

# Le modèle du vent dans les arbres

JÉRÉMY BOUSSIER

encadré par

GEOFFREY GRIMMETT et WENDELIN WERNER

15 juin 2012

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Description des modèles étudiés</b>	<b>2</b>
1.1	Historique . . . . .	2
1.2	Différentes modélisations du problème . . . . .	2
1.2.1	Modèles des miroirs . . . . .	2
1.2.2	Modèle des rotateurs . . . . .	3
1.2.3	Versions dynamiques de ces modèles . . . . .	3
1.2.4	Environnements périodiques . . . . .	4
1.3	Un modèle plus accessible . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Localisation et récurrence</b>	<b>5</b>
2.1	Modélisation en termes de chaînes de Markov . . . . .	5
2.2	Définitions . . . . .	5
2.3	Résultats . . . . .	6
2.4	Outils . . . . .	6
2.4.1	Percolation . . . . .	6
2.4.2	Réseaux électriques . . . . .	7
<b>3</b>	<b>Théorème central limite</b>	<b>8</b>
3.1	Principes d'invariance . . . . .	8
3.1.1	Théorème central limite sur les martingales . . . . .	8
3.1.2	Principe d'invariance pour les martingales . . . . .	9
3.1.3	Principe d'invariance pour des fonctions de chaînes de Markov . . . . .	9
3.2	Résultats . . . . .	10
3.2.1	Le résultat de De Masi, Ferrari, Goldstein et Wick . . . . .	10
3.2.2	Application à notre problème . . . . .	10
	<b>Conclusion</b>	<b>11</b>
	<b>Références</b>	<b>11</b>

# 1 Description des modèles étudiés

## 1.1 Historique

Le « gaz de Lorentz » désigne un modèle introduit par Lorentz [18] en 1905 puis développé par Tatiana et Paul Ehrenfest [9] pour décrire les propriétés statistiques du mouvement des électrons dans un métal de faible densité (limite de Boltzmann-Grad). Dans ce modèle, une particule légère — ou un ensemble de particules sans interaction (les électrons) — évolue dans un environnement formé de particules lourdes supposées immobiles (les atomes), selon les lois habituelles de collision élastique. Le modèle limite de Boltzmann-Grad stipule que le nombre de collision par unité de temps est de l'ordre de l'unité; c'est la condition pour que l'équation de Boltzmann en théorie cinétique des gaz soit valide.

D'autres interprétations sont possibles. Celle qui a inspirée le nom « wind-tree model » est la suivante : le vent se déplace sur le plan et rentre en collision avec les arbres qui dévient sa trajectoire. Une autre vision du problème consiste à étudier la trajectoire d'un rayon de lumière qui est réfléchi par un environnement composé de miroirs plan.

La position des miroirs/arbres/atomes lourds étant désordonnée, le point de départ du modèle est de considérer que ces positions sont tirées au hasard. Une fois ces positions choisies, on obtient donc un « environnement aléatoire » dans lequel la lumière / le vent / la particule légère va se déplacer, de manière presque déterministe.

Ce modèle apparemment simple se révèle en fait compliqué. Beaucoup de questions de bases ne sont à ce jour pas résolues, et les résultats mathématiques rigoureux sont peu nombreux.

Dans les paragraphes qui suivent, nous allons décrire quelques modèles naturels simples, puis nous allons nous concentrer sur un cas particulier qui s'avère plus accessible.

## 1.2 Différentes modélisations du problème

Comme nous l'avons déjà souligné, on peut interpréter ce problème de diverses manières qui posent des questions et demandent des preuves de natures différentes, selon

- (i) la forme des obstacles,
- (ii) la réversibilité de la trajectoire,
- (iii) la nature de l'environnement (discret ou continu),
- (iv) ce qu'il y a d'aléatoire (l'environnement ou la façon dont une particule est lancée).

Les questions posées concernent principalement la localisation de la particule (*i.e.* la particule reste-t-elle dans un domaine borné?) et l'existence d'un théorème central limite dans le cas où la particule n'est pas localisée.

Nous allons maintenant décrire quelques modèles bi-dimensionnels (dont certains peuvent aussi se généraliser en dimension supérieure), et donner un très rapide aperçu du type de résultats qui sont prouvés pour chacun d'eux.

### 1.2.1 Modèles des miroirs

Une des modèles les plus simples est le modèle des miroirs. En voici deux variantes :

Dans la version continue, on place des miroirs (réfléchissant la lumière des deux côtés) de taille fixe  $\epsilon > 0$ , centrés à des points répartis selon un processus de Poisson d'intensité  $\lambda$ , orientés chacun de façon aléatoire et indépendante. On envoie un rayon lumineux de l'origine, avec un angle  $\theta \in ]-\pi, \pi]$  par rapport à l'axe des ordonnées. Ce modèle est « doublement » aléatoire, puisqu'à la fois l'environnement et l'angle avec lequel est envoyé la particule sont aléatoires.

