

Équations de la magnétohydrodynamique, théorèmes anti-dynamo, instabilités

Ismaël Bouya, encadré par David Gérard-Varet

Octobre 2009

Table des matières

1	Modèle physique	2
1.1	Équation d'induction	2
1.2	Réaction du champ magnétique sur le fluide	3
1.3	Adimensionnement	3
1.4	Conditions aux bords	3
2	Théorèmes anti-dynamo	3
2.1	Décomposition du champ magnétique	4
2.2	Amplification du champ magnétique dans un fluide	4
2.3	Champs de vitesse pouvant engendrer une amplification du champ magnétique	5
3	Étude de nombres de Reynolds magnétiques grands	5
3.1	Équation, formulation Lagrangienne	5
3.2	Fluide idéal	6
3.3	Fluide non-idéal	6
3.4	Fonction de Green, approximation	6
3.5	Théorème anti-dynamo rapide	7
4	Effet-α	7
4.1	Principe	7
4.2	Deux résultats d'(in)stabilité	8

Depuis le début du XX^e siècle, on cherche à étudier comment un corps céleste tel que la Terre peut engendrer un champ magnétique “permanent”. L’hypothèse qui était admise alors, une aimantation permanente grâce aux éléments ferromagnétiques, s’est révélée impossible depuis qu’on connaît la composition interne et les conditions au centre de la Terre. En 1919, J.Larmor a envisagé une nouvelle hypothèse : ces champs magnétiques proviendraient d’un effet dynamo auto-entretenu.

On parle d’effet dynamo lorsqu’il y a une conversion d’énergie mécanique en énergie électromagnétique. Dans le cas de la Terre, l’écoulement du fer/nickel liquide dans le noyau (ou d’autres éléments selon l’astre) engendrerait un champ magnétique, qui maintiendrait à son tour le mouvement du fluide. C’est cet effet là que nous allons modéliser et étudier : après avoir vu comment ces champs interagissent, nous verrons des théorèmes anti-dynamo, et nous finirons avec l’effet α pour l’“existence” de dynamo.

1 Modèle physique

1.1 Équation d’induction

Les équations de Maxwell permettent d’obtenir l’équation vérifiée par le champ électro-magnétique :

$$\nabla \cdot E = \frac{\rho_e}{\varepsilon_0}, \quad (1.1)$$

$$\nabla \cdot B = 0, \quad (1.2)$$

$$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t}, \quad (1.3)$$

$$\nabla \times B = \mu_0 j + \frac{1}{c^2} \frac{\partial E}{\partial t}. \quad (1.4)$$

On fait l’hypothèse que les vitesses caractéristiques des champs électrique et magnétique sont du même ordre que celle du fluide, et bien inférieures à la vitesse de la lumière ; on note L la longueur caractéristique du système, T son temps caractéristique. On note aussi la vitesse caractéristique $V = L/T \ll c$. Cette hypothèse dit qu’une dérivée spatiale (resp. temporelle) du champ électrique sera de l’ordre de E/L (resp. E/T), et de même pour le champ magnétique.

Modulo cette approximation (on élimine les termes d’ordre $V/c \ll 1$), et grâce à la loi d’Ohm :

$$j \approx \sigma(E + v \times B), \quad (1.5)$$

on arrive à un système d’équations qui gouvernent le champ magnétique :

$$\frac{\partial B}{\partial t} \approx \nabla \times (v \times B) + \nu_m \Delta B, \quad (1.6)$$

$$\nabla \cdot B = 0. \quad (1.7)$$

Où v désigne le champ de vitesses dans le fluide.

Les autres grandeurs (champ électrique, densité de charge et courant) peuvent ensuite être obtenues grâce aux équations approchées.

1.2 Réaction du champ magnétique sur le fluide

Dans le modèle choisi, seule la partie magnétique de la force de Lorentz est à prendre en compte (la partie électrique est d'ordre inférieur). Pour un fluide Newtonien soumis uniquement à cette force, on a alors les équations de Navier-Stokes :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho v) = 0, \quad (1.8)$$

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + (v \cdot \nabla)v \right) = -\nabla p + \eta \Delta v + \left(\xi + \frac{\eta}{3} \right) \nabla(\nabla \cdot v) + j \times B, \quad (1.9)$$

où le champ p est le champ de pression dans le fluide, ρ la densité de masse, $\eta = \nu \rho$ est la viscosité dynamique (ν est la viscosité cinématique), et ξ la viscosité de volume.

