Autour de l'homologie symplectique

Magistère Fimfa de Cédric Bounya, Ens Ulm,
Encadré par Alexandru Oancea, IRMA.

le 21 octobre 2009

Résumé

On présente la construction de l'homologie symplectique d'une variété ouverte, ainsi que quelques pistes de recherches dans ce domaine.

Introduction

Une variété symplectique est une variété différentielle munie d'une 2-forme fermée et non dégénérée. Il s'agit donc d'une variété de dimension paire M^{2n} munie d'une forme différentielle $\omega \in \Omega_2(M)$, vérifiant $\mathrm{d}\omega = 0$, et telle que la forme de degré maximal ω^n ne s'annule pas. Un difféomorphisme de M qui préserve la forme symplectique ω est appelé un symplectomorphisme. Un symplectomorphisme isotope à l'identité est dit hamiltonien.

Un problème classique en topologie symplectique est l'étude de l'ensemble des points fixes d'un symplectomorphisme hamiltonien. La conjecture d'Arnold [Arn78] prédit que l'ensemble de ces points fixes est minoré par un invariant topologique de la variété. Plus précisément, on s'intéresse aux solutions $x \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{S}^1, M)$ de l'équation $\dot{x}(t) = X_t(x(t))$, où $(X_t)_{t\in\mathbb{S}^1}$ est une famille lisses de champs de vecteurs hamiltoniens : tels que $\iota_{X_t}\omega := \omega(X_t, .) = \mathrm{d}H_t$, avec $H : M \times \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$ un hamiltonien lisse, ou encore aux points fixes du symplectomorphisme ψ_1 défini par $\psi_0 = \mathrm{Id}$, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\psi_t = X_t \circ \psi_t$.

Andreas Floer a introduit [Flo88] pour ce problème la construction d'une théorie homologique construite en fonction de l'espace des solutions d'un certain type d'équation fonctionnelle, inspirée du point de vue homologique de Thom et Smale sur la théorie de Morse. Les méthodes de ce type ont joué un rôle central dans le développement de la géométrie et de la topologie symplectiques.

Ce problème se généralise en l'étude des intersections des sous-variétés lagrangiennes, qui sont les sous variétés $L^n \subset M^{2n}$ telles que $\omega_{|L} = 0$, et ce type de questions est à rapprocher de la situation dans le domaine voisin de la géométrie de contact, qui émerge naturellement comme étude des bords de variétés symplectiques :

Définition 1 (Variété de contact)**.** *Une structure de contact sur une variété Y^{2n+1} est la donnée d'un champ d'hyperplans $\xi \subset \mathrm{T}Y$ tel que si α est une 1-forme localement adaptée :* $\ker\alpha = \xi$ *sur un ouvert, la forme $\alpha \wedge (\mathrm{d}\alpha)^n$, de degré maximal, ne s'annule pas sur cet ouvert.*

Si la distribution ξ est co-orientée, il existe une 1-forme α, globalement adaptée, c'est-à-dire telle que $\xi = \ker \alpha$. Le noyau de la 2-forme $\mathrm{d}\alpha$ est alors une distribution de dimension 1 : elle est supplémentaire à ξ. Le champ de vecteurs R à valeurs dans celle-ci et normalisé par la condition $\alpha(R) = 1$ est appelé champ de Reeb. La dynamique de celui-ci fait l'objet d'une importante conjecture, dont une démonstration a été apportée en dimension 3, (*ie.* $n = 1$) par C.H. Taubes en 2007 [Tau06] :

Conjecture (Weinstein). *Pour toute variété compacte munie d'une forme de contact, le champ de Reeb admet une courbe intégrale fermée.*

Dans la suite nous présentons les définitions utiles et les notions fondamentales de la théorie de Floer, en particulier la construction de la cohomologie symplectique d'un certain type de variétés symplectiques ouvertes : les domaines de Liouville, puis nous proposons quelques pistes de recherche en topologie symplectique sur des thèmes proches.