Harris [14] a prouvé qu'il existe un réel  $\lambda_c^\epsilon$  tel que la lumière est presque sûrement (p.s.) localisée si  $\lambda > \lambda_c^\epsilon$  (puisque'elle est p.s. encerclée par un circuit fermé de miroirs) et a une

probabilité non-nulle d'être non-localisée pour presque tous les  $\theta$  si  $\lambda < \lambda_c^\epsilon$ .

Une version discrète du modèle est la suivante : sur chaque noeud de  $\mathbf{Z}^d$ , on place un miroir de longueur 1 orienté nord-est avec une probabilité  $p_{NE}$ , orienté nord-ouest avec probabilité  $p_{NO}$ , et rien sinon. On envoie un rayon de lumière de l'origine vers le nord. Ainsi, seul l'environnement est aléatoire.

Soit  $p = p_{NE} + p_{NO}$ . La lumière est p.s. non-localisée si  $p = 0$ . Il a été montré que pour  $p = 1$ ,  $p_{NE} > 0$  et  $p_{NO} > 0$ , la lumière est p.s. localisée (voir Bunimovich et Troubetzkoy [4]).

Cependant, très peu de résultats ont été prouvés dans le cas  $0 < p < 1$ . En particulier, on ne sait pas démontrer la conjecture (effectuée par des physiciens, *cf.* Cohen et Wang [6], Ziff, Kong et Cohen [23]) qui stipule que la lumière est p.s. localisée dès que  $p > 0$  et  $p_{NE} = p_{NO}$ . Il est cependant à noter que Quas [21] a montré quelques résultats sur la mesure de l'espace des chemins possibles parcourus par la lumière, en utilisant la théorie ergodique.

### 1.2.2 Modèle des rotateurs

C'est un modèle discret. Sur chaque sommet de  $\mathbf{Z}^2$ , on place un rotateur qui va dévier la direction de la lumière d'un angle  $\pi/2$  dans le sens trigonométrique (virage à gauche) avec une probabilité  $p_+$ , dans le sens anti-trigonométrique (virage à droite) avec probabilité  $p_-$ . La lumière est envoyée de l'origine vers le nord. Contrairement aux modèles précédents, le chemin parcouru par la lumière est non-réversible (si on envoie la lumière dans l'autre sens, elle ne suivra pas le même chemin).

Ce modèle a été simulé par Ruijgrock et Cohen [22], puis étudié plus en détails par Bunimovich et Troubetzkoy ([4] et [5]), qui ont prouvé que

- (i) il existe un réel  $p_0 \in ]0; 1[$  tel que si  $p_+ > p_0$  ou  $p_- > p_0$ , la lumière est p.s. localisée ;
- (ii) si  $p = 1$ , la lumière est p.s. localisée.

### 1.2.3 Versions dynamiques de ces modèles

Il est possible d'« ajouter de l'aléatoire » à ces deux derniers modèles, en changeant l'orientation des miroirs ou la déviation d'un rotateur au cours du temps. On fixe  $0 < q \leq 1$  et on considère la version discrète du modèle des miroirs (resp. le modèle des rotateurs). Comme avant, une particule se propage le long des arêtes du réseau et est déviée, mais désormais, un miroir change de nord-est à nord-ouest (resp. un rotateur change de trigonométrique à anti-trigonométrique) et vice versa de façon indépendante et avec probabilité  $q$  lorsqu'il est touché par la particule. Il faut noter que dans ce cas, les résultats qu'on obtient pour une particule ne peuvent pas être généralisés à plusieurs particules, puisque la propagation d'une particule affecte son environnement.

Bunimovich et Troubetzkoy [4] ont prouvé que pour la version dynamique du modèle des miroirs sur  $\mathbf{Z}^d$ , la particule est p.s. non-localisée, et pour la version dynamique du modèles des rotateurs,

- (i) si  $q = 1$  et  $0 < p < 1$ , la probabilité que la particule soit localisée est positive,
- (ii) si  $q = p = 1$  ou  $q < 1$  ou  $p = 0$ , la particule est p.s. non-localisée.

### 1.2.4 Environnements périodiques

On sait beaucoup plus de choses à propos des environnements périodiques. En voici deux versions.

La première est une version continue avec des obstacles circulaires. Soit  $B$  un rectangle (fini) de  $\mathbf{R}^2$ . Des obstacles circulaires sont placés à la manière d'un processus de Poisson, et son contenu est répété de façon périodique sur le plan  $\mathbf{R}^2$ . C'est ce qu'on appelle la table de billard de Sinai. Une particule est lancée d'un point  $x$  avec un angle  $\theta \in ]-\pi, \pi]$ . L'environnement est aléatoire dans le rectangle et déterministe dans le reste de  $\mathbf{R}^2$  étant donné ce rectangle, et la particule est lancée de façon complètement aléatoire.

Sous certaines conditions (notamment celle de l'« horizon fini », qui stipule qu'un segment évitant tous les obstacles ne peut pas être trop long), Bunimovich et Sinai [3] ont établi un théorème central limite sur la trajectoire de la particule.

Le deuxième modèle a été étudié d'abord par Hardy et Weber [13], puis développé par Hubert, Lelièvre, Troubetzkoy [16], et plus récemment par Delecroix [8]. La configuration est la suivante : soient  $0 < a, b < 1$  ; on place sur chaque sommet de  $\mathbf{Z}^2$  un rectangle de dimension  $a \times b$ . Comme avant, une particule est lancée d'un point  $x$  en dehors de tout rectangle, avec un angle  $\theta \in ]-\pi, \pi]$ . Dans ce modèle donc, il n'y a d'aléatoire que la direction et la position initiales de la particule.

On appelle un chemin voisinage-récurrent un chemin tel que pour tout voisinage de  $x$ , la particule revient dans ce voisinage une infinité de fois. Il a été prouvé que

- (i) pour un certain ensemble de paramètres  $a$  et  $b$ , le chemin est p.s. voisinage-récurrent ;
- (ii) l'exposant polynomial de diffusion est p.s.  $2/3$ , *i.e.* pour presque tout  $(a, b)$ , pour presque tous  $\theta$  et  $x$ ,

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\log \text{dist}(x, \phi_t^\theta(x))}{\log t} = \frac{2}{3},$$

où  $\phi_t^\theta(x)$  désigne la position de la particule jetée de  $x$  dans la direction  $\theta$ , et  $\text{dist}$  la distance euclidienne.

### 1.3 Un modèle plus accessible

L'un des problèmes des modèles présentés précédemment (ou du moins des modèles discrets) est que le chemin parcouru par la particule est déterministe étant donné l'environnement. Ainsi, si l'environnement est changé (même de façon mineure), le comportement de la particule peut changer complètement.

Dans cette section et dans le reste de ce mémoire, nous considérons une autre version discrète de ce problème, où en plus d'obstacles « ordinaires », l'environnement contient des *points de marche aléatoire* (pma), qui ont pour propriété qu'un rayon de lumière arrivant à un tel point repart avec une direction aléatoire indépendante de sa direction d'arrivée.

Soit  $d \geq 2$ . On se place sur  $\mathbf{Z}^d$ , que l'on identifiera souvent au graphe formé des sites à coordonnées entières, et où deux sites sont reliés par une arête s'ils sont à distance 1 l'un de l'autre. Si  $I = \{u_i, 1 \leq i \leq d\}$  désigne l'ensemble des vecteurs de coordonnées, et  $I^\pm = \{-1, +1\} \times I$ , alors on appelle un *réflecteur* une fonction  $\rho : I^\pm \rightarrow I^\pm$  telle que  $\rho(-\rho(u)) = -u$  pour tout  $u \in I^\pm$ . Cette condition assure la réversibilité de la trajectoire de la lumière, condition qui va s'avérer essentielle pour la suite. On note  $\mathcal{R}$  l'ensemble des réflecteurs, et on en trouvera des exemples figure 1. On appelle *pont* le réflecteur identité sur  $I^\pm$ . Il désigne en fait l'absence d'obstacle.

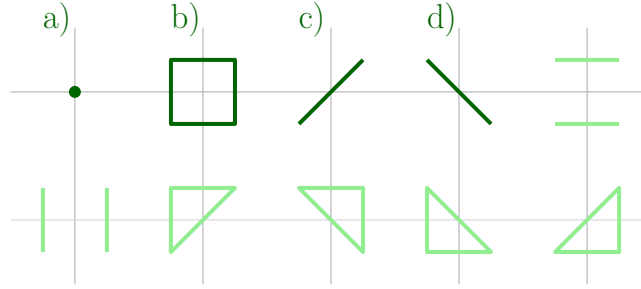


FIGURE 1 – Il y a 10 réflecteurs en deux dimensions. Les premiers sont a) le pont (qui ne dévie pas la lumière), b) le bloqueur (qui renvoie la lumière sur elle-même), c) le miroir nord-est et d) le miroir nord-ouest.

On définit un environnement une configuration de réflecteurs et de points de marche aléatoire sur les sommets de  $\mathbf{Z}^d$ , c'est à dire comme un élément de  $\Omega = \{\mathcal{R} \cup \{\emptyset\}\}^{\mathbf{Z}^d}$  (l'ensemble vide  $\emptyset$  désigne un point de marche aléatoire). On peut munir  $\mathcal{R} \cup \{\emptyset\}$  d'une mesure de probabilité  $\mu$ . Soit alors  $\mathbb{P}$  la mesure produit (sur  $\Omega$ ) de marginales  $\mu$ . On note  $p_\emptyset = \mu(\{\emptyset\})$  la probabilité d'avoir un point de marche aléatoire, et  $p_+ = \mu(\{+\})$  la probabilité d'avoir un pont.

## 2 Localisation et récurrence

### 2.1 Modélisation en termes de chaînes de Markov

Il est possible de modéliser le chemin parcouru par la lumière comme une chaîne de Markov, en ne retenant que les pma qu'elle a croisés.

Soit  $\omega \in \Omega$  un labyrinthe et  $\mathcal{W}(\omega)$  l'ensemble de ses pma. On appelle *chemin simple* un chemin reliant deux pma, obéissant aux lois de réflexion et ne passant par aucun autre pma. Si  $x$  et  $y$  sont deux pma de  $\omega$ , on note  $x \leftrightarrow y$  s'il existe une succession de chemins simples reliant  $x$  à  $y$ . C'est une relation d'équivalence, dont on note  $\mathcal{C}^\omega(x)$ ,  $x \in \mathcal{W}(\omega)$  les classes d'équivalence.