1.3 Adimensionnement

On se place dans le cas d'un fluide incompressible (i.e. $\nabla \cdot v = 0$) : après adimensionnement, on arrive alors au système d'équations vérifiées par le champ magnétique et le champ de vitesse du fluide :

$$\nabla \cdot B = 0, \quad (1.10)$$

$$\frac{\partial B}{\partial t} = \nabla \times (v \times B) + \frac{1}{R_m} \Delta B, \quad (1.11)$$

$$\nabla \cdot v = 0, \quad (1.12)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (v \cdot \nabla)v = -\nabla \left(p + \frac{B^2}{2} \right) + \frac{1}{Re} \Delta v + (B \cdot \nabla)B. \quad (1.13)$$

R_m et Re sont les nombres de Reynolds magnétique et cinétique (et dépendent des variations caractéristiques du système).

1.4 Conditions aux bords

On considèrera dans la suite des situations où le milieu n'est pas homogène. Pour simplifier, on n'envisagera que des cas où σ (ou R_m dans la version adimensionnée) est constant par morceaux dans deux régions de l'espace séparées par une surface S fermée (typiquement une boule conductrice dans un milieu isolant). Dans le cas où la conductivité reste finie, la condition aux bords pour le champ magnétique s'écrit simplement

$$[B] = 0. \quad (1.14)$$

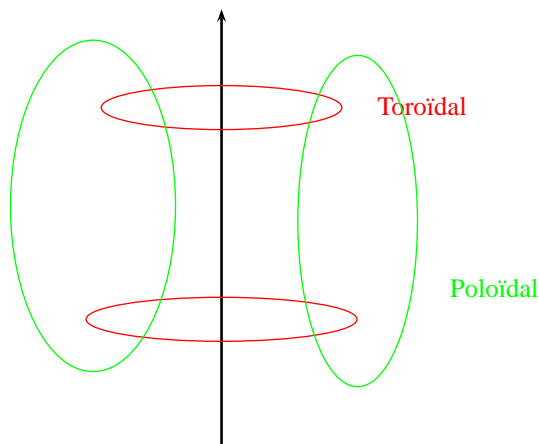
2 Théorèmes anti-dynamo

Les premiers théorèmes relatifs à l'effet dynamo ont été des théorèmes anti-dynamo, c'est-à-dire des théorèmes donnant des cas où il y a trop de symétries pour qu'un effet dynamo puisse être entretenu.

On va voir ici deux types de théorèmes anti-dynamo, en se limitant à deux types de géométrie : un espace cartésien périodique (avec uniquement un fluide conducteur, donc), ou un espace constitué

d'une boule conductrice et d'un extérieur isolant (on utilisera dans ce cas les coordonnées sphériques, et on introduira la décomposition toroïdale-poloïdale d'un champ de vecteur). Bien que les théorèmes soient différents, c'est le même type de restriction qui est appliqué dans les deux cas.

2.1 Décomposition du champ magnétique



On introduit ici la décomposition toroïdale-poloïdale du champ magnétique : elle consiste à écrire le champ magnétique comme somme d'une composante qui "tourne" autour d'un axe (toroïdal) et d'une selon les pôles (poloïdal, à la manière des lignes de champ d'un solénoïde). On cherche à écrire le champ B en coordonnées sphériques sous la forme

$$B(r, \theta, \phi) = B_T + B_P, \quad (2.1)$$

$$B_T(r, \theta, \phi) = \nabla \times (rT), \quad (2.2)$$

$$B_P(r, \theta, \phi) = \nabla \times \nabla \times (rP). \quad (2.3)$$

(Le champ B étant à divergence nulle, il s'écrit comme un rotationnel)

Proposition 1

Pour tout champ B régulier de classe \mathcal{C}^∞ (de classe \mathcal{C}^2 suffit), il existe P et T champs scalaires \mathcal{C}^∞ tels que (2.1), (2.2) et (2.3) soient satisfaits. De plus, P et T sont uniques à l'ajout d'une fonction de r près.

2.2 Amplification du champ magnétique dans un fluide

Théorème 1 (Cowling)

On se place dans le cas d'un fluide incompressible, et dans un espace cartésien périodique de période $2\pi L$. Alors un champ magnétique $B(x, y, t)$ indépendant de z ne peut être maintenu par un effet dynamo.

C'est-à-dire que pour toute solution (v, B) périodique de période $2\pi L$ et suffisamment régulière (disons \mathcal{C}^∞ pour simplifier) du système d'équations avec $\partial_z B = 0$, il existe $\alpha > 0$ et $C > 0$ tels que $\|B(t)\|_{L^2([0, 2\pi]^3)} \leq C e^{-\alpha t}$.

Théorème 2 (Cowling)

On considère ici une situation où on a une sphère de rayon a contenant du fluide conducteur à l'intérieur et un isolant à l'extérieur. Un champ magnétique à symétrie axiale $B(r, \theta, t)$ ne peut être maintenu par un fluide.

C'est-à-dire que pour toute solution (v, B) suffisamment régulière (disons \mathcal{C}^∞ pour simplifier) du système d'équations avec $\partial_\phi B = 0$, il existe $\alpha > 0$ et $C > 0$ tels que $\|B(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq C e^{-\alpha t}$

2.3 Champs de vitesse pouvant engendrer une amplification du champ magnétique

Théorème 3 (Zeldovich)

On se place dans le cas d'un fluide incompressible, et dans un espace cartésien périodique de période $2\pi L$.

Alors un champ de vitesse planaire $v = (v_x(x, y, z, t), v_y(x, y, z, t), 0)$ suffisamment régulier (\mathcal{C}^∞ par exemple) ne peut pas amplifier un champ magnétique : comme précédemment, le champ magnétique décroît exponentiellement.

Théorème 4

On considère maintenant le cas d'un champ de vitesse $v = v_T(r, \theta, \phi, t)$ purement toroïdal (c'est l'analogue du champ planaire). Un tel champ de vitesse ne peut entretenir une dynamo $B(r, \theta, \phi, t)$.

3 Étude de nombres de Reynolds magnétiques grands

3.1 Équation, formulation Lagrangienne

On s'intéresse dans cette section à un champ magnétique engendré par un fluide incompressible ayant un champ de vitesse stationnaire (indépendant du temps) pour des nombres de Reynolds grands ; l'équation d'induction du champ magnétique s'écrit alors sous la forme :

$$\frac{\partial B}{\partial t} = \nabla \times (v \times B) + \varepsilon \Delta B, \quad (3.1)$$

où $\varepsilon = \frac{1}{R_m}$.

On s'intéressera ici à l'étude de l'existence de dynamo rapide :

Pour ε donné, on note $\lambda(\varepsilon)$ le coefficient maximum de croissance du champ magnétique (On suppose au'on a déjà affaire à une dynamo, donc le coefficient est positif). On parle de dynamo rapide si $\lambda(\varepsilon) \geq \lambda_0 > 0$ quand ε tend vers 0. Dans le cas contraire ($\lambda(\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$) on parle de dynamo lente. Plus précisément, on peut poser

$$\lambda(\varepsilon) = \sup_{B_0} \limsup_{t \rightarrow +\infty} t^{-1} \log \|B\|, \quad (3.2)$$

le "coefficient de croissance maximal".

Pour étudier l'équation d'induction, il est préférable d'introduire les coordonnées Lagrangiennes (un peu modifiées) : On note $z(x, t)$ le déplacement pendant t , dans le champ de vitesse, de la particule qui était initialement en x , c'est-à-dire que z est solution de :

$$\begin{cases} \dot{z} &= v(z) \\ z(0) &= x \end{cases}. \quad (3.3)$$

On note B^L le champ en coordonnées Lagrangiennes. On a donc la relation :

$$B^L(x, t) = B(z(x, t), t). \quad (3.4)$$

3.2 Fluide idéal

Dans le cas d'un fluide idéal ($\varepsilon = 0$), l'équation d'induction s'écrit :

$$\frac{\partial B^L}{\partial t}(x, t) = B^L(x, t) \cdot \nabla v(z(x, t)). \quad (3.5)$$

Qui se résoud simplement en :

$$B^L(x, t) = g_*^t(x) B^L(x, 0), \quad (3.6)$$

où on note $z(x, t) = g^t x$, et $g_*^t x$ est la différentielle en x de g^t .

Physiquement, cela signifie que le champ magnétique est "figé" dans le fluide, dans le sens suivant :

On note du un vecteur infinitésimal dans le même sens que le champ B^L , qui est "attaché" initialement par les deux extrémités à des particules en x et $x + dx$. Au bout d'un temps t , ce vecteur sera transformé en $g_*^t x du$. La même matrice opère sur B^L , qui se "déplace" (en se dilatant) avec la particule dans le fluide.

3.3 Fluide non-idéal

Dans le cas d'un fluide non-idéal, on va plutôt définir :

$$B(z, t) = g_*^t(g^{-t} z) B^H(g^{-t} z, t), \quad (3.7)$$

ce qui amène à l'équation d'induction vérifiée par B^H :

$$\frac{\partial B^H}{\partial t} = -\varepsilon \nabla \times \Lambda_t \nabla \times \Lambda_t B^H + \varepsilon \Lambda_t^{-1} \nabla (\nabla \cdot B^H), \quad (3.8)$$

où

$$\Lambda_t(x) = (g_*^t)^*(x) g_*^t(x) \quad (3.9)$$

3.4 Fonction de Green, approximation

On note Γ la fonction de Green de l'équation, c'est-à-dire la fonction (matricielle) solution de

$$\begin{cases} \frac{\partial \Gamma}{\partial t} &= -\varepsilon \nabla \times \Lambda_t \nabla \times \Lambda_t \Gamma + \varepsilon \Lambda_t^{-1} \nabla (\nabla \cdot \Gamma) \\ \Gamma(x, y, 0) &= \delta(x - y) I_3 \end{cases} \quad (3.10)$$

Formellement, on a alors pour $t > 0$:

$$B^H(x, t) = \int \Gamma(x, y, t) B_0^H(y) d^3 y. \quad (3.11)$$

(En fait Γ est très régulière pour $t > 0$ en dehors de la diagonale $\{x = y\}$.)

Une décomposition de Γ en puissances de $\sqrt{\varepsilon}$ amène alors à l'approximation uniforme en temps fini :

$$\|\Gamma - \Gamma_N\| \leq O(\sqrt{\varepsilon}^N), \quad (3.12)$$

où Γ_N est la série tronquée au N -ième terme.

Cette approximation permet de montrer un théorème “anti-dynamo” qui donne une condition nécessaire sur le champ de vitesse pour l'existence d'une dynamo rapide.

3.5 Théorème anti-dynamo rapide

On définit l'exposant de Lyapunov d'un champ de vecteur :

Définition 1 (Exposant de Lyapunov)

Soient x une position dans l'espace, et η un vecteur “figé” en x (dans le sens déjà vu précédemment). On pose alors :

$$\chi(x, \eta) = \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log |g_*^t(x)\eta| = \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2t} \log(\Lambda_t(x)\eta, \eta) \quad (3.13)$$

Cet exposant correspond à l'exposant qui traduit la croissance du vecteur η suivant le champ de vitesses en partant de x à l'infini (en temps).

On a alors le théorème dû à Vishik :

Théorème 5 (Vishik)

Si les lignes de champ du champ de vitesse ne divergent pas exponentiellement à l'infini, alors seule une dynamo lente est possible, c'est-à-dire que pour des nombres de Reynolds magnétiques arbitrairement grands, le champ magnétique a une croissance exponentielle de plus en plus faible (et qui tend vers 0). En d'autres termes, si l'exposant de Lyapunov du champ de vitesses est nul en tout point de l'espace, alors une dynamo rapide ne peut exister :

$$\forall (x, \eta) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3, \chi(x, \eta) = 0 \Rightarrow \forall \lambda > 0, \exists \mu > 0, \forall \varepsilon < \mu, \|B(\cdot, t)\|_{L^2} \leq C e^{\lambda t} \quad (3.14)$$

4 Effet- α

4.1 Principe

Après ces théorèmes anti-dynamo, on cherche à trouver des champs à dynamo (éventuellement rapide). Ceci peut être possible grâce à l'effet- α . Cet effet se base sur une séparation d'échelle des champs.

On revient au système d'équations de la magnétohydrodynamique :

$$\frac{\partial B}{\partial t} - \nabla \times (v \times B) - \frac{1}{R_m} \Delta B = 0, \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (v \cdot \nabla)v + \nabla p - \frac{1}{Re} \Delta v = (\nabla \times B) \times B + f, \quad (4.2)$$

$$\nabla \cdot B = 0, \quad (4.3)$$

$$\nabla \cdot v = 0. \quad (4.4)$$

On considère ici un champ des vitesses qui varie sur une distance l (et de moyenne nulle sur cette distance), et on suppose la création d'un champ magnétique B_0 moyen sur une distance L beaucoup plus grande (qui va engendrer par interaction avec le fluide un champ magnétique variant sur une distance l). On écrit alors :

$$B = B_0 + b, \quad (4.5)$$

où la moyenne $\langle b \rangle$ sur une distance l est nulle. En insérant cette séparation dans l'équation d'induction, on obtient les équations d'évolution sur les deux échelles :

$$\frac{\partial B_0}{\partial t} = \nabla \times \langle v \times b \rangle + \frac{1}{R_m} \Delta B_0, \quad (4.6)$$

$$\frac{\partial b}{\partial t} = \nabla \times (v \times B_0 + v \times b - \langle v \times b \rangle) + \frac{1}{R_m} \Delta b. \quad (4.7)$$

Pour simplifier, on suppose que les nombres de Reynolds valent 1 (Ce n'est pas une hypothèse anodine, en particulier cela impose des restrictions sur l'"écart" entre l et L).

L'idée de l'effet- α est que la moyenne du terme à forte fluctuation $\nabla \times (v \times b)$ peut avoir un effet sur le champ moyen B_0 (un tel effet a déjà été observé expérimentalement [SM01]).

4.2 Deux résultats d'(in)stabilité

On va voir ici un résultats pour cet effet (démontré par David Gérard-Varet [GV06]) :

On ajoute dans ce cas là la même séparation d'échelle pour le temps (avec les mêmes hypothèses). On étudie des familles de solutions $(v_\varepsilon, 0) = (\frac{1}{\varepsilon} u^\varepsilon, 0)$ indexées par ε , où $u^\varepsilon(t, x) = U(\varepsilon^{-4}t, \varepsilon^{-2}x)$ est périodique en temps et en espace (de période 2π pour simplifier), et $U(\tau, \theta)$ vérifie

$$\int_{\mathbb{T} \times \mathbb{T}^3} U = 0, \quad (4.8)$$

$$\nabla_\theta \cdot U = 0. \quad (4.9)$$

On note \mathcal{P} l'espace correspondant, qui est un espace de Fréchet pour la famille de semi-normes

$$\|U\|_m^2 = \sum_{(\omega, \xi) \in \mathbb{Z}^4} (|\omega|^2 + |\xi|^2)^m |\hat{U}(\omega, \xi)|^2. \quad (4.10)$$

Le premier théorème est un théorème de stabilité en temps fini :

On considère un "écart" (v, b) de la solution $(v_\varepsilon, 0)$ (on obtient un nouveau système en (u, b) en remplaçant $v = v_\varepsilon + u$ dans les équations de Navier-Stokes et d'induction)

Théorème 6

Soit $T > 0$ fini, et m un entier positif ou nul. Soient u_0, b_0 suffisamment réguliers (Dans l'espace de Schwarz par exemple) à divergence nulle. Alors il existe $\delta > 0$ et $\varepsilon_0 > 0$ tels que si $m \geq 1$ ou $\|(u_0, b_0)\|_{H^{1/2}} \leq \delta$, alors il existe une unique solution $(u^\varepsilon, b^\varepsilon)$ pour tout $\varepsilon < \varepsilon_0$ et on a les inégalités pour ε assez petit et s assez grand :

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \|(u^\varepsilon, b^\varepsilon)(t, \cdot)\|_{L^2} \leq C \varepsilon^m \|(u_0, b_0)\|_{H^s}, \quad (4.11)$$

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \|(u^\varepsilon, b^\varepsilon)(t, \cdot)\|_{L^\infty} \leq C \varepsilon^m \|(u_0, b_0)\|_{H^s}. \quad (4.12)$$

Et un deuxième théorème donne un résultat d'instabilité en temps non constant :

Théorème 7

Il existe un sous-ensemble dense de \mathcal{P} , $\delta > 0$ et une fonction $t(\varepsilon) = O(|\ln(\varepsilon)|)$ pour lesquels les solutions du système d'équations vérifient :

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}^3, \|\partial_x^\alpha(v^\varepsilon, b^\varepsilon)|_{t=0}\| \leq C_\alpha \varepsilon^{m-2|\alpha|+1} \quad (4.13)$$

et

$$\|b^\varepsilon|_{t=t(\varepsilon)}\|_{L^2} \geq \delta \quad (4.14)$$

Références

- [Gil03] A.D. Gilbert. Dynamo theory. *Handbook of mathematical fluid dynamics*, 2 :355–441, 2003.
- [GV06] D. Gerard-Varet. Oscillating solutions of incompressible magnetohydrodynamics and dynamo effect. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 37(3) :815–840, 2006.
- [Par55] E.N. Parker. Hydromagnetic Dynamo Models. *The Astrophysical Journal*, 122 :293–314, 1955.
- [SM01] R. Stieglitz and U. Müller. Experimental demonstration of a homogeneous two-scale dynamo. *Physics of Fluids*, 13 :561, 2001.
- [VF93] MM Vishik and S. Friedlander. Dynamo theory methods for hydrodynamic stability. *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 72(2) :145–180, 1993.
- [Vis89] MM Vishik. Magnetic field generation by the motion of a highly conducting fluid. *Geophysical & Astrophysical Fluid Dynamics*, 48(1) :151–167, 1989.