1 Domaines de Liouville

1.1 Définition

Les domaines de Liouville fournissent une famille d'exemples assez vastes et aux propriétés riches pour l'étude de la topologie symplectique, mêlant les structures symplectique et de contact :

Définition 2. *Un domaine de Liouville est la donnée* $(M, \partial M, \theta)$ *d'une variété compacte* M^{2n} *de bord* ∂M^{2n-1} *lisse et d'une 1-forme* θ *telle que* $\omega = \mathrm{d}\theta$ *soit symplectique, et telle que l'unique champ de vecteurs* Z *vérifiant* $\iota_Z \omega = \theta$ *soit dirigé strictement vers l'extérieur.*

Un domaine de Liouville est une variété symplectique exacte et doit donc avoir un bord non vide. La 1-forme θ munit alors ∂M d'une structure de contact : c'est-à-dire que la forme restreinte $\alpha = \theta_{|\mathrm{T}\partial M}$ vérifie $\big(\alpha \wedge (\mathrm{d}\alpha)^{n-1}\big)_{|\mathrm{T}\partial M} \neq 0$. Le flot du champ de vecteurs Z préserve la forme symplectique : la formule de Cartan fournit en effet $\mathscr{L}_Z \omega = \mathrm{d}(\iota_Z \omega) + \iota_Z(\mathrm{d}\omega) = \mathrm{d}\alpha + 0 = \omega$.

La dernière hypothèse sur le champ Z permet de définir la complétion des domaines de Liouville.

1.2 Exemples

Variétés de Stein Une variété de Stein X^n est une variété complexe, c'est-à-dire munie d'une structure complexe intégrable J telle qu'il existe une fonction $h : X \to \mathbb{R}$ minorée, propre et plurisubharmonique : c'est-à-dire que la 1-forme $\theta := -\mathrm{d}^c h = -\mathrm{d}h \circ J$ est telle que $\omega := \mathrm{d}\theta$ soit une forme de Kähler pour J : le champ de tenseurs $\omega(u, Jv)$ doit définir une métrique riemannienne.

Le théorème de plongement d'Oka énonce que toute telle variété se réalise comme sous-variété complexe d'un certain espace $\mathbb{C}^N$.

Le fibré cotangent en disques Pour toute variété différentiel N^n, le fibré cotangent T^*N^{2n} est muni d'une 1-forme particulière λ, dite tautologique, encore appelée forme de Liouville. Vue dans une carte (U, q) de M, en notant $p = \mathrm{d}q$, elle est définie dans T^*U par $\lambda = p.\,\mathrm{d}q = \sum p_i.\,\mathrm{d}q^i$. Sa différentielle fournit alors une 2-forme exacte $\omega = -\,\mathrm{d}\lambda = \sum \mathrm{d}q^i \wedge \mathrm{d}p_i$, qui est symplectique.

Si l'on munit M d'une métrique, on peut considérer le fibré en boules unitaires D^*M^{2n} muni de la structure symplectique exacte induite, et l'on obtient alors une variété de Liouville. Le champ de vecteurs associé est donc donné par $Z = p.\partial p = \sum p_i \frac{\partial}{\partial p_i}$.

1.3 Complétion des domaines de Liouville.

Soit M un domaine de Liouville, et notons (Y, α) son bord muni de sa forme de contact. Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$, la variété $I \times Y$ munie de la 2-forme différentielle $\mathrm{d}(e^t\alpha)$ est une variété symplectique exacte.

Par ailleurs, le flot du champ de vecteurs Z définit un isomorphisme symplectique entre $]-\epsilon; 0] \times Y$ et un voisinage de ∂M, où $\{0\} \times Y$ s'identifie à celui-ci. On peut alors recoller une copie de $]-\epsilon; +\infty[\times Y$ le long de cet voisinage, où les structures coïncident grâce aux propriétés symplectiques de Z, ce qui revient à accrocher un long col symplectique, paramétré tangentiellement par une variété de contact et radialement d'une manière affine par $t \in \mathbb{R}_+$. La variété qui résulte de cette opération, appelée complétée de M, est notée $\hat{M}$. On imposera ensuite des conditions asymptotiques de compatibilité avec cette complétion.

2 Courbes pseudo-holomorphes.

2.1 Structures pseudo-complexes.

On appelle structure pseudo-complexe sur une variété différentielle M de dimension paire la donnée d'une structure de fibré vectoriel complexe sur son fibré tangent $\mathrm{T}M$. Le choix de cette structure est équivalent à la donnée sur chaque fibre de la multiplication par le complexe i, c'est-à-dire d'une section J du fibré End $\mathrm{T}M$ vérifiant $J^2 = -\,\mathrm{Id}_{\mathrm{T}M}$.

Si la variété M est symplectique, on dit que la structure pseudo-complexe J est compatible avec la structure symplectique de M si, de plus, le champ de tenseurs $\omega(., J.)$ est une métrique Riemannienne sur la variété M. Cette condition équivaut à ce qu'en tout point $x \in M$, la forme bilinéaire $g : (\xi, \eta) \mapsto \omega(\xi, J\eta)$ soit bilinéaire symétrique positive. Le champ de tenseurs $h := g + i\omega$ est alors une structure hermitienne sur le fibré complexe $\mathrm{T}M$.

Si de plus il existe un atlas de M où les cartes sont biholomorphes, c'est-à-dire que leur différentielle est $\mathbb{C}$-linéaire pour la structure J, on dit que la structure pseudo-complexe J est intégrable, et on parle de structure de variété Kählerienne sur la variété M.

2.2 Condition de contact asymptotique

Lorsque l'on travaille sur $\hat{M}$, il est bon d'imposer que la structure pseudo-complexe J préserve la structure de contact au bord ξ et soit telle que $JZ = R$, où Z est le champ de vecteurs symplectique radial et Z le champ de Reeb du bord.

2.3 Courbes pseudo-holomorphes, et l'énergie

Soit Σ une surface de Riemann, et s une coordonnée locale complexe. Notons alors $\partial_t = i\partial_s$.

Sur une variété pseudo-complexe (M, J), on considère, pour les fonctions $u : \Sigma \to M$ l'opérateur $\bar{\partial}$ de Cauchy-Riemann : $\bar{\partial} u = \mathrm{d}u + J\,\mathrm{d}u \circ i$. Les applications qui l'annulent sont appelées courbes pseudo-holomorphes.

La valeur de la forme symplectique sur une surface pseudo-holomorphe compacte s'interprète géométriquement comme la superficie Riemannienne de la surface. Comme $J\partial_s v = \partial_t v$, les deux champs de vecteurs sont orthogonaux, et l'intégrale $\langle [\omega], [v_*(\Sigma)] \rangle = \int_{\mathbb{S}^2} v^*\omega$ est donnée par

$$\langle [\omega], \left[v_*(\mathbb{S}^2)\right] \rangle = \int_{\mathbb{C}} \omega(\partial_s v, \partial_t v)\, \mathrm{d}s \wedge \mathrm{d}t = \int_{\mathbb{C}} |\partial_s v||\partial_t v|\, \mathrm{d}s \wedge \mathrm{d}t.$$

On appelle cette grandeur l'énergie de la courbe holomorphe notée

$$E(v) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{S}^2} \left(|\partial_s v|^2 + |\partial_t v|^2 \right).$$

2.4 Equation de Floer

L'équation de Floer est une perturbation non-linéaire de l'équation de Cauchy-Riemann pour un cylindre $\Sigma = \mathbb{R} \times \mathbb{S}^1$. On choisit une fonction lisse $H : M \times \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$, dont on note X_t le gradient symplectique défini par $X_t \lrcorner \omega = \mathrm{d}H_t$, $\forall t \in \mathbb{S}^1$ et une famille 1-périodique de structures pseudo-complexes $J = (J_t)_{t \in \mathbb{S}^1}$. L'équation de Floer porte sur les fonctions $u \in W^{1,2}(\mathbb{R} \times \mathbb{S}^1)$: elle s'écrit $\bar{\partial}_{H,J} u := \partial_s + J_t \partial_t (u - X_t(u(s,t))) = 0$.

On peut aussi l'interpréter comme l'équation formelle d'une ligne de gradient négative d'une fonctionnelle a_H définie sur le revêtement universel de l'espace des lacets libres $\mathscr{C}^1(\mathbb{S}^1, M)_0$, donnée par

$$a_H(d) = \iint_{\mathbb{D}^2} d^*\omega - \oint_{\mathbb{S}^1} H_t(d(e^{it}))\, \mathrm{d}t,$$

la métrique étant définie en fonction de la famille J. On appelle énergie la grandeur

$$E(u) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{S}^1} \left(|\partial_s u|^2 + |\partial_t u - X_{H_t}(u)|^2 \right) \mathrm{d}t\, \mathrm{d}s = \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{S}^1} |\partial_s u|^2.$$

Celle-ci permet de contrôler les trajectoires, en particulier de s'assurer l'équicontinuité de familles de solutions.

2.5 Principe du maximum.

Si H est un hamiltonien périodique défini sur la symplectisation $Y \times \mathbb{R}$ d'une variété de contact Y, c'est-à-dire $H : Y \times \mathbb{R} \times \mathbb{S}^1 \to R$

Si $h : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$ est une fonction lisse, on peut toujours considérer l'hamiltonien périodique défini sur la symplectisation $M = Y \times \mathbb{R}$ d'une variété de contact Y par $H_t(y, r) = h(e^r, t)$. Son gradient symplectique est alors $h'(e^r, t) r \partial_r = h' Z$.

On peut montrer, grâce au lemme suivant que la perturbation de Floer sur l'équation de Cauchy-Riemann préserve le principe du maximum :

Lemme 1 (Principe du maximum quasi-harmonique.). *Si $f : U \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$ est telle qu'il existe des fonctions continues $\lambda_i, i = 1 \dots n$ telles que $\Delta f + \sum \lambda_i \partial_i f \geq 0$, alors la fonction f n'atteint pas de maximum sur U.*

Si $u : \mathbb{R} \times \mathbb{S}^1 \to M$ est une solution de l'équation de Floer associée, alors la fonction $f : \mathbb{R} \times \mathbb{S}^1 \to R_+$ définie par $f(s, t) = e^{r \circ u}$ vérifie l'identité $\Delta f = |\partial_s u|^2 - f h''(r \circ u, t) \partial_s f$, [Sei]

Cette remarque permet de fournir une borne uniforme sur l'ensemble des trajectoires de Floer entre deux orbites périodiques, pour la classe des hamiltoniens qui s'écrivent sous cette forme $H = h(e^r, t)$.

2.6 Rigidité des courbes holomorphes.

De la même manière que les fonctions holomorphes sont harmoniques, on montre que le Laplacien des courbes pseudo-holomorphes et des solutions de l'équation de Floer vérifient des inégalités différentielles qui permettent de montrer des contrôles forts sur le comportement qualitatif de ces applications. On peut ainsi montrer des résultats du type principe du maximum, ou encore un comportement asymptotique.

Ainsi, pour une courbe $u : \mathbb{R} \times \mathbb{S}^1 \to M$ solution de l'équation de Floer et d'énergie finie, il existe toujours deux lacets $x_\pm \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{S}^1, M)$ solutions de $\dot{x}_\pm(t) = X_t(x_\pm(t))$, tels que l'on ait le comportement asymptotique $\lim_{s \to \pm\infty} u(s, t) = x_\pm(t)$. On parle alors de trajectoire de Floer qui relie les deux orbites, et réciproquement un telle trajectoire est toujours d'énergie finie, et on a $a_H(x_-) - a_H(x_+) = E(u)$.

Le calcul différentiel banachique permet de montrer, en linéarisant l'équation de Floer, que dans une situation générique sur les familles (H_t) et (J_t), l'espace des trajectoires de Floer joignant deux orbites $x_\pm$ est une variété différentielle, que l'on note $\mathcal{M}(x_\pm, H, J)$, et qui est de dimension finie égale à l'indice de Fredholm de l'opérateur de Floer linéarisé.

3 Homologie symplectique.

Dans la suite on utilise pour simplifier l'hypothèse $\pi_2(M) = 0$, ou un des ses avatars, tels que $\langle [\omega], \pi_2(M) \rangle = 0$, ce qui implique que les sphères pseudo-holomorphes dans M sont constantes, et que l'action est bien définie.

On peut alors associer à chaque orbite 1-périodique contractile $x \in \mathcal{P}_H$ un indice entier noté $\mu(x)$ appelé indice de Maslov défini en fonction de la classe d'homotopie dans le groupe symplectique d'un lacet induit par la différentielle de l'orbite dans une trivialisation symplectique.

On peut alors montrer par un argument géométrico-différentiel que la dimension virtuelle de la variété $\mathcal{M}(x_\pm, H, J)$ est alors égale à la différence $\mu(x_+) - \mu(x_-)$. On s'intéresse alors à la variété $\overline{\mathcal{M}}(x_\pm, H, J) = \mathcal{M}(x_\pm, H, J)/\mathbb{R}$ quotient sous l'action de $\mathbb{R}$ par translation suivant l'axe du cylindre $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^1$.

3.1 Topologie de l'espace des modules.

Soit un couple $(x, z) \in \mathcal{P}_H^2$, tel que $\mu(z) - \mu(x) = 2$. On montre grâce au théorème d'Ascoli que l'on peut compactifier la variété de dimension 1 $\overline{\mathcal{M}}(x, z, H, J)$, en remarquant que d'une suite d'éléments $u^\nu \in \mathcal{M}(x, z, H, J)$, une suite $u^{\varphi(\nu)}$ peut être extraite, qui converge vers une trajectoire de Floer u élément de $\mathcal{M}(x, y, H, J)$ (ou bien respectivement $\mathcal{M}(y, z, H, J)$) pour un certain élément $y \in \mathcal{P}_H$ tel que $\mu(z) - \mu(y) = \mu(y) - \mu(x) = 1$. En composant à droite par une suite de translations suivant la première coordonnée, on trouve une trajectoire dans l'espace $\mathcal{M}(y, z, H, J)$ (respectivement $\mathcal{M}(x, y, H, J)$).

La variété $\overline{\mathcal{M}}(x, z, H, J)$ peut donc être compactifiée par un bord tel que

$$\partial\overline{\mathcal{M}}(x, z, H, J) \subseteq \bigcup_{\substack{y \in \mathcal{P}_H \\ \mu(y) - \mu(x) = 1}} \overline{\mathcal{M}}(x, y, H, J) \times \overline{\mathcal{M}}(y, z, H, J).$$

Il est ici nécessaire d'utiliser une hypothèse topologique sur la variété, pour pouvoir s'assurer ce comportement au bord. En effet, nous nous sommes interdit *a priori* le phénomène de formation de “bulles” holomorphes $\mathbb{S}^2 \to M$, qui peuvent intervenir dans la compactification de l'espace des modules, ce qui perturbe le caractère différentiel du module gradué ci-après.

3.2 Homologie de Floer, cohomologie de Floer

On va considérer les $\mathbb{Z}_2$-espaces vectoriels gradués $\mathrm{CF}_*(H, J)$ et $\mathrm{CF}^*(H, J)$ dont la composante de degré k est

$$\mathrm{CF}_k(H, J) = \mathrm{CF}^k(H, J) = \bigoplus_{\substack{x \in \mathcal{P}_H, \\ \mu(x) = k}} \mathbb{Z}_2 . x,$$

muni des différentielles $\mathrm{d}_* : \mathrm{CF}_* \to \mathrm{CF}_{*-1}$ et $\mathrm{d}^* : \mathrm{CF}^* \to \mathrm{CF}^{*+1}$. Celles-ci sont définies en tenant compte de la topologie de l'espace des modules $\overline{\mathcal{M}}(H, J) = \bigcup_{\mathcal{P}_H} \overline{\mathcal{M}}(x_\pm, H, J)$. On définit en effet les applications d en étendant par linéarité la formule

$$\mathrm{d}_{\mu(x)}(x) = \sum_{\substack{y \in \mathcal{P}_H, \\ \mu(y) = \mu(x) - 1}} \sharp\overline{\mathcal{M}}(y, x, H, J) . y,$$

et

$$\mathrm{d}^{\mu(x)}(x) = \sum_{\substack{y\in\mathcal{P}_H,\\ \mu(y)=\mu(x)+1}} \sharp\overline{\mathcal{M}}(x,y,H,J).y.$$

Chaque composante connexe d'une variété compacte de dimension 1 est homéomorphe à un cercle ou a un segment, et les extrémités "viennent par deux", donc si $z \in \mathcal{P}_H$ vérifie $\mu(z) = \mu(x) + 2$, l'entier

$$\sum_{\substack{y\in\mathcal{P}_H,\\ \mu(y)=\mu(x)+1}} \sharp\overline{\mathcal{M}}(x,y,H,J)\sharp\overline{\mathcal{M}}(x,z,H,J)$$

est toujours pair, ce qui permet de déduire $\mathrm{d}\circ\mathrm{d} = 0$. La (co)homologie de Floer $\mathrm{HF}^*(H,J)$ est simplement la (co)homologie de ce complexe différentiel.

On peut aussi définir une cohomologie de Floer sur n'importe quel anneau commutatif en définissant un complexe différentiel tenant compte d'un système d'orientations, ce qui introduit des signes dans la définition de la différentielle.

3.3 Dépendance des choix

Afin de définir un véritable invariant de la structure symplectique, il faut examiner comment ce complexe cohomologique dépend des choix effectués : les familles (H_t) et (J_t). Pour deux choix $(H^0,J^0),(H^1,J^1)$, une homotopie entre ces deux objets (H^s,J^s) existe toujours. On considère un espace de modules mixte associé à l'équation

$$\partial_s u + J_t^s(\partial_s u - X_t^s(u)) = 0.$$

Sous certaines hypothèses de croissance à l'infini des hamiltoniens H^i, on peut définir un morphisme sur les complexes de Floer en comptant le nombre de solutions de cette équation, avec les conditions asymptotiques appropriées. On obtient alors une flèche $\mathrm{CF}_*(H^0,J^0)\to\mathrm{CF}_*(H^1,J^1)$ et son opposée $\mathrm{CF}^*(H^1,J^1)\to\mathrm{CF}^*(H^0,J^0)$.

Si la variété M est compacte sans bord, ces flèches sont toujours bien définies en homologie et en cohomologie, c'est-à-dire qu'elles commutent à la différentielle. Dans ce cas, on peut montrer qu'elle est indépendante, au niveau (co)homologique du choix de l'homotopie et qu'elle se compose comme un foncteur. Ceci prouve que cette (co)homologie est indépendante des choix et en choisissant l'hamiltonien d'une manière convenable, qu'elle est isomorphe à la (co)homologie de variété différentielle de M.

Pour un domaine de Liouville M, si l'on a choisi les hamiltoniens H^i affines à l'infini de pentes τ^i, il suffit d'avoir $\tau^0 \le \tau^1$ pour disposer de ce morphisme. En choisissant correctement une famille infinie de tels hamiltoniens H^i de pentes $\tau^i \to +\infty$, la famille des modules $\mathrm{HF}_*(H^i,J^i)$ (respectivement $\mathrm{HF}^*(H^i,J^i)$ admet une limite inductive (respectivement projective) : l'homologie symplectique de M (respectivement cohomologie), indépendante des choix et notée $\mathrm{SH}_*(M)$ (respectivement $\mathrm{SH}^*(M)$).

3.4 Propriétés

Quand W est un sous-domaine de Liouville de codimension 0 de M, par $j : W \hookrightarrow M$, Claude Viterbo [Vit99] a construit une flèche $(F_j)^!$ en cohomologie qui se transforme fonctoriellement et qui rend le diagramme suivant commutatif, où $j^!$ désigne l'application usuelle de *push forward* en cohomologie :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{SH}^*(W) & \xrightarrow{(F_j)^!} & \mathrm{SH}^*(M) \\ \downarrow{\scriptstyle c^*} & & \downarrow{\scriptstyle c^*} \\ \mathrm{H}^*(W, \partial W) & \xrightarrow{j^!} & \mathrm{H}^*(M, \partial M) \end{array}$$

Le morphisme $(F_j)^!$ est défini en utilisant des modules partiels de cohomologie obtenus en sélectionnant les générateurs suivant leur action, et en exploitant des hamiltoniens affines près du bord W et de M.

4 Cohomologie symplectique lagrangienne

4.1 Sous-variétés lagrangiennes

Définition 3 (Legendrienne)**.** *Une* sous-variété legendrienne *d'une variété de contact* (Y, ξ) *est une sous-variété* $\mathscr{L}^{n-1} \subset Y^{2n-1}$ *telle que* $\mathrm{T}\mathscr{L} \subset \xi_{|L}$.

Les sous-variétés lagrangiennes à bord legendrien constituent un concept pertinent dans le cadre de l'étude des domaines de Liouville : hors d'un compact, elles sont de la forme $[0; +\infty[\times \mathscr{L}$, où $\mathscr{L} \subset \partial M$ est une sous-variété legendrienne. On impose aussi souvent l'exactitude de L : c'est $\theta_{|L} = 0$.

Ainsi, pour le fibré cotangent T^*N, complété du fibré en disques cotangents, si Q est une sous-variété de N, le fibré conormal $\nu^*Q = \{(p, q) \in \mathrm{T}^*N, q = \pi(q) \in Q, \langle p, \mathrm{T}_q Q\rangle = 0\}$ est un exemple de sous-variété lagrangienne exacte à bord legendrien.

4.2 Déplaçabilité

On dit qu'une partie, en particulier une sous-variété lagrangienne de M est déplaçable s'il existe un symplectomorphisme hamiltonien qui l'envoie sur une partie dont elle est disjointe. Cette notion est donc pertinente pour mieux comprendre l'action du groupe hamiltonien sur les sous-variétés lagrangiennes.

Une généralisation typique de la conjecture d'Arnold est l'étude du caractère déplaçable de certaines sous-variétés lagrangienne. Ainsi, si L est une telle sous-variété, et ψ un symplectomorphisme hamiltonien tel que L et $\psi(L)$ s'intersectent transversalement, on peut pour ce faire définir une théorie (co)homologique dont les générateurs sont les points d'intersection de $L \cap \psi(L)$, en construisant une différentielle qui compte les rubans holomorphes $v : \mathbb{R} \times [0; 1] \to M$ avec des conditions aux bords du type $v(., 0) \in L$, $v(., 1) \in \psi(L)$, dans l'espoir de minorer le cardinal de l'intersection $L \cap \psi(L)$ par le rang de l'homologie obtenue.

Ainsi, on sait que toute lagrangienne compacte d'une variété de Stein sous-critique est déplaçable, alors que la conjecture d'Arnold implique que pour M, ω une variété symplectique compacte, la diagonale de $M \times M, \omega \oplus -\omega$ n'est pas déplaçable.

4.3 Homologies relatives

Une variante relative de l'homologie de Floer permet de définir des groupes de cohomologie associés à un couple de sous-variétés lagrangiennes. Pour chaque variété symplectique, on peut ainsi considérer une catégorie dont les objets sont un ensemble de sous-variétés lagrangiennes, et les morphismes ces groupes de cohomologie : la catégorie de Fukaya.

Certaines versions de celle-ci font intervenir une version plus complexe et plus riche de cette catégorie, au moyen d'une structure de catégorie A_∞, obtenue en considérant des produits.

Une théorie encore largement conjecturelle s'est développée, qui implique ce concept : la théorie de la symétrie miroir homologique. Celle-ci semble très prometteuse par ses aspects physiques en théorie des cordes, et les liens profonds qu'elle établit entre le dictionnaire de la géométrie symplectique et celui de la géométrie complexe.

4.4 Remplissages symplectiques

Le développement de variantes relatives des théories homologiques symplectiques permet de montrer des généralisations de théorèmes de remplissage symplectique : une variété de contact étant donnée, on cherche à obtenir des obstructions topologiques à ce qu'elle soit le bord d'une certaine variété symplectique. Ainsi on a le théorème suivant [McD91],

Théorème 1 (Eliashberg-Floer-McDuff)**.** *Si (W^{2n}, ω) est un domaine de Liouville de bord $\mathbb{S}^{2n-1}$ munie de sa structure de contact standard, alors l'homologie de W est triviale : $H_*(W) = H_*(\mathbb{D}^{2n})$.*

Celui-ci a été généralisé par Fukaya, Seidel et Smith en étudiant la catégorie de Fukaya pour obtenir le théorème suivant :

Théorème 2 (Fukaya-Seidel-Smith)**.** *Si L^n est une lagrangienne exacte de $\mathbb{D}^{2n}$ dont le bord dans $\mathbb{S}^{2n-1}$ est la sphère legendrienne standard $\mathbb{S}^{n-1} = \mathbb{S}^{2n-1} \cap \mathbb{R}^n \times \{0\}$, alors l'homologie de L est triviale.*

Oancea et Viterbo ont démontré un raffinement du premier théorème, sous la forme [OV09] :

Théorème 3 (Oancea-Viterbo)**.** *Si (W^{2n}, ω) est un domaine de Liouville symplectiquement asphérique, dont le bord M se plonge dans une variété de Stein sous-critique, alors l'inclusion $i : M \to W$ induit une surjection en homologie $i_* : H_*(M) \to H_*(W)$.*

Une question typique serait de chercher un analogue relatif de ce théorème qui le généralise.

Références

[Arn78] V.I. Arnold. *Mathematical methods of classical mechanics. (Graduate texts in mathematics, 60)* . Springer, 1978.

[Flo88] A. Floer. Morse theory for Lagrangian intersections. *J. Differential Geom*, 28(3) :513–547, 1988.

[McD91] D. McDuff. Symplectic manifolds with contact type boundaries. *Inventiones Mathematicae*, 103(1) :651–671, 1991.

[OV09] A. Oancea and C. Viterbo. On the topology of fillings of contact manifolds and applications. *Arxiv preprint arXiv :0905.1278*, 2009.

[Sei] P. Seidel. A biased view of symplectic cohomology. *Arxiv preprint math.SG/0704.2055.*

[Tau06] C.H. Taubes. The Seiberg-Witten equations and the Weinstein conjecture. *Arxiv preprint math.SG/0611007*, 2006.

[Vit99] C. Viterbo. Functors and computations in Floer homology with applications, I. *Geometric And Functional Analysis*, 9(5) :985–1033, 1999.