On appelle *marche aléatoire* la chaîne de Markov  $(X^\omega(n), n \geq 0)$  dont l'espace des états est  $\mathcal{W}(\omega)$ , l'état initial est 0, et la matrice de transition  $q^\omega$  est donnée par

$$q^\omega(x, y) = \frac{n^\omega(x, y)}{2d} \quad \text{pour } x, y \in \mathcal{W}(\omega),$$

où  $n^\omega(x, y)$  désigne le nombre de chemins simples reliant  $x$  à  $y$ . On note  $\mathbb{P}^\omega$  la loi de  $X^\omega$ .

Cette chaîne de Markov modélise bien le parcours de la lumière : à chaque pma  $x$ , elle choisit aléatoirement la direction dans laquelle aller (parmi  $2d$ ), et elle a donc bien une probabilité  $n^\omega(x, y)/(2d)$  de rencontrer  $y$  comme prochain pma.

### 2.2 Définitions

Parmi les questions posées dès le début de cet exposé, on trouve celle de la localisation (*i.e.* la lumière reste-t-elle dans un domaine borné?). Il faut cependant lui donner une définition plus rigoureuse dans cette version où la trajectoire de la lumière n'est plus déterministe. On se donne un environnement  $\omega \in \Omega$ .

La première question qu'on peut se poser est : la trajectoire de la lumière est-elle non-bornée ? *i.e.* sort-elle de tout espace borné de  $\mathbf{Z}^d$  ? On introduit donc la notion de localisation : on dit qu' $\omega$  est *localisé* si  $\mathcal{C}^\omega(x)$  est fini, *non-localisé* sinon. D'après la théorie des chaînes de Markov, on a

$$\mathbb{P}^\omega(X^\omega \text{ visite une infinité de sommets}) = \begin{cases} 0 & \text{si } \omega \text{ est localisé,} \\ 1 & \text{si } \omega \text{ n'est pas localisé.} \end{cases}$$

La deuxième question qu'on peut se poser est : la trajectoire de la lumière, si elle sort de tout ensemble borné, est-ce pour de bon ou y re-rentre-t-elle une infinité de fois ? ou, de façon équivalente, la lumière revient-elle une infinité de fois en 0 ?

On dit alors que le labyrinthe  $\omega$  est *récurrent* si  $X^\omega$  est une chaîne de Markov récurrente, *i.e.* si

$$P^\omega(\exists N \geq 1, X^\omega(N) = 0) = 1.$$

On dit que le labyrinthe est *transient* s'il n'est pas récurrent.

## 2.3 Résultats

On remarque tout d'abord qu'un labyrinthe localisé est automatiquement récurrent, et donc par contraposée qu'un labyrinthe transient est non-localisé.

En fait, on a le résultat suivant, dû à Grimmett, Menshikov et Volkov [12] :

### Théorème 1

1. Sous certaines conditions sur  $p_+$  et  $p_\emptyset$ , le labyrinthe est *p.s.* non-localisé.
2. Si  $d = 2$  et  $p_\emptyset > 0$ , le labyrinthe est *p.s.* récurrent.
3. Si  $d \geq 3$ , et sous certaines conditions sur  $p_c$  et  $p_\emptyset$ , le labyrinthe est *p.s.* transient.

Nous allons maintenant décrire rapidement quelques outils utilisés dans la preuve de ce théorème.

## 2.4 Outils

Deux outils essentiels et classiques en théorie des graphes sont utiles pour aborder ces questions. Il s'agit de la percolation et de la théorie des réseaux électriques. Nous en introduisons ici les problématiques de base.

### 2.4.1 Percolation

La percolation est une manière simple de modéliser le désordre spatial (voir [11] pour une bonne introduction). Il en existe deux variantes : la percolation par sites ou par arêtes (nous nous concentrerons ici sur la percolation par sites). Le modèle de base est plutôt simple : sur chaque sommet du réseau  $\mathbf{Z}^d$ , on place la valeur 1 avec probabilité  $p$ , et la valeur 0 avec la probabilité  $1 - p$  (de façon indépendante). On peut visualiser la valeur 1 comme « robinet ouvert » et la valeur 0 comme « robinet fermé ». On fait alors partir un de l'eau (sous pression !) du point 0 de  $\mathbf{Z}^d$  en considérant les arêtes du réseau comme des canalisations, et évidemment l'eau est bloquée par les robinets fermés, alors qu'elle passe au travers des robinets ouverts.

L'une des questions fondamentales en percolation est : l'eau va-t-elle rester dans un domaine fini ? *i.e.* existe-t-il un chemin infini reliant des sites tous numérotés 1 ? Si l'on note  $\theta(p)$  la probabilité qu'il existe un tel chemin, alors on peut montrer par des arguments de couplage que c'est une fonction croissante de  $p$ . On appelle probabilité critique de  $\mathbf{Z}^d$  le réel  $p_c = p_c(\mathbf{Z}^d) = \inf\{p, \theta(p) > 0\}$ . On peut prouver que

$$p_c \in ]0, 1[.$$

On a alors

$$\theta(p) \begin{cases} = 0 & \text{si } p < p_c \\ > 0 & \text{si } p > p_c. \end{cases}$$

Le fait que  $\theta(p_c) = 0$  en dimension  $d = 3$  (c'est à dire que la fonction  $p \mapsto \theta_p$  est continue à gauche en 0) est l'une des conjectures non-résolues les plus fameuses en Physique Statistique.

Les valeurs explicites de  $p_c$  sont calculables pour certains réseaux bi-dimensionnels particuliers, mais on conjecture que (mis à part ces réseaux particuliers), elles ne prennent pas de valeurs calculables.

On donne deux applications à notre modèle de départ. La première est très simple.

**Proposition** *Si  $p_\emptyset > p_c(\mathbf{Z}^d)$ , alors le labyrinthe est non-localisé.*

*Démonstration* Dans ce cas,  $\theta(p_\emptyset) > 0$ , c'est à dire qu'avec une probabilité strictement positive, il existe un chemin infini de  $\mathbf{Z}^d$  ne passant que par des points de marche aléatoire. Le labyrinthe est donc non-localisé.  $\square$

Pour des situations plus compliquées, il est parfois possible de se ramener à des modèles de percolation en assimilant des sous-ensembles de  $\mathbf{Z}^d$  (appelés *blocs*) à des sites pour utiliser ensuite des résultats de percolation. On appelle cette méthode *percolation par blocs*. On en donne ici un exemple en rapport avec notre modèle.

**Proposition** *Il existe un  $A > 0$  tel que si  $p_\emptyset > 0$  et  $p_\emptyset + p_+ > 1 - A$ , alors le labyrinthe est p.s. non-localisé.*

*Schéma de démonstration* On appelle  $B_v^N$  l'hyper-rectangle  $v + [-N; N - 1]^d$  de  $\mathbf{Z}^d$ . On dit que  $B_v^N$  est un *bon rectangle* s'il ne contient que des ponts et des pma, et si tout rayon lumineux que l'on fait passer par un point du bord de  $B_v^N$  illuminera tous les points du bord. Remarquons que si deux bons rectangles sont adjacents, les pma les composant sont tous dans la même classe d'équivalence.

Si  $p_\emptyset + p_+$  est assez proche de 1, alors pour tout  $N$  assez grand,  $B_v^N$  aura une probabilité aussi proche de 1 que l'on veut d'être un bon rectangle. On peut donc se fixer  $p_\emptyset$ ,  $p_+$  et  $N$  tels que cette probabilité soit plus grande que  $p_c(\mathbf{Z}^d)$ .

On considère alors le modèle de percolation suivant sur  $\mathbf{Z}^d$  : chaque  $v$  est ouvert si et seulement si le rectangle correspondant  $B_v^N$  est un bon rectangle. Ainsi la probabilité qu'un sommet soit ouvert est  $p > p_c(\mathbf{Z}^d)$ . Il existe donc un chemin infini ne passant que par des sommets ouverts, ce qui se traduit dans le graphe original par l'existence d'une classe d'équivalence de pma de taille infinie.

## 2.4.2 Réseaux électriques

Pour prouver des résultats de récurrence ou de transience de chaînes de Markov sur des graphes, il est très utile de faire appel à la théorie des réseaux électriques (dont une bonne introduction peut être trouvée dans [19] ou [10]). Un réseau électrique sur un graphe est défini par des résistances placées sur ses arêtes. Il est possible d'associer un chaîne de Markov à ce réseau électrique.

Plus précisément, on associe à chaque arête  $e$  sa conductance  $c(e)$  qui est l'inverse de sa résistance  $R(e)$ . On peut alors définir une chaîne de Markov de la manière suivante : Si  $X_n = x$ , alors la probabilité que la chaîne saute suivant l'arête  $e_1$  adjacente à  $x$  pour atteindre  $X_{n+1} = y$  (on note  $e_2, \dots, e_N$  les autres arêtes adjacentes à  $x$ ) vaut

$$q(x, y) = \frac{c(e_1)}{c(e_1) + \dots + c(e_N)}.$$

La chaîne obtenue est réversible car la mesure  $\mu(x) = \sum_{e \sim x} c(e)$  (où la somme est sur les arêtes  $e$  adjacentes à  $x$ ) vérifie les équations de réversibilité.

Dans un réseau électrique, il est possible (en utilisant les règles sur les résistances en série et en parallèle) de calculer la résistance du réseau entre deux sites non-voisins. Il est en fait aussi possible, de manière naturelle, de déterminer la résistance entre un site  $x$  et l'infini. Ceci permet d'avoir une interprétation simple de la récurrence de la chaîne  $X$  :

**Proposition** *La chaîne est récurrente si et seulement si  $R(x) = \infty$ .*

Cette interprétation s'est révélée être un outil élégant et puissant, grâce aux propriétés de monotonie des résistances. En effet, augmenter la résistance d'une arête augmente forcément la résistance  $R(x)$ .

Notons qu'une marche aléatoire simple sur un graphe correspond au cas où toutes les arêtes ont la même résistance. On sait aussi que la marche aléatoire sur  $\mathbf{Z}^2$  est récurrente. La résistance entre un site et l'infini dans  $\mathbf{Z}^2$  est donc infinie. Mais couper une arête (l'interdire pour la marche aléatoire) revient à faire tendre sa résistance vers l'infini. Ainsi, on en déduit que pour tout sous-graphe de  $\mathbf{Z}^2$ ,  $R(x) = \infty$ , et donc la marche aléatoire sur un quelconque sous-graphe de  $\mathbf{Z}^2$  est récurrente.

Pour ce qui est de notre problème, cette proposition permet aussi de prouver assez rapidement la récurrence en deux dimensions pour notre modèle. La transience pour  $d \geq 3$  fait quant à elle appel à la fois à la percolation par blocs vue au paragraphe précédent et à la théorie des réseaux électriques : il faut minorer la résistance  $R(X^\omega)$  grâce à un réseau électrique sur les blocs  $B_v^N$ .

### 3 Théorème central limite

Il est possible de décrire plus précisément — ou plus quantitativement — la trajectoire de la lumière dans un labyrinthe, lorsqu'elle n'est pas localisée, via un théorème central limite sur la chaîne de Markov  $X^\omega$ .

#### 3.1 Principes d'invariance

##### 3.1.1 Théorème central limite sur les martingales

Le théorème central limite classique stipule que si  $X_i$ ,  $i \geq 1$  sont des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d.), de moyenne 0 et de variance 1, alors la « marche aléatoire » ( $M_n = \sum_{i=1}^n X_i$ ,  $n \geq 0$ ) vérifie

$$\frac{1}{\sqrt{n}}M_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, 1),$$

où  $\mathcal{N}(0, 1)$  désigne la loi normale de moyenne 0 et de variance 1, et  $\xrightarrow{\mathcal{D}}$  désigne la convergence *en distribution* (ou *convergence faible*), i.e.  $Y_n \xrightarrow{\mathcal{D}} Y$  si pour toutes fonctions continues bornées  $f, g$ ,  $\mathbb{E}(f(Y_n)) \rightarrow \mathbb{E}(f(Y))$ .

Une martingale est la généralisation de la marche aléatoire dans le cas où les pas ne sont plus nécessairement indépendants mais tels qu'à chaque pas, la loi conditionnelle du pas étant donné le passé est de moyenne nulle. Il n'est donc pas surprenant que sous certaines conditions raisonnables, une martingale renormalisée convenablement converge asymptotiquement en loi vers une distribution normale.

Un théorème central limite a ainsi été prouvé pour les martingales dont les incréments sont indépendants mais pas identiquement distribués, puis pour des martingales dont l'indépendance est remplacée par des conditions asymptotiques plus faibles. On peut trouver des résultats récents dans Helland [15].



### 3.1.2 Principe d'invariance pour les martingales

Le théorème central limite peut parfois être généralisé en un *principe d'invariance* ou *théorème central limite fonctionnel*.

Rappelons que si  $X_i, i \geq 1$  sont des variables aléatoires i.i.d. de moyenne 0 et de variance 1 et si  $t \geq 0$ , la martingale normalisée  $(M_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{\lfloor nt \rfloor} X_i, n \geq 1)$  vérifie pour tout  $t$  donné

$$M_n(t) = \sqrt{t} \left( \frac{1}{\sqrt{tn}} \sum_{i=1}^{\lfloor nt \rfloor} X_i \right) \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, t)$$

par le théorème central limite classique. De plus, il est facile de voir que  $M_n(t_2) - M_n(t_1) \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, t_2 - t_1)$  pour tous  $t_1, t_2 \geq 0$ . Ceci montre la convergence des lois fini-dimensionnelles du processus  $M_n(\cdot)$  vers celles du mouvement brownien standard  $(B(t), t \geq 0)$ .

Le principe d'invariance de Donsker stipule que l'on peut en fait prouver que  $M_n$  (vue comme une suite de variables aléatoires dans un espace fonctionnel simple, appelé l'espace de Skorohod, voir Pollard [20] pour une définition) converge faiblement vers le mouvement brownien standard. En fait, le théorème de Prohorov (voir [2]) montre que ceci signifie en fait que les lois  $M_n$  sont tendues (la tension et la convergence des lois fini-dimensionnelles étant équivalentes à la convergence des lois dans l'espace de fonctions).

De même que pour le théorème central limite, ce résultat a été généralisé pour des martingales dont les incréments ne sont ni indépendants ni identiquement distribués, sous certaines conditions résumées par Helland [15]. Ainsi, on a en un certain sens, la convergence en loi de la trajectoire toute entière vers celle d'un mouvement brownien.

### 3.1.3 Principe d'invariance pour des fonctions de chaînes de Markov

Parmi les conditions suffisantes pour qu'une martingale satisfasse un principe d'invariance, on trouve la suivante : si les incréments d'une martingale ne sont pas trop grands, et forment un processus ergodique et stationnaire, alors la martingale vérifiera un principe d'invariance. Ceci est assez naturel, car l'ergodicité assure un mélange et une moyennisation rapide.

Supposons que  $X_i, i \geq 1$  est un chaîne de Markov stationnaire et ergodique de matrice de transitions  $q(x, dy)$ . Soit  $f$  une fonction bornée, et  $(qf)(x) = \int f(y)q(x, dy)$ . On pose pour tout  $n \geq 0$ ,

$$M_n = \sum_{i=1}^n (f(X_i) - (qf)(X_i)) \quad \text{et} \quad M'_n = \sum_{i=1}^n (f(X_i) - (qf)(X_{i-1})).$$

Il est facile de prouver que  $M'$  est une martingale dont les incréments forment un processus stationnaire et ergodique, et donc  $M'$  vérifie le principe d'invariance. Si l'on prouve que  $\frac{1}{\sqrt{n}}(M_n - M'_n) \rightarrow 0$ , alors on en déduit que  $M$  vérifie le principe d'invariance.

C'est l'approche qui a été utilisée par Kipnis et Varadhan [17] pour prouver le principe d'invariance pour des fonctions de chaînes de Markov réversibles, stationnaires et ergodiques de la forme  $\sum_{i=1}^n V(X_i)$ , avec un  $V$  très général. Ce résultat a été généralisé par De Masi, Ferrari, Goldstein et Wick [7] pour le cas particulier de  $V$  antisymétrique, résultat sur lequel nous allons maintenant nous pencher.

## 3.2 Résultats

### 3.2.1 Le résultat de De Masi, Ferrari, Goldstein et Wick

Nous donnons une version (discrète) un peu plus complète du résultat démontré par De Masi *et al.* Soit  $(\xi(n), n \geq 0)$  une chaîne de Markov discrète réversible et ergodique sur un espace  $\Sigma$ , de mesure invariante  $\nu$ . Soient  $F : \Sigma \times \Sigma \rightarrow \mathbf{R}^d$  une fonction antisymétrique,

$$I(n) = F(\xi(n-1), \xi(n)), \quad n \geq 1 \quad \text{et} \quad X(n) = \sum_{k=1}^n I(k), \quad n \geq 0.$$

On note

$$X^\epsilon(t) = \epsilon X(\lfloor \epsilon^{-2} t \rfloor), \quad \epsilon > 0$$

le processus normalisé.

**Proposition** *Si  $\nu(I(1)^2) < \infty$ , alors il existe une matrice symétrique  $D$  telle que*

$$X^\epsilon \text{ converge faiblement vers } D^{1/2}W \text{ lorsque } \epsilon \rightarrow 0,$$

où  $W$  est un mouvement brownien standard sur  $\mathbf{R}^d$ .

L'intégrabilité de  $I(1)^2$  assure que le processus ne va pas « trop vite ».

La matrice  $D$  peut même être écrite en termes d'un élément explicitement calculable et de ce qu'on appelle la *fonction d'autocorrélation de la vitesse*. Cependant, rien dans ce théorème ne garantit que  $D \neq 0$ , et la difficulté que pose le calcul explicite de la fonction d'autocorrélation empêche de prouver rapidement la non-trivialité de la limite.

### 3.2.2 Application à notre problème

Ce résultat peut s'appliquer à notre modèle. On se place dans un labyrinthe  $\omega \in \Omega^* = \{\omega \text{ non-localisés}\}$ . On note  $P^*$  la mesure  $P$  conditionnée sur l'événement  $\Omega^*$ . L'idée principale est la suivante :  $\xi(n)$  est l'environnement vu de l'endroit où se trouve la lumière à l'instant  $n$ . En définissant correctement  $F$ , on peut faire en sorte que  $X(n) = X^\omega(n)$  pour tout  $n \geq 0$ .

Il est aisé de montrer que  $P^*$  est une mesure invariante et réversible pour la chaîne de Markov  $(\xi(n), n \geq 0)$ . L'ergodicité est plus compliquée à montrer, et repose sur la p.s. unicité de la classe d'équivalence infinie. Enfin, le fait que  $\nu(I(1)^2) < \infty$  provient du fait que les chemins simples ne sont en général pas trop longs.

Le résultat suivant est dû à Bezuidenhout et Grimmett [1] :

**Théorème 2** *Soit  $p_\emptyset > 0$ . Il existe une constante  $A > 0$  telle que si  $p_\emptyset > p_c(\mathbf{Z}^d)$  ou  $p_\emptyset + p_+ > 1 - A$ , alors*

$$\text{La loi de } X^\epsilon \text{ sous } P^* \text{ converge faiblement, lorsque } \epsilon \rightarrow 0, \text{ vers celle de } \sqrt{\delta}W,$$

où  $W$  est un mouvement brownien standard dans  $\mathbf{R}^d$  et  $\delta$  est une constante strictement positive.

Le fait que la matrice  $D$  se réduise à  $\delta \cdot I_d$  est dû aux symétries du problème. La stricte positivité de  $\delta$ , cependant, est loin d'être triviale.

## Conclusion

Le résultat plus « quantitatif » qui donne la convergence vers le mouvement brownien est cohérent avec la première partie sur la récurrence : on sait qu'un mouvement brownien en deux dimensions passera p.s. dans un voisinage de zéro une infinité de fois, alors qu'un mouvement brownien en trois dimensions a une probabilité strictement positive de ne jamais visiter la boule de rayon de centre  $x$  et de rayon  $r$ , si  $x \neq 0$  et  $r < |x|$ .

Il est difficile d'appliquer ces méthodes à un modèle plus général que celui-là. Par exemple, il n'est pas possible de généraliser directement les résultats prouvés sur la récurrence ou la transience de la lumière à un modèle avec des obstacles non-réversibles (comme les rotateurs), puisque l'analogie avec les réseaux électriques ne peut se faire que pour une chaîne de Markov réversible. Pour ce qui est d'un éventuel théorème central limite, Tóth a partiellement généralisé le résultat de Kipnis et Varadhan en prouvant que sous certaines conditions, les distributions finidimensionnelles de fonctions de chaînes de Markov (même non-réversibles) convergent vers celles d'un mouvement brownien. Cependant, il n'a pas montré la condition de tension qui permet de conclure la convergence faible des processus.

## Références

- [1] BEZUIDENHOUT, C., AND GRIMMETT, G. R. A central limit theorem for random walks in random labyrinths. *Annales de l'Institut Henri Poincaré, Probabilités et Statistiques* 35 (1999), 631–683.
- [2] BILLINGSLEY, P. Principle for dependent random variables. *Transactions of the American Mathematical Society* 83, 1 (1956), 250–268.
- [3] BUNIMOVICH, L. A., AND SINAI, Y. G. Statistical properties of lorentz gas with periodic configuration of scatterers. *Communications in Mathematical Physics* 78 (1981), 479–497.
- [4] BUNIMOVICH, L. A., AND TROUBETZKOY, S. E. Recurrence properties of lorentz lattice gas cellular automata. *Journal of Statistical Physics* 67, 289–302 (1992).
- [5] BUNIMOVICH, L. A., AND TROUBETZKOY, S. E. Rotators, periodicity and absence of diffusion in cyclic cellular automata. *Journal of Statistical Physics* 74 (1994), 1–10.
- [6] COHEN, E. G. D., AND WANG, F. Novel phenomena in lorentz lattice gases. *Physica A* 219 (1995), 56–87.
- [7] DE MASI, A., FERRARI, P. A., GOLDSTEIN, S., AND WICK, W. An invariance principle for reversible markov processes with application to diffusion in the percolation regime. *Journal of Statistical Physics* 55, 3/4 (1989), 787–855.
- [8] DELECROIX, V., HUBERT, P., AND LELIÈVRE, S. Diffusion for the periodic wind-tree model. preprint, arXiv :1107.1810v3, 2011.
- [9] EHRENFEST, P. *Collected Scientific Papers*. M. J. Klein ed., North-Holland, 1959.
- [10] GRIMMETT, G. R. *Percolation*, second ed., vol. 321. Springer, 1999.
- [11] GRIMMETT, G. R. *Probability on Graphs*. No. 1 in Institute of Mathematical Statistics Textbooks. Cambridge University Press, 2010.
- [12] GRIMMETT, G. R., MENSHIKOV, M. V., AND VOLKOV, S. E. Random walks in random labyrinths. *Markov Process and related Fields* 2 (1996), 69–86.
- [13] HARDY, J., AND WEBER, J. Diffusion in a periodic windtree model. *Journal of Mathematical Physics* 21 (1980), 1802–1808.

- [14] HARRIS, M. Nontrivial phase transition in a continuum mirror model. *Journal of Theoretical Probability* 14, 2 (2001), 299–317.
- [15] HELLAND, I. S. Central limit theorems for martingales with discrete or continuous time. *Scandinavian Journal of Statistics* 9, 2 (1982).
- [16] HUBERT, P., LELIÈVRE, S., AND TROUBETZKOY, S. E. The ehrenfest wind-tree model : periodic directions, recurrence, diffusion. preprint, arXiv :0912.2891v1, 2009.
- [17] KIPNIS, C., AND VARADHAN, S. R. S. Central limit theorem for additive functionals of reversible markov processes and applications to simple exclusion. *Communications in Mathematical Physics* 104 (1986), 1–19.
- [18] LORENTZ, H. A. The motion of electrons in metallic bodies, i, ii, and iii. *Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam, Section of Science* 7 (1905), 438–453, 585–593, 684–691.
- [19] LYONS, R., AND PERES, Y. Probability on trees and networks. In preparation. Current version available at <http://mypage.iu.edu/~rdlyons/>, 2012.
- [20] POLLARD, D. *Convergence of Stochastic Processes*. Springer-Verlag, Berlin, 1984.
- [21] QUAS, A. N. Infinite paths in a lorentz lattice gas model. *Probability Theory and Related Fields* 114 (1999), 229–244.
- [22] RUIJGROK, T. W., AND COHEN, E. G. D. Deterministic lattice gas models. *Physics letters A* 133 (1988), 415–418.
- [23] ZIFF, R. M., KONG, X. P., AND COHEN, E. G. D. Lorentz lattice-gas and kinetic-walk model. *Physical review A* 44 (1991), 2410–2428.