Divers états du lemme fondamental

Alexis Bouthier

Vendémiaire an 218

Table des matières

1 Introduction au domaine de recherche

1.1 Motivations diverses

"En principe la formule des traces exprime la trace comme une somme sur les classes de conjugaison d'un groupe G(F), F étant un corps global et G un groupe réductif. Donc si l'on veut comparer la formule des traces pour un groupe quasi déployé G^* et pour une forme intérieure G [..], il faut trouver une application naturelle de l'ensemble des classes de conjugaison de G(F) dans celui des classes de G^*, ce qui est en général impossible. En revanche, si on passe aux classes de conjugaison stables, une telle application existe et est facile à définir. Par conséquent, il faut d'abord trouver une formule des traces qui s'exprime comme somme sur les classes de conjugaison stables". (Langlands, Les débuts d'une formule des traces stables) C'est donc dans l'élaboration d'une telle formule qu'apparaît cette identité fondamentale, à savoir le lemme fondamental. Une fois établie une telle formule, cela permet de traiter un certain nombre de cas de la fonctorialité de Langlands via la comparaison de la formule des traces. On se réferera aux travaux de Arthur [0], Kottwitz [8 ter] pour la comparaison de formule des traces ainsi qu'au livre en préparation de Harris et aux travaux de Morel pour les applications aux variétés de Shimura [13M].

1.2 De la nécéssité du lemme fondamental

On s'intéressera principalement au cas de l'algèbre de Lie. On supposera que la caractéristique du corps est toujours première au cardinal du groupe de Weyl.

1.2.1 Quelques rappels sur la section de Kostant

On considère G réductif connexe déployé sur k. On choisit $(\mathbb{B}, \mathbb{T})$ une paire de Borel déployé. On note $\mathfrak{g} = Spec(k[\mathfrak{g}^*]$ et $\mathfrak{t} = Spec(k[\mathfrak{t}^*])$ les algèbres de Lie respectives de G et $\mathbb{T}$. On note $\mathfrak{g}_{reg}$, l'ouvert de $\mathfrak{g}$ où les centralisateurs des éléments est de dimension $r :=$ rang G $= dim(\mathbb{T})$. On note $W = N_G(\mathbb{T})/\mathbb{T}$ le groupe de Weyl. On a G qui agit sur $\mathfrak{g}$ par l'action adjointe et l'action de W sur $\mathfrak{t}$. On a alors le résultat suivant dû à Chevalley :

Théorème 1 *(Chevalley, Sheppard-Todd [2], 5.5 et [2bis], [18]) On a un isomorphisme :* $k[\mathfrak{g}^*]^G = k[\mathfrak{t}^*]^W$ *obtenu par restriction des fonctions de* $\mathfrak{g}$ *à* $\mathfrak{t}$*. De plus, il existe des polynômes homogènes* $a_1, .., a_r$ *de degrés* $e_1, .., e_r$ *tels que* $k[\mathfrak{g}^*]^G$ *soit isomorphe à l'algèbre de polynômes en les variables* $a_1, .., a_r$*.*

Remarques : -Il y a plusieurs façons de choisir les polynômes a_i. En revanche, les e_i sont définis canoniquement à permutation près, on les appelle les exposants de Kostant. Dans la suite, on notera $\mathfrak{c} = k[\mathfrak{g}^*]^G$ et $\chi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{c}$ appelé le morphisme caractéristique qui est G-équivariant. Il est donné par :

$$x \to (f_1(x), .., f_r(x))$$

où les f_i sont donnés par les polynômes invariants sur l'action adjointe. On a de plus une action de $\mathbb{G}_m$ donnée par :

$$t(a_1, .., a_r) = (t^{e_1} a_1, .., t^{e_r} a_r).$$

On a alors de plus que le morphisme est $\mathbb{G}_m$-équivariant pour l'action par homothétie sur $\mathfrak{g}$ et l'action par les exposants de Kostant sur $\mathfrak{c}$. Si on se restreint à l'ouvert $\mathfrak{g}_{reg}$, on obtient le lemme sympathique suivant dû à Kostant [7] :

Lemme 1 *Le morphisme caractéristique restreint à la partie régulière* $\chi_{reg} : \mathfrak{g}_{reg} \to \mathfrak{c}$ *est lisse et ses fibres géométriques sont des classes de conjugaison de dimension* $dim\ G - r$*.*

De plus, il se trouve que par Kostant, on a une section pour ce morphisme qui nous donne un point base dans la fibre :

Théorème 2 *(Kostant, [7] théorème 0.10) Si on se fixe un épinglage* $(\mathbb{B}, \mathbb{T}, X_\alpha)$ *défini sur k, cela détermine une section* $\epsilon : \mathfrak{c} \to \mathfrak{g}_{reg}$ *au morphisme* χ_{reg}*.*

On considère la restriction de χ à $\mathfrak{t}$, $\pi : \mathfrak{t} \to \mathfrak{c}$ qui est fini plat de degré $|W|$. On note $\mathfrak{t}^{rs}$ le lieu de $\mathfrak{t}$ où l'action de W est libre, on notera alors $\mathfrak{c}^{rs}$ l'image et $\mathfrak{g}^{rs} = \chi^{-1}(\mathfrak{c}^{rs})$. La fibre en $a \in \mathfrak{c}^{rs}(\bar{k})$ consiste en une seule orbite. En effet, tout point de la fibre est régulier et on utilise alors le lemme ci-dessus. De plus si $\gamma, \gamma' \in \mathfrak{c}^{rs}$, on sait qu'il existe $g \in G(\bar{k})$ tel que $ad(g)\gamma = \gamma'$ qui définit donc un isomorphisme $ad(g) : I_\gamma \overset{\approx}{\to} I_{\gamma'}$ où I_γ, $I_{\gamma'}$ sont les centralisateurs respectifs de γ et γ'.

Et deux tels éléments g et g' ne diffèrent que par un élément de I_γ, qui compte tenu de l'hypothèse sur a, est commutatif. On a alors que les différents centralisateurs sont canoniquement isomorphes. Il existe donc un tore J_a qui ne dépend que de a et tel que pour tout $\gamma \in \chi^{-1}(a)$, on a $I_\gamma = J_a$.

1.2.2 Classes de conjugaison stable

Soit F un corps qui contient k. On considère $\gamma \in \mathfrak{g}_{rs}(F)$, $a = \chi(\gamma) \in \mathfrak{c}^{rs}(F)$. On note ϵ la section de Kostant et on pose $\gamma_0 := \epsilon(a) \in \mathfrak{g}(F)$. Comme γ et γ_0 sont géométriquement conjugués d'où $\gamma = ad(g)\gamma_0$, $g \in G(\bar{F})$ et comme γ, γ_0 sont rationnels, on obtient que :

$$\forall \sigma \in \Gamma_F, g^{-1}\sigma(g) \in I_{\gamma_0} = J_a(\bar{F}).$$

En ce cas, on dira que γ et γ_0 sont stablement conjugués. On a alors que $\sigma \to g^{-1}\sigma(g)$ définit $inv(\gamma, \gamma_0) \in H^1(F, J_a)$, indépendant du choix de g. On a ensuite un morphisme de $H^1(F, J_a) \to H^1(F, G)$ qui vient de la flèche de $J_a \to G$, qui dépend de la section choisie.
On observe alors que les classes de G(F)-conjugaison dans l'ensemble des F-points est en bijection avec :

$$Ker(H^1(F, J_a) \to H^1(F, G))$$

cf([10]).
Remarques : On voit que dans le cas de GL_n, stablement conjugué implique rationnellement conjugué par Hilbert 90, ce qui est faux en général et c'est cette raison qui est à l'origine de la théorie de l'endoscopie. Nous allons voir désormais comment à l'aide de la dualité de Tate-Nakayama, on peut calculer les groupes de cohomologie en question.
Soit F_v un corps local de groupe de Galois absolu Γ_v. On considère G déployé sur F_v. Soit $\hat{T}$ le tore dual de T tel que $X^*(\hat{T}) = X_*(T)$. En choisissant un point $x \in \mathfrak{t}(\bar{F}_v)$ au dessus de $a \in \rfloor^{rs}(F_v)$, on a un isomorphisme de $J_{a,x} \overset{\cong}{\to} T$ et un homomorphisme $\rho_x : Gal(\bar{F}_v/F_v) \to W$, qui vient du morphisme étale de groupe W. Cet homomorphisme définit une action finie de Γ_v sur $X^*(\hat{T}) = X_*(T)$ et donc sur le tore complexe $\hat{T}$. On a alors les résultats suivants :

Théorème 3 *(Kottwitz [8])*
(i) $H^1(F_v, G)^* = \pi_0(Z_{\hat{G}})$, *ici le dual est pris comme* $Hom(-, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$.
(ii) $H^1(F_v, T)^* = \pi_0(\hat{T}^{\Gamma_v})$.

1.2.3 Enoncés des divers lemmes fondamentaux

Définition 1 *Soit κ un élément semi-simple de $\hat{T}^{\Gamma_v}$ d'ordre fini modulo $Z_{\hat{G}}$. Soit $f \in C_c^\infty(\mathfrak{g}(F_v))$, i-e localement constante à support compact de $\mathfrak{g}(F_v)$. On définit la κ-intégrale orbitale de classe de conjugaison stable $a \in \mathfrak{c}(F_v)$ de f comme la somme :*

$$\boldsymbol{O}_a^\kappa(f, dt_v) = \sum_\gamma \langle inv(\gamma, \gamma_0), \kappa \rangle \, \boldsymbol{O}_\gamma(f; dt_v)$$

où γ parcourt les classes de $G(F_v)$-conjugaison de la classe de conjugaison stable de a et γ_0 le point base défini par la section de Kostant et dt_v mesure de Haar du tore $J_a(F_v)$. On rappelle que :

$$\boldsymbol{O}_\gamma(f, dt_v) := \int_{I_\gamma(F_v)\backslash G(F_v)} f(ad(g)^{-1}\gamma) \frac{dg_v}{dt_v}.$$

Elle dépend évidemment du choix des mesures de Haar de dg_v et dt_v, pour dg_v, on choisira celle telle que $G(\mathcal{O}_v)$ ait le volume 1.

Définition 2 *Soit G un groupe connexe réductif déployé sur k. La donnée d'un tel groupe est équivalente à la donnée du quadruplet $(R, \check{R}, X_*, X^*)$ où R et $\check{R}$ désignent respectivement les racines et coracines simples. On définit alors le dual de Langlands le groupe $\hat{G}$ défini par le quadruplet où on échange racines et coracines.*

Remarques : Si le groupe n'est pas déployé, il faut rajouter une action de Galois. Si G est GL_n, le dual est GL_n et si $G = SL_n$, $\hat{G} = PGL_n$.

Définition 3 *Une donnée endoscopique de G sur F est un couple (κ, ρ), où κ est un élément semi-simple de $\hat{G}$, $\rho : Gal(\bar{F}/F) \to \pi_0(\hat{G}_\kappa)$. On appelle groupe endoscopique, le groupe H tel que $\hat{H} = \hat{G}_\kappa^0$.*

Exemple : Si on prend $G = Sp_{2n,\mathbb{C}}$, alors le dual est de SO_{2n+1} et en prenant la matrice :

$$\begin{pmatrix} -I_2 & 0 \\ 0 & I_{2n-2} \end{pmatrix}$$

on obtient comme groupe endoscopique $SO_2 \times Sp_{2n-2}$ avec action triviale de Galois. On a de même pour H un morphisme caractéristique $\mathfrak{h} \to \mathfrak{c}_H$. Il vient également un morphisme fini de $\mathfrak{t} \to \mathfrak{c}_H = \mathfrak{t}/W_H$ où W_H est le groupe de Weyl de H. Ce groupe s'identifie à un sous groupe de W et on obtient un morphisme fini $\mathfrak{c}_H \to \mathfrak{c}$ qui permet le transfert des classes de conjugaison stables de H à G.

Conjecture de Langlands-Shelstad :
Soit (κ, ρ) une donnée endoscopique non ramifiée (i-e ρ non ramifiée, ce qui implique que H provient d'un schéma sur $Spec(\mathcal{O}_v)$) et F un corps local de caractéristique p. On note q le cardinal de son corps résiduel. On note 1_G la fonction caractéristique de $\mathfrak{g}(\mathcal{O}_v)$ dans $g(F_v)$ et de même 1_H la fonction caractéristique pour $\mathfrak{h}$. Soit $a_H \in \mathfrak{c}_H(F_v)$ d'image $a \in \mathfrak{c}^{rs}(F_v)$. Alors on a l'égalité :

$$\mathbf{O}_a^{\kappa}(1_G, dt_v) = \epsilon_a^{G,H}\mathbf{SO}_{a_H}(1_H, dt_v)$$

où $\epsilon_a^{G,H}$ est une certaine puissance de q que nous ne définirons pas et

$$\mathbf{SO}_{a_H}(1_H, dt_v) := \sum_{\gamma\in\chi^{-1}(a_H)} \mathbf{O}_{\gamma}(f, dt_v).$$

Remarques : En fait, cette conjecture s'énonce pour n'importe quel corps local, mais elle a une forme plus simple dans le cas d'égale caractéristique. On peut remplacer $\mathbf{SO}_{a_H}(1_H, dt_v)$ par $\mathbf{O}^{\kappa}_{a_H}(1_H, dt_v)$ puisque que comme $\kappa \in Z_{\hat{H}}$, l'accouplement est toujours égal à un.

Variantes : On peut également énoncer une variante pour toute fonction $f \in C_c^{\infty}(\mathfrak{g}(F_v))$ dûe à Waldspurger où l'on remplace la fonction 1_G par f et 1_H par une fonction sur h adéquate. De même, il existe une variantepour les groupes et une fonction f de l'algèbre de Hecke.

Statut : Cette conjecture a une longue histoire et beaucoup de mathématiciens se sont penchés sur le problème. Il a été démontré par Waldspurger par des arguments analytiques que le lemme fondamental de Langlands-Shelstad ainsi qu'une variante appelée le lemme fondamental non standard, impliquaient toutes les autres variantes [20], [23]. De plus, toujours par Waldspurger [22] et Clukers-Loeser [3], on peut se restreindre au cas où est F est d'égales caractéristiques. Des cas particuliers ont été traités déjà par Langlands [9], Rogawski [18] dans le cas de U_3, Hales pour Sp_4 [5]. Le cas également important de SL_n a été traité par Waldspurger dans [24].
Un grand pas a été fait avec l'article de Laumon-Ngô [13] sur le cas des groupes unitaires pour aboutir à la preuve définitive de Ngô en 2008 dans le cas général [16]. On a également un lemme fondamental pondéré conjecturé par Arthur [0bis] et démontré par Laumon et Chaudouard [12 bis] suivant la méthode élaborée par Ngô [16].
Cette variante a pour objectif de stabiliser la formule des traces d'Arthur-Selberg. Commençons par rappeler quelques définitions.
On considère un élément semi-simple s de $\hat{G}$, on considère alors M un sous-groupe de Levi de G et on notera M' le groupe endoscopique associé à s. Lorsque s_1 parcourt $sZ_{\hat{M}}$ où $Z_{\hat{M}}$ est le centre de $\hat{M}$, la famille formée des composantes neutres $\hat{G}_{s_1}$ des centralisateurs de s_1 dans $\hat{G}$ est finie. Indexons la sous-famille des centralisateurs maximaux (pour l'inclusion) par l'ensemble $[n] = \{1, .., n\}$ pour un certain entier n. Pour chaque partie $I \subset [n]$ non vide, on pose : $\hat{G}_I = \bigcap_{i\in I} \hat{G}_i^0$.
On considère $\gamma \in \mathfrak{g}(F)$ un élément G-régulier. Nous avons besoin d'introduire un certain paramètre de troncature adapté à M que nous notons D. On lui associe une fonction poids à valeurs entières :

$$x \in G(F) \to v_D^G(x)$$

invariante à gauche par M(F) et à droite par $G(\mathcal{O})$. Pour tout $\gamma' \in \mathfrak{J}(F)$, on définit d'après Langlands un accouplement $\langle s, \gamma' \rangle$ qui est une racine de l'unité. Cet accouplement ne dépend que de la classe de M(F)-conjugaison de γ'. On définit la s-intégrale orbitale pondérée :

$$J_D^{G,s}(\gamma) = \sum_{\gamma'} \langle s, \gamma' \rangle \int_{I_{\gamma'(F)} \backslash G(F)} 1_{I_\gamma}(ad(g)^{-1}(\gamma')) v_D^G(g) dg$$

où γ' parcourt un système de représentants des classes de M(F)-conjugaison dans la classe de conjugaison stable de γ. Pour chaque partie $I \subset [n]$ non vide, le paramètre D est adapté à M'. On a donc de même un poids $v_D^{G_I}$ et une intégrale pondérée $J_D^{G_I,s}(\gamma)$.

Théorème 4 *(Lemme fondamental pondéré) Si la caractéristique de $\mathbb{F}_q$ est assez grande par rapport à G, pour des paramètres de troncature D assez réguliers, on a la relation :*

$$\Delta_s(\gamma) J_D^{G,s}(\gamma) = \sum_I (-1)^{|I|-1} q^{d_I(\gamma)} J_D^{G_I,s}(\gamma)$$

où $\Delta_s(\gamma)$est un signe et $d_I(\gamma)$ est la demi-somme des valuations de $\alpha(\gamma)$ pour γ parcourant les racines de G qui ne sont pas dans G_I .

1.2.4 Formule des traces stables

On considère donc X une courbe projective lisse géométriquement connexe sur $k = \mathbb{F}_p$. On note F le corps de fonctions de X. Le groupe G est défini sur k et est supposé semi-simple. On note $Ker^1(F, G) = Ker(H^1(F, G) \to \prod_v H^1(F_v, G))$. Nous reprenons le calcul de la stabilisation tel qu'il est fait dans Langlands [9], Kottwitz [8bis] et Ngô [16]. On considère la formule des traces sur les classes localement triviales :

$$S := \sum_{\xi \in Ker^1(F,G)} \sum_{\gamma \in \mathfrak{g}^{\xi,ani}(F)/\approx} \mathbf{O}_\gamma(1_G, dt_v)$$

où :
(i) γ parcourt les classes de conjugaison régulières semi-simples, anisotropes dans $\mathfrak{g}^\xi(F \otimes \bar{k})$.
(ii) $\mathfrak{g}^\xi$ est la forme de $\mathfrak{g}$ tordue par ξ.
(iii) $\mathbf{O}_\gamma(1_G, dt_v)$ est l'intégrale orbitale globale sur l'anneau des adèles.
On considère le morphisme de Chevalley $\chi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{c}$ ainsi que ses formes tordues $\chi^\xi : \mathfrak{g}^\xi \to \mathfrak{c}$. On remarque que le groupe des automorphismes de G agit sur $\mathfrak{c}$ par automorphismes extérieurs, donc la torsion par ξ n'affecte pas $\mathfrak{c}$ et donc toute classe de conjugaison γ de $\mathfrak{g}^\xi$ définit un élément $a \in \mathfrak{c}(F)$. Comme le centralisateur de γ semi-simple régulier ne dépend que de a, il existe un sous ensemble $\mathfrak{c}^{ani}(F)$ qui provient des classes semi-simples régulières anisotropes. On peut récrire S sous la forme :

$$S := \sum_{a \in \mathfrak{c}^{ani}(F)} \sum_{\xi \in Ker^1(F,G)} \sum_{\gamma \in \mathfrak{g}^{\xi,ani}(F)/\approx, \chi(\gamma)=a} \mathbf{O}_\gamma(1_G, dt_v)(**)$$

Comme on s'est restreint à la partie anisotrope, on a que le centralisateur régulier J_a est anisotrope et donc que le tore dual est muni d'une action finie de Γ_F telle que le groupe des points fixes J_a^Γ est fini. Pour tout $\xi \in Ker^1(F, G)$, les classes de conjugaison

$\gamma \in \mathfrak{g}^\xi$ telles que $\chi(\gamma) = a$ sont en bijection avec $H^1(F, J_a)$ dont l'image dans $H^1(F, G)$ par l'application $\gamma \to inv(\gamma_0, \gamma)$.

Ainsi l'ensemble de paires (ξ, γ) où $\xi \in Ker^1(F, G)$ et γ est une classe de conjugaison dans $\mathfrak{g}^\xi(F)$ d'image $a \in \mathfrak{c}^{ani}(F)$ est en bijection avec :

$$Ker[H^1(F, J_a) \to \prod_v H^1(F_v, G)].$$

Pour qu'une collection $(\gamma_v)_{v\in X}$ de $\mathfrak{g}(F_v)$ avec $\chi(\gamma_v) = a$ provienne d'une paire (ξ, γ), il faut et il suffit que $\gamma_v = \gamma_0$ pour presque tout v et que :

$$\sum_{v\in X} \alpha_{v, J_a^\Gamma} = 0 \text{ où } \alpha_v = inv_v(\gamma_0, \gamma)$$

d'après Kottwitz [8]. Si c'est le cas le nombre de telles paires (ξ, γ) est égal au cardinal du groupe $Ker^1(F, J_a)$. En introduisant les intégrales orbitales locales, la somme se récrit :

$$S := \sum_{a\in \mathfrak{c}^{ani}(F)} \left|Ker^1(F, J_a)\right| \tau(J_a) \sum_{(\gamma_v)_{v\in X}} \prod_v \mathbf{O}_{\gamma_v}(1_G, dt_v)$$

où $\tau(J_a) = vol(J_a(F)\backslash J_a(\mathbb{A}), \otimes_{v\in X} dt_v)$ et les γ_v vérifient la condition ci-dessus. En utilisant la formule d'Ono [17], on a que :

$$\left|Ker^1(F, J_a)\right| \tau(J_a) = \pi_0(\hat{J}_a^\Gamma)$$

et la somme devient :

$$S := \sum_{a\in \mathfrak{c}^{ani}(F)} \left|\pi_0(\hat{J}_a^\Gamma)\right| \sum_{(\gamma)_{v\in X}} \prod_v \mathbf{O}_{\gamma_v}(1_G, dt_v).$$

Or l'hypothèse d'anisotropie impose que $\hat{J}_a^\Gamma$ est fini et donc $\pi_0(\hat{J}_a^\Gamma) = \hat{J}_a^\Gamma$. En opérant une transformation de Fourier sur ce groupe fini, on déduit la formule suivante :

$$S := \sum_{a\in \mathfrak{c}^{ani}(F)} \sum_{\kappa\in J_a^\Gamma} \mathbf{O}_a^\kappa(1_G, \otimes dt_v)$$

Il nous faut maintenant permuter les sommes. On choisit donc un plongement de $\hat{J}_a^\Gamma$ dans $\hat{G}$, κ définit alors une classe de conjugaison semi-simple $[\kappa]$. L'intersection $\hat{J}_a^\Gamma \cap [\kappa]$ ne dépend pas du choix du plongement. On obtient alors :

$$S := \sum_{[\kappa]\in \hat{(G)}/\approx} \sum_{a\in \mathfrak{c}^{ani}(F)} \sum_{\kappa\in J_a^\Gamma\cap[\kappa]} \mathbf{O}_a^\kappa(1_G, \otimes dt_v)$$

Si on suppose de plus que G est semi-simple adjoint, en ce cas le groupe dual est simplement connexe et les centralisateurs sont connexes. Pour chaque classe de conjugaison $[\kappa]$, on choisit un représentant $\kappa \in \hat{G}$, on a alors que $H = \hat{G}_\kappa$ est réductif connexe. Comme on s'est restreint à la partie anisotrope, on ne regarde que les H qui sont semi-simples. Si H est semi-simple, en regardant le morphisme :

$$\nu_H : \mathfrak{c}_H^{ani}(F) \to \mathfrak{c}^{ani}(F).$$

Un élément a est dans l'image de $v_{[\kappa]}$ si et seulement si $\hat{J}_a^\Gamma \cap [\kappa]$ est non-vide. De plus, on a une bijection canonique entre l'ensemble $\hat{J}_a^\Gamma \cap [\kappa]$ et l'ensemble des $a_H \in \mathfrak{c}_H^{ani}(F)$ dans la pré-image de a. Ainsi en supposant le lemme fondamental, la somme devient :

$$S := \sum_H \sum_{a_H \in \mathfrak{c}^{ani}(F)} \mathbf{SO}_a(1_G; \otimes_v dt_v)$$

où la première somme porte sur les classes d'équivalence des groupes endoscopiques de G. On a donc obtenu la formule des traces que l'on cherchait. Maintenant, une des étapes cruciales dans la preuve du lemme fondamental va être la reformulation géométrique de cette formule.

1.3 Fibration de Hitchin

On conserve ici X une courbe projective lisse géométriquement connexe sur k. On considère D n'importe quel fibré inversible de degré assez grand tel que $D = D'^2$ pour un certain D'.

Définition 4 *On définit l'espace de Hitchin M, le groupoïde qui associe à tout k-schéma S, le groupoïde* $M(S) = \{(E, \phi) \text{avec } E \text{ G-torseur sur } X \times S, \phi \in H^0(X \times S, ad(E) \otimes D)\}$ *où ad(E) est le fibré en algèbres de Lie obtenu en tordant par l'action d'adjointe.*

Remarques : dans le cas $G = GL_n$, le fibré ad(E) n'est rien d'autre que le fibré vectoriel End(E). On note $P_1, .., P_r$ les polynômes invariants de $\mathfrak{g}$ de degrés $d_1, .., d_r$ invariants sous G. Si $\phi \in H^0(X \times S, ad(E) \otimes D)$, $P_i(\phi) \in H^0(X, D^{\otimes d_i})$. On a alors une flèche :

$$\mathcal{M} \to \mathbb{A} := \oplus_{i=1}^r H^0(X, D^{\otimes d_i})$$

C'est cette flèche que l'on appelle la fibration de Hitchin, qui a été introduite dans son article [6]. Nous allons maintenant tâcher de décrire la fibre dans le cas de GL_n. On remarquera au passage que l'existence de la section de Kostant nous assure que la fibre est toujours non vide.

1.3.1 Le cas de GL_n

En ce cas un le morphisme de Hitchin est donné par :

$$(E, \phi) \to (a_1(\phi), .., a_r(\phi)) := a \in \mathbb{A}(\bar{k})$$

où les a_i sont tels que $det(x - \phi) = x^n + a_1 x^{n-1} + .. + a_n$.
Prenons donc un élément $a \in \mathbb{A}(\bar{k})$. On appelle K l'espace total du fibré D et on note $\pi^* D$ l'image réciproque de D sur T. En ce cas, on dispose de la section tautologique λ et on considère alors le lieu des zéros de la section :

$$P_a(\lambda) := \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + .. + a_n.$$

On appelle la courbe algébrique définie ainsi la courbe spectrale, notée Y_a. Elle nous fournit un morphisme fini plat de degré n, $\pi_a : Y_a \to X$ vers X. On a alors par Bertini que pour des a assez génériques, la courbe spectrale est lisse. De plus, on a la propriété suivante :

Proposition 1 *Soit $a \in \mathbb{A}(\bar{k})$ tel que la courbe spectrale est lisse et connexe, on a alors que $\mathcal{M}_a = Jac(Y_a)$.*

Preuve 1 *Soit $\mathcal{L}$ un fibré inversible sur Y_a, alors $\pi_{a*}\mathcal{L}$ est un fibré vectoriel de rang n sur X avec une structure de $\pi_{a*}\mathcal{O}_{Y_a}$-module. Réciproquement, comme π est affine, un fibré vectoriel E de rang n avec une structure de $\pi_{a*}\mathcal{O}_{Y_a}$-module, provient d'un fibré d'un faisceau L tel que $\pi_{a*}\mathcal{L} = E$ et la courbe étant intègre et lisse, on obtient que $\mathcal{L}$ est un fibré inversible. De plus, la $\mathcal{O}_X$-algèbre $\pi_{a*}\mathcal{O}_{Y_a}$ est isomorphe à $Sym(K^{-1})/\mathcal{I}$ et la structure de $\pi_{a*}\mathcal{O}_{Y_a}$-module sur E est donnée par un morphisme d'algèbres :*
$Sym(K^{-1})/\mathcal{I} \to \mathcal{E}nd(E)$
i-e une section $\phi : E \to E \otimes K$ avec $P_a(\phi) = 0$ Comme de plus, la courbe spectrale est irréductible, on a que P_a est irréductible et est donc le polynôme caractéristique de ϕ. Réciproquement, un point $(E, \phi) \in \mathcal{M}_a$ vérifie bien que $P_a(\phi) = 0$, ce qu'on voulait.

De manière analogue, on démontre la proposition suivante :

Proposition 2 *Soit $G = SO_{2n}$. Soit $a \in \mathbb{A}(\bar{k})$ tel que la courbe spectrale est réduite, on a alors que $\mathcal{M}_a = \{\mathcal{L}$, sans torsion de rang générique un, munis d'un isomorphismeι : $\mathcal{L} \to \tau^*\mathcal{L}^*\}$ vérifiant l'équation $\iota_{\mathcal{L}} = \tau^*\mathcal{L}^*$ où $\mathcal{L}^* = \mathcal{H}om_{Y_a}(\mathcal{L}, \omega_{Y_a/X})$.*

Pour la suite, on va avoir besoin d'une réinterprétation de la fibration de Hitchin sous la forme suivante : $\mathcal{M}(S)$ est le groupoïde des morphismes h_E qui s'insèrent dans le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} X \times S \arrow[r, "h_{E,\phi}"] \arrow[dr, "h_D"'] & {[\mathfrak{g}/G \times \mathbb{G}_m]} \arrow[d] \\ & \mathbf{B}\mathbb{G}_m \end{tikzcd}$$

Le morphisme de Chevalley $\chi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{c}$ induit un morphisme entre les quotients :

$$[\chi/\mathbb{G}_m] : [\mathfrak{g}/G \times \mathbb{G}_m] \to [\mathfrak{c}/\mathbb{G}_m].$$

On obtient un morphisme $f : \mathcal{M} \to \mathbb{A}$ où pour tout k-schéma S, $\mathbb{A}(S)$ est le groupoïde des morphismes h_a qui s'insèrent dans le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} X \times S \arrow[r, "h_a"] \arrow[dr, "h_D"'] & {[\mathfrak{c}/\mathbb{G}_m]} \arrow[d] \\ & \mathbf{B}\mathbb{G}_m \end{tikzcd}$$

Enfin, nous terminons sur le théorème crucial suivant :

Théorème 5 *([16] Prop 6.1.5) Le morphisme $f^{ani} : \mathcal{M}^{ani} \to \mathbb{A}^{ani}$ est propre et lisse.*

1.3.2 Comptage des points de la fibre de Hitchin, d'après Ngô [16] 8.4

Soit (E, ϕ) un point de $\mathcal{M}^{ani}(k)$. Le G-torseur E sur X détermine au point générique une classe : $cl(E_F) \in H^1(F, G)$ dont l'image est nulle dans tous les $H^1(F_v, G)$, $v \in X$, puisque $H^1(Spec(\mathcal{O}_v), G) = 0$ par un théorème de Lang. On découpe les points de $\mathcal{M}^{ani}(k)$ selon les classes $\xi \in Ker^1(F, G)$. Pour chaque $\xi \in Ker^1(F, G)$, on construit un torseur modèle $\mathbb{E}^{\xi}$ sur X, en considérant sur la fibre générique un torseur $\mathbb{E}^{\xi}_{\eta}$ que l'on prolonge en un torseur $\mathbb{E}^{\xi}_{U}$ sur un certain ouvert U. Sur un point v du complémentaire, il ne reste plus qu'à recoller avec le G-torseur trivial sur $Spec(\mathcal{O}_v)$, ce qui est licite puisque la restriction de $\mathbb{E}^{\xi}_{U}$ à F_v est triviale. La donnée d'un G-torseur E muni d'un isomorphisme ι avec E au point générique consiste en la donnée pour toute place v, d'un élément $g_v \in G(F_v)/G(\mathcal{O}_v)$ trivial sauf en un nombre fini de places. On écrit $D = \mathcal{O}_X(\sum_{v \in X} d_v v)$ avec les d_v entiers presque tous nuls. Ayant choisi un isomorphisme avec le torseur modèle génériquement, le donnée $\phi \in H^0(X, ad(E) \otimes D)$ revient à la donnée d'un élément anisotrope :

$$\gamma \in \mathfrak{g}^{\xi, ani}(F).$$

L'élément doit en plus vérifier une condition d'intégralité :
$ad(g_v)^{-1}(\gamma) \in \epsilon^{-d_v}\mathfrak{g}(\mathcal{O}_v)$ pour toutes les places.
Si maintenant on supprime la rigidification, on obtient la proposition suivante :

Proposition 3 *(Ngô) On a une équivalence de catégories entre $\mathcal{M}^{ani}(k)$ et la catégorie dont les objets sont les triplets $(\xi, \gamma, (g_v)_{v \in X})$ avec :*
-$\xi \in Ker^1(F, G)$,
-$\gamma \in \mathfrak{g}^{\xi}(F)$,
-pour toutes places v de F, on dispose d'une classe $g_v \in G(F_v)/G(\mathcal{O}_v)$,
-$ad(g_v)^{-1}\gamma \in \epsilon^{-d_v}\mathfrak{g}(\mathcal{O}_v)$
et dont l'ensemble des flèches d'un objet $(\xi, \gamma, (g_v)_{v \in X})$ sur un autre objet $(\xi', \gamma', (g'_v)_{v \in X})$ est :
-vide si $\xi \neq \xi'$,
-les éléments de $h \in G(F)$ tels $\gamma' = ad(h)\gamma$ et $g'_v = hg_v$ si $\xi = \xi'$.

On obtient donc la formule suivante :

$$\left|\mathcal{M}^{ani}(\mathbb{F}_q)\right| = \sum_{\xi \in Ker^1(F,G)} \sum_{\gamma \in g^{\xi, ani}(F)/\approx} \mathbf{O}_{\gamma}(1_G, dt_v)$$

On obtient donc une partie de la formule des traces stabilisée. Nous allons maintenant tâcher d'obtenir l'autre côté.

1.3.3 Action du champ de Picard sur l'espace de Hitchin

On dispose du schéma des centralisateurs I au dessus de $\mathfrak{g}$, dont la fibre en un point x de $\mathfrak{g}$ est le schéma $I_x := \{g \in G/ad(g)x = x\}$. On a alors le lemme suivant :

Lemme 2 *(Ngô [14], Prop 3.2) Il existe un unique schéma en groupes lisse commutatif J sur* $\mathfrak{c}$ *muni d'un isomorphisme G-équivariant :* $\chi^* J_{reg} \xrightarrow{\approx} I_{\mathfrak{g}_{reg}}$ *et cet isomorphisme se prolonge en un morphisme de* $\chi^* J \to I$*. On appellera J le centralisateur régulier.*

Remarque : On remarque qu'en posant $J := \epsilon^* I$, J est indépendant de la section choisie en vertu du lemme précédent. Nous allons maintenant utiliser ce centralisateur régulier pour définir une action la fibre de Hitchin. A tout S-point $a \in \mathbb{A}$, on a un morphisme $h_a : X \times S \to [\mathfrak{c}/\mathbb{G}_m]$ qui lui est associé. On note $J_a = h_a^* J$ et on considère le groupoïde $P_a(S)$ des J_a-torseurs sur $X \times S$. En faisant varier a, on obtient un groupoïde fibré au-dessus de M. De plus, en considérant le morphisme $\chi^* J \to I$, on obtient un morphisme de : $J_a \to Aut_{X \times S}(E, \phi) = h_{E,\phi}^* I$.
Ainsi, cela nous permet de tordre le fibré de Hitchin par J_a. Ceci nous définit donc une action du groupoïde $P_a(S)$ sur $\mathcal{M}_a(S)$. A nouveau, en faisant varier a, on obtient une action de P sur $\mathcal{M}$ au-dessus de $\mathbb{A}$. On a le théorème de lissité suivant :

Théorème 6 *(Ngô [14] Prop 5.2) Le morphisme* $P^{ani} \to \mathbb{A}^{ani}$ *est lisse.*

Remarques : En fait, dans [14], il est montré que le morphisme est lisse sur un plus grand ouvert, mais nous n'aurons pas besoin de ce résultat. Maintenant, une possibilité pour obtenir l'autre côté de la formule des traces est d'utiliser la formule des traces de Grothendieck-Lefschetz :

$$|X(\mathbb{F}_q)| = \sum_i (-1)^i Tr(Fr, H^i(X, \bar{\mathbb{Q}}_l)),$$

pour X un truc propre et lisse. Nous alons donc nous intéresser à la cohomologie des fibres de Hitchin, sachant qu'on a une action de P sur M. On commence par le lemme suivant dit d'homotopie :

Lemme 3 *(Laumon-Ngô [15], Prop 3.2) on considère* $f : X \to S$ *et* $\pi : G \to S$ *un S-schéma en groupes lisse à fibres géométriquement connexes agissant sur X. Alors G(S) agit trivialement sur chaque faisceau de cohomologie* $H^n(f_*(\bar{\mathbb{Q}}_l))$*.*

On voit donc que l'action de P_a se factorise par $\pi_0(P_a)$ et de plus, on sait caractériser ce groupe dans le cas de caractéristiques $a \in \mathbb{A}^{ani}(\bar{k})$.

Théorème 7 *(Ngô [14], Cor 7.6) Soit* $a \in \mathbb{A}^{ani}(\bar{k})$*, alors* $\pi_0(P_a)$ *est un groupe fini.*

Grâce à cela, on obtient une décomposition de la cohomologie de la fibre, si $a \in \mathbb{A}^{ani}(\bar{k})$, selon les composantes isotypiques :

$$H^i(\mathcal{M}_a, \bar{\mathbb{Q}}_l) \oplus_{\kappa : \pi_0(P_a) \to \bar{\mathbb{Q}}_l^*} H^i(\mathcal{M}_a, \bar{\mathbb{Q}}_l)_\kappa$$

Si maintenant a est défini sur k, examinons l'action du Frobenius sur la cohomologie de la fibre. Certains $\kappa : \pi_0(P_a) \to \bar{\mathbb{Q}}_l^*$ ne sont pas stables par σ, mais aurons une contribution nulle dans la formule des traces. Ceux qui sont stables définissent un caractère $\kappa : \pi_0(P_a)_\sigma \to \bar{\mathbb{Q}}_l^*$ des coinvariants sous σ. Par la formule de Grothendieck-Lefschetz rappelée ci-dessus, on obtient que :

$$|\mathcal{M}_a(\mathbb{F}_q)| = \sum_{\kappa:\pi_0(P_a)_\sigma \to \bar{\mathbb{Q}}_l^*} Tr(Fr, H^\bullet \mathcal{M}_a, \bar{\mathbb{Q}}_l)_\kappa.$$

Il ne nous faut maintenant identifier $\pi_0(P_a)_\sigma$ avec les caractères endoscopiques et relier les composantes isotypiques aux κ-intégrales orbitales.

Proposition 4 *(Ngô [14], Prop 9.1) Soit $\kappa : \pi_0(P_a)_\sigma \to \bar{\mathbb{Q}}_l^*$, si il est σ-invariant, on a l'égalité suivante :*

$$Tr(Fr; H^\bullet(\mathcal{M}_a, \bar{\mathbb{Q}}_l))_\kappa = \boldsymbol{O}_a^\kappa(1_D)$$

Nous avons obtenu d'ores et déjà une formule obtenue au début, $a \in \mathbb{A}^{ani}(\bar{k})$:

$$T := \sum_{\kappa \in J_a^\Gamma} \mathbf{O}_a^\kappa(1_G, \otimes dt_v) = \sum_{\xi \in Ker^1(F,G)} \sum_{\gamma \in \mathfrak{g}^{ani,\xi}/\approx, \chi(\gamma)=a} \mathbf{O}_\gamma(1_G, \otimes dt_v).$$

Néanmoins, il reste encore beaucoup de travail avant d'arriver à stabilisation géométrique, mais la preuve, voire même les énoncés nécessaires à la preuve ne tiendraient pas dans la marge. Nous nous contentons donc d'énoncer le résultat final.

Théorème 8 *(Stabilisation géométrique)(Ngô [16], Th 6.4.3) Soit G semi-simple adjoint. Pour tout κ, il existe un isomorphisme :*

$$\oplus_n^p H^n(f_*^{ani}\bar{\mathbb{Q}}_l)_{[\kappa]} \to \oplus_n \nu_*^p H^n(f_{H,*}^{ani}\bar{\mathbb{Q}}_l)_\kappa[-2r](-r)$$

où $r = deg(a_H^*[R_H^G])$ pour $a_H \in \mathbb{A}_H^{ani}(\bar{k})$.

1.4 Quelques remarques sur le sujet de thèse

Le sujet de thèse concerne le lemme fondamental pour l'algèbre de Hecke. Comme nous l'avons déjà vu, il est impliqué par le lemme fondamental pour l'algèbre de Lie par voie analytique d'après Waldspurger. L'objectif de cette thèse est de redémontrer ce théorème par voie géométrique. Il s'agit donc d'introduire une fibration de Hitchin pour les groupes. Cette fois-ci la section de Kostant est remplacée par celle de Steinberg. En effet, on a à nouveau un morphisme :

$$\chi : G \to T/W$$

qui est G-équivariant pour l'action triviale à droite et pour l'action par conjugaison à gauche. Si on se restreint à un certain ouvert U, on a que la fibre de $a \in U$ est également un espace homogène sous l'action de G, dont les points rationnels forment une classe de conjugaison stable. Un deuxième ingrédient important est le transfert des fonctions de l'algèbre de Hecke pour un groupe endoscopique H de G. On a de même que pour l'algèbre de Lie un morphisme fini de $T/W_H \to T/W$ qui permet de transférer les classes de cojugaison stable. On a par ailleurs un morphisme :

$$b : \mathcal{H} \to \mathcal{H}_H$$

qui se déduit du morphisme du côté dual de $\hat{H} \to \hat{G}$. On donne alors l'énoncé souhaité :

Lemme fondamental : Pour tout $a_H \in T/W(F)$ d'image $a \in (T/W)^{fr}(F)$ et pour tout $\gamma \in \chi^{-1}(a)(F)$, pour tout $f \in \mathcal{H}$, on a l'égalité :

$$SO_{a_H}(b(f)) = \epsilon q^* O_\gamma^\kappa(f)$$

où ϵ est un signe et $*$ un entier.

Bibliographie :

[0] Arthur J., An introduction to the trace formula. in Harmonic analysis, the trace formula, and Shimura varieties, 1-263, Clay Math. Proc., 4, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005.

[0 bis] J. Arthur. A stable trace formula. I. General expansions. J. Inst. Math. Jussieu, 1(2) :175-277, 2002.

[1] Beilinson A., Bernstein J., Deligne P. : Faisceaux pervers. Astérisque 100 (1982).

[2] Bourbaki N. Groupes et algèbres de Lie, chapitres 4,5 et 6. Masson, Paris 1981.

[2 bis] Chevalley C. Invariants of finite groups generated by reflections. Amer. J. Math 67 (1955), 778-782.

[3] Cluckers, R., Loeser, F. Fonctions constructibles exponentielles, transformation de Fourier motivique et principe de transfert . Comptes Rendus de l'Acad. des Sciences de Paris 341, 741-746 (2005).

[4] Deligne P. : La conjecture de Weil II. Publ. Math. de l'I.H.E.S 52 (1980) 137-252.

[5] Hales, T. : The fundamental lemma for Sp_4. Proc. Amer. Math. Soc. 125 (1997) no. 1, 301-308.

[6] Hitchin N. : Stable bundles and integrable connections. Duke Math. J. 54 (1987) 91-114.

[7] Kostant B. : Lie group representations on polynomial rings. Amer. J. of Math. 85 (1963) 327-404.

[8] Kottwitz R. Stable trace formula : cuspidal tempered terms. Duke Math. J. 51 (1984) 611-650.

[8bis] Kottwitz R. Isocristal with additionnal structures. Composotion Math. 56 (1985) 201-220.

[8 ter] Kottwitz R. : Shimura varieties and λ-adic representations, in Automorphic forms, Shimura varieties, and L-functions, Vol. I 161-209, Perspect.Math., 10, Academic Press, Boston, MA, 1990.

[9] Labesse, J.-P. et Langlands, R., L-indistinguishability for SL_2. Can. J. Math. 31 (1979) 726-785.

[10] Langlands R. : Les débuts d'une formule des traces stables. Publications de l'Université Paris 7, 13 (1983).

[11] Laumon G., Moret-Bailly L. : Champs algébriques. Ergebnisse der Mathematik 39. Springer-Verlag, Berlin, 2000.

[12] Laumon G. : Fibres de Springer et Jacobiennes compactifiées in Algebraic geometry and number theory, 515-563, Progr. Math., 253, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2006.

[12 bis] Laumon,G. et Chaudouard P.H. : le lemme fondamental pondéré I :constructions géométriques, arxiv 0902.2684.

[13] Laumon, G. et Ngô B.C. : Le lemme fondamental pour les groupes unitaires, à paraître aux Annals of Math.

[13M] Morel,S. : Etude de la cohomologie de certaines variétés de Shimura non compactes, arxiv :0802.4451v1.

[14] Ngô B.C. : Fibration de Hitchin et endoscopie. Inv. Math. 164 (2006) 399-453.

[15] Ngô B.C. : Fibration de Hitchin et structure endoscopique de la formule des traces. International Congress of Mathematicians Vol. II, 1213-1225, Eur. Math. Soc., Zürich, 2006.

[16] Ngô B.C., Le lemme fondamental pour les algèbres de Lie, arXiv :0801.0446. [17] Ono T., On Tamagawa numbers. In Algebraic groups and discontinuous subgroups. Proc. of Symp. in Pure Math. 9 (1966), A.M.S.

[18] Rogawski, J., Automorphic representations of unitary groups in three variables. Annals of Math. Studies 123, 1-259, Princeton University Press, Princeton 1990.

[18bis] Sheppard G.C. et Todd J.A. : Finite unitary reflection groups. Canad. J. of Math.

6 (1954), 274-304.

[19] Waldspurger, J.-L., Sur les intégrales orbitales tordues pour les groupes linéaires : un lemme fondamental. Can. J. Math. 43 (1991) 852-896.

[20] Waldspurger, J.-L. , Le lemme fondamental implique le transfert. Compositio Math., 105 (1997) 153-236.

[21] Waldspurger J.-L. Intégrales orbitales nilpotentes et endoscopie pour les groupes classiques non ramifiés Astérisque 269.

[22] Waldspurger J.-L. Endoscopie et changement de caractéristique, prépublication.

[23] Waldspurger J.-L. : L'endoscopie tordue n'est pas si tordue : intégrales orbitales, prépublication 2006.

[24] Waldspurger, J.-L., Sur les intégrales orbitales tordues pour les groupes linéaires : un lemme fondamental. Can. J. Math. 43 (1991) 852-896.