Introduction au domaine de recherche : comptage de courbes, faisceaux et branes sur les variétés projectives complexes de dimension trois

Pierrick Bousseau

Juillet 2013

Table des matières

Introduction

Le domaine de recherche présenté dans ce texte est une branche de la géométrie énumérative, elle-même une branche de la géométrie algébrique.

Par géométrie énumérative, on entend le comptage d'objets géométriques de nature algébrique. Ce sujet est assez ancien et a pris une importance considérable au 19^e siècle, accompagnant et motivant le développement de la géométrie projective et de la théorie de l'intersection. Donnons quelques exemples d'énoncés classiques pour fixer les idées. On note $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ l'espace projectif de dimension n sur le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes : deux courbes algébriques dans $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ de degrés m et n se coupent génériquement en mn points, une hypersurface cubique dans $\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$ contient 27 droites, une hypersurface quintique générique dans $\mathbb{P}^4_{\mathbb{C}}$ contient 2875 droites... Beaucoup de ces énoncés contiennent l'expression "générique" ou de manière plus ou moins équivalente "compté avec multiplicité". Rendre précises ces expressions et rigoureux les raisonnements heuristiques des géomètres du 19^e et du début du 20^e siècle est l'objet du 15^e problème de Hilbert qui a été essentiellement résolu grâce à la refondation de la géométrie algébrique au milieu du 20^e siècle. On verra plus loin que ces problématiques de généricité et de multiplicité réapparaissent à un niveau "supérieur" dans les développements récents.

Le sujet a été révolutionné à partir de 1991 par des idées provenant de la physique théorique et plus précisément de la théorie des cordes. L'année 1991 est celle de la publication de l'article "A pair of Calabi-Yau manifolds as an exactly soluble superconformal theory" [4] dans lequel les physiciens Candelas, de la Ossa, Green et Parkes prédisent, à l'aide d'une relation conjecturale appelée symétrie miroir, le nombre de courbes rationnelles de degré d sur une hypersurface quintique générique dans $\mathbb{P}^4_{\mathbb{C}}$, résultat alors inaccessible aux méthodes mathématiques classiques. Plus généralement, la théorie des cordes est fortement liée au problème de comptage des courbes dans les variétés projectives complexes et a en partie donné naissance à la théorie mathématique de comptage associée : la théorie des invariants de Gromov-Witten. On s'intéressera également à un autre type d'invariants, définis seulement sur les variétés projectives complexes de dimension 3 : les invariants de Donaldson-Thomas et ses variantes. Il s'agit de comptage de faisceaux et cette théorie provient historiquement d'interactions antérieures avec la physique théorique dans le cadre des théories de jauge. Ces invariants seront présentés en deuxième partie après une première partie préliminaire.

Les invariants de Gromov-Witten et de Donaldson-Thomas comptent des objets différents et prennent des valeurs en général différentes. Il est néanmoins conjecturé, et démontré dans certains cas, que ces invariants sont reliés d'une manière non-triviale. Il est également conjecturé que l'information contenue dans les invariants de Gromov-Witten et de Donaldson-Thomas a une structure très particulière, devant donner naissance à une nouvelle théorie d'invariants, en un sens plus fondamentaux, appelés invariants BPS ou invariants de Gopakumar-Vafa, et comptant des objets appelés "branes" en physique. Ces développements, qui constituent réellement le domaine de recherche auquel ce texte sert d'introduction, sont présentés en troisième partie.

Dans tout ce qui suit, on se place sur le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes. La plupart des résultats de géométrie algébrique énoncés sont valables sur un corps algébriquement clos de caractéristique 0. On reste néanmoins sur $\mathbb{C}$ car c'est dans ce contexte qu'apparaissent les liens avec la physique théorique et d'autres domaines des mathématiques comme la géométrie symplectique.

1 Objets étudiés et problématiques générales

1.1 Un peu de géométrie algébrique

1.1.1 Le langage des schémas

On se limite à l'un des aspects les plus classiques de la géométrie algébrique, celui où on travaille sur le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes. Même dans ce cadre, le point de vue de la théorie des schémas est extrêmement utile. De manière imprécise, la géométrie algébrique sur $\mathbb{C}$ étudie les objets géométriques définis localement par des systèmes d'équations polynomiales à plusieurs variables et à coefficients dans $\mathbb{C}$. D'un point de vue algébrique, l'aspect local de la question est équivalent à l'étude des $\mathbb{C}$-algèbres de type fini i.e. des quotients d'algèbres polynomiales $\mathbb{C}[x_1, ..., x_n]$ par un idéal I. On peut associer à toute $\mathbb{C}$-algèbre A de type fini un objet noté $Spec(A)$, appelé un schéma affine de type fini sur $\mathbb{C}$. C'est un espace topologique muni d'un faisceau de $\mathbb{C}$-algèbres dont l'espace des sections globales s'identifie à A. Pour $A = \mathbb{C}[x_1, ..., x_n]$, on obtient l'espace affine de dimension n sur $\mathbb{C}$, noté $\mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}$. La notion de morphisme de $\mathbb{C}$-algèbres permet de définir une notion de morphisme entre schémas affines. Soient A une $\mathbb{C}$-algèbre de type fini et I un idéal de A. La projection $A \longrightarrow A/I$ induit un morphisme $Spec(A/I) \longrightarrow Spec(A)$ qui fait de $Spec(A/I)$ un sous-schéma fermé de $Spec(A)$. Il faut penser à $Spec(A/I)$ comme le sous-objet de $Spec(A)$ défini par les équations $f = 0$ pour tout f dans I.

On peut définir de façon plus générale la notion de schéma de type fini sur $\mathbb{C}$ qui est un espace topologique X muni d'un faisceau de $\mathbb{C}$-algèbres locales $\mathcal{O}_X$ qui est localement isomorphe (comme espace topologique localement annelé) à un schéma affine de type fini sur $\mathbb{C}$ (on imposera également dans toute la suite une hypothèse dite de séparation). On appelle $\mathcal{O}_X$ le faisceau des fonctions régulières sur X, c'est le faisceau des fonctions algébriques sur X. On a une notion naturelle de morphisme de schémas et un sous-schéma fermé est défini par un faisceau d'idéaux. Un exemple important de schéma de type fini sur $\mathbb{C}$ est l'espace projectif complexe $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ obtenu par recollement de $n + 1$ espaces affines $\mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}$. Soit X un schéma de type fini sur $\mathbb{C}$. On dit que X est projectif s'il est isomorphe à un sous-schéma fermé d'un espace projectif. On dit que X est connexe s'il l'est comme espace topologique. On appelle dimension de X la dimension de Krull de son espace topologique sous-jacent, par exemple, $\mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}$ et $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ sont de dimension n. On dit que X est irréductible si l'espace topologique sous-jacent ne peut pas s'écrire comme réunion de deux fermés propres (i.e. stricts et non-vides). Le schéma X est réunion finie de sous-schémas fermés irréductibles qu'on appelle les composantes irréductibles de X.

On dit que X est réduit si $\mathcal{O}_X$ ne contient pas d'éléments nilpotents. Un exemple typique de schéma non-réduit est $X = Spec(\mathbb{C}[x]/(x^n))$ pour $n \geq 2$. La possibilité de considérer des schémas non-réduits est un des avantages décisifs du langage des schémas sur des points de vue plus naïfs. Par exemple, le point de vue qui consisterait à privilégier les solutions plutôt que les équations conduirait à identifier les équations $x^n = 0$ et $x = 0$ car ayant le même ensemble de solutions dans $\mathbb{C}$. Le langage des schémas permet d'associer des objets géométriques différents à ces équations. Il faut penser à $Spec(\mathbb{C}[x]/(x^n))$ comme à un épaississement infinitésimal de $Spec(\mathbb{C})$. Un schéma X possède toujours un sous-schéma fermé réduit Y, celui dont le faisceau d'idéaux est formé des éléments nilpotent de $\mathcal{O}_X$, et on peut penser à X comme étant un épaississement infinitésimal de Y. L'existence des schémas non-réduits permet en un sens de parler d'infinitésimaux et donc de développer un calcul différentiel algébrique. Considérons toujours X un schéma de type fini sur $\mathbb{C}$ et considérons un point y de X. L'ensemble des morphismes de schémas de $Spec(\mathbb{C}[x]/(x^2))$ vers X envoyant l'espace topologique sous-jacent à $Spec(\mathbb{C}[x]/(x^2))$ sur y est naturellement un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie qu'on appelle espace tangent à X en y. La définition coïncide parfaitement avec l'intuition qu'on pourrait en avoir en géométrie différentielle : l'espace tangent à X en y est l'ensemble des germes infinitésimaux d'ordre un de courbes dans X passant par y.

Si chacune de ces courbes infinitésimales d'ordre un peut se relever en une courbe infinitésimale d'ordre arbitraire, on dit que X est lisse en y. Si X est lisse en tout point, on dit que X est lisse sur $\mathbb{C}$. Si X est lisse, X est nécessairement réduit et si X est de plus connexe, alors X est irréductible et dans ce cas, la dimension des espaces tangents est constante et coïncide avec la dimension de X.

Dans la suite de ce texte, on rencontrera essentiellement deux types de schémas. On va d'une part étudier des aspects de la géométrie de schémas "gentils" à savoir des schémas connexes lisses de type fini sur $\mathbb{C}$, ce qu'on appellera pour simplifier des variétés lisses sur $\mathbb{C}$. À toute variété lisse X sur $\mathbb{C}$, on peut associer une variété complexe X_{an} au sens de la géométrie différentielle complexe. La variété complexe associée à $\mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}$ est tout simplement $\mathbb{C}^n$ et celle associée à $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ est l'espace projectif $\mathbb{CP}^n$. On considérera essentiellement des variétés lisses qui sont projectives i.e. sous-schémas fermés d'espaces projectifs complexes. Les variétés complexes associées sont compactes puisque $\mathbb{CP}^n$ l'est. Sur la variété complexe X_{an}, on dispose des outils classiques de la topologie algébrique : homologie, cohomologie singulière... Par abus de langage, on identifiera souvent X et X_{an} et on notera par exemple $H_*(X,\mathbb{Z})$ pour $H_*(X_{an},\mathbb{Z})$. Plus généralement, on peut associer un espace analytique complexe à tout schéma de type fini sur $\mathbb{C}$.

On aura d'autre part besoin d'objets appelés espaces de modules, i.e. des espaces paramétrant des objets géométriques. Les espaces de modules sont en général des schémas "méchants" à savoir non-lisses, non-réduits, non-irréductibles... C'est un des grands succès de la théorie des schémas que de pouvoir considérer ce type d'objets. Il arrive néanmoins que le langage des schémas soit trop restreint et qu'on ait besoin du cadre plus général des champs algébriques. Donnons simplement une idée naïve de cette notion : un champ algébrique est localement le quotient d'un schéma par l'action d'un groupe algébrique. Ces actions proviennent en général des automorphismes des objets géométriques qu'on essaye de paramétrer. Lorsque tous ces groupes d'automorphismes sont finis, on parle de champ de Deligne-Mumford.

1.1.2 Faisceaux cohérents

Soit X un schéma de type fini sur $\mathbb{C}$. On a une notion naturelle de faisceau de $\mathcal{O}_X$-modules. Si $X = Spec(A)$ est affine, on peut associer à tout A-module M de type fini un faisceau de $\mathcal{O}_X$-modules. Sur un X général, un faisceau de $\mathcal{O}_X$-modules localement obtenu de cette manière est dit cohérent. Un faisceau cohérent localement défini par des modules libres de rang n est dit localement libre de rang n. La notion de faisceau cohérent localement libre sur un schéma X est l'analogue en géométrie algébrique de celle de faisceau des sections holomorphes d'un fibré vectoriel holomorphe de rang n sur une variété complexe en géométrie différentielle complexe. Un faisceau cohérent F général sur X possède un support qui est un sous-schéma fermé de X. L'analogue d'un faisceau cohérent dont la restriction à son support est localement libre est le faisceau des sections holomorphes d'un fibré vectoriel holomorphe supporté par une sous-variété complexe. Les faisceaux cohérents sur X forment une catégorie abélienne, notée $Coh(X)$: on peut parler de noyau, de conoyau, de suite exacte... pour les faisceaux cohérents.

Si X est une variété lisse sur $\mathbb{C}$, on peut définir son faisceau tangent T_X qui est localement libre et son faisceau canonique K_X, localement libre de rang un, qui est la puissance extérieure maximale du dual de X. Les X tels que $K_X = \mathcal{O}_X$ joueront un rôle particulier dans la suite : un tel X est appelé variété de Calabi-Yau. Pour tout faisceau inversible de rang un sur X, on peut définir sa première classe de Chern qui est un élément de $H^2(X,\mathbb{Z})$. On notera $-c_1(X)$ la première classe de Chern de K_X. Une variété de Calabi-Yau vérifie $c_1(X) = 0$. On a plus généralement un formalisme des classes de Chern pour les faisceaux cohérents sur une variété lisse.

On a à notre disposition de très efficaces outils cohomologiques pour étudier les faisceaux cohérents. On utilisera en particulier que la théorie des déformations de ces objets est contrôlée par des objets cohomologiques de la forme $H^i(X,F)$ ou $Ext^i(E,F)$.

1.1.3 Courbes

On appellera courbe un schéma connexe de dimension un sur $\mathbb{C}$. Le genre (arithmétique) g d'une courbe C peut être défini à partir de la cohomologie de $\mathcal{O}_X$: $g = 1 - \chi(\mathcal{O}_X)$ où χ désigne la caractéristique d'Euler-Poincaré, i.e. la somme alternée des dimensions des groupes de cohomologie.

Le cas le plus simple est celui où C est projective lisse sur $\mathbb{C}$. Dans ce cas, la variété complexe associée est une courbe complexe compacte i.e. une surface de Riemann de genre g (i.e. g est le "nombre de trous" de la surface réelle sous-jacente).

Un cadre un peu plus général est celui où on considère des courbes plus nécessairement lisses mais toujours réduites. Une telle courbe C possède un nombre fini de points singuliers. La singularité la plus simple est le noeud à tangentes distinctes, i.e. la singularité localement isomorphe à $xy = 0$ i.e. à l'intersection transverse de deux droites. On appelle courbe nodale une courbe réduite projective dont toutes les singularités sont des noeuds à tangentes distinctes. Une courbe nodale peut avoir plusieurs composantes irréductibles.

On aura enfin besoin de la notion de courbe de Cohen-Macaulay. Sans entrer dans les détails, mentionnons qu'une courbe de Cohen-Macaulay peut être non-réduite mais que le "degré de non-réduction doit être constant" le long d'une composante irréductible (techniquement : pas de point immergé). Cela interdit par exemple un point non-réduit au milieu d'une composante irréductible partout réduite en dehors de ce point.

1.2 Comptage et invariants

1.2.1 Comptage ?

Le thème général de ce qui suit est le comptage d'objets géométriques attachés à une variété X projective lisse sur $\mathbb{C}$. Il est important de mentionner qu'il ne s'agira pas d'un comptage naïf. Par comptage naïf, on entend compter réellement le nombre d'objets prescrits, cela a toujours un sens : la réponse peut être un nombre entier positif ou l'infini. Si on décide de compter en divisant la contribution de chaque objet par le cardinal d'un groupe d'automorphismes, on obtiendra éventuellement des nombres rationnels. Le comptage naïf d'objets est une question légitime qui est souvent trop difficile essentiellement parce que la réponse sera souvent très dépendante des paramètres du problème. Par exemple, un polynôme unitaire à coefficients complexes de degré n peut avoir 1, 2... ou n racines et ce nombre varie discontinûment lorsque les coefficients du polynôme varient continûment. Une question plus facile serait une question dont la réponse est constante lorsqu'on varie continûment les paramètres du problème. Une telle question serait non seulement plus facile mais aussi plus intéressante car donnant une réponse invariante sous déformation des paramètres, elle pourrait servir à définir des "invariants". Dans l'exemple élémentaire des racines d'un polynôme, on sait qu'une telle question existe, c'est celle du comptage des racines avec multiplicité : la réponse est alors toujours n en degré n. L'idée est donc la suivante : définir un comptage avec multiplicité.

La théorie de l'intersection définit un tel comptage pour les intersections de sous-variétés dans les variétés projectives lisses. Pour les problèmes qui nous intéressent, compter des objets géométriques vérifiant certaines conditions, on est souvent ramené à l'étude de sous-espaces de l'espace de modules des objets considérés. Malheureusement, ces espaces de modules sont souvent singuliers et il n'existe pas de théorie de l'intersection dans ce cadre. Dans la section suivante, on explique une manière de définir un comptage avec multiplicité qui fonctionne dans certains cas.

1.2.2 Comptage virtuel

Supposons qu'on souhaite compter des objets géométriques reliés à une variété projective lisse sur $\mathbb{C}$ et qu'on ait réussi à construire un espace de modules M pour ces objets. Supposons que M soit en un certain sens compact, ce qui est nécessaire pour espérer obtenir un comptage invariant sous déformation (il faut éviter que des objets disparaissent "à l'infini" sous une déformation). En chaque point m de M, on a un espace tangent $T_m M$, un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, qui décrit les déformations infinitésimales d'ordre un de l'objet m. Une telle déformation infinitésimale ne peut pas en général s'intégrer en une "vraie" déformation, c'est pour cela en général que M n'est pas lisse, il existe souvent des classes d'obstruction qui vivent dans un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de nature cohomologique $Ob_m M$. Il est important de mentionner que contrairement à $T_m M$, l'espace $Ob_m M$ n'a rien de canonique et dépend du point de vue qu'on a sur les objets étudiés : la possibilité ou non d'intégrer une déformation infinitésimale est bien sûr une question bien définie mais on a le choix sur la manière dont on définit les classes d'obstructions qui permettent d'y répondre.

Supposons qu'on ait choisi une définition des espaces $Ob_m M$ telle que la quantité

$$\dim_{\mathbb{C}} T_m M - \dim_{\mathbb{C}} Ob_m M$$

soit indépendante de M. On la note alors $dimvirtM$ et on l'appelle dimension virtuelle de M. Sous cette hypothèse, il est possible de définir un comptage avec multiplicité dit comptage virtuel. Plus précisément, il est possible [2] de construire un élément de l'homologie de M de dimension $dimvirtM$ appelé classe fondamentale virtuelle, noté $[M]_{virt}$ qui est en un certain sens invariant sous déformation de X. Pour "compter avec multiplicité" le nombre d'objets vérifiant certaines conditions, il suffit alors d'intégrer des classes de cohomologie contre cette classe fondamentale virtuelle.

L'hypothèse fondamentale de constance de la dimension virtuelle est assez restrictive. En général, $T_m M$ et $Ob_m M$ sont des espaces de cohomologie et la seule quantité contrôlable, par le théorème de Riemann-Roch, est la caractéristique d'Euler-Poincaré i.e. la somme alternée des dimensions des espaces de cohomologie. On aura donc une dimension virtuelle constante seulement si la cohomologie qui contrôle les déformations des objets qui nous intéressent est concentrée en les deux degrés correspondant à $T_m M$ et $Ob_m M$.

2 Plusieurs théories de comptage

On va appliquer à trois exemples la logique exposée à la fin de la section précédente : construction d'un espace de modules M, construction d'une classe fondamentale virtuelle sur M et calculs d'invariants.

2.1 Théorie de Gromov-Witten(GW)

2.1.1 Morphismes stables

On fixe X une variété projective lisse sur $\mathbb{C}$. La physique de la théorie des cordes conduit à étudier la propagation d'une corde, i.e. d'un objet de dimension réelle un, dans X. Lorsque la corde est orientée et est fermée, i.e. avec la topologie d'un cercle, elle décrit en se déplaçant au cours du temps une surface réelle compacte orientée dans X. Plus précisément, on considère une application de classe C^∞, $f : C \longrightarrow X$ où C est une surface de Riemann. Dans certaines situations, l'équation du mouvement de la corde prend la forme $\overline{\partial} f = 0$ i.e. f est holomorphe. On peut alors traduire la situation en termes purement algébriques : on s'intéresse aux morphismes $C \longrightarrow X$ où C est une courbe projective lisse sur $\mathbb{C}$ et on peut chercher à compter ces morphismes.

Soient $g, n \in \mathbb{N}$ et $\beta \in H_2(X, \mathbb{Z})$. On veut compter ("avec multiplicité", comme expliqué plus haut) les morphismes $f : C \longrightarrow X$ avec C une courbe projective lisse de genre g avec n points distincts marqués et $f_*[C] = \beta$ (on fixe la classe d'homologie de l'image de f). L'espace de modules de ces objets n'a pas les propriétés de compacités désirées : une famille de courbes lisses peut dégénérer vers une courbe singulière. Pour obtenir de la compacité, il faut ajouter des courbes singulières. Une bonne notion est celle de morphisme stable, on appelle ainsi un morphisme $f : C \longrightarrow X$ avec C une courbe nodale munie de n points marqués distincts et distincts des noeuds, tel que toute composante de C de genre 0 contractée sur un point de X par f contient au moins trois points "spéciaux", i.e. noeuds ou points marqués, et tel que toute composante de C de genre 1 contractée sur un point de X par f contient au moins un point spécial. Les conditions sur les composantes de genre 0 et 1 garantissent qu'un morphisme stable n'a qu'un nombre fini d'automorphismes. On peut alors montrer [9] [5] qu'il existe un espace de modules $\overline{M}_{g,n}(X, \beta)$ pour les morphismes stables $f : C \longrightarrow X$ avec C de genre g et n points marqués et $f_*[C] = \beta$ qui est un champ de Deligne-Mumford propre sur $\mathbb{C}$ ("propre" est la compacité attendue).

2.1.2 Classe virtuelle

Soit $f : C \longrightarrow X$ un morphisme stable, i.e. un point de $\overline{M}_{g,n}(X, \beta)$. Supposons pour simplifier $n = 0$, que C est lisse et que f est un plongement. On a alors un faisceau normal $N_{C|X}$ de C dans X qui est un faisceau cohérent localement libre sur C. L'espace tangent à f dans $\overline{M}_{g,n}(X, \beta)$ est $H^0(C, N_{X|C})$: se donner une déformation infinitésimale d'ordre un de C dans X est équivalent à se donner une section du faisceau normal $N_{C|X}$. On peut montrer que les obstructions à intégrer une telle déformation infinitésimale vivent dans $H^1(C, N_{X|C})$. Puisque C est de dimension un, on a $H^i(C, N_{X|C}) = 0$ pour $i > 1$ et le théorème de Riemann-Roch montre que

$$\dim H^0(C, N_{X|C}) - \dim H^1(C, N_{X|C}) = (\dim X - 3)(1 - g) + \int_\beta c_1(X)$$

ce qui ne dépend pas de f. On peut montrer que cela reste vrai sans les hypothèses simplificatrices : la dimension virtuelle de $\overline{M}_{g,n}(X, \beta)$ est toujours constante et égale à

$$\dim virt \overline{M}_{g,n}(X, \beta) = (\dim X - 3)(1 - g) + \int_\beta c_1(X) + n.$$

On en déduit l'existence d'une classe fondamentale virtuelle

$$[\overline{M}_{g,n}(X, \beta)]_{virt} \in H_{\dim virt \overline{M}_{g,n}(X,\beta)}(\overline{M}_{g,n}(X, \beta), \mathbb{Q}).$$

Elle vit en général dans l'homologie à coefficients rationnels et non pas entiers du fait que $\overline{M}_{g,n}(X, \beta)$ est un champ et non un schéma : les objets que l'on compte, les morphismes stables, ont des automorphismes et la classe fondamentale virtuelle permet un comptage virtuel tenant compte des automorphismes : la contribution d'un objet est divisée par le cardinal de son groupe d'automorphismes.

2.1.3 Invariants

À partir de la classe fondamentale virtuelle de $\overline{M}_{g,n}(X, \beta)$, il est possible de construire des invariants sous déformation de X par intégration de classes de cohomologie. On peut par exemple procéder comme suit. Pour tout $i = 1, ..., n$, on a un morphisme d'évaluation ev_i, de $\overline{M}_{g,n}(X,\beta)$ vers X, qui envoie un morphisme stable f vers l'image par f du i-ième point marqué. Si on se donne γ_1, ..., $\gamma_n \in H^*(X,\mathbb{Z})$, on peut considérer

$$\langle\gamma_1\cdots\gamma_n\rangle_{g,\beta}^{GW} = \int_{[\overline{M}_{g,n}(X,\beta)]_{virt}} ev_1^*(\gamma_1)...ev_n^*(\gamma_n) \in \mathbb{Q}.$$

On obtient des nombres rationnels puisque la classe fondamentale virtuelle est elle-même rationnelle en général. On appelle ces nombres les invariants de Gromov-Witten de X. Bien sûr, $\langle\gamma_1\cdots\gamma_n\rangle_{g,\beta}^{GW}$ ne peut être non-nul que si la somme des degrés des γ_i est égale à la dimension virtuelle de $\overline{M}_{g,n}(X,\beta)$. Il faut penser $\langle\gamma_1\cdots\gamma_n\rangle_{g,\beta}^{GW}$ comme un comptage virtuel des $f : C \longrightarrow X$ dont l'image intersecte les classes d'homologie duales de Poincaré des γ_i.

Un cas particulier est celui où X est de dimension 3. La dimension virtuelle de $\overline{M}_{g,n}(X,\beta)$ est alors indépendante du genre g et il fait alors sens de construire des séries génératrices en sommant sur g. On définit

$$\langle\gamma_1\cdots\gamma_n\rangle_{\beta}^{GW}(u) = \sum_{g\geq 0}\langle\gamma_1\cdots\gamma_n\rangle_{g,\beta}^{GW} u^{2g-2} \in \mathbb{Q}[[u]].$$

Si on suppose de plus X Calabi-Yau, la dimension virtuelle est nulle et la série intéressante est alors $\langle 1\rangle_\beta(u)$.

Il est souvent difficile de calculer les invariants de Gromov-Witten car un morphisme stable $f : C \longrightarrow X$ n'est pas un plongement en général : f peut contracter des composantes de C sur des points ou bien être un revêtement à plusieurs feuillets... Le cas extrême où ces phénomènes sont les plus importants est celui où $\beta = 0$ i.e. où f contracte toute la courbe C sur un point. Le calcul des invariants de Gromov-Witten se ramène dans ce cas à un problème d'étude de l'espace de modules des courbes. Pour X de dimension 3, la dimension virtuelle pour $\beta = 0$ est nulle et on trouve, pour $g \geq 2$:

$$\langle 1\rangle_{g,0}^{GW} = \frac{(-1)^g}{2}\frac{1}{(2g-2)!}\frac{|B_{2g}|}{2g}\frac{|B_{2g-2}|}{2g-2}\int_X (c_3(X) - c_1(X)c_2(X))$$

où les $c_i(X)$ sont des classes de cohomologie associées à X et où les B_j sont des nombres de Bernoulli.

2.2 Théorie de Donaldson-Thomas (DT)

2.2.1 Schéma de Hilbert

Les invariants de Gromov-Witten donnent un point de vue "courbe paramétrée" sur les courbes de X. Les invariants de Donaldson-Thomas vont donner un point de vue dual, celui "équations cartésiennes". L'idée de se donner une courbe dans X par des équations est exactement l'idée schématique. On va chercher à compter (avec multiplicités...) les sous-schémas fermés de X de dimension 1. On aimerait se restreindre aux courbes intègres mais c'est impossible si on espère une compacité de l'espace de modules : une famille de courbes intègres peut dégénérer vers une courbe avec un point non-réduit. On est vraiment obligé de considérer tous les sous-schémas fermés. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\beta \in H_2(X,\mathbb{Z})$, un bon espace de module est le schéma de Hilbert $Hilb^n(X,\beta)$ [7] : c'est un schéma projectif sur $\mathbb{C}$, espace de modules pour les sous-schémas fermés Z de X de dimension inférieure ou égale à un, vérifiant $\chi(\mathcal{O}_Z) = n$ et dont les composantes de dimension un définissent la classe d'homologie β. Un tel Z n'est pas forcément connexe, réduit ou même purement de dimension 1 : Z peut avoir des composantes connexes de dimension 0. Dans le cas un peu extrême $\beta = 0$, $Hilb^n(X, \beta)$ est l'espace de modules de n points dans X où plus précisément des sous-schémas fermés de X de dimension 0 et de longueur n (i.e. contenant n points comptés avec multiplicités).

2.2.2 Classe virtuelle

Si on voit $Hilb^n(X, \beta)$ comme un espace de modules de sous-schémas fermés et qu'on considère la théorie des déformations associée, la dimension virtuelle n'est en général pas constante même si on est prêt à restreindre la dimension de X. On peut cependant avoir un point de vue différent. Se donner un sous-schéma fermé Z de X est équivalent à se donner un faisceau d'idéaux $\mathcal{J}_Z$. Si $Z \in Hilb^n(X, \beta)$, on a $\chi(\mathcal{J}_Z) = -n$, la classe de Chern $c_2(\mathcal{J}_Z)$ est le dual de Poincaré de β et le déterminant de $\mathcal{J}_Z$ est $\mathcal{O}_X$ (on définit le faisceau déterminant d'un faisceau cohérent à l'aide d'une résolution localement libre). Le point clé est que tout faisceau cohérent (sans torsion) vérifiant ces conditions est de la forme $\mathcal{J}_Z$. On peut donc voir $Hilb^n(X, \beta)$ comme un espace de faisceaux cohérents de déterminant $\mathcal{O}_X$ et la théorie des déformations associée, en particulier l'espace où vit les classes d'obstruction, est différente de la théorie des déformations de $Hilb^n(X, \beta)$ vu comme espace de sous-schémas fermés. Dans le point de vue espace de faisceaux, l'espace tangent en $\mathcal{J}_Z$ est $Ext^1(\mathcal{J}_Z, \mathcal{J}_Z)_0$ et l'espace des obstructions est $Ext^2(\mathcal{J}_Z, \mathcal{J}_Z)_0$ (l'indice 0 tient compte de la condition "déterminant fixé"). En général, la dimension virtuelle

$$\dim Ext^1(\mathcal{J}_Z, \mathcal{J}_Z)_0 - \dim Ext^2(\mathcal{J}_Z, \mathcal{J}_Z)_0$$

n'est pas constante mais elle l'est dans le cas très particulier où X est de dimension 3. En effet, si X est de dimension 3, il résulte de la dualité de Serre que

$$Ext^3(\mathcal{J}_Z, \mathcal{J}_Z)_0 = 0$$

et la dimension virtuelle est alors $\chi(\mathcal{J}_Z, \mathcal{J}_Z)$, qui est fixé par le théorème de Hirzebruch-Riemann-Roch :

$$\dim virtHilb^n(X, \beta) = \int_\beta c_1(X).$$

À partir de maintenant, on suppose donc X de dimension 3 et on a alors l'existence d'une classe fondamentale virtuelle

$$[Hilb^n(X, \beta)]_{virt} \in H_{\dim virtHilb^n(X,\beta)}(Hilb^n(X, \beta), \mathbb{Z}).$$

Remarquons que la dimension virtuelle est la même que celle de $\overline{M}_{g,0}(X, \beta)$ mais que contrairement à la situation en Gromov-Witten, la classe fondamentale virtuelle vit ici dans l'homologie à coefficients entiers : $Hilb^n(X, \beta)$ est un vrai schéma et non un champ.

2.2.3 Invariants

À partir de la classe fondamentale de $Hilb^n(X, \beta)$, il est possible de construire des invariants sous déformation de X par intégration de classes de cohomologie. Puisque $Hilb^n(X, \beta)$ est un espace de modules de faisceaux, on a un faisceau universel $\mathcal{J}$ sur le produit $X \times Hilb^n(X, \beta)$. On note pr_X (resp. pr_H) la projection de $X \times Hilb^n(X, \beta)$ sur X (resp. $Hilb^n(X, \beta)$) et π_H le morphisme structural $Hilb^n(X, \beta) \longrightarrow Spec(\mathbb{C})$. Soient $l \in \mathbb{N}$ et pour tout $i = 1, ..., l$, $\gamma_i \in H^{d_i}(X, \mathbb{Z})$. Pour tout $i = 1, ..., n$, on considère

$$ch_2(\gamma_i) : H_*(Hilb^n(X, \beta)) \longrightarrow H_{*-2+d_i}(Hilb^n(X, \beta)),$$

défini par
$$ch_2(\gamma_i)(\alpha) = pr_{H*}((ch_2(\mathcal{J}).pr_X^*(\gamma_i)) \cap pr_H^*\alpha)$$
où $ch_2(\mathcal{J})$ est le second caractère de Chern de $\mathcal{J}$. On définit alors
$$\langle\gamma_1 \cdots \gamma_l\rangle_{n,\beta}^{DT} = (-1)^l \pi_{H*}((ch_2(\gamma_1) \circ ... \circ ch_2(\gamma_l))([Hilb^n(X,\beta)]_{virt})) \in \mathbb{Z}.$$
Ces nombres sont les invariants de Donaldson-Thomas de X [17]. On peut former une série génératrice en sommant sur n. On peut montrer que $Hilb^n(X,\beta)$ est vide pour n assez négatif, on obtient donc une série de Laurent en q :
$$\langle\gamma_1 \cdots \gamma_l\rangle_{\beta}^{DT}(q) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \langle\gamma_1 \cdots \gamma_l\rangle_{n,\beta}^{DT} q^n \in \mathbb{Z}((q)).$$
Dans le cas Calabi-Yau, la dimension virtuelle est nulle : la série intéressante est donc $\langle 1\rangle_{\beta}^{DT}(q)$ où on a simplement
$$\langle 1\rangle_{n,\beta}^{DT} = \int_{[Hilb^n(X,\beta)]_{virt}} 1.$$

2.3 Théorie de Pandharipande-Thomas (PT)

Il ne s'agit que d'une variante des invariants de Donaldson-Thomas, on sera donc particulièrement bref.

2.3.1 Paires stables

Avec les invariants de Donaldson-Thomas, il est particulièrement désagréable de travailler avec des sous-schémas fermés qui ont des composantes connexes de degré 0 : on a des points qui peuvent se balader dans tout X alors qu'on est plutôt intéressé par les composantes de dimension 1. La notion de paire stable est une manière de contraindre les points à rester sur la courbe.

Une paire stable sur X est une paire (F, s) où F est un faisceau cohérent sur X de support purement de dimension 1, s une section de F, F et s vérifiant une condition dite de stabilité garantissant l'absence d'automorphisme. On peut montrer que cette condition implique que les composantes connexes du support C de F sont des courbes Cohen-Macaulay. Pour tout $m \in \mathbb{Z}$, $\beta \in H_2(X, \mathbb{Z})$, on a [14] un espace de modules $P_m(X, \beta)$ pour les paires stables (F, s) vérifiant $\chi(F) = m$ et de support définissant la classe d'homologie β. C'est un schéma projectif sur $\mathbb{C}$.

2.3.2 Classe virtuelle

Comme dans le cas du schéma de Hilbert, le point de vue le plus immédiat sur la théorie des déformations des paires stables ne donne pas une dimension virtuelle constante. Le bon point de vue consiste à voir une paire stable (F, s) comme un complexe $(s : \mathcal{O}_X \longrightarrow F)$ définissant un objet de la catégorie dérivée $D(Coh(X))$ de la catégorie des faisceaux cohérents $Coh(X)$ sur X. On obtient alors une dimension virtuelle constante égale à $\int_\beta c_1(X)$ sous l'hypothèse X de dimension 3. On en déduit l'existence d'une classe fondamentale virtuelle $[P_m(X, \beta)]_{virt}$.

2.3.3 Invariants

En procédant comme pour les invariants de Donaldson-Thomas, on définit des invariants $\langle\gamma_1 ... \gamma_l\rangle_{n,\beta}^{PT} \in \mathbb{Z}$ dits de Pandharipande-Thomas [14] et des séries génératrices
$$\langle\gamma_1 \cdots \gamma_l\rangle_{\beta}^{PT}(q) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \langle\gamma_1 \cdots \gamma_l\rangle_{n,\beta}^{PT} q^m \in \mathbb{Z}((q)).$$

3 Relations entre les théories de comptage

3.1 Correspondance DT/PT

3.1.1 Conjecture

Les invariants de Donaldson-Thomas et de Pandharipande-Thomas semblent très proches : les invariants de Donaldson-Thomas comptent des configurations de courbes et de points alors que les invariants de Pandharipande-Thomas comptent des configurations où en un sens les points sont contraints à rester sur les courbes. Il est donc raisonnable de penser qu'on peut extraire les invariants de Pandharipande-Thomas des invariants de Donaldson-Thomas en supprimant les contributions provenant purement des points, i.e. de la classe d'homologie $\beta = 0$.

On est ainsi amené à faire la conjecture suivante :

Conjecture 3.1.1. *(Correspondance DT/PT, [14]) Soient X une variété projective lisse de dimension trois sur $\mathbb{C}$, $\beta \in H_2(X,\mathbb{Z})$, $l \in \mathbb{N}$, γ_1,..., $\gamma_l \in H^*(X,\mathbb{Z})$. Alors on a une égalité entre séries de Laurent en q :*

$$\frac{\langle \gamma_1 \cdots \gamma_l \rangle_\beta^{DT}(q)}{\langle 1 \rangle_0^{DT}(q)} = \langle \gamma_1 \cdots \gamma_l \rangle_\beta^{PT}(q).$$

La contribution purement ponctuelle ($\beta = 0$) des invariants de Donaldson-Thomas est connue explicitement :

Théorème 3.1.1. *Soit X une variété projective lisse de dimension trois sur $\mathbb{C}$. On a*

$$\langle 1 \rangle_0^{DT}(q) = M(-q)^{\int_X (c_3(X) - c_1(X)c_2(X))}$$

où $M(q) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1-q^n)^n}$ est la fonction de MacMahon.

3.1.2 Idées de la preuve dans le cas Calabi-Yau

Bridgeland [3] et Toda [18] ont démontré le résultat suivant :

Théorème 3.1.2. *La correspondance DT/PT est vraie dans le cas où X est de Calabi-Yau i.e. on a dans ce cas*

$$\frac{\langle 1 \rangle_\beta^{DT}(q)}{\langle 1 \rangle_0^{DT}(q)} = \langle 1 \rangle_\beta^{PT}(q)$$

pour tout $\beta \in H_2(X,\mathbb{Z})$.

On va essayer d'esquisser quelques idées de la preuve et notamment la particularité du cas Calabi-Yau. Lorsque X est de Calabi-Yau, la dualité de Serre met en dualité les espaces d'obstructions et les espaces tangents aux espaces de modules servant à définir les invariants de Donaldson-Thomas et de Pandharipande-Thomas. La dimension virtuelle est alors nulle et on obtient les invariants en intégrant 1 contre la classe fondamentale virtuelle. Behrend [1] a montré qu'on pouvait calculer ces invariants comme caractéristique d'Euler-Poincaré pondérée par une fonction constructible. Plus précisément, soit M l'espace de modules en question ($Hilb^n(X,\beta)$ pour DT, $P_m(X,\beta)$ pour PT). Alors il existe une fonction constructible $\nu_M : M \longrightarrow \mathbb{Z}$, dite fonction de Behrend, telle que

$$\int_{[M]_{virt}} 1 = \chi(M, \nu_M) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} \chi(\nu_M^{-1}(n))$$

où χ est la caractéristique d'Euler-Poincaré topologique (pour la topologie analytique). La fonction de Behrend a un grand avantage sur la classe fondamentale virtuelle car c'est un objet local sur l'espace de modules et donc beaucoup plus maniable. De plus, elle est définie pour tout champ algébrique.

Pour aller plus loin, on enrichit la fonction de Behrend à un niveau motivique. On considère $Coh(X)$ la catégorie abélienne des faisceaux cohérents sur X. On peut montrer qu'on peut voir tous les objets de $Coh(X)$ comme un champ algébrique (i.e. comme l'espace de modules des faisceaux cohérents) qu'on note encore $Coh(X)$. On appelle fonction motivique sur $Coh(X)$ un morphisme de champs algébriques $Y \longrightarrow Coh(X)$. On retrouve une vraie fonction sur $Coh(X)$ à partir d'une fonction motivique en prenant la caractéristique d'Euler-Poincaré topologique fibre à fibre. En introduisant une relation d'équivalence adéquate sur les fonctions motiviques, on définit une $\mathbb{C}$-algèbre H de fonctions motiviques sur $Coh(X)$. Il faut vraiment penser à H comme l'analogue de l'algèbre des fonctions continues sur un espace topologique ; lorsque cet espace topologique a une structure de groupe abélien, on a une opération supplémentaire sur les fonctions : la convolution. Mais $Coh(X)$ est très analogue à un groupe abélien : c'est une catégorie abélienne ! Cela est suffisant pour définir un produit de convolution sur H. L'algèbre H munie de ce produit est appelé l'algèbre de Hall motivique de $Coh(X)$. Le point central (Joyce-Song [8]) est alors de montrer que la notion de fonction de Behrend se factorise à travers cette construction i.e. qu'il existe une application d'"intégration" $I : H \longrightarrow \mathbb{Z}$ telle que $I(Y \longrightarrow X) = \chi(Y, \nu_Y)$. On peut ainsi ramener la correspondance PT/DT à la preuve d'une identité entre fonctions motiviques.

L'identité qui nous intéresse peut être vue comme un exemple de formule de wall-crossing. Le bon cadre est cette fois-ci la catégorie dérivée $D(Coh(X))$. Il est possible de définir une notion de condition de stabilité sur $D(Coh(X))$ et d'objet de $D(Coh(X))$ stable par rapport à une condition de stabilité. Le formalisme du wall-crossing ("croisement de mur", Kontsevich-Soibelman [10]) décrit la variation du nombre d'objets stables lorsqu'on change la condition de stabilité. Les faisceaux d'idéaux de sous-schémas fermés de dimension un d'une part et les complexes $(s : \mathcal{O}_X \longrightarrow F)$ associés aux paires stables d'autre part peuvent être identifiés aux objets stables par rapport à deux conditions de stabilité différentes et donc peuvent être reliés par une formule de wall-crossing.

Si X n'est pas Calabi-Yau, on n'a pas d'analogue de la fonction de Behrend et on n'a donc pas à notre disposition toute la machinerie précédente.

3.2 Correspondance GW/DT-PT

3.2.1 Conjecture

Autant la correspondance DT/PT peut se comprendre intuitivement, autant la relation précise entre les invariants de Gromov-Witten et les invariants de Donaldson-Thomas/ Pandharipande-Thomas est difficile à deviner. Elle l'a été d'une part par l'observation de coïncidences numériques non-triviales (par exemple, la quantité $\int_X (c_3(X) - c_1(X)c_2(X))$ intervient dans les deux résultats pour $\beta = 0$ énoncés plus haut) et d'autre part du fait d'arguments physiques non-triviaux. On a mentionné que les invariants de Gromov-Witten étaient naturellement reliés à la théorie des cordes. La description de cette théorie en termes de cordes se propageant n'est utile que lorsque les interactions entre cordes sont assez faibles. Lorsque l'intensité du couplage entre les cordes est grande, la situation formulée en termes de cordes devient très compliquée. Néanmoins, de nouvelles structures émergent, qui sont formées de cordes, mais qui ont l'avantage d'être faiblement couplées entre elles lorsque les cordes sont fortement couplées individuellement. Ces objets sont appelés branes en référence à "membrane" car ce sont des objets multidimensionnels. Sous certaines conditions, une brane peut être décrite comme une sous-variété complexe munie d'un fibré vectoriel holomorphe, i.e. comme un faisceau cohérent. Si on trouve des quantités invariantes lorsqu'on varie le couplage entre les cordes, l'équivalence entre la description en termes de cordes à faible couplage et celle en termes de branes à fort couplage donne une relation entre invariants de Gromov-Witten et les invariants construits par comptage de faisceaux cohérents.

Soient X une variété projective lisse de dimension 3 sur $\mathbb{C}$, $\beta \in H_2(X,\mathbb{Z}) - \{0\}$, $l \in \mathbb{N}$, γ_1,..., $\gamma_l \in H^*(X,\mathbb{Z})$. On définit des invariants de Gromov-Witten réduits $\langle \gamma_1 ... \gamma_l \rangle_\beta^{GW'}(u)$ par

$$\sum_{\beta \in H_2(X,\mathbb{Z})-\{0\}} \langle \gamma_1 \cdots \gamma_l \rangle_\beta^{GW'}(u) v^\beta = exp \left(\sum_{\beta \in H_2(X,\mathbb{Z})-\{0\}} \langle \gamma_1 \cdots \gamma_l \rangle_\beta^{GW}(u) v^\beta \right).$$

Les invariants de Gromov-Witten réduits comptent les morphismes stables $C \longrightarrow X$ sans hypothèse de connexité sur C.

Avec les notations précédentes, on a :

Conjecture 3.2.1. *(Correspondance GW/PT [11] [12])*
1)$\langle \gamma_1 \cdots \gamma_l \rangle_\beta^{PT}(q)$ est le développement de Laurent en $q = 0$ d'une fraction rationnelle en q.
2)En notant $d = \int_\beta c_1(X)$, on a

$$(-iu)^d \langle \gamma_1 \cdots \gamma_l \rangle_\beta^{GW'}(u) = (-q)^{-d/2} \langle \gamma_1 \cdots \gamma_l \rangle_\beta^{PT}(q)$$

si on a la relation $q = -e^{iu}$.

Remarquons que 2) a bien un sens grâce à 1).

3.2.2 Progrès récents

Les techniques similaires à celles utilisées pour étudier la correspondance DT/PT (fonction de Behrend...) permettent de prouver le point 1) de la conjecture GW/PT dans le cas X Calabi-Yau. En revanche, les techniques utilisées pour progresser vers une preuve du point 2) sont très différentes.

On commence par s'intéresser au cas où X est une variété torique i.e. munie d'une action du tore complexe $\mathbb{C}^{*3}$ et contenant une orbite de cette action dense. Dans ce cas, $\mathbb{C}^{*3}$ agit par fonctorialité sur les espaces de modules et on a alors un outil très puissant en la localisation : le calcul des classes fondamentales virtuelles se réduit à un problème concentré sur les points fixes de l'action de $\mathbb{C}^{*3}$ sur l'espace de modules. Pour les invariants de Gromov-Witten, cette méthode calcule les invariants de manière assez explicite. Pour les invariants de Pandharipande-Thomas, elle ramène le calcul à un problème purement combinatoire relié aux partitions 3d (les analogues tridimensionnelles des tableaux de Young). On est malheureusement incapable de résoudre ce problème combinatoire directement et pour faire le lien avec les expressions obtenues en Gromov-Witten, il faut passer par un intermédiaire, l'étude d'invariants de Gromov-Witten équivariants en genre 0 des schémas de Hilbert des points de certaines surfaces complexes modèles (une courbe dans un espace de modules de points d'une surface est très proche d'une courbe sur la surface...). Le point essentiel est que ces schémas de Hilbert sont symplectiques algébriques, ce qui donne une structure très particulière et donc un contrôle sur les invariants de Gromov-Witten équivariants. Après un certain travail [13], on obtient donc :

Théorème 3.2.1. *La correspondance GW/PT est vraie si X est torique.*

Si X n'est pas torique, on essaye de se ramener au cas torique par des techniques de dégénérescences : on casse X en morceaux toriques et on essaye de recoller les invariants de chacun des bouts. La phrase précédente ne permet pas de donner une idée de la difficulté de la preuve du résultat récent suivant [16] :

Théorème 3.2.2. *La correspondance GW/PT est vraie si X est Calabi-Yau et intersection complète dans un produit d'espaces projectifs.*

3.3 État des lieux

Résumons quelques poins importants des sections précédentes. On a des éléments de compréhension conceptuelle de la correspondance DT/PT dans le cas Calabi-Yau mais très peu d'outils actuellement pour explorer cette correspondance au delà de ce cas.

Pour la correspondance GW/PT, il n'y a presque aucune situation non-triviale où une compréhension conceptuelle existe : on essaye de se ramener au cas torique où des calculs explicites sont possibles. Remarquons qu'il est nettement plus facile de travailler avec les paires stables qu'avec les sous-schémas fermé de dimension 1. Historiquement, c'est la correspondance GW/DT qui avait été conjecturée mais c'est l'introduction des invariants de Pandharipande-Thomas qui a permis des progrès en décomposant GW/DT en GW/PT et PT/DT.

On pense qu'il existe des invariants, dits BPS ou de Gopakumar-Vafa, qui contrôlent la structure sous-jacente des invariants définis dans ce texte. On peut les définir de manière indirecte ([15]) via une conjecture sur la forme de la fonction rationnelle dont la série génératrice des invariants de Pandharipande-Thomas devrait être le développement de Laurent en $q = 0$. Même dans les cas où cette conjecture est connue, il est difficile de comprendre le sens géométrique des invariants BPS. Physiquement ([6]), ils comptent un type particulier de branes mais il est difficile d'en déduire une définition précise. Dans mon mémoire de $M2$, j'ai étudié des cas où il est possible de donner une interprétation géométrique des invariants BPS. Donner une telle interprétation dans un cadre général est un sujet de recherche sans aucun doute très intéressant.

Références

[1] Behrend. Donaldson-Thomas invariants via microlocal geometry. *Ann. of Math.*, 170:1307–1338, 2009. arXiv:math.AG/0507523.

[2] Behrend and Fantechi. The intrinsic normal cone. *Invent. Math.*, 128(1):45–88, 1997. arXiv:alg-geom/9601010.

[3] Bridgeland. Hall algebras and curve-counting invariants. *J. Amer. Math. Soc.*, 24:969–998, 2011. arXiv:math.AG/1002.4374.

[4] Candelas, de la Ossa, Green, and Parkes. A pair of Calabi-Yau manifolds as an exactly soluble superconformal theory. *Nucl. Phys. B*, 359(1):21–74, 1991.

[5] Fulton and Pandharipande. Notes on stable maps and quantum cohomology. In *Algebraic geometry—Santa Cruz*, volume 62 of *Proc. Sympos. Pure Math.*, pages 45–96. Amer. Math. Soc., 1995. arXiv:alg-geom/9608011.

[6] Gopakumar and Vafa. M-theory and topological strings 1-2. 1998. arXiv:hep-th/9809187, 9812127.

[7] Grothendieck. Techniques de construction et théorèmes d'existence en géométrie algébrique IV : les schémas de Hilbert. *Séminaire Bourbaki*, (221):249–276, 1960-1961.

[8] Joyce and Song. A theory of generalized Donaldson-Thomas invariants. 2008. arXiv:math.AG/0810.5645.

[9] Kontsevich and Manin. Gromov-Witten classes, quantum cohomology, and enumerative geometry. *Comm. Math. Phys.*, 164:525–562, 1994.

[10] Kontsevich and Soibelman. Stability structures, motivic Donaldson-Thomas invariants and cluster transformations. 2008. arXiv:math.AG/0811.2435.

[11] Maulik, Nekrasov, Okounkov, and Pandharipande. Gromov–Witten theory and Donaldson–Thomas theory, I. *Compos. Math.*, 142(5):1263–1285, 2006. arXiv:math.AG/0312059.

[12] Maulik, Nekrasov, Okounkov, and Pandharipande. Gromov–Witten theory and Donaldson–Thomas theory, II. *Compos. Math.*, 142(5):1286–1304, 2006. arXiv:math.AG/0406092.

[13] Maulik, Oblomkov, Okounkov, and Pandharipande. Gromov-Witten/Donaldson-Thomas correspondence for toric 3-folds. *Invent. Math.*, 186(2):435–479, 2011. arXiv:math.AG/0809.3976.

[14] Pandharipande and Thomas. Curve counting via stable pairs in the derived category. *Invent. Math*, 178:407–447, 2009. arXiv:math.AG/0707.2348.

[15] Pandharipande and Thomas. Stable pairs and BPS invariants. *J. Amer. Math. Soc.*, 23:267–297, 2010. arXiv:math.AG/0711.3899.

[16] Pixton and Pandharipande. Gromov-Witten/Pairs correspondence for the quintic 3-fold. 2012. arXiv:math.AG/1206.5490.

[17] Thomas. A holomorphic Casson invariant for Calabi-Yau 3-folds, and bundles on K3 fibrations. *J. Differential Geom.*, 52(2):367–438, 2000. arXiv:math.AG/9806111.

[18] Toda. Stability conditions and curve counting invariants on Calabi-Yau 3-folds. *Kyoto J. Math.*, 52(1):1–50, 2012. arXiv:math.AG/1103.4229.