Produit Cartésien d'Espaces Non Commutatifs

Rémi Boutonnet, Fathi Ben Aribi

26 juin 2009

Table des matières

1 Introduction

Ce mémoire a pour but d'offrir une présentation (inévitablement partielle) des C^*-algèbres ;

Une motivation d'étude de ces objets est l'observation suivante : pour un espace topologique compact X, la C^*-algèbre $C(X)$ des applications continues de X dans $\mathbb{C}$ contient dans sa structure algébrique toutes les informations topologiques sur X (cf. Théorème 6.3). On a de plus le résultat suivant : toute C^*-algèbre commutative peut s'écrire comme un $C(X)$ où X est un espace topologique compact.

Cette équivalence "espace topologique – algèbre de fonctions" transporte aussi les morphismes : à $f : C(X) \longrightarrow C(Y)$ morphisme de C^*-algèbres correspond $g : Y \longrightarrow X$ fonction continue.

Par conséquent, on pourra interpréter l'étude des C^*-algèbres non commutatives comme l'étude des espaces topologiques compacts non commutatifs sous-jacents (même si on ne sait pas leur donner un sens). Dans ce mémoire on cherchera à étudier la notion de produit cartésien d'espaces compacts.

L'équivalence transporte aussi le produit cartésien d'espaces compacts en produit tensoriel d'algèbres : $C(X \times Y) \approx C(X) \otimes C(Y)$, et on ne peut munir $C(X) \otimes C(Y)$ d'une structure de C^*-algèbre que d'une seule manière (cf. Corollaire 6.5).

Nous détaillerons davantage ces résultats dans la partie 6.

Plus généralement, nous définirons et étudierons les C^*-algèbres non commutatives dans la partie 2. Dans les parties 3, 4, 5, on montrera un théorème de Kirchberg (Théorème 5.1), qui dit que, bien que dans le cas général non commutatif on n'ait pas une unique norme de C^*-algèbre sur un produit tensoriel, il n'y en qu'une seule possible pour $C^*(F) \otimes B(H)$ où F est un groupe libre et H un espace de Hilbert séparable (un cas de figure en fait assez universel car toute C^*-algèbre séparable se plonge dans un tel $B(H)$ et peut s'écrire comme un quotient d'un tel $C^*(F)$).

Nous remercions Mikael De La Salle pour son aide et sa disponibilité.

2 C^*-algèbres, norme *min*, norme *max*

2.1 Premières définitions

Ici nous définirons la plupart des notions utilisées dans le reste du mémoire.

Commençons par une définition abstraite des C^*-algèbres.

Définition 2.1. Une $\mathbb{C}$-algèbre unifère (pas forcément commutative) A est une $*$-*algèbre* s'il existe $* : A \longrightarrow A$ involution antilinéaire telle que :

$$\forall a, b \in A, (ab)^* = b^* a^*.$$

Définition 2.2. Une $*$-algèbre A est une C^*-*algèbre* (ou C^*-algèbre abstraite) si elle est munie d'une norme $\|.\|$ pour laquelle A est complète et telle que $\forall a \in A,\ \|a\|^2 = \|a^*\|^2 = \|a^* a\|$ et $\forall a, b \in A,\ \|ab\| \leqslant \|a\|\|b\|$.

Remarque 2.3. On pourrait aussi définir des C^*-algèbres sans unité, mais dans tout ce qui suit, les C^*-algèbres seront supposées unifères.

Sauf dans la partie 6, nous n'utiliserons cependant pas cette définition, mais une intrinsèquement liée aux algèbres d'opérateurs sur des espaces de Hilbert :

Définition 2.4. Si H est un $\mathbb{C}$-espace de Hilbert, on note $B(H)$ l'ensemble $\{T : H \longrightarrow H$ linéaires continues$\}$; c'est l'ensemble des opérateurs bornés (ou continus) sur H, et c'est naturellement une algèbre de Banach, avec la composition d'opérateurs comme produit interne, et la norme d'opérateur habituelle $\|T\| = \sup\limits_{|\xi| \leqslant 1} |T(\xi)|$, qui la rend complète. De plus, l'opérateur adjoint $T \longrightarrow T^*$ est une involution antilinéaire sur $B(H)$.

Définition 2.5. Une C^*-algèbre (ou C^*-algèbre représentée) A est une sous-algèbre unitaire de $B(H)$, où H est un espace de Hilbert, fermée pour $\|.\|$ (donc complète) et stable par passage à l'adjoint.

On peut montrer que ces deux définitions sont en fait équivalentes, *i.e.* toute C^*-algèbre abstraite est isomorphe isométriquement à une sous-algèbre d'un $B(H)$ avec H espace de Hilbert (le lecteur intéressé pourra consulter [KR83]), mais nous n'utiliserons pas ce résultat dans ce mémoire. Remarquons qu'on a toujours $\|T\|^2 = \|T^*\|^2 = \|T^* T\|$.

Exemple. $l^\infty(\mathbb{N})$ est à isomorphisme canonique près une C^*-algèbre comme sous-algèbre de $B(l^2(\mathbb{N}))$. En effet :

- $l^\infty(\mathbb{N})$ s'injecte dans $B(l^2(\mathbb{N}))$, (via la multiplication terme à terme) l'adjoint de $(f_n)_n$ correspondant à $(\overline{f_n})_n$, le produit correspondant à la composition d'opérateurs.
- Sur $l^\infty(\mathbb{N})$, $\|.\|_{l^\infty(\mathbb{N})}$ coïncide avec $\|.\|_{B(l^2(\mathbb{N}))}$, car si $(f_n)_n \in l^\infty(\mathbb{N})$, alors

$$|f_n|^2 = \sum_{m=0}^{\infty} |f_n \delta_{m,n}|^2 \leqslant \|(f_n)_n\|^2_{B(l^2(\mathbb{N}))} = \sup_{\sum\limits_{m=0}^{\infty} |g_n|^2=1} \sum_{m=0}^{\infty} |f_n g_n|^2 \leqslant \sup_{n\in\mathbb{N}} |f_n|^2.$$

Mentionnons un résultat qui sera trés utile dans la suite.

Théorème 2.6. *Soient A et B deux C^*-algèbres abstraites et un morphisme d'*-algèbres $\pi : A \to B$. Alors on a :*

$$\forall x \in A, \|\pi(x)\| \leq \|x\|.$$

Si de plus π est injective, alors c'est une isométrie.

Démonstration. Nous admettrons ce résultat ; une preuve détaillée pourra être trouvée dans [JV]. □

Corollaire 2.7. *Soit A une C^*-algèbre abstraite. Il y a une unique norme sur A vérifiant :*

- $\forall x \in A, \|x\|^2 = \|x^*x\|$,
- $\|.\|$ *est sous-multiplicative.*

Démonstration. Notons $\|.\|$ la norme de C*-algèbre de A et $\|.\|_0$ une autre norme, et considérons le morphisme $Id : (A, \|.\|) \to (\widehat{A}, \|.\|_0)$, où $\widehat{A}$ est le complété de A pour la norme $\|.\|_0$. Alors c'est bien un morphisme d'*-algèbres injectif entre deux C^*-algèbres, c'est donc une isométrie, et les normes sont égales. □

Remarque 2.8. Attention cela ne veut pas dire qu'on ne peut munir $A_1 \otimes A_2$ que d'une unique norme de C^*-algèbre (*i.e.* une norme pour laquelle le complété de $A_1 \otimes A_2$ est une C^*- algèbre, *c.f.* la partie 2.4) : l'hypothèse importante de ce Corollaire est que l'algèbre A soit déjà munie d'une structure de C^*-algèbre, c'est à dire d'une norme qui vérifie les propriétés précédentes et pour laquelle elle est complète.

2.2 Espaces de matrices

Il nous sera utile plus loin de travailler sur l'espace

$$M_n(A) = \{(a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}; a_{i,j} \in A\} \subseteq M_n(B(H)),$$

où $A \subseteq B(H)$ est une C^*-algèbre. Montrons qu'on peut le munir d'une structure de C^*-algèbre représentée.

$H^{\oplus n}$ est un espace de Hilbert, avec le produit scalaire défini par :

$$\langle (x_1, ..., x_n); (y_1, ..., y_n) \rangle = \sum_{i,j} \langle x_i; y_j \rangle_H.$$

Ainsi l'isomorphisme

$$\begin{array}{rcl} \Psi : M_n(B(H)) & \rightarrow & B(H \oplus ... \oplus H) \\ (a_{i,j})_{i,j} & \mapsto & \{(\xi_1, ..., \xi_n) \longmapsto \left(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}(\xi_j) \right)_i \} \end{array}$$

munit $M_n(A) \subseteq M_n(B(H))$ d'une structure de C^*-algèbre.

En effet :

- $(a_{i,j})^* = (a_{j,i}^*)$, donc $M_n(A)$ est stable par $*$
- Pour montrer que $M_n(A)$ est fermée, montrons que $\left((a_{i,j}^{(m)})_{i,j}\right)_m$ converge vers $(b_{i,j})_{i,j}$ si et seulement si $\forall i, j$, $(a_{i,j}^{(m)})_m$ converge vers $b_{i,j}$.
  Le sens direct vient du fait que $\|a_{i_0,j_0}^{(m)} - b_{i_0,j_0}\| \leqslant \|(a_{i,j}^{(m)}) - (b_{i,j})\|$, évident en revenant à la définition de ces normes.
  Le sens retour vient du fait que

  $$\|(a_{i,j}^{(m)}) - (b_{i,j})\| \leqslant \sum_{i,j} \|(a_{i,j}^{(m)} \delta_{(k,l),(i,j)})_{k,l} - (b_{i,j} \delta_{(k,l),(i,j)})_{k,l}\| = \sum_{i,j} \|a_{i,j}^{(m)} - b_{i,j}\|$$

  car $\left\| \begin{pmatrix} 0 & & \cdots & & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & a & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & & \cdots & & 0 \end{pmatrix} \right\| = \|a\|$ (en revenant à la définition).

2.3 Produit tensoriel d'espaces de Hilbert

Définition 2.9. Soient H et K deux espaces de Hilbert. On munit alors $H \otimes K$ du produit scalaire défini sur les tenseurs purs par :

$$\langle h \otimes k; h' \otimes k' \rangle = \langle h; h' \rangle \langle k; k' \rangle,$$

(il est bien défini par propriété universelle du produit tensoriel et son caractère défini positif est vérifiable sans difficulté) et on note $H \overline{\otimes} K$ le complété de $H \otimes K$ pour ce produit scalaire, qui est alors un espace de Hilbert.

Proposition 2.10. Si $\phi \in B(H)$ et $\psi \in B(K)$ alors $\phi \otimes \psi \in B(H \overline{\otimes} K)$ et $\|\phi \otimes \psi\| = \|\phi\|.\|\psi\|$.

Démonstration.

$$\begin{aligned}
\|\phi \otimes \psi\| &\geqslant \sup_{\|x \otimes y\|=1} \|\phi(x) \otimes \psi(y)\| \\
&= \sup_{\|x\|.\|y\|=1} \|\phi(x)\|.\|\psi(y)\| \\
&= \sup_{\|x\|.\|y\|=1} \|\phi(\frac{x}{\|x\|})\|.\|\psi(\frac{y}{\|y\|})\| \\
&= \sup_{\|x'\|=1\,;\,\|y'\|=1} \|\phi(x')\|.\|\psi(y')\| \\
&= \|\phi\|.\|\psi\|,
\end{aligned}$$

ce qui prouve une première inégalité.

D'autre part, $\|\phi \otimes \psi\| \leqslant \|\phi \otimes 1\| \|1 \otimes \psi\| \leqslant \|\phi\| \|\psi\|$ car $\|\phi \otimes 1\| \leqslant \|\phi\|$; en effet, si $t \in H \otimes K$, alors t peut s'écrire $t = \sum h_j \otimes k_j$ où (k_j) est une famille (finie) orthonormale, et alors par le Théorème de Pythagore,

$$\begin{aligned}
\|(\phi \otimes 1)(t)\|^2 &= \|\sum \phi(h_j) \otimes k_j\|^2 \\
&= \sum \|\phi(h_j) \otimes k_j\|^2 \\
&= \sum \|\phi(h_j)\|^2 \\
&\leqslant \|\phi\|^2 \sum \|h_j\|^2 \\
&= \|\phi\|^2 \sum \|h_j \otimes k_j\|^2 \\
&= \|\phi\|^2 \|\sum h_j \otimes k_j\|^2 \\
&= \|\phi\|^2 \|t\|^2.
\end{aligned}$$

Ainsi $\|(\phi \otimes 1)\| \leqslant \|\phi\|$; et de même $\|(1 \otimes \psi)\| \leqslant \|\psi\|$. $\square$

Proposition 2.11. Si H est un espace de Hilbert, alors :

$$H^{\oplus n} = H \otimes \mathbb{C}^n = H\overline{\otimes}\mathbb{C}^n.$$

Démonstration. $H^{\oplus n}$ étant complet, il suffit de montrer la première égalité.

Soit $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ la base canonique de $\mathbb{C}^n$. Tout élement de $H \otimes \mathbb{C}^n$ s'écrit alors $\sum\limits_{i=1}^{n} h_i \otimes e_i$, et cette écriture est unique. On a donc $H \otimes \mathbb{C}^n$ isomorphe à $H^{\oplus n}$ en tant qu'espace vectoriel. Et ils coïncident en tant qu'espaces de Hilbert, car $\langle \sum\limits_{i=1}^{n} h_i \otimes e_i; \sum\limits_{j=1}^{n} h'_j \otimes e_j\rangle = \sum\limits_{i=1}^{n}\langle h_i; h'_i\rangle = \langle (h_1, ..., h_n); (h'_1, ..., h'_n)\rangle$. □

2.4 Produit tensoriel de C^*-algèbres

2.4.1 Produit tensoriel d'*-algèbres

Si A et B sont deux *-algèbres, on peut munir $A \otimes B$ d'une structure d'*-algèbre de la manière suivante : le produit est donné par (sur les tenseurs purs) $(a \otimes b)(a' \otimes b') = (aa' \otimes bb')$ et l'étoile est donnée par (sur les tenseurs purs) $(a \otimes b)^* = (a^* \otimes b^*)$.

Remarque 2.12. $M_n(B(H))$ et $B(H) \otimes M_n(\mathbb{C})$ sont naturellement isomorphes comme *-algèbres, par l'isomorphisme

$$\begin{aligned} \Psi : M_n(B(H)) &\rightarrow B(H) \otimes M_n(\mathbb{C}). \\ (a_{i,j})_{i,j} &\mapsto \sum_{i,j} a_{i,j} \otimes E_{i,j} \end{aligned}$$

Soient $A \subseteq B(H)$, $B \subseteq B(K)$. L'*-algèbre $A \otimes B$ n'est muni d'aucune norme. Nous allons maintenant montrer comment le munir de normes, la norme min, les normes σ et la norme max.

2.4.2 Produit $\otimes_{min}$

On pose

$$\begin{aligned} \phi : A \otimes B &\rightarrow B(H\overline{\otimes}K) \\ a \otimes b &\mapsto \{x \otimes y \longmapsto a(x) \otimes b(y)\} \end{aligned}$$

ϕ est bien définie par propriété universelle du produit tensoriel, et c'est un morphisme d'*-algèbres.

Lemme 2.13. *ϕ est injective.*

Démonstration. Si $\phi(\sum a_i \otimes b_i) = 0$, avec, on peut le supposer (quitte à décomposer sur une base de B), les b_i linéairement indépendants. On a donc $\forall x \in H,\ \forall y \in K, \sum(a_i(x)) \otimes (b_i(y)) = 0$.
Fixons x. On réécrit $\sum(a_i(x)) \otimes b_i = \sum h_i \otimes \tilde{b}_i \in H \otimes B(K)$ avec les h_i linéairement indépendants.
Donc $\forall y \in K,\ \sum h_i \otimes (\tilde{b}_i(y)) = 0$, donc $\forall y \in K,\ \forall i,\ \tilde{b}_i(y) = 0$ car les h_i sont linéairement indépendants. Ainsi $\forall i,\ \tilde{b}_i = 0$.
Donc $\sum(a_i(x)) \otimes b_i = 0$, donc $\forall x \in H,\ \forall i,\ a_i(x) = 0$ car les b_i sont linéairement indépendants.
D'où $\sum a_i \otimes b_i = 0$. □

On définit alors $A \otimes_{min} B$ comme l'adhérence de $\phi(A \otimes B)$ dans $B(H \overline{\otimes} K)$. Comme $\phi(A \otimes B)$ est une *-algèbre, $A \otimes_{min} B$, muni de $\|.\|_{B(H\overline{\otimes}K)}$, est une C^*-algèbre.

En remontant par ϕ^{-1}, on obtient une norme sur $A \otimes B$. Cependant, $A \otimes B$ n'est pas forcément complet pour cette norme, donc on s'y intéressera moins.

La proposition suivante nous sera utile pour démontrer le Théorème de Kirchberg.

Proposition 2.14. Soient A et B deux C^*-algèbres.
On a un isomorphisme canonique de C^*-algèbres :

$$M_n(A) \otimes_{min} B \simeq M_n(A \otimes_{min} B).$$

Démonstration. On suppose que $A \subset B(H)$ et $B \subset B(K)$, avec H et K deux espaces de Hilbert.
L'isomorphisme d'*-algèbres φ entre $M_n(A) \otimes B$ et $M_n(A \otimes B)$ est évident (il suffit de se souvenir que $M_n(A) = M_n(\mathbb{C}) \otimes A$) et pour montrer le caractère isométrique, il suffit par densité de le montrer sur $M_n(A) \otimes B$ et $M_n(A \otimes B)$.
Soit donc $x \in M_n(A \otimes B)$, on a :

$$\begin{aligned} \|x\|_{M_n(A \otimes_{min} B)} &= \|x\|_{B((H\overline{\otimes}K)^{\oplus n})} \\ \|x\|_{M_n(A) \otimes_{min} B} &= \|x\|_{B(H^{\oplus n}\overline{\otimes}K)} \end{aligned}$$

Ce qui donne la conclusion, car $(H\overline{\otimes}K)^{\oplus n} = H^{\oplus n}\overline{\otimes}K$. □

2.4.3 Produit $\otimes_\sigma$

De même, pour un morphisme d'*-algèbres $\sigma : A \otimes B \longrightarrow B(H_\sigma)$, on pose $A \otimes_\sigma B$ l'adhérence de $\sigma(A \otimes B)$ dans $B(H_\sigma)$, c'est une C^*-algèbre. On définit alors $\|x\|_\sigma = \|\sigma(x)\|_{B(H_\sigma)}$, c'est une norme si σ est injectif.

On note alors

$$\begin{array}{rcl} \sigma_1 : A & \rightarrow & B(H_\sigma) \\ a & \mapsto & \sigma(a \otimes 1_B) \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rcl} \sigma_2 : B & \rightarrow & B(H_\sigma) \\ b & \mapsto & \sigma(1_A \otimes b). \end{array}$$

Par le Théorème 2.6, σ_1 et σ_2 sont des morphismes d'*-algèbres, donc de C^*-algèbre (*i.e.* des morphismes d'*-algèbres entre deux C^*-algèbres), de norme inférieure à 1. De plus, $\forall a \in A, \forall b \in B, \sigma_1(a)\sigma_2(b) = \sigma_2(b)\sigma_1(a) = \sigma(a \otimes b)$.

Ainsi, la donnée de $\sigma : A \otimes B \longrightarrow B(H_\sigma)$ morphisme d'*-algèbres équivaut à la donnée de $\sigma_1 : A \longrightarrow B(H_\sigma)$ et de $\sigma_2 : B \longrightarrow B(H_\sigma)$ morphismes de C^*-algèbres tels que $[\sigma_1(A); \sigma_2(B)] = 0$, et alors $\sigma_1(a)\sigma_2(b) = \sigma(a \otimes b)$.

2.4.4 Produit $\otimes_{max}$

Définition 2.15. Pour tout $x \in A \otimes B$, on pose :

$$\|x\|_{max} = \sup_{\substack{\sigma : A \otimes B \longrightarrow B(H_\sigma) \\ \text{morphisme d'*-algèbres}}} \|x\|_\sigma.$$

D'autre part, on pose $\mathcal{E}$ l'ensemble des classes d'isomorphismes des morphismes d'*-algèbres $\sigma : A \otimes B \longrightarrow B(H_\sigma)$, et

$$H_{max} = \bigoplus_{\sigma \in \mathcal{E}} H_\sigma = \{(\xi_\sigma)_{\sigma \in I \subseteq \mathcal{E}} \ ; \ \xi_\sigma \in H_\sigma, \ \|(\xi_\sigma)_{\sigma \in I}\|^2 = \sum_{\sigma \in I} \|\xi_\sigma\|^2 < \infty\}.$$

On définit ensuite

$$\begin{array}{rcl} \sigma_{1,max} : A & \rightarrow & B(H_{max}) \\ a & \mapsto & \{(\xi_\sigma)_{\sigma \in I \subseteq \mathcal{E}} \longmapsto (\sigma_1(a)(\xi_\sigma))_{\sigma \in I \subseteq \mathcal{E}}\}, \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \sigma_{2,max} : B & \rightarrow & B(H_{max}) \\ b & \mapsto & \{(\xi_\sigma)_{\sigma \in I \subseteq \mathcal{E}} \longmapsto (\sigma_2(b)(\xi_\sigma))_{\sigma \in I \subseteq \mathcal{E}}\}, \end{array}$$

et $\sigma_{max} = \sigma_{1,max}\sigma_{2,max}$, ce qui donne une norme $\|.\|_{\sigma_{max}}$ sur $A \otimes B$.

Lemme 2.16. *Si* $T \in B(H_{max})$ *est de la forme* $T((\xi_\sigma)_{\sigma\in I\subseteq\mathcal{E}}) = (T_\sigma(\xi_\sigma))_{\sigma\in I\subseteq\mathcal{E}}$ *où* $\forall\sigma,\ T_\sigma \in B(H_\sigma),$ *alors* $\|T\| = \sup\limits_{\sigma\in\mathcal{E}} \|T_\sigma\|.$

Démonstration. D'une part

$$\begin{aligned}
\|T\|^2 &= \sup_{\sum\limits_{\sigma\in I\subseteq\mathcal{E}} \|\xi_\sigma\|^2=1} \Big(\sum_{\sigma\in I} \|T_\sigma\xi_\sigma\|^2\Big) \\
&\leqslant \sup_{\sum\limits_{\sigma\in I\subseteq\mathcal{E}} \|\xi_\sigma\|^2=1} \Big(\sum_{\sigma\in I} \|T_\sigma\|^2 \|(\xi_\sigma)\|^2\Big) \\
&\leqslant \sup_{\sigma\in\mathcal{E}} \|\xi_\sigma\|^2.
\end{aligned}$$

Et d'autre part $\forall\sigma \in \mathcal{E}$,

$$\begin{aligned}
\|T_\sigma\|^2 &= \sup_{\|\xi_\sigma\|^2=1} \|T_\sigma(\xi_\sigma)\|^2 \\
&\leqslant \sup_{\sum\limits_{\sigma\in I\subseteq\mathcal{E}} \|\xi_\sigma\|^2=1} \Big(\sum_{\sigma\in I} \|T_\sigma(\xi_\sigma)\|^2\Big) \\
&= \|T\|^2.
\end{aligned}$$

□

Proposition 2.17. $\forall x \in A \otimes B,\ \|x\|_{max} = \|x\|_{\sigma_{max}}$

Démonstration. $\forall x \in A \otimes B$,

$$\|x\|_{max} = \sup_{\sigma\in\mathcal{E}} \|x\|_\sigma = \sup_{\sigma\in\mathcal{E}} \|\sigma(x)\|_{H_\sigma} = \|\sigma_{max}(x)\|_{H_{\sigma_{max}}} = \|x\|_{\sigma_{max}},$$

le Lemme 2.16 assurant le troisième signe d'égalité. □

Notons alors $A\otimes_{max}B$ l'adhérence de $\sigma_{max}(A\otimes B)$ dans $(B(H_{max}); \|.\|_{H_{max}})$. Remarquons que $\forall x \in A \otimes B,\ \|x\|_{max} < \infty$. En effet

$$\forall\sigma \in \mathcal{E},\ \|\sigma\| \leqslant \|\sigma_1\|.\|\sigma_2\| \leqslant 1 \cdot 1 = 1.$$

Tout comme pour la norme *min*, le corollaire suivant nous sera utile pour démontrer le Théorème de Kirchberg :

Proposition 2.18. On peut définir de manière analogue la norme *max* sur le produit tensoriel de trois C^*-algèbres A_1, A_2 et A_3. Pour cela on note $\mathcal{E}$ l'ensemble des morphismes d'*-algèbres $\sigma : A_1 \otimes A_2 \otimes A_3 \to B(H_\sigma)$. Tout comme pour le produit de deux espaces, $\mathcal{E}$ peut être vu comme l'ensemble des triplets $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ de morphismes $\sigma_i : A_i \to B(H_\sigma)$ tels que si $i \neq j$, $[\sigma_i(A_i), \sigma_j(A_j)] = 0$.
$\forall x \in A = A_1 \otimes A_2 \otimes A_3$, on pose :

$$\|x\|_{max} = \sup_{\sigma \in \mathcal{E}} \|\sigma(x)\|_{B(H_\sigma)}.$$

Tout comme dans le cas à deux espaces, on peut construire un morphisme σ_{max}, et on vérifie que $\|.\|_{max} = \|.\|_{\sigma_{max}}$. On note alors $A_1 \otimes_{max} A_2 \otimes_{max} A_3$ la C^*-algèbre engendrée par $A_1 \otimes A_2 \otimes A_3$ dans H_{max} (*i.e.* le complété de $A_1 \otimes A_2 \otimes A_3$ pour la norme *max*). On a alors :

$$A_1 \otimes_{max} A_2 \otimes_{max} A_3 = (A_1 \otimes_{max} A_2) \otimes_{max} A_3 = A_1 \otimes_{max} (A_2 \otimes_{max} A_3).$$

Démonstration. Montrons seulement que :

$$A_1 \otimes_{max} A_2 \otimes_{max} A_3 = (A_1 \otimes_{max} A_2) \otimes_{max} A_3.$$

Pour cela, il suffit de montrer que les normes sur ces deux espaces coïncident sur $A_1 \otimes A_2 \otimes A_3$.
Soit donc $x \in A_1 \otimes A_2 \otimes A_3$, et

$$\sigma = (\sigma_1, \sigma_2) : (A_1 \otimes A_2) \otimes A_3 \to B(H_\sigma)$$

avec $[\sigma_1(A_1 \otimes A_2), \sigma_2(A_3)] = 0$. Alors comme on l'a déjà vu, σ_1 se décompose en (π_1, π_2) avec $\pi_i : A_i \to B(H_\sigma)$ avec $[\pi_1(A_1), \pi_2(A_2)] = 0$. Ainsi, si on appelle $\pi_3 = \sigma_2$, on voit que le triplet (π_1, π_2, π_3) est dans $\mathcal{E}$. Réciproquement, tout élément de $\mathcal{E}$ peut se mettre sous la forme (σ_1, σ_2) comme ci-dessus. On en déduit que les normes de ces deux ensembles sont égales, car les ensembles sur lesquels on prend le *sup* sont en bijection. □

Corollaire 2.19. *Soient A et B deux C^*-algèbres et $n \in \mathbb{N}$, on a un isomorphisme canonique de C^*-algèbres :*

$$M_n(A) \otimes_{max} B \simeq M_n(A \otimes_{max} B).$$

Démonstration. Supposons $A \subset B(H)$.
On a vu que $M_n(A)$ est une C^*-algèbre. De plus il existe un isomorphisme d'*-algèbres entre $M_n(A)$ et $M_n(\mathbb{C}) \otimes A$. Si l'on munit de la norme *min* alors

l'isomorphisme en question est en fait une isométrie (la norme sur chacun des deux espaces correspondant à la norme d'opérateurs sur $H^{\oplus n} = \mathbb{C}^n \otimes H$), ce qui nous dit que $M_n(\mathbb{C}) \otimes A$ est complet et est donc une C^*-algèbre pour la norme *min*. Par le Corollaire 2.7, on en déduit que les normes *min* et *max* coincident sur cette C^*-algèbre. Ainsi

$$M_n(A) \simeq M_n(\mathbb{C}) \otimes_{max} A$$

(en tant que C^*-algèbres).
D'où

$$\begin{aligned} M_n(A) \otimes_{max} B &\simeq (M_n(\mathbb{C}) \otimes_{max} A) \otimes_{max} B \\ &\simeq M_n(\mathbb{C}) \otimes_{max} (A \otimes_{max} B) \\ &\simeq M_n(A \otimes_{max} B). \end{aligned}$$

□

2.4.5 Norme *min* et norme *max*

Munir $A \otimes B$ d'une structure de C^*-algèbre représentée consiste en particulier à choisir un espace de Hilbert $\tilde{H}$ tel que $A \otimes B$ devienne une sous-C^*-algèbre de $B(\tilde{H})$; ainsi, toutes les normes possibles sur $A \otimes B$ sont des normes $\|.\|_\sigma$, et donc sont majorées par la norme $\|.\|_{max}$.
De plus, la définition de $\|.\|_{max}$ la rend indépendante du choix des H et K tels que $A \subseteq B(H)$, $B \subseteq B(K)$.

De même, $\|.\|_{min}$ minore les normes $\|.\|_\sigma$, mais c'est un résultat difficile à montrer, et nous l'admettrons donc (mais ne l'utiliserons pas).
On a également que $\|.\|_{\mathrm{min}}$ est indépendante de H et K, mais c'est aussi un résultat difficile. Néanmoins, nous verrons que dans certains cas particuliers $\|.\|_{min} = \|.\|_{max}$, ce qui garantira son unicité.

Et ainsi, montrer que $\|.\|_{min} = \|.\|_{max}$ équivaut à montrer qu'on ne peut munir $A \otimes B$ que d'une seule norme de C^*-algèbre !

3 Approche du problème

3.1 Résultats annexes :

Définition 3.1. Soient A une C^*-algèbre, E un sous-espace vectoriel de A, et H un espace de Hilbert complexe. Une application linéaire $T : E \to B(H)$ est dite *complètement bornée* si pour tout entier naturel n, l'application

$$\begin{array}{rcl} T^{(n)} : M_n(E) & \to & M_n(B(H)) \\ (a_{i,j})_{i,j} & \mapsto & (T(a_{i,j}))_{i,j} \end{array}$$

est bornée (*i.e.* continue) et si $\|T\|_{cb} := sup_n \|T^{(n)}\| < \infty$.

Théorème 3.2. *Avec les mêmes notations que dans la définition ci-dessus, supposons que T vérifie* $\|T\|_{cb} \leq 1$*. Alors il existe :*
- *Un espace de Hilbert* K*;*
- *Un morphisme* $\pi : A \to B(K)$ *de* C^**-algèbres ;*
- *Deux applications* $V, W : H \to K$ *telles que* $\|V\| \leq 1$ *et* $\|W\| \leq 1$

tels que :

$$\forall x \in E, \, T(x) = V^* \pi(x) W$$

et de plus on a $\|T\|_{cb} = \|V\|.\|W\|$.

Démonstration. Ce résultat est une conséquence du Théorème de Hahn-Banach, et sa démonstration est technique et peu utile pour la suite. Nous admettrons donc ce théorème. □

Proposition 3.3. Toujours avec les notations de la définition, supposons à nouveau que $\|T\|_{cb} \leq 1$. Si l'on a $1_A \in E$ et $T(1_A) = 1_{B(H)}$ alors dans le théorème précédent on a en plus que $V = W$ et que V est une isométrie.

Démonstration. Notons indifféremment $\langle , \rangle$ le produit scalaire sur H ou K. Comme $T(1) = 1$, on obtient $V^* W = Id_H$. Ainsi soit $\xi \in H$, tel que $\|\xi\| = 1$, on a :

$$\begin{array}{rcl} 1 & = & \langle V * W\xi, \xi \rangle \\ & = & |\langle W\xi, V\xi \rangle| \\ & \leq & \|W\xi\|.\|V\xi\| \\ & \leq & 1 \text{ (car } \|V\| \leq 1 \, et \, \|W\| \leq 1). \end{array}$$

(La troisième ligne provient de l'inégalité de Cauchy-Schwarz.)

Ainsi ces inégalités sont des égalités, ce qui nous fournit deux informations essentielles :

– V et W sont des isométries (et donc $V^*V = Id_H$ et $W^*W = Id_H$)
– $V\xi$ et $W\xi$ sont colinéaires (cas d'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz) : $\exists\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $W\xi = \lambda V\xi$.

Si l'on applique V^* à cette dernière égalité, on a :

$$\xi = V^*W\xi = \lambda V^*V\xi = \lambda\xi.$$

Ceci nous mène à $\lambda = 1$ et donc $V = W$. □

3.2 Retour à notre problème

3.2.1 Un théorème utile

Une observation importante qui va être à la base du théorème principal de ce chapitre est le fait que pour obtenir des informations algébriques sur une C^*-algèbre, il suffit parfois de se ramener à l'étude d'un certain sous-espace vectoriel de cette algèbre. Plus précisément, nous montrerons dans ce chapitre le théorème suivant, qui nous permettra de simplifier notre problème de départ :

Théorème 3.4. *Soient A_1 et A_2 deux C^*-algèbres unifères. Soient $(u_i)_{i\in I}$ (resp. $(v_j)_{j\in J}$) une famille d'opérateurs unitaires qui engendre A_1 (resp. A_2), au sens des C^*-algèbres. Notons E_1 (resp. E_2) l'espace vectoriel fermé engendré par la famille $(u_i)_{i\in I}$ (resp. $(v_j)_{j\in J}$). Supposons que $1 \in E_1$ et $1 \in E_2$. Alors on a l'équivalence des deux propriétés suivantes :*

(i) L'application d'inclusion : $T : E_1 \otimes_{min} E_2 \to A_1 \otimes_{max} A_2$ est complètement isométrique (i.e. $\|T\|_{cb} = 1$). Précisons qu'ici $E_1 \otimes_{min} E_2$ est simplement $E_1 \otimes E_2$ que l'on a muni de la norme min.

(ii) $A_1 \otimes_{min} A_2 = A_1 \otimes_{max} A_2$ (c'est à dire que les normes min et max coïncident sur $A_1 \otimes A_2$).

3.2.2 Preuve du Théorème 3.4.

Lemme 3.5. *Soient $u \in B(H)$ et $\hat{u} \in B(\widehat{H})$ deux opérateurs unitaires et $S : H \to \widehat{H}$ une isométrie telle que :*

$$u = S^*\hat{u}S.$$

Alors l'image K de H par S est stable $\hat{u}$ et $\hat{u}^*$, ce qui équivaut à dire que $\hat{u}$ commute avec P_K (projection orthogonale sur K).

Démonstration. Montrons que $P_K \hat{u} S = \hat{u} S$ pour obtenir la stabilité par $\hat{u}$, ce raisonnement est aussi valable pour $\hat{u}^*$.
Montrons que $P_K = SS^*$. S est une isométrie, donc $\forall x \in H,\ S^*S(x) = x$. Soient $z, y \in \widehat{H}$, alors $P_K(y) = S(x),\ P_K(z) = S(t)\ x, t \in H$ et donc :

$$\begin{aligned}
\langle z; SS^*(y)\rangle &= \langle z; SS^*(P_K(y)) + SS^*(y - P_K(y))\rangle \\
&= \langle P_K(z) + (z - P_K(z)); SS^*S(x) + SS^*(y - P_K(y))\rangle \\
&= \langle P_K(z); (S(x)) + SS^*(y - P_K(y))\rangle \\
&= \langle P_K(z); (P_K(y))\rangle + \langle P_K(z); SS^*(y - P_K(y))\rangle \\
&= \langle z; P_K(y)\rangle + \langle S(t); SS^*(y - P_K(y))\rangle \\
&= \langle z; P_K(y)\rangle + \langle t; S^*(y - P_K(y))\rangle \\
&= \langle z; P_K(y)\rangle + \langle S(t); (y - P_K(y))\rangle \\
&= \langle z; P_K(y)\rangle.
\end{aligned}$$

On a donc $P_K = SS^*$; prenons $h \in H$. Comme S est une isométrie, on a

$$\|P_K \hat{u} S h\| = \|S^* \hat{u} S h\|.$$

Donc par l'égalité de Pythagore :

$$\|\hat{u} S h\|^2 = \|S^* \hat{u} S h\|^2 + \|(1 - P_K)\hat{u} S h\|^2.$$

Et donc

$$\|(1 - P_K)\hat{u} S h\|^2 = \|\hat{u} S h\|^2 - \|S^* \hat{u} S h\|^2.$$

Ainsi, si $S^* \hat{u} S$ est une isométrie, le terme de droite ci-dessus est égal à $\|h\|^2 - \|h\|^2 = 0$. Ceci étant vrai pour tout $h \in H$, on a $(1 - P_K)\hat{u} S = 0$, ce qui était l'égalité voulue. □

Proposition 3.6. Soient A et B deux C^*-algèbres unifères et $(u_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments unitaires de A qui engendrent A au sens des C^*-algèbres. Soit E un sous-espace vectoriel de A contenant les $(u_i)_{i \in I}$ et 1_A, et $T : E \to B$ une application linéaire telle que $T(1_A) = 1_B$ et qui envoie chaque u_i sur un élément unitaire de B.

Si l'on a $\|T\|_{cb} \leq 1$ alors T se prolonge en un morphisme d'*-algèbres de A dans B.

Démonstration. Par définition des C^*-algèbres, il existe un espace de Hilbert complexe H tel que $B \subset B(H)$, et donc il suffit de prouver le résultat pour $B = B(H)$. Plaçons nous dans ce cas.

On remarque alors que les hypothèses du Théorème 3.2. et de la Proposition 3.3. Ceci nous permet de dire qu'il existe un espace de Hilbert $\widehat{H}$, une isométrie $V : H \to \widehat{H}$ et un morphisme de C^*-algèbres $\pi : A \to B(\widehat{H})$ tels que

$$\forall x \in E,\ T(x) = V^*\pi(x)V.$$

Notons $K = V(H) \subset \widehat{H}$, et P_K la projection orthogonale sur K. Soit alors $u \in \{u_i | i \in I\}$, on a $T(u) = V^*\pi(u)V$, et donc comme $T(u)$ est une isométrie, le Lemme 3.5. implique que P_K commute avec $\pi(u)$. La famille $(u_i)_{i\in I}$ étant génératrice de A, on en déduit que pour tout $x \in A$, P_K commute avec $\pi(x)$.

Ainsi, pour tout $x \in A$, posons $\tilde{T}(x) = V^*\pi(x)V$. On montre alors que $\tilde{T}$ est un morphisme de C^*-algèbres de A dans B :

– $\tilde{T}$ est linéaire ;
– $\forall a \in A,\ \tilde{T}(a^*) = \tilde{T}(a)^*$;
– $\forall a, b \in A$, on a :

$$\begin{aligned}\tilde{T}(ab) &= V^*\pi(a)VV^*\pi(b)V\\ &= V^*\pi(a)P_K\pi(b)V\\ &= V^*P_K\pi(ab)V\\ &= (V^*V)T(ab) = T(ab).\end{aligned}$$

□

On peut maintenant démontrer le Théorème 3.4.

Démonstration. L'implication $(ii) \Rightarrow (i)$ est triviale. Montrons la réciproque. Supposons (i) et notons $E = E_1 \otimes_{min} E_2$. On peut voir E comme un sous-espace vectoriel de $A = A_1 \otimes_{min} A_2$. Montrons alors que l'on peut se ramener aux hypothèses de la Proposition 3.6.

La famille $(u_i \otimes 1)_{i\in I} \cup (1 \otimes v_j)_{j\in J}$ est une famille génératrice de A (au sens des C^*-algèbres), incluse dans E. Par (i), on a une application linéaire $T : E \to A_1 \otimes_{max} A_2$ qui vérifie les hypothèses de la Proposition 3.6. On en déduit que T se prolonge en un morphisme d'*-algèbres $\tilde{T} : A \to A_1 \otimes_{max} A_2$. D'après le Théorème 2.6, $\tilde{T}$ vérifie, $\forall x \in A$, $\|T(x)\| \leq \|x\|$.

Comme T n'était que l'inclusion, on en déduit que $\tilde{T}$ doit préserver les tenseurs du type $x \otimes 1$ et $1 \otimes y$ et donc que la restriction de $\tilde{T}$ à $A_1 \otimes A_2$ est l'identité. Ainsi on a que sur $A_1 \otimes A_2$, $\|.\|_{max} \leq \|.\|_{min}$. Comme l'autre inégalité est aussi vérifiée, les deux normes coïncident sur $A_1 \otimes A_2$.

Ceci nous mène bien à $A_1 \otimes_{min} A_2 = A_1 \otimes_{max} A_2$.

□

4 C^*-algèbres de groupes

4.1 Définitions et propriétés :

Définition 4.1. Soit S un ensemble non vide. On appelle *groupe libre* engendré par S l'unique groupe (à unique isomorphisme près) $\mathbb{F}_S$ tel que :

- il existe une injection $i : S \to \mathbb{F}_S$,
- (Propriété universelle) pour tout groupe G et pour toute application $f : S \to G$, il existe un unique morphisme de groupes $\hat{f} : \mathbb{F}_S \to G$ tel que $\forall s \in S,\ \hat{f}(i(s)) = f(s)$,
- i(S) engendre $\mathbb{F}_S$.

(Il faut bien sûr établir l'existence et l'unicité d'un tel groupe.)
On dira qu'un groupe F est libre s'il existe une partie S tel que $F = \mathbb{F}_S$.

Démonstration. **Existence.** Soit S' un ensemble équipotent à S et disjoint de S. Il existe alors une bijection de S vers S'. Pour chaque élément s de S, on note s' l'élément correspondant dans S'. Soit M l'ensemble des mots sur $S \cup S'$ et $\sim$, la relation d'équivalence sur M engendrée par la relation $\mathcal{R}$ définie par :

$$m\mathcal{R}m' \Leftrightarrow (\exists (m_1, m_2, s) \in M \times M \times S,$$
$$(m = m_1 ss' m_2 \text{ et } m' = m_1 m_2) \text{ ou } (m = m_1 s' s m_2 \text{ et } m' = m_1 m_2)).$$

Posons alors $G = M/\sim$. On vérifie aisément que G est un groupe pour la concaténation, qu'il contient S (en voyant les lettres comme des mots), et qu'il vérifie la propriété universelle. Enfin, il est clair que S engendre G.

Unicité. Soient F et F' deux groupes libres sur S, alors par définition on a des morphismes $f_1 : F \to F'$ et $f_2 : F' \to F$. Et on a alors :

$$\begin{aligned} \forall s \in S,\ f_2(f_1(s)) &= s \\ \forall s \in S,\ f_1(f_2(s)) &= s, \end{aligned}$$

où l'on voit S comme un sous ensemble de F (resp. F').

Or le groupe G(S) engendré par S dans F est F lui même et de même pour F', ce qui permet de conclure que f_1 et f_2 sont réciproques l'un de l'autre et donc que F et F' sont isomorphes. □

Définition 4.2. Soit G un groupe discret dénombrable. On appelle *représentation unitaire* de G un couple (π, H) où H est un espace de Hilbert (sur $\mathbb{C}$) et $\pi : G \to \mathcal{U}(H)$ est un morphisme de groupes.

Construisons maintenant une représentation particulière de G, la *représentation universelle* : soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des représentations unitaires (π, H)

de G avec $H = l^2$. On définit alors $\pi_u = \bigoplus_{(\pi,H)\in\mathcal{E}} \pi$, qui est une représentation de G sur $H_u = \bigoplus_{(\pi,H)\in\mathcal{E}} H$ (somme hilbertienne), c'est la représentation universelle de G.

Remarque 4.3. On note $\mathbb{F}_\infty = \mathbb{F}_\mathbb{N}$. Soient $(g_i)_{i\in\mathbb{N}}$ ses générateurs. Alors pour tout espace de Hilbert H, on a une bijection :

$$\begin{array}{ccl} E & \longleftrightarrow & \{(U_i)_{i\in\mathbb{N}}, U_i \in \mathcal{U}(H)\}, \\ \pi & \longrightarrow & (\pi(g_i))_{i\in\mathbb{N}} \end{array}$$

où $E = \{\pi$ représentation unitaire de $\mathbb{F}_\infty$ dans $H\}$.

Définition 4.4. Soit G un groupe. On définit la C^*-algèbre du groupe G, notée $C^*(G)$, comme la C^*-algèbre engendré par $\pi_u(G)$ dans $B(H_u)$.

Remarque 4.5. Par un travail analogue à celui effectué sur la norme *max*, on a :

$$\begin{aligned} \forall(\lambda_g)_{g\in G},\ \|\sum_{g\in G}\lambda_g\pi_u(g)\|_{C^*(G)} &= \sup_{(\pi,H)\in\mathcal{E}}\|\sum_{g\in G}\lambda_g\pi(g)\|_{B(H)} \\ &= \sup_{\substack{(\pi,\,H)\text{ représentation} \\ \text{unitaire de G}}}\|\sum_{g\in G}\lambda_g\pi(g)\|_{B(H)}, \end{aligned}$$

où la famille des $(\lambda_g)_{g\in G}$ est à support fini.

Proposition 4.6. Soient F et G deux groupes discrets dénombrables et $\varphi : F \to G$ un morphisme de groupes. Alors, il existe $\tilde{\varphi} : C^*(F) \to C^*(G)$ un morphisme de C^*-algèbres tel que $\tilde{\varphi} \circ \pi_u = \pi_u \circ \varphi$.
(On note identiquement la représentation universelle de F ou de G : (π_u, H_u).)

Démonstration. On voit dans un premier temps qu'on peut étendre (formellement) φ en un morphisme d'algèbres de groupes $\varphi_1 : \mathbb{C}[F] \to \mathbb{C}[G]$, où $\mathbb{C}[F]$ et $\mathbb{C}[G]$ sont les sous-algèbres de $B(H_u)$ engendrées respectivement par $\pi_u(F)$ et $\pi_u(G)$. Comme la représentation universelle est unitaire, il se trouve que ces algèbres sont en fait des *-algèbres, et on vérifie aisément que φ_1 est un morphisme d'*-algèbres. D'ailleurs, on a même $\varphi_1 : \mathbb{C}[F] \to C^*(G)$ et les espaces $\mathbb{C}[F]$ et $C^*(G)$ sont munis des normes induites par les normes sur les H_u.
Montrons alors que φ_1 est uniformément continue ce qui nous permettra de l'étendre en un morphisme de C^*-algèbres de $\overline{\mathbb{C}[F]} = C^*(F)$ dans $C^*(G)$ par

le Théorème de prolongement des applications uniformément continues.
Soient $x \in \mathbb{C}[F]$ et $y \in C^*(G)$, on a :

$$\|x\| = \sup_{\substack{(\pi, l^2) \text{ représentation} \\ \text{unitaire de F}}} \|\pi(x)\|_{B(l^2)}$$

$$\|y\| = \sup_{\substack{(\pi, l^2) \text{ représentation} \\ \text{unitaire de G}}} \|\pi(y)\|_{B(l^2)},$$

où l'on note abusivement $\pi\left(\sum_{g \in G} \lambda_g \pi_u(g)\right)$, pour toute représentation unitaire π de F ou G.
Soit donc $x \in \mathbb{C}[F]$ et π une représentation unitaire de G dans $B(l^2)$. On sait que $\pi \circ \varphi_1$ est une représentation unitaire de F dans $B(l^2)$, ainsi il vient :

$$\|\pi \circ \varphi_1(x)\| \leq \|x\|.$$

Et immédiatement, en passant au sup sur les représentations π :

$$\|\varphi_1(x)\| \leq \|x\|.$$

Ceci nous mène donc bien à l'uniforme continuité de φ_1. □

4.2 Un pas vers le Théorème de Kirchberg :

Commençons par un lemme préliminaire :

Lemme 4.7. *Soient $(a_i)_{i \in I}$ et $(b_i)_{i \in I}$ deux familles à supports finis d'opérateurs de B(H). Alors on a :*

$$\|\sum_{i \in I} a_i b_i\| \leq \|\sum a_i a_i^*\|^{1/2} \|\sum b_i^* b_i\|^{1/2}.$$

Démonstration. On peut supposer I fini, $I = [|1; n|]$ et on considère les matrices de $M_n(B(H))$:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ b_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ b_n & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

On sait alors que $\|A.B\| \leq \|A\|.\|B\|$. Pour conclure, il suffit alors d'utiliser que $\|A\|^2 = \|AA^*\|$ et $\|B\|^2 = \|B^*B\|$. □

Voici une proposition qui va nous servir pour le lemme suivant.

Proposition 4.8. La boule unité fermée de $M_n(\mathbb{C})$ pour la norme d'opérateurs est l'enveloppe convexe C_n des éléments unitaires.

Démonstration. Montrons d'abord par récurrence sur n que toute matrice diagonale de la boule unité B_n est dans C_n.
Si $n = 1$, on a que $\forall r \in [0; 1], re^{i\theta} = r.e^{i\theta} + \frac{1-r}{2}.1 + \frac{1-r}{2}.(-1)$.
Supposons le résultat vrai au rang $n-1$, avec $n \geq 1$. Soit D une matrice diagonle de B_n,

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \text{ avec } |\lambda_i| \leq 1, \forall i.$$

On a :

$$D = |\lambda_1|. \begin{pmatrix} \frac{\lambda_1}{|\lambda_1|} & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix} + (1 - |\lambda_1|). \begin{pmatrix} 0 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Or par hypothèse, $D' = \begin{pmatrix} \lambda_2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ est combinaison convexe d'éléments unitaires de $M_{n-1}(\mathbb{C})$:

$$D' = t_1.U_1 + \cdots + t_k.U_k.$$

Ainsi, il suffit de constater que les matrices :

$$\begin{pmatrix} \frac{\lambda_1}{|\lambda_1|} & 0 \\ 0 & U_p \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & U_p \end{pmatrix} = \frac{1}{2}. \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U_p \end{pmatrix} + \frac{1}{2}. \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & U_p \end{pmatrix}$$

sont dans C_n pour tout $p \in [|1; k|]$. Ceci achève la récurrence.

On peut alors facilement étendre le résultat aux matrices auto-adjointes de B_n (il suffit d'écrire $M = PDP^*$, avec D diagonale et P untaire, et d'utiliser le fait que C_n est stable par conjugaison par un unitaire), et en utilisant la décomposition polaire sur $M_n(\mathbb{C})$ on obtient le résultat pour tout élément de B_n. $\square$

Lemme 4.9. *Soit F un groupe libre, et $(U_i)_{i\in I}$ des générateurs unitaires libres de $C^*(F)$ (i.e. les images des générateurs libres de F dans H_u). Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille à support fini de $B(H)$. On note $T : l^\infty(I) \to B(H)$ l'application linéaire définie par $T((\alpha_i)_i \in I) = \sum_{i\in I} \alpha_i x_i$. Alors on a :*

$$\|T\|_{cb} \leq \| \sum_{i\in I} U_i \otimes x_i \|_{C^*(F)\otimes_{min} B(H)}.$$

Démonstration. Précisons que l'espace de départ de T est ici vu comme un sous espace vectoriel de $B(l^2)$. Commençons par modifier l'écriture de $\|T\|_{cb}$. Par définition, on a $\|T\|_{cb} = \sup_n \|T^{(n)}\|$, où l'on a posé :

$$\begin{array}{rcl} T^{(n)} : M_n(l^\infty(I)) & \to & M_n(B(H)) \\ (u_{i,j})_{i,j} & \mapsto & (T(u_{i,j}))_{i,j}. \end{array}$$

Rappelons que l'on a un isomorphisme isométrique de $(M_n(B(H)), \|.\|_1)$ dans $M_n(\mathbb{C}) \otimes_{min} B(H)$ (L'isomorpisme est évident si l'on fait intervenir la base canonique de $M_n(\mathbb{C})$). La norme $\|.\|_1$ est définie comme dans la partie 2, c'est à dire que l'on voit $M_n(B(H))$ comme étant égal à $B(H^{\oplus n})$. Le caractère isométrique est clair car l'isomorphisme est un morphisme injectif d'*-algèbres entre deux C^*-algèbres (cf. Théorème 2.6).

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\|T^{(n)}\| = \sup_{\substack{A \in M_n(l^\infty(I)) \\ \|A\|\leq 1}} \|T^{(n)}(A)\|_{M_n\otimes B(H)}.$$

De plus, on vérifie que

$$M_n(l^\infty(I)) = \{(A_i)_{i\in I} | \forall i \in I,\ A_i \in M_n(\mathbb{C}),\ et\ \sup_i \|A_i\| < \infty\},$$
$$\text{et que } \|(A_i)_{i\in I}\|_{M_n(l^\infty(I))} = \sup_i \|A_i\|.$$

La deuxième égalité découle du Théorème 2.6, car $\sup \|A_i\|$ définit une norme de C^*-algèbre sur $M_n(l^\infty(I))$.
Enfin, si $A = (A_i)_{i\in I} \in M_n(\mathbb{C}) \otimes l^\infty$, alors $T^{(n)}(A) = \sum_i A_i \otimes x_i$.

En rassemblant tous ces résultats, on obtient :

$$\|T\|_{cb} = \sup_n \sup_{\substack{(A_i)\in M_n(\mathbb{C})^I \\ \forall i,\, \|A_i\|\leq 1}} \| \sum_i A_i \otimes x_i \|_{M_n(\mathbb{C})\otimes B(H)}. \tag{1}$$

Travaillons maintenant sur le deuxième terme de l'égalité. En utilisant la propriété sur la norme sur $C^*(F)$, on montre facilement que :

$$\begin{aligned}\|\sum_{i\in I} U_i \otimes x_i\|_{C^*(F)\otimes_{min}B(H)} &= \sup_{(\pi,K)\in\mathcal{E}} \|\sum_i \pi(g_i)\otimes x_i\|_{B(K)\otimes_{min}B(H)} \\ &= \sup_{\substack{(\pi,K)\in\mathcal{E}\\(A_i)\in\mathcal{U}(K)^I}} \|\sum_i A_i\otimes x_i\|_{B(K)\otimes_{min}B(H)} \quad (2)\end{aligned}$$

où dans la première égalité, les (g_i) sont les générateurs libres de G, tels que $U_i = \pi_u(g_i)$, pour tout i. La deuxième égalité provient de la Remarque 4.3.

En prenant pour espaces de Hilbert la suites des $M_n(\mathbb{C})$ on obtient que :

$$\begin{aligned}(2) &\geq \sup_n \sup_{\substack{(A_i)\in M_n(\mathbb{C})^I\\ \forall i,\, A_i\ unitaire}} \|\sum_i A_i\otimes x_i\|_{M_n(\mathbb{C})\otimes B(H)} \\ &= (1).\end{aligned}$$

Cette deuxième égalité, qui permet de conclure est due à un argument de convexité, que nous allons détailler :

Commençons par remarquer que comme $(x_i)_{i\in I}$ est à support fini, on peut supposer que I est fini. Fixons ensuite $i_0 \in I$ et $n \in \mathbb{N}$. La fonction

$$\begin{aligned}M_n(\mathbb{C}) &\to \mathbb{R}_+ \\ A_{i_0} &\mapsto \sup_{\substack{(A_i)_{i\neq i_0}\in M_n(\mathbb{C})^{I-\{i_0\}}\\ \forall i,\, \|A_i\|\leq 1}} \|\sum_i A_i\otimes x_i\|_{M_n(\mathbb{C})\otimes B(H)}\end{aligned}$$

est convexe. Ainsi par la proposition précédente, le sup de cette fonction sur la boule unité est égal au sup pris sur les éléments unitaires. On applique successivement ce raisonnement à tous les éléments de I (qui est fini) pour obtenir l'égalité souhaitée. □

Le théorème suivant (et surtout $(ii) \Leftrightarrow (iii)$) va nous permettre de lier la norme *min* d'un élément de $E \otimes B(H)$ (ou E est l'espace vectoriel engendré par une famille engendrant la C^*-algèbre $C^*(F)$) avec une propriété qui n'est pas liée à la strucuture imposée par la norme *min*. Ce résultat constitue ainsi une avancée vers le Théorème de Kirchberg.

Théorème 4.10. *En reprenant les notations du lemme précédent, on a les équivalences :*

(i) $\|T\|_{cb} < 1$
(ii) $\|\sum_{i\in I} U_i \otimes x_i\|_{C^*(F)\otimes_{min}B(H)} < 1$
(iii) il existe des familles à supports finis $(a_i)_{i\in I}$*,* $(b_i)_{i\in I}$ *d'opérateurs de B(H) telles que* $\forall i \in I$*,* $x_i = a_i b_i$ *et*

$$\|\sum a_i a_i^*\|^{1/2}\|\sum b_i^* b_i\|^{1/2} < 1.$$

Démonstration. L'implication $(ii) \Rightarrow (i)$ est démontrée dans le Lemme 4.9.
L'implication $(iii) \Rightarrow (ii)$ est une conséquence du Lemme 4.7 appliqué aux familles $U_i \otimes a_i$ et $1 \otimes b_i$, en constatant que $(U_i \otimes a_i).(U_i^* \otimes a_i*) = 1 \otimes (a_i a_i^*)$ et que $\|1 \otimes A\|_{C^*(F)\otimes_{min}B(H)} = \|A\|_{B(H)}$ (cf. propsition 2.1).
Supposons maintenant (i) et montrons (iii). Par le Théorème 3.2 de la partie 3, on sait qu'il existe :

- un espace de Hilbert K ;
- un mophisme $\pi : l^\infty(I) \to B(K)$ d'*-algèbres ;
- deux applications $V, W : H \to K$ telles que $\|V\| \leq 1$ et $\|W\| \leq 1$

tels que $\forall x \in l^\infty(I)$, $T(x) = V^*\pi(x)W$.
Comme la famille $(x_i)_{i\in I}$ est à support fini, on peut supposer que I est fini.
Considérons alors $(e_i)_{i\in I}$ la base canonique de $l^\infty(I)$ et $\forall i \in I$, on pose :

$$a_i = V^*\pi(e_i) \text{ et } b_i = \pi(e_i)W.$$

Alors on a bien $a_i b_i = V^*\pi(e_i^2)W = T(e_i) = x_i$, et de plus

$$\begin{aligned}
\|\sum a_i a_i^*\|^{1/2} &= \|V^*\pi(\sum_i e_i)V\|^{1/2} \\
&\leq [\|V^*\|.\|\pi(\sum_i e_i)\|.\|V\|]^{1/2} \\
&\leq \|V\|
\end{aligned}$$

(car π est un morphisme de C^*-algèbres, donc de norme inférieure à 1 et $\|\sum_i e_i\|_{l^\infty(I)} = 1$).
De même, on a $\|\sum b_i^* b_i\|^{1/2} \leq \|W\|$. Ainsi, en utlisant $\|V\|.\|W\| = \|T\|_{cb}$, on obtient l'inégalité souhaitée.
Cependant, les a_i et les b_i ne sont pas des éléments de B(H). Montrons qu'on peut tout de même s'y ramener :
Quitte à remplacer $\widehat{H}$ par l'espace vectoriel engendré par les images des $\pi(e_i)W$, on peut supposer que $\widehat{H}$ est au plus séparable. Ainsi, il existe une injection $\mathcal{I} : \widehat{H} \to H$ et soient $K = \mathcal{I}(\widehat{H})$ et P_K la projection orthogonale sur K. Alors $\mathcal{I}$ induit une bijection entre $\widehat{H}$ et K, dont nous notons $\mathcal{J}$ l'inverse. On vérifie alors que $\mathcal{I}^* = \mathcal{J}P_K$. Enfin, on construit pour tout i des éléments de B(H)

$$\tilde{a_i} = a_i\mathcal{J}P_K \text{ et } \tilde{b_i} = \mathcal{I}b_i$$

tels que $\forall i$, $\tilde{a_i}\tilde{b_i} = a_i \mathcal{J} P_K \mathcal{I} b_i = a_i b_i = x_i$
et $\forall i$,

$$\begin{aligned}
\tilde{a_i}\tilde{a_i}^* &= a_i \mathcal{J} P_K (\mathcal{J} P_K)^* a_i^* \\
&= a_i \mathcal{J} P_K \mathcal{I} a_i * = a_i a_i^* \\
\tilde{b_i}^* \tilde{b_i} &= b_i^* \mathcal{I}^* \mathcal{I} b_i \\
&= b_i^* b_i
\end{aligned}$$

Ainsi les familles $(\tilde{b_i})$ et $(\tilde{a_i})$ conviennent. □

Remarque 4.11. L'équivalence entre (i) et (ii) et l'homogénéité par rapport à la famille $(x_i)_{i\in I}$ de $\|T\|_{cb}$ et $\|\sum\limits_{i\in I} U_i \otimes x_i\|_{C^*(F)\otimes_{min} B(H)}$ montre qu'en fait ces deux termes sont égaux.

La remarque suivante est due au fait que dans le Théorème 3.4, les espaces E_i sont engendrés par une famille de générateurs de A_i (ici les U_i) et par l'unité. Elle permettra donc de ramener le Théorème 4.10 dans ce cadre.

Remarque 4.12. Soit A une C^*-algèbre et $(a_i)_{i\in I}$ une famille à support fini d'éléments da A. Soit F un groupe libre engendré par une famille (libre) $(g_i)_{i\in I}$ et soit (U_i) les images des (g_i) dans $C^*(F)$. Soit $i_0 \in I$ et $I' = I - \{i_0\}$. Notons indifférement $\|.\|$ la norme *min* ou *max* sur $C^*(F) \otimes A$, alors on a :

$$\|1 \otimes a_{i_0} + \sum_{i\in I'} U_i \otimes a_i\| = \|\sum_{i\in I} U_i \otimes a_i\|.$$

Démonstration. Considérons la famille $(\gamma_i)_{i\in I}$ définie par :

$$\gamma_i = g_{i_0}^{-1} g_i \text{ si } i \in I', \text{ et } \gamma_{i_0} = g_{i_0}.$$

On vérifie que cette famille est libre et engendre F (le caractère générateur est évident et F vérifie la propriété universelle du groupe libre pour cette famille). Il découle de la propriété universelle qu'il existe un isomorphisme de groupes $h : F \to F$ qui envoie chaque g_i sur γ_i.
Par la Proposition 4.6, cet automorphisme induit un morphisme de C^*-algèbres unitaire $\pi : C^*(F) \to C^*(F)$ qui envoie chaque U_i vers $U_{i_0}^* U_i$ pour tout $i_i n I'$. Soit alors $L : C^*(F) \to C^*(F)$ la multiplication à gauche par U_{i_0}. Alors l'application $L\pi \otimes I_A$ est clairement isométrique pour $\|.\|$ et préserve les U_i pour $i \in I'$ et envoie $1 \otimes a_{i_0}$ sur $U_{i_0} \otimes a_{i_0}$. □

5 Le Théorème de Kirchberg

Nous pouvons maintenant démontrer le Théorème de Kirchberg, dont voici l'énoncé :

Théorème 5.1. *Soit $F = \mathbb{F}_\infty$ et H un espace de Hilbert séparable, de dimension infinie. Il n'y a qu'une seule façon de compléter $C^*(F) \otimes B(H)$ en une C^*-algèbre. Autrement dit, on a :*

$$C^*(F) \otimes_{min} B(H) = C^*(F) \otimes_{max} B(H).$$

Démonstration. Ramenons nous aux notations du Théorème 3.4 :
Soit $A_1 = C^*(F)$, $A_2 = B(H) = E_2$ et soit E_1 le sous-espace vectoriel de A_1 engendré par l'unité et par les générateurs libres $(U_i)_{i \in I}$ de $C^*(F)$. Soit alors $x \in E_1 \otimes E_2$, tel que $\|x\|_{min} < 1$. On peut écrire :

$$x = \sum_{i \in I} U_i \otimes x_i + 1 \otimes x'.$$

avec (x_i) une famille à support fini. Ainsi, comme I est infini, il existe $i_0 \in I$ tel que $U_{i_0} = 0$.
Ainsi par la Remarque 4.12, en posant $I' = I - \{i_0\}$, on a :

$$\|x\|_\alpha = \| \sum_{i \in I'} U_i \otimes x_i + U_{i_0} \otimes x'\|_\alpha,$$

où la norme α est la norme min ou max.
Donc en utilisant le Théorème 4.10, il existe des familles à supports finis $(a_i)_{i \in I}$, $(b_i)_{i \in I}$ d'opérateurs de B(H) telles que $\forall i \in I$, $x_i = a_i b_i$ et

$$\| \sum a_i a_i^* \|^{1/2} \| \sum b_i^* b_i \|^{1/2} < 1.$$

Soit maitenant $\pi (= \sigma_{max}) : A_1 \otimes_{max} A_2 \to B(H_{max})$ un morphisme (injectif) de C^*-algèbres, et π_1 et π_2 définis par :

$$\begin{aligned} \forall a \in A, \pi_1(a) = \pi(a \otimes 1), \\ \forall b \in B, \pi_2(b) = \pi(1 \otimes b). \end{aligned}$$

Alors on a :

$$\begin{aligned} \pi(x) &= \sum_{i \in I} \pi_1(U_i) \pi_2(x_i) \\ &= \sum_{i \in I} \pi_1(U_i) \pi_2(a_i) \pi_2(b_i) \\ &= \sum_{i \in I} \pi_2(a_i) \pi_1(U_i) \pi_2(b_i), \end{aligned}$$

car les images de π_1 et π_2 commutent.
En appliquant le Lemme 4.7, on obtient :

$$\begin{aligned}\|\pi(x)\| &\leq \|\sum_{i\in I}\pi_2(a_i)\pi_1(U_i)\pi_1(U_i)^*\pi_2(a_i)^*\|^{1/2}.\|\sum_{i\in I}\pi_2(b_i)^*\pi_2(b_i)\|^{1/2}\\ &= \|\sum_{i\in I}\pi_1(a_i)\pi_1(a_i)^*\|^{1/2}.\|\sum_{i\in I}\pi_2(b_i)^*\pi_2(b_i)\|^{1/2}\\ &< 1.\end{aligned}$$

(Rappelons que les U_i sont unitaires et que π_1 et π_2 sont des morphismes de C^*-algèbres injectifs donc des isométries.)
Ainsi, $\|x\|_{max} = \|\pi(x)\| < 1$.

Ceci étant vrai pour tout x de norme inférieure à 1, on obtient facilement que les normes *min* et *max* coïncident sur $E_1 \otimes B(H)$. Par conséquent $\|T\| = 1$, et il reste à montrer que les $T^{(n)}$ sont également de norme 1. Pour cela utilisons la Proposition 2.14 et le Corollaire 2.19, qui permettent de dire que $\forall n \in \mathbb{N}$, on a les isomorphismes isométriques (canoniques) d'espaces vectoriels :

$$\begin{aligned}\varphi : E_1 \otimes_{min} B(H^{\oplus n}) &\rightarrow M_n(E_1 \otimes_{min} B(H)),\\ \psi : A_1 \otimes_{max} B(H^{\oplus n}) &\rightarrow M_n(A_1 \otimes_{max} B(H)).\end{aligned}$$

Posons alors $\widehat{T_n} = \psi^{-1} \circ T^{(n)} \circ \varphi$. Comme φ et ψ sont des isométries, on obtient que $\|T^{(n)}\| = \|\widehat{T_n}\|$. Montrons $\widehat{T_n}$ est l'application d'inclusion.
Pour cela il suffit de constater que $T^{(n)}$ est l'inclusion et que

$$\forall x \in E_1 \otimes B(H^{\oplus n}),\ \psi^{-1} \circ \varphi(x) = x$$

(car les isomorphismes φ et ψ sont égaux sur $E_1 \otimes_{min} B(H^{\oplus n})$, ce sont les isomorphismes canoniques).
Ainsi, comme $H^{\oplus n}$ est séparable de dimension infinie, on peut appliquer à $\widehat{T_n}$ le résultat obtenu pour T, c'est à dire $\|\widehat{T_n}\| = 1 = \|T^{(n)}\|$. □

6 Retour au cas commutatif

On admettra tout d'abord les deux résultats suivants (X, Y, Z seront supposés des espaces topologiques compacts).

Théorème 6.1. *Toute C^*-algèbre commutative est isomorphe à une certaine C^*-algèbre $C(X)$ où X est un espace topologique compact.*

Définition 6.2. Un *caractère* de $C(X)$ est un morphisme de C^*-algèbre de $C(X)$ dans $\mathbb{C}$. On note $\widehat{C(X)}$ l'ensemble des caractères sur $C(X)$.

Théorème 6.3. *Tout caractère de $C(X)$ est de la forme $f \in C(X) \longmapsto f(x)$ où $x \in X$. De plus, X est homéomorphe à $\widehat{C(X)}$ muni de la topologie de la convergence simple.*

Remarque 6.4. Tout morphisme de C^*-algèbres $f : C(X) \longrightarrow C(Y)$ induit une application continue

$$\begin{array}{rcl} \tilde{f} : \widehat{C(Y)} & \rightarrow & \widehat{C(X)} \\ \pi & \mapsto & \pi \circ f \end{array}$$

et donc une application $g : Y \longrightarrow X$ continue. Inversement, $g : Y \longrightarrow X$ continue induit $f : C(X) \longrightarrow C(Y)$ "composition par g à droite" morphisme de C^*-algèbres.

On a donc correspondance exacte entre les appliacations continues de Y dans X et les morphismes de C^*-algèbres de $C(X)$ dans $C(Y)$!

On déduit du Théorème 6.3 le résultat suivant :

Corollaire 6.5. *Soient X et Y deux espaces topologiques compacts. Alors il n'existe qu'une seule norme de C^*-algèbre sur $C(X) \otimes C(Y)$, et elle le rend isomorphe à $C(X \times Y)$.*

Démonstration. Soit $\|.\|_1$ une norme de C^*-algèbre sur $C(X) \otimes C(Y)$. Soit A le complété de $C(X) \otimes C(Y)$ pour $\|.\|_1$, A est donc une C^*-algèbre commutative (par continuité du produit et de l'étoile). Donc, par le Théorème 6.1, il existe Z espace compact tel que $A \simeq C(Z)$.

Soit $i : C(X) \otimes C(Y) \longrightarrow A \simeq C(Z)$ l'inclusion. Soient les morphismes de C^*-algèbres

$$\begin{array}{rcl} \sigma_1 : C(X) & \rightarrow & C(Z) \\ f & \mapsto & i(f \otimes 1_Y) \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rcl} \sigma_2 : C(Y) & \rightarrow & C(Z) \\ g & \mapsto & i(1_X \otimes g). \end{array}$$

Par la Remarque 6.4, σ_1 et σ_2 induisent $\phi_1 : Z \longrightarrow X$ et $\phi_2 : Z \longrightarrow Y$ des applications continues.
Par définition de la topologie produit, l'application

$$\begin{array}{rcl} \phi_1 \times \phi_2 : Z & \rightarrow & X \times Y \\ z & \mapsto & (\phi_1(z), \phi_2(z)) \end{array}$$

est continue, et donc induit un morphisme de C^*-algèbres

$$\sigma : C(X \times Y) \longrightarrow C(Z).$$

On vérifie aisément que σ correspond à i sur $C(X) \otimes C(Y)$.
Pour conclure que la norme $\|.\|_1$ coïncide avec la norme de $C(X \times Y)$ sur $C(X) \otimes C(Y)$, il suffit de vérifier que σ est une isométrie, donc il suffit de vérifier que $\phi_1 \times \phi_2$ est surjective, puisque $\sigma(f)(z) = f((\phi_1 \times \phi_2)(z))$.
Or, si $\phi_1 \times \phi_2$ n'était pas surjective, comme $(\phi_1 \times \phi_2)(Z)$ est l'image continue d'une compact, il est un fermé de $X \times Y$, donc il existe V_1 ouvert de X et V_2 ouvert de Y tels que $V_1 \times V_2 \subseteq ((\phi_1 \times \phi_2)(Z))^c$.
On prend alors $f \in C(X)$ non nulle, nulle sur $(V_1)^c$ et $g \in C(Y)$ non nulle, nulle sur $(V_2)^c$, ce qu'on peut faire par le Lemme d'Urysohn car X et Y sont compacts.
Alors $\sigma(f \otimes g) = 0$, donc $i(f \otimes g) = 0$, ce qui est absurde car i est injective.

Donc toute norme de C^*-algèbre $\|.\|_1$ coïncide avec la norme de $C(X \times Y)$ sur $C(X) \otimes C(Y)$, et ainsi il n'existe qu'une seule norme de C^*-algèbre sur $C(X) \otimes C(Y)$, et elle le rend isomorphe à $C(X \times Y)$.

$\square$

Références

[Art91] Michael ARTIN : *Algebra.* Prentice Hall Inc., Englewood Cliffs, NJ, 1991.

[JV] De La Harpe P. JONES V. : *An introduction to C^*-Algebras.* http ://www.unige.ch/math/biblio/preprint/cstar/chap4.ps.

[KR83] Richard V. KADISON et John R. RINGROSE : *Fundamentals of the theory of operator algebras. Vol. I*, volume 100 de *Pure and Applied Mathematics.* Academic Press Inc. [Harcourt Brace Jovanovich Publishers], New York, 1983. Elementary theory.

[Pis95] Gilles PISIER : A simple proof of a theorem of Kirchberg and related results on C*-norms. 1995.

[Wika] WIKIPÉDIA : C*-algebra.

[Wikb] WIKIPÉDIA : Group algebra.

[WO93] N. E. WEGGE-OLSEN : *K-theory and C*-algebras.* Oxford Science Publications. The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 1993. A friendly approach.