Exposé de maîtrise 2006-2007

Ondes à la surface de l'eau

Fabien Lacasa et Ismaël Bouya

Travail encadré par Eric Séré

FIMFA
Ecole normale supérieure
45, rue d'Ulm 75005 Paris.

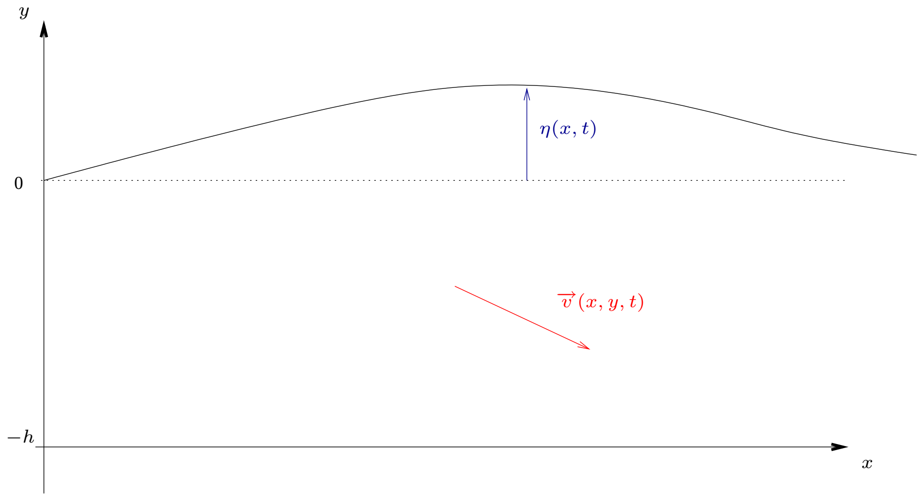
Table des matières

1 Introduction

L'étude des ondes de gravité dans l'eau nous a intéressé par son aspect physique et mathématique. Il s'agit d'une déformation de la surface de l'eau qui se déplace sans transporter globalement de matière.
L'analyse de tels phénomènes a par exemple des applications dans la compréhension des tsunamis. Le but de cet exposé est de présenter des travaux de Walter Craig sur l'existence d'ondes solitaires localisées à la surface de l'eau (en dimension 3), et d'autres résultats en dimension 2, où le problème est mieux connu, qui permettent de donner un contexte pour la compréhension des résultats de W. Craig

2 Paramétrage et équations physiques

On utilise le plus souvent le paramétrage suivant pour modéliser les vagues, dans le cas où la surface peut être représentée par le graphe d'une fonction :



Où y est l'axe vertical, x désigne les autres coordonnées. Un point du fluide est repéré par les coordonnées $(x,y) \in \mathbb{R}^n$, où $x \in \mathbb{R}^{n-1}$, $y \in \mathbb{R}$. $y = 0$ est le niveau de référence choisi (niveau de la surface à l'infini par exemple), $y = -h$ le fond.
La surface libre de l'eau à l'instant t est l'ensemble $\left\{(x, \eta(x,t)), x \in \mathbb{R}^{n-1}\right\}$, où $\eta(x,t)$ est la hauteur de l'onde en $(x,t) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$.
Le champ de vitesse dans le fluide est noté $\overrightarrow{v}(x,y,t)$.
Alors on cherche l'évolution du champ de vitesse et de la surface libre étant données leurs valeurs initiales, et connaissant le champ de gravité, les caractéristiques du fluide etc.
Une première équation est donnée par la conservation de la masse dans le domaine du fluide :

$$\overrightarrow{\nabla} \cdot (\rho \overrightarrow{v}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

où $\rho(x,y,t)$ est la masse volumique du fluide.
Dans le cas de l'eau, l'hypothèse d'incompressibilité (ρ constant et uniforme) donne $\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{v} = 0$.

On peut étayer numériquement cette hypothèse en connaissant la valeur de la compressibilité isentropique de l'eau
$\chi_S(\text{eau}) = 1/\rho \times \left(\dfrac{\partial \rho}{\partial P}\right)_S = 5.10^{-5}\text{Atm}^{-1}$
On utilise pour cela l'équation de l'équilibre hydrostatique qui donne $\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z} = \rho g$ où $z = -y$ est la profondeur, et la définition de la compressibilité $\chi_S = \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}P}$. En résolvant l'équation différentielle, on obtient alors l'expression de la masse volumique en fonction de la profondeur :

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{1}{1 - \chi_S \rho_0 g z}$$

(où ρ_0 est la masse volumique à la surface)
Alors ce modèle donne sur une profondeur de 100 mètres une variation relative de masse volumique de 0.05%, ce qui légitime l'hypothèse d'incompressibilité.
D'autre part, le caractère irrotationnel de l'écoulement induit la relation $\overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$
Etant sur un domaine simplement connexe, il s'ensuit que le champ de vitesse dérive d'un potentiel, noté φ :

$$\exists \varphi, \overrightarrow{v} = \overrightarrow{\nabla}\varphi$$

En combinant ces deux premières équations, on obtient l'équation de Laplace $\Delta\varphi = 0$.
Sur des domaines bornés, cette équation admet une unique solution pour des conditions aux limites fixées.
Ces conditions aux limites sont :
Au fond ($y = -h$), l'écoulement est tangent au fond : $\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{n} = 0$, où $\overrightarrow{n}$ est la normale sortante ; ou de manière équivalente $\partial_{\overrightarrow{n}}\varphi = 0$.
Au niveau de la surface libre, on a la condition dite cinématique :

$$\partial_t \eta = \partial_y \varphi - \partial_x \eta \cdot \partial_x \varphi$$

Dont la signification physique est qu'une particule située à la surface y reste au cours du temps.
En effet, entre deux instants voisins t et $t + \mathrm{d}t$, l'équation

$$(x, \eta(x,t)) + \mathrm{d}t\ \overrightarrow{v}((x, \eta(x,t)), t) = (x + \mathrm{d}x, \eta(x + \mathrm{d}x, t + \mathrm{d}t)) + o(\mathrm{d}t)$$

donne en projection sur la première coordonnée la relation $\mathrm{d}x = \mathrm{d}t\, \partial_x \varphi$; en projetant sur la deuxième coordonnée et en développant $\eta(x + \mathrm{d}x, t + \mathrm{d}t)$ au premier ordre, on obtient la condition cinématique.
On a de plus la condition, dite de Bernouilli :

$$\partial_t \varphi = -g\eta - \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{\nabla}\varphi\right|^2$$

Qui traduit la conservation de l'énergie.

3 Quelques résultats d'analyse

Certains résultats théoriques d'analyse seront nécessaires pour l'étude de ces équations afin de comprendre la démonstration de Walter Craig.

Il s'agit du principe du maximum de Hopf pour les opérateurs elliptiques et celui de la dérivée sortante. On ajoutera en corollaire un résultat d'unicité pour l'équation de Laplace.

Définition 1
Un opérateur différentiel du second ordre $\sum_{i,j} a_{i,j}(x)\dfrac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$ *est dit uniformément elliptique si la matrice* $A(x) = (a_{i,j}(x))_{i,j}$ *est définie positive uniformément en* x.
Un opérateur différentiel mêlant premier et second ordre sera dit uniformément elliptique si sa partie du second ordre est uniformément elliptique.

Proposition 1
Si

$$L[u] \equiv \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} > 0$$

dans un ouvert connexe D *où* L *est elliptique, alors* u *ne peut avoir de maximum local strict dans* D.

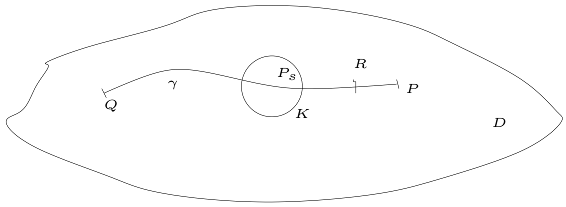
Preuve :
Soit x un point où u atteindrait un maximum relatif strict, et effectuons un changement de variable tel que dans les nouvelles coordonnées (z_k), L_x soit le laplacien.
On a $\dfrac{\partial u}{\partial z_k} = 0$ et $\dfrac{\partial^2 u}{\partial z_k^2} \leqslant 0$ pour tout k, donc l'inégalité différentielle ne peut être vraie au point x.

Théorème 1
Soit $u : (x_1, \cdots x_n) \mapsto u(x_1, \cdots x_n)$ *satisfaisant l'inéquation différentielle*

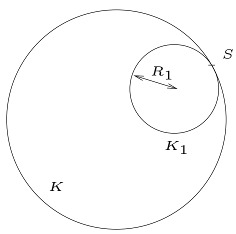
$$L[u] \equiv \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} \geqslant 0$$

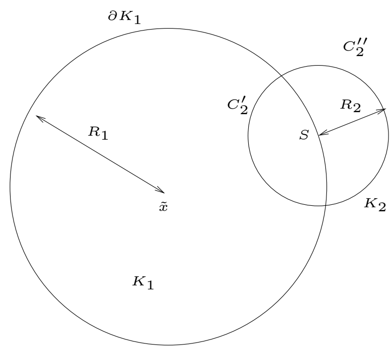
sur un ouvert connexe D *de* $\mathbb{R}^n$, *avec* L *uniformément elliptique. On suppose de plus que les* $a_{i,j}$ *et les* b_i *sont bornés sur* D.
Sous ces hypothèses, si u *atteint un maximum* M *en un point de* D, *alors* $u \equiv M$ *sur* D.

Démonstration :
Raisonnons par l'absurde : Supposons que $u = M$ en un point P de D, et que $u(Q) < M$ pour un autre point $Q \in D$. On prend alors un arc γ dans D joignant Q à P, et on note R le premier point de γ (en partant de Q) tel que $u(R) = M$ (P ne servira plus dans la suite de la démonstration).
Soit alors $d = \inf\limits_{t \in [0,1]} d(\gamma(t), {}^cD) > 0$ la distance de la courbe au bord de D.
On considère un point P_1 de γ sur la portion QR à une distance inférieure à $d/2$ de R, et on construit la boule K de centre P_1 de rayon maximum tel que $u < M$ sur cette boule. Cette boule a alors un rayon inférieur à $d/2$ et est donc incluse dans D.



Soit alors S un point de la frontière de K tel que $u(S) = M$ (un tel point existe, par continuité de u).
Soit K_1 une boule fermée tangente à ∂K en S et incluse dans $K \cup \{S\}$. Ainsi, $u < M$ sur K_1 sauf en S où $u(S) = M$. On note r_1 le rayon de K_1.
On considère aussi la boule fermée K_2 de rayon $r_2 = r_1/2$ et de centre S. On note alors C_2' la portion de ∂K_2 incluse dans K_1, et C_2'' l'autre portion.
Comme $u < M$ sur l'ensemble fermé C_2', il existe $\varepsilon > 0$ tel que $u \leqslant M - \varepsilon$ sur C_2' (car u est continue).
D'autre part, $u \leqslant M$ sur C_2''.





On note $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \cdots \tilde{x}_n)$ le centre de K_1, et on considère la fonction auxiliaire
$z : x \mapsto e^{-\alpha \sum_{i=1}^n (x_i - \tilde{x}_i)^2} - e^{-\alpha r_1^2}$, où $\alpha > 0$ sera ajustée plus tard.
Ainsi, $z > 0$ sur $\overset{\circ}{K}_1$, $z = 0$ sur ∂K_1, et $z < 0$ sur ${}^cK_1$
On a alors $L[z] = e^{-\alpha \sum_{i=1}^n (x_i - \tilde{x}_i)^2} \left(4\alpha^2 \sum\limits_{i,j=1}^n a_{i,j}(x_i - \tilde{x}_i)(x_j - \tilde{x}_j) - 2\alpha \sum\limits_{i=1}^n (a_{i,i} + b_i(x_i - \tilde{x}_i)) \right)$
Comme L est uniformément elliptique, on a $\sum\limits_{i,j=1}^n a_{i,j}(x_i - \tilde{x}_i)(x_j - \tilde{x}_j) \geqslant \mu_0 \sum\limits_{i=1}^n (x_i - \tilde{x}_i)^2$ pour un

$\mu_0 > 0$. Et comme de plus $\displaystyle\sum_{i=1}^{k}(x_i - \tilde{x}_i)^2 > \frac{1}{4}r_1^2$ dans K_2, il en résulte que pour $x \in K_1$,

$$L[z] \geqslant \alpha e^{-\alpha \sum_{i=1}^{k}(x_i-\tilde{x}_i)^2} \left(\alpha\mu_0 r_1^2 - 2\sum_{i=1}^{n}(a_{i,i} + b_i(x_i - \tilde{x}_i)) \right)$$

Et donc en choisissant α suffisamment grand (les $a_{i,i}$ étant bornés), la quantité entre parenthèses est strictement positive, et donc $L[z] > 0$ sur K_2.
On considère alors la fonction $w = u + ez$, où $0 < e < \dfrac{\varepsilon}{1 - e^{-\alpha r_1^2}}$
Alors la fonction w vérifie :

1. $w < M$ sur C_2'. En effet, on a déjà $0 \leqslant z < 1 - e^{-\alpha r_1^2}$, donc $ez < \varepsilon$, et on utilise le fait que $u \leqslant M - \varepsilon$ sur C_2'.
2. $w < M$ sur C_2" (car $z < 0$ sur C_2", et $u \leqslant M$ partout).
3. $w = M$ en S (centre de K_2), par construction.

Ainsi, w a un maximum à l'intérieur de K_2. D'autre part, $L[w] = L[u] + eL[z] > 0$ sur K_2, ce qui contredit la proposition précédente.

Remarques :

1. L'uniforme ellipticité de L et la bornitude des coefficients n'est pas nécessaire, il suffit que les quantités
$$\frac{\sum_{i=1}^{n} a_{i,i}(x)}{\mu(x)} \qquad \text{et} \qquad \frac{\sum_{i=1}^{n} |b_i(x)|}{\mu(x)}$$
soient bornées dans toute boule contenue dans l'intérieur de D.
2. Il n'est pas nécessaire que D soit borné
3. On a un résultat similaire pour les fonctions satisfaisant $L[u] \leqslant 0$. Ainsi, une solution de l'équation différentielle $L[u] = 0$ n'atteint ni maximum ni minimum à l'intérieur de D.

On définit maintenant, si elle existe, la dérivée de u dans la direction ν en un point P du bord par

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = \lim_{x \to P}[\nu \cdot \overrightarrow{\nabla} u(x)] = \lim_{x \to P}\left(\nu_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + \dots \nu_n \frac{\partial u}{\partial x_n} \right)$$

On dit que c'est une dérivée sortante si ν pointe vers l'extérieur de D. Ainsi, si u a un maximum en un point P et ν est sortante, on a $\dfrac{\partial u}{\partial \nu} \geqslant 0$ en P (car si la dérivée était négative, le maximum serait atteint à l'intérieur). On va montrer que sous certaines hypothèses, on peut rendre l'inégalité stricte.

Théorème 2
Soit u satisfaisant l'inéquation différentielle

$$L[u] \equiv \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \geqslant 0$$

sur un ouvert connexe par arcs D de $\mathbb{R}^n$, avec L uniformément elliptique. Supposons que $u \leqslant M$ sur D, et que $u = M$ en un point P du bord, et que P est un point de la frontière d'une boule $K_1 \subset D$. Si u est continu sur $D \cup P$, et si une dérivée sortante $\dfrac{\partial u}{\partial \nu}$ existe en P, alors $\dfrac{\partial u}{\partial \nu} > 0$ en P, à moins que u ne soit constant égal à M.

Démonstration :
On procède comme dans la démonstration du théorème précédent, en reprenant les mêmes notations :
Quitte à réduire K_1, on peut supposer que $\partial K_1 \subset D \cup P$
On construit une boule K_2, de centre P et de rayon $\dfrac{1}{2}r_1$, où r_1 est le rayon de K_1.
On définit aussi z comme précédemment, de sorte que $L[z] > 0$ sur K_2.
On considère alors la fonction $w = u + \varepsilon z$.
D'après le théorème précédent, si u n'est pas constant, alors $u < M$ sur K_1 et sur sa frontière, à part au point P (et $z = 0$ sur la frontière de K_1). On choisit $\varepsilon > 0$ suffisamment petit pour que $w \geqslant M$ sur la portion de la frontière de K_2 incluse dans K_1. Ainsi, $w \geqslant M$ sur la frontière de $K_1 \cap K_2$. Comme $L[w] > 0$ dans cette zone, le maximum de w est atteint en P et $w(P) = M$. Ainsi, en P,

$$\frac{\partial w}{\partial \nu} = \frac{\partial u}{\partial \nu} + \varepsilon \frac{\partial z}{\partial \nu} \geqslant 0$$

Et comme $\dfrac{\partial z}{\partial \nu} < 0$ en P, on a bien $\dfrac{\partial u}{\partial \nu} > 0$

Remarque :
Si la dérivée n'existe pas en P, le théorème montre que $\liminf\limits_{\alpha \to 0^+} \dfrac{u(x) - u(x - \alpha\nu)}{\alpha} > 0$

Théorème 3 (d'unicité)
On suppose ici que D est borné, et on considère l'équation différentielle sur D (appelée équation de Poisson)

$$\Delta v \equiv \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2} = f(x, y)$$

où v doit être de classe $\mathcal{C}^2$ sur D, continue sur $D \cup \partial D$, et vérifie sur ∂D

$$v = g$$

où $f : D \to \mathbb{R}$, $g : \partial D \to \mathbb{R}$ sont continue. (Le problème consistant à résoudre l'équation avec sa condition au bord s'appelle le problème de Dirichlet)
Alors si une solution de ce problème existe, elle est unique.

Démonstration :
On considère la différence u de deux fonctions v_1 et v_2 satisfaisant l'équation. Alors u est nulle sur le bord, et vérifie $\Delta u = 0$ sur D.
Ainsi, comme D est borné, le maximum de u est atteint sur $D \cup \partial D$, donc sur ∂D (d'après un théorème précédent), et donc $u \leqslant 0$ sur D. De même, $u \geqslant 0$ sur D, donc $u = 0$ partout.

4 Inexistence d'ondes localisées en dimension n supérieure à 3

On se place dans le référentiel en mouvement horizontal avec la vague (à la vitesse $c \in \mathbb{R}^{n-1}$), de façon à obtenir des équations indépendantes du temps.

Notations :

- Un point de l'espace est repéré par ses coordonnées $(x, y) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$, où y est la composante verticale
- $S(\eta)$ est le domaine fluide (ouvert), $S(\eta) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}, -h < y < \eta(x)\}$.
- La surface libre $\Lambda(\eta) = \{(x, \eta(x)), x \in \mathbb{R}^{n-1}\}$
- La normale extérieure

$$N = \frac{1}{\sqrt{1 + |\partial_x \eta(x)|^2}}(-\partial_x \eta(x), 1) \tag{1}$$

- Le potentiel de vitesse dans le référentiel en mouvement Φ

Un peu de calcul différentiel donne la dérivée normale

$$\partial_N \Phi = \frac{1}{\sqrt{1 + |\partial_x \eta(x)|^2}}(\partial_y \Phi - \partial_x \eta \cdot \partial_x \Phi) \tag{2}$$

et les dérivées tangentes

$$\partial_{t_j} \Phi = \partial_{x_j} \Phi(x, \eta(x)) = (\partial_{x_j} \Phi + \partial_{x_j} \eta \, \partial_y \Phi)(x, \eta(x)) \tag{3}$$

On introduit le nouveau potentiel φ défini par $\Phi(x, y) = \varphi(x, y) - c \cdot x$
On obtient alors les équations suivantes pour φ :

- $\Delta \varphi = 0$ dans le domaine $S(\eta)$
- $\partial_y \varphi = 0$ au fond ($y = -h$, condition de Neumann)
- $\partial_N \varphi + \dfrac{c \cdot \partial_x \eta}{\sqrt{1 + |\partial_x \eta|^2}} = 0$ sur la surface libre $\Lambda(\eta)$ (condition cinématique)
- $\dfrac{1}{2}\left|\overrightarrow{\nabla} \varphi\right|^2 - c \cdot \partial_x \varphi + g\eta = 0$ sur la surface libre $\Lambda(\eta)$.
- $\eta(x) \xrightarrow[|x| \to \infty]{} 0$: on considère des ondes localisées.
- $\varphi \xrightarrow[|x| \to \infty]{} 0$ (changement de référentiel)

Lemme 1
L'ensemble $\Lambda_+(\eta) = \left\{x \in \mathbb{R}^{n-1}, \eta(x) > 0\right\}$ *est non vide, sauf si la solution est identiquement nulle* ($\eta = 0$ *et* $\varphi = 0$)

Démonstration :
Si φ est identiquement nulle, alors il en est de même pour η grâce aux conditions aux limites.
On suppose donc φ non identiquement nulle.
Comme $\varphi \xrightarrow[|x|\to\infty]{} 0$, il doit atteindre au moins un extremum (maximum ou minimum) dans le domaine $\overline{S(\eta)}$. Le laplacien étant un opérateur elliptique, le lemme de Hopf implique que cet extremum est atteint sur la surface libre $\Lambda(\eta)$ ou le fond $\{y = -h\}$.
Il ne peut déjà pas être atteint sur le fond, car le second lemme de Hopf implique que la dérivée normale sortante est non nulle (> 0 pour un minimum, < 0 pour un maximum), ce qui serait en contradiction avec la condition de Neumann.
Soit $P = (p, \eta(p))$ un point de la surface libre $\Lambda(\eta)$ où est atteint cet extremum. Alors le second Lemme de Hopf implique que $|\partial_N \varphi(P)| > 0$.
D'autre part, si $Q = (q, \eta(q))$ est un point critique sur la surface libre, on a

$$\partial_{t_j}\varphi(Q) = \partial_{x_j}\varphi(Q) + \partial_{x_j}\eta(q)\ \partial_y\varphi(Q) = 0$$

(d'après (3)), d'où

$$\partial_{x_j}\varphi(Q) = -\partial_{x_j}\eta(q)\ \partial_y\varphi(Q)$$

ce qui exprime, en coordonnées, l'égalité

$$\partial_x\varphi(Q) = -\partial_x\eta(q)\ \partial_y\varphi(Q) \tag{4}$$

pour tout $x \in \mathbb{R}^{n-1}$
Alors (2) implique que $\partial_N\varphi(Q) = \dfrac{1}{\sqrt{1+|\partial_x\eta|^2}}(\partial_y\varphi(Q) - \partial_x\eta\cdot\partial_x\varphi(Q)) = \sqrt{1+|\partial_x\eta|^2}\ \partial_y\varphi(Q)$ (à l'aide de (4))
Il en résulte que $c\cdot\partial_x\varphi(Q) = -\dfrac{c\cdot\partial_x\eta}{\sqrt{1+|\partial_x\eta|^2}}\partial_N\varphi(Q)$ (toujours à l'aide de (4))
Mais la condition cinématique donne que $\partial_N\varphi = -\dfrac{c\cdot\partial_x\eta}{\sqrt{1+|\partial_x\eta|^2}}$, donc au point critique on a $c\cdot\partial_x\varphi(Q) = |\partial_N\varphi(Q)|^2$.

On utilise alors la condition de Bernouilli, sachant que $\left|\overrightarrow{\nabla}\varphi(Q)\right|^2 = |\partial_N\varphi(Q)|^2$ – car la dérivée tangente est nulle, qui donne :

$$\frac{1}{2}\,|\partial_N\varphi(Q)|^2 = g\eta(q)$$

En utilisant cette égalité au point P, on a alors $\eta(p) > 0$, car $|\partial_N \varphi(P)| > 0$ d'après le lemme de Hopf.
C'est le résultat recherché.
Ceci se traduit par le fait qu'une vague s'élève forcément par endroits au-dessus du niveau de la mer.

On introduit la fonction $\psi(x,y) = c \cdot \partial_x \varphi(x,y)$, harmonique dans le domaine $S(\eta)$ et satisfaisant la condition de Neumann au fond $\{y = -h\}$ (car φ est harmonique, et par commutation de $c \cdot \partial_x$ avec respectivement Δ et ∂_N)

Lemme 2
Si $\varphi \xrightarrow[|x|\to\infty]{} 0$, *alors à moins d'être identiquement nulle,* ψ *prend des valeurs strictement positives et négatives sur la surface libre* $\Lambda(\eta)$

Démonstration :
Si ψ n'est pas identiquement nulle, montrons d'abord qu'elle prend des valeurs positives et négatives dans le domaine fluide $S(\eta)$.
Pour cela, considérons les lignes horizontales $\ell = \{a + sc, a \in S(\eta), s \in \mathbb{R}\}$, qui sont entièrement dans le domaine fluide (assez proche du fond par exemple).
Alors,

$$\int_\ell \psi = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(a+sc)\,\mathrm{d}s = \int_{-\infty}^{+\infty} c \cdot \partial_x \varphi(a+sc)\,\mathrm{d}s = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\varphi(a+sc)\,\mathrm{d}s = 0$$

Sur de telles lignes, ψ doit soit être identiquement nulle, soit changer de signe strictement.
Si ψ est nulle sur toutes ces lignes, comme l'ensemble de ces lignes est ouvert, par prolongement analytique ψ est nulle sur tout le domaine fluide
Comme ψ est supposée non identiquement nulle, elle atteint alors des valeurs strictement positives et strictement négatives dans $S(\eta)$.
Comme φ et η tendent vers 0 quand $|x|$ tend vers $+\infty$, un argument utilisant le noyau de Poisson montre que ψ tend aussi vers 0 quand $|x|$ tend vers $+\infty$
Considérons donc le maximum et le minimum de ψ dans le domaine fluide $S(\eta)$ (ils existent d'après ce qui précède). Comme ψ est harmonique, ils sont atteints sur la frontière $\partial S(\eta)$. Mais, comme expliqué dans la démonstration du lemme précédent, ceci ne peut avoir lieu au fond.
Donc le maximum qui est strictement positif, et le minimum qui est strictement négatif, sont atteints sur la surface libre, et donc ψ prend des valeurs à la fois positives et négatives sur la surface libre.

Théorème 4 (inexistence d'ondes solitaires)
Si (η, φ) *est une solution des équations d'évolution, et si* $\eta \geqslant 0$ *et* $\varphi \xrightarrow[|x|\to\infty]{} 0$, *alors en fait* $\eta = 0$ *et* $\varphi = 0$

Démonstration :
Ceci découle simplement du deuxième lemme.
En effet, la condition de Bernouilli donne $\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{\nabla}\varphi\right|^2 + g\eta = c \cdot \partial_x \varphi \quad (= \psi)$
Comme $\eta \geqslant 0$, on a $\Lambda_-(\psi) = \{p \in \Lambda(\eta), c \cdot \partial_x \varphi(p, \eta(p)) < 0\} = \emptyset$, ce qui contredit le lemme 2.

Remarque : Il y a une restriction à ce théorème : on a supposé la vague au dessus du niveau de la mer ($\eta \geqslant 0$).
Cependant, il pourrait exister des ondes solitaires dont la surface libre aