int_0^t (X_1F_2 + X_2F_1)\,\mathrm{d}s + \int_0^t (X_1G_2 + X_2G_1)\,\mathrm{d}B \\
&+ \int_0^t G_1G_2\,\mathrm{d}s \\
&= \int_0^t ((F_1s + G_1B)F_2 + (F_2s + G_2B)F_1)\,\mathrm{d}s \\
&+ \int_0^t ((F_1s + G_1B)G_2 + (F_2s + G_2B)G_1)\,\mathrm{d}B + G_1G_2t \\
&= F_1F_2r^2 + (G_1F_2 + G_2F_1)\left[\int_0^t B_t\,\mathrm{d}s + \int_0^t s\,\mathrm{d}B_s\right] \\
&+ 2G_1G_2\int_0^t B_s\,\mathrm{d}B_s + G_1G_2t
\end{aligned}
$$

Les exemples précédents montrent que $2\int_0^t B_s\,\mathrm{d}B_s = B_t^2 - t$ et $\int_0^t B_s\,\mathrm{d}s + \int_0^t s\,\mathrm{d}B_s = tB_t$. On en déduit alors que

$$
\begin{aligned}
\int_0^t (X_2\,\mathrm{d}X_1 + X_1\,\mathrm{d}X_2 + G_1G_2\,\mathrm{d}t) &= F_1F_2t^2 + (G_1F_2 + G_2F_1)tB_t + G_1G_2B_t^2 \\
&= X_{1,t}X_{2,t}
\end{aligned}
$$

Etape 2. On suppose que F_i, G_i sont des fonctions élémentaires

On applique la première étape sur chacun des intervalles $[t_j, t_{j+1}[$, sur lesquels F_i et G_i sont constants et $\mathcal{F}_s$-mesurables.

Etape 3. On n'impose plus de conditions sur F_i et G_i

On sélectionne des fonctions élémentaires F_i^n, G_i^n tels que lorsque $n \to \infty$ $(i = 1, 2)$

$$
\mathbb{E}\left[\int_0^t |F_i^n - F_i|^2\,\mathrm{d}t\right] \to 0
$$

$$
\mathbb{E}\left[\int_0^t |G_i^n - G_i|^2\,\mathrm{d}t\right] \to 0
$$

On applique l'étape 2 au processus X_i^n définis par

$$
X_i^n = X_i(0) + \int_0^t F_i^n\,\mathrm{d}s + \int_0^t G_i^n\,\mathrm{d}B_s
$$

En passant à la limite, on obtient la formule

$$
\Big[X_1X_2\Big]_0^t = \int_0^t X_1\,\mathrm{d}X_2 + X_2\,\mathrm{d}X_1 + G_1G_2\,\mathrm{d}t
$$

□

3.3 Formule d'Itô en dimension 1

Théorème 2 (Formule d'Itô)**.** *Soit* $(X_t)_{0\le t\le T}$ *un processus d'Itô,* $\mathrm{d}X_t = F\,\mathrm{d}t + G\,\mathrm{d}B_t$*. Soit* $g : [0,T]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *une fonction continue telle que les dérivées* $\frac{\partial g}{\partial t}$, $\frac{\partial g}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}$ *existent et soient continues.*

Alors le processus $Y_t = g(t,X_t)$ *est un processus d'Itô, dont la différentielle stochastique est*

$$dY_t = \frac{\partial g}{\partial t}(t,X_t)\,\mathrm{d}t + \frac{\partial g}{\partial x}(t,X_t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t,X_t)(\,\mathrm{d}X_t)^2$$

Démonstration. On commence par le cas où $g(t,x) = x^m$ $(m\in\mathbb{N})$, on va montrer que

$$\mathrm{d}(X^m) = mX^{m-1}\,\mathrm{d}X + \frac{1}{2}m(m-1)X^{m-2}G^2\,\mathrm{d}t$$

C'est clair pour $m=0$. Supposons la formule vraie au rang $m-1$, alors par la règle du produit d'Itô, on obtient

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}(X^m) &= \mathrm{d}(XX^{m-1}) \\
&= X\,\mathrm{d}X^{m-1} + X^{m-1}\,\mathrm{d}X + (m-1)X^{m-2}G^2\,\mathrm{d}t \\
&= X\left((m-1)X^{m-2}\,\mathrm{d}X + \frac{1}{2}(m-1)(m-2)X^{m-3}G^2\,\mathrm{d}t\right) \\
&\quad +(m-1)X^{m-2}G^2\,\mathrm{d}t + X^{m-1}\,\mathrm{d}X \\
&= mX^{m-1}\,\mathrm{d}X + \frac{1}{2}m(m-1)X^{m-2}G^2\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Comme la formule d'Itô est valable pour toutes les fonctions $g(t,x) = x^m$, par linéarité de l'opérateur « d », la formule d'Itô est valide pour tous les polynômes en x.

Maintenant, supposons que g soit de la forme $g(t,x) = f_1(t)f_2(x)$ où f_1 et f_2 sont des polynômes. Alors

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}(g(t,X_t)) &= \mathrm{d}(f_1(t)f_2(X_t)) \\
&= f_2(X_t)\,\mathrm{d}f_1 + f_1(t)\,\mathrm{d}f_2(X_t) \\
&= f_2(X_t)f_1'(t)\,\mathrm{d}t + f_1(t)\left[f_2'(X_t)\,\mathrm{d}X_t + \frac{1}{2}f_2''(X_t)G^2\,\mathrm{d}t\right] \\
&= \frac{\partial g}{\partial t}\,\mathrm{d}t + \frac{\partial g}{\partial x}\,\mathrm{d}X + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}G^2\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

ce qui montre la formule d'Itô pour g. Par linéarité, la formule d'Itô est valable pour toute fonction g de la forme

$$g(t,x) = \sum_{i=1}^{m} f_1^i(t)f_2^i(x)$$

où f_1^i et f_2^i sont des polynômes.

Soit maintenant g vérifiant les conditions de l'énoncé. Il existe une suite de polynômes g^n telle que

$$\begin{array}{cc} g^n \to g & \dfrac{\partial g^n}{\partial t} \to \dfrac{\partial g}{\partial t} \\ \dfrac{\partial g^n}{\partial x} \to \dfrac{\partial g}{\partial x} & \dfrac{\partial^2 g^n}{\partial x^2} \to \dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2} \end{array}$$

uniformément sur les compacts de $[0,T] \times \mathbb{R}$. D'après ce qui précéde, on sait que pour tout $t \in [0,T]$, presque sûrement

$$g^n(t, X_t) - g^n(0, X_0) = \int_0^t \frac{\partial g^n}{\partial t} + \frac{\partial g^n}{\partial x} F + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g^n}{\partial x^2} G^2 \, \mathrm{d}s + \int_0^t \frac{\partial g^n}{\partial x} G \, \mathrm{d}B_s$$

En faisant tendre n vers $+\infty$, on prouve le lemme d'Itô. □

4 Equations différentielles stochastiques

Dans toute cette partie, on s'intéressera à l'équation différentielle stochastique

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathrm{d}X_t = b(t, X_t)\, \mathrm{d}t + \sigma(t, X_t)\, \mathrm{d}B_t \quad \forall t \in [0,T] \\ X_0 = Z \end{array} \right. \tag{1}$$

où T est un réel strictement positif, $b : [0,T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ et $\sigma : [0,T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n \times m}$ sont deux fonctions mesurables et où Z est une variable aléatoire quelconque.

4.1 Solutions fortes, solutions faibles

Définition 4.1. On se donne un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et (B_t) un mouvement brownien en dimension m. On dit que le processus (X_t) est solution forte de (1) si (X_t) est adapté à la filtration $(\mathcal{F}_t) \vee \sigma(Z)$ et si, pour tout $t \in [0,T]$, on a presque sûrement :

$$X_t = Z + \int_0^t b(s, X_s)\, \mathrm{d}s + \int_0^t \sigma(s, X_s)\, \mathrm{d}B_s.$$

Il est à noter que l'espace de probabilité et le mouvement brownien sont fixés et que l'on impose que le processus soit adapté. Cela correspon à l'idée intuitive que le processus solution doit être prédictible si l'on dispose du passé.

On dira qu'il y a unicité forte pour l'équation si, pour toutes solutions X_t^1 et X_t^2, on a :

$$P[X_t^1 = X_t^2 \ , \ \forall t \in [0,T]] = 1.$$

La notion de solution forte est parfois trop restrictive. Considérons le problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathrm{d}X_t = \mathrm{signe}(X_t)\, \mathrm{d}B_t \\ X_0 = 0 \end{array} \right. \tag{2}$$

On montrera en 4.3 que cette équation n'admet pas de solution forte. Cependant, il est possible de trouver un espace de probabilité, un mouvement brownien B sur cet espace et une filtration convenable $\mathcal{H}$ tels qu'il y ait une solution au problème. Cela correspond à la notion de solution faible :

Définition 4.2. Une solution faible de (1) est la donnée d'un triplet (X, B), $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et $(\mathcal{H}_t)$ où :

1. $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ est un espace de probabilité et (Hh_t) est une filtration de cet espace.
2. B est un mouvement brownien en dimension m tel que (B_t) est une martingale relativement à la filtration $(\mathcal{H}_t)$.
3. X est un processus adapté à la filtration $(\mathcal{H}_t)$.
4. On a p.s. :
$$X_t = Z + \int_0^t b(s, X_s)\,\mathrm{d}s + \int_0^t \sigma(s, X_s)\,\mathrm{d}B_s.$$

Définissons maintenant un[3] concept d'unicité faible :

Définition 4.3 (Unicité faible en loi)**.** On dit qu'il y a unicité faible en loi pour l'équation (1) si deux solutions faibles ont toujours même loi.

4.2 Existence et unicité fortes

Commençons par un résultat d'unicité forte :

Théorème 3. *On suppose que les coefficients b et σ sont localement lipschitzien en x et y, c'est à dire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe K_n tel que pour tout $t \in [0, T]$, pour tout (x, y) vérifiant $|x| \leq n$ et $|y| \leq n$, on a :*
$$|b(t, x) - b(t, y)| + |\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| \leq K_n |x - y|$$
Alors, si (1) admet une solution continue par rapport à la variable t, elle est unique.

On remarque que si $T = +\infty$, on a encore unicité forte puisqu'il suffit d'appliquer ce théorème sur tout intervalle $[0, T]$.

Démonstration. Soit X_t^1 et X_t^2 deux solutions fortes de (1). On pose $a(s, \omega) = b(s, X_s^1) - b(s, X_s^2)$ et $\gamma(s, \omega) = \sigma(s, X_s^1) - \sigma(s, X_s^2)$. On définit le temps d'arrêt $\tau_n^1 = \inf\{t \geq 0 | |X_t| \geq n\}$ et de même pour τ_n^2. On pose enfin $S_n = \tau_n^1 \wedge \tau_n^2$.

Pour tout $t \in [0, T]$, on obtient en utilisant $|a + b|^2 \leq 2|a|^2 + |b|^2$ puis Jensen et l'isométrie d'Itô :

$$\begin{aligned} E[|X_{t\wedge S_n}^1 - X_{t\wedge S_n}^2|^2] &= E\left[\left(\int_0^{t\wedge S_n} a\,\mathrm{d}s + \int_0^{t\wedge S_n} \gamma\,\mathrm{d}B_s\right)^2\right] \\ &\leq 2E\left[\left(\int_0^{t\wedge S_n} a\,\mathrm{d}s\right)^2\right] + 2E\left[\left(\int_0^{t\wedge S_n} \gamma\,\mathrm{d}B_s\right)^2\right] \end{aligned}$$

[3] Il existe une autre forme d'unicité faible dite "pathwise" en anglais, qui consiste à comparer les solutions définies sur un même espace de probabilité et à voir si elles se correspondent p.s.

$$
\begin{aligned}
&\leq \quad 2tE\left[\int_0^{t\wedge S_n} a^2\,\mathrm{d}s\right] + 2E\left[\int_0^{t\wedge S_n} \gamma^2\,\mathrm{d}s\right] \\
&\leq \quad 2(1+t)K_n^2 \int_0^{t\wedge S_n} E[|X_s^1 - X_s^2|^2]\,\mathrm{d}s
\end{aligned}
$$

On en déduit que la foncion $\phi(t) = E[|X^1_{\wedge S_n} - X^2_{t\wedge S_n}|^2]$ vérifie, pour tout $t \in [0,T]$:

$$
\phi(t) \leq 2(1+T)K_n^2 \int_0^t \phi(s)\,\mathrm{d}s.
$$

Par le lemme de Gronwall, on déduit que ϕ est nulle, puis que pour tout t, $X^1_{t\wedge S_n} = X^2_{t\wedge S_n}$ p.s. En se restreignant aux rationnels, on a le droit d'intervertir le pour tout et le p.s. : on obtient que, p.s., $X_t^1 = X_t^2$ pour tout $t \in [0, S_n] \cap \mathbb{Q}$. Comme $t \mapsto X_t^1$ et $t \mapsto X_t^2$ sont continus, on peut étendre ce résultat à tous les t de $[0, S_n]$. Enfin, en faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient l'unicit{e sur $[0,T]$.

□

Donnons maintenant un résultat d'existence et d'unicité global pour les EDS. Il est à noter que les hypothèses sont loin d'être optimales mais la très forte analogie entre ce théorème et Cauchy-Lipschitz global tant au niveau des hypothèses qu'au niveau de la demonstration est intéressante. On va donner deux versions de ce théorème, une correspondant à $T < \infty$ et une à $T = +\infty$.

Théorème 4. *On suppose qu'il existe deux constanes C et D telles que les fonctions b et σ satisfont :*

$$
|b(t,x) + \sigma(t,x)| \leq C(1+|x|)\ \forall x \in \mathbb{R}^n,\ \ \forall t \in [0,T] \tag{3}
$$

et

$$
|b(t,x) - b(t,y)| + |\sigma(t,x) - \sigma(t,y)| \leq D|x-y|\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^n,\ \ \forall t \in [0,T] \tag{4}
$$

On suppose de plus que la variable Z est dans $L^2(P)$ et indépendante de la tribu $\mathcal{F}_\infty$ engendrée par les variables B_s pour $s \geq 0$.

Alors l'équation différentielle (1) admet une unique solution (X_t) continue par rapport à la variable t. De plus

$$
E\left[\int_S^T |X_t|^2\,\mathrm{d}t\right] < \infty \tag{5}
$$

Démonstration. L'unicité découle évidemment du théorème 3. Il reste à montrer l'existence.

L'idée est d'imiter la demonstration du théorème pour les équations différentielles ordinaires. On pose donc $Y_t^0 = Z$ et on définit, pour $k \geq 1$ Y_t^k par la formule de récurence suivante :

$$
Y_t^k = Z + \int_0^t b(s, Y_s^{k-1})\,\mathrm{d}s + \int_0^t \sigma(s, Y_s^{k-1})\,\mathrm{d}B_s \tag{6}
$$

On voudrait montrer que la suite Y^k converge et que le processus limite est solution de (1). Pour cela, nous allons majorer $\sup_{[0,T]} |Y_t^{k+1} - Y_t^k|$ et montrer que la série de terme généra $Y^{k+1} - Y^k$ est uniformément convergente sur $[0,T]$.

Un calcul analogue à celui effectué pour l'unicité donne, pour tout $t \in [0,T]$:

$$E[|Y_t^{k+1} - Y_t^k|^2] \leq (1+2T)D^2 \int_0^t E[|Y_s^k - Y_s^{k-1}|^2]\,\mathrm{d}s$$

et aussi :

$$\begin{aligned} E[|Y_t^1 - Y_t^0|^2] &\leq 2tE\left[\int_0^t (b(s,Z)^2)\,\mathrm{d}s\right] + 2E\left[\int_0^t (\sigma(s,Z))^2\,\mathrm{d}s\right] \\ &\leq 2(T+1)C^2 E[(1+|Z|)^2]t \\ &\leq 2(T+1)C^2(1+E[|Z|^2])t \end{aligned}$$

en utilisant (3) cette fois.

Un raisonnement par récurrence permet d'obtenir :

$$E[|Y_t^{k+1} - Y_t^k|^2] \leq \frac{A^{k+1}t^{k+1}}{(k+1)!}$$

où A est une constante dépendant uniquement de T, C, D et de $E[|Z|^2]$.

Maintenant, on remarque que :

$$\sup_{[0,T]} |Y_t^{k+1} - Y_t^k| \leq \int_0^T |b(s,Y_s^k) - b(s,Y_s^{k-1}|\,\mathrm{d}s + \sup_{[0,T]} \left|\int_0^T (\sigma(s,Y^k) - \sigma(s,Y_s^{k-1})\,\mathrm{d}B_s\right|$$

donc

$$\begin{aligned} P\left[\sup_{[0,T]} |Y_t^{k+1} - Y_t^k| > 2^{-k}\right] &\leq P\left[\left(\int_0^T |b(s,Y_s^k) - b(s,Y_s^{k-1}|\,\mathrm{d}s\right)^2 > 2^{-2k-2}\right] \\ &+ P\left[\sup_{[0,T]} \left|\int_0^T (\sigma(s,Y^k) - \sigma(s,Y_s^{k-1})\,\mathrm{d}B_s\right| > 2^{-k-1}\right] \end{aligned}$$

On applique maintenant l'inégalité de Markov et l'inégalité maximale de Doob :

$$\begin{aligned} (LHS) &\leq 2^{2k+2}T \int_0^T E[|b(s,Y_s^k) - b(s,Y_s^{k-1}|^2]\,\mathrm{d}s + 2^{2k+2} \int_0^T E[|\sigma(s,Y^k) - \sigma(s,Y_s^{k-1})|^2]\,\mathrm{d}s \\ &\leq 2^{2k+2}(T+1)D^2 \int_0^T E[|Y_s^k - Y^{k-1} - s|^2]\,\mathrm{d}s \\ &\leq 2^{2k+2}(T+1)D^2 \int_0^T \frac{A^k t^k}{(k)!} \\ &\leq B\frac{(4AT)^{k+1}}{(k+1)!} \end{aligned}$$

où B est une constante convenablement choisie.

La série $(B\frac{(4AT)^{k+2}}{(k+2)!})$ étant convergente, on sait, par le lemme de Borel-Cantelli, que pour presque tout ω, il existe $k_0(\omega)$ tel que :

$$\sup_{[0,T]} |Y_t^{k+1} - Y_t^k| \leq 2^{-k} \quad \forall k \geq k_0$$

Donc, pour presque tout ω, la série $(Y^{k+1} - Y^k)$ est uniformément convergente sur $[0,T]$. On note X_t la limite de (Y_t^n).

On déduit de l'uniforme convergence que X_t est continu par rapport à la variable t pour presque tout ω et que le processus (X_t) est adapté. (car ces propriétés sont vérifiées par les Y_t^k)

Il reste à montrer que (X_t) est solution de (1) et qu'il vérifie 5. Pour cela, on remarque que (Y^k) converge dans $L^2(P)$. En effet,

$$\begin{aligned} ||Y_t^m - Y_t^n||_{L^2} &\leq \sum_{k=n}^{m-1} ||Y_y^{k+1} - Y_t^k||_{L^2} \\ &\leq \sum_{k=n}^{+\infty} \left(\frac{(At)^{k+1}}{(k+1)!}\right)^{1/2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \end{aligned}$$

Si on note Y_t la limite L^2 de (Y_t^k), on sait qu'il existe une sous-suite qui converge p.s., donc nécessairement vers X_t. En conséquence $X_t = Y_t$ p.s. et on a bien $E\left[\int_S^T |X_t|^2 \,\mathrm{d}t\right] < \infty$.

On voudrait maintenant passer à la limite dans (6). Comme (Y^k) converge dans $L^2(P)$, le lemme de Fatou donne :

$$E\left[\int_0^T |X_t - Y_t^n|^2 \,\mathrm{d}t\right] \leq \liminf_{m\to+\infty} E\left[\int_0^T |Y_t^m - Y_t^n|^2 \,\mathrm{d}t\right] \xrightarrow[m\to+\infty]{} 0$$

On en déduit en utilisant (4) et l'isométrie d'Itô que

$$\int_0^t \sigma(s, Y_s^n) \,\mathrm{d}B_s \xrightarrow[n\to+\infty]{L^2(P)} \int_0^t \sigma(s, X_s) \,\mathrm{d}B_s$$

et en utilisant (4) et l'inégalité de Hölder que

$$\int_0^t b(s, Y_s^n) \,\mathrm{d}s \xrightarrow[n\to+\infty]{L^2(P)} \int_0^t b(s, X_s) \,\mathrm{d}s$$

Tout converge dans (6). En passant à la limite, on en déduit que (X_t) est solution de (1). □

Théorème 5. *On reprend les hypothèses du théorème 4 mais on suppose $T = +\infty$. Alors, il existe une unique solution (X_t) continue par rapport à la variable t sur $[0, +\infty[$ qui vérifie :*

$$E\left[\int_0^S |X_t|^2 \,\mathrm{d}t\right] < \infty \quad \forall S \in [0, +\infty[$$

Démonstration. Avec ces hypothèses, on obtient que la suite (Y_t^k) converge uniformément sur tout compact de $[0, +\infty[$. Il suffit donc d'adapter la fin de la demonstration du théorème 4. □

Donnons maintenant un exemple d'application. On considère l'équation de Langevin :

$$\mathrm{d}X_t = \mu X_t \,\mathrm{d}t + \sigma \,\mathrm{d}B_t \tag{7}$$

où μ et σ sont des constantes réeles. Les fonctions b et σ vérifient les hypothèses du théorème 5, on a donc existence et unicité forte sur $[0, +\infty[$ pour toute condition initiale convenable. On peut essayer d'obtenir une forme explicite pour les solutions. L'idée est de multiplier par un facteur intégrant, ici $e^{-\mu t}$. La formule d'Itô donne :

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(e^{-\mu t}X_t) &= -\mu e^{-\mu t}X_t \,\mathrm{d}t + e^{-\mu t}\,\mathrm{d}X_t \\ &= \sigma e^{-\mu t}\,\mathrm{d}B_t \end{aligned}$$

On obtient alors :

$$X_t = X_0 e^{\mu t} + \int_0^t e^{\mu(t-s)}\,\mathrm{d}B_s$$

Le processus (X_t) est adapté par rapport à la filtration canonique du mouvement brownien et il vérifie l'équation 7 ; il est donc solution.

4.3 Existence et unicité faibles

5 Calcul stochastique en dimension infinie

On se place sur un espace filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P)$. Soient U et H deux espaces de Hilbert séparables. Dans cette partie, on va généraliser l'intégrale stochastique à la dimension infinie. On va donc tenter de donner un sens à l'expression

$$\int_S^T f(s,\omega)\,\mathrm{d}W_s \qquad t \in [0;T]$$

lorsque S et T sont deux réels ($S < T$), $(f(t,\cdot))_{0\leq t\leq T}$ est un processus stochastique à valeurs parmi les opérateurs linéaires d'Hilbert-Schmidt de U dans H, et $(W_t)_{t\geq 0}$ est l'analogue du mouvement brownien à valeurs dans U, adapté à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, à acroissements indépendants, appelé processus de Wiener sur U.

5.1 Opérateurs de Hilbert-Schmidt

Soit $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base de Hilbert de U. On appelle opérateur de Hilbert-Schmidt, un opérateur linéaire $\Phi : U \to H$ tel que la somme

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} ||\Phi(e_n)||^2$$

converge. Cette somme est alors indépendante du choix de la base orthonormée, et on note $L_2(U,H)$ l'espace des opérateurs de Hilbert-Schmidt, muni de la norme

$$||\Phi||_{L_2} = \sqrt{\sum_{n\in\mathbb{N}} ||\Phi(e_n)||^2}$$

Si $(f(t,\cdot))_{0\leq t\leq T}$ est un processus mesurable à valeurs dans L_2, on définit la semi-norme

$$||f||_t = \sqrt{\mathbb{E}\int_0^t ||f(s,\cdot)||_{L_2}^2 \,\mathrm{d}s}$$

5.2 Intégrale stochastique

On appele fonction élémentaire une fonction de la forme

$$\forall t\in[0,T] \quad \forall\omega\in\Omega \qquad f(t,\omega) = \sum_{j=0}^{N-1} e_j(\omega)\chi_{[t_j,t_{j+1}[}(t)$$

où $0 = t_0 < \cdots < t_N = t$ est une subdivision de l'intervalle $[0,t]$ et e_j sont des fonctions $\mathcal{F}_{t_j}$-mesurables.

L'intégrale stochastique d'une fonction élémentaire, est, par définition

$$\int_0^t f(s,\omega)\,\mathrm{d}W_s(\omega) = \sum_{j=0}^{N-1} f(s,\omega)(W_{t_{j+1}}(\omega) - W_{t_j}(\omega))$$

On étend la définition de l'intégrale stochastique au cas où $(f(t,\cdot))_{t\geq 0}$ est un processus à valeurs dans L_2 tel que $||f||_T < +\infty$. Il existe alors une suite $(f_n(t,\cdot))_{t\geq 0}$ de fonctions élémentaires telle que

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t \Big(||f(s,\cdot) - f_n(s,\cdot)||_{L_2}^2 \,\mathrm{d}s\right] \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

On définit alors l'intégrale stochastique du processus stochastique f par

$$\int_0^t f(s,\omega)\,\mathrm{d}B_s(\omega) = \lim_{n\to+\infty}\int_0^t f_n(s,\omega)\,\mathrm{d}B_s(\omega)$$

et cette définition est indépendante de la suite (f_n) choisie.

5.3 Formule d'Itô

Soient $(f(t,\cdot))_{0\leq t\leq T}$ un processus stochastique à valeurs dans L_2, tel que $||f||_T < +\infty$, et X_0 une variable aléatoire à valeurs dans H $\mathcal{F}_0$-mesurable, $\varphi : [0,T]\times\Omega \to H$ un processus intégrable presque sûrement, alors le processus suivant

$$X_t(\omega) = X_0(\omega) + \int_0^t \varphi(s,\omega)\,\mathrm{d}s + \int_0^t f(s,\omega)\,\mathrm{d}W_s$$

est bien défini, et un processus de cette forme s'appelle un processus d'Itô. On écrit en notation différentielle

$$dX_t = \varphi \, \mathrm{d}t + f \, \mathrm{d}W$$

Théorème 6. *Avec les notations précédentes, soit $g : [0,T] \times H \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. Alors, le processus $Y_t = g(t, X_t)$ est un processus d'Itô, et*

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t < g_x(s, X_s), f(s,\omega) \, \mathrm{d}W_s > +$$

$$\int_0^t \left(g_t(s, X_s) + < g_x(s, X_s), \varphi(s) > + \frac{1}{2} \mathrm{tr} \left(g_{xx}(s, X_s) f(s,\omega) Q^{1/2} (f(s,\omega) Q^{1/2})^* \right) \right) \mathrm{d}s$$

5.4 Équation de la chaleur stochastique

On prend $U = H = L^2(O)$, où O est un ouvert borné de R^N, de frontière ∂O. On considère le problème

$$\begin{aligned} \forall t \geq 0 \quad \forall \xi \in 0 \qquad \mathrm{d}_t X(t,\xi) &= \Delta_\xi X(t,\xi) \, \mathrm{d}t + \mathrm{d}W(t,\xi) \\ \forall t \geq 0 \quad \forall \xi \in \partial O \qquad X(t,\xi) &= 0 \\ \forall \xi \in \partial O \qquad X(0,\xi) &= 0 \end{aligned}$$

Références

[1] Bernt Oksendal, *Stochastic Differential Equations*, Springer-Verlag.

[2] Giuseppe da Prato, *Equations in Hilbert Spaces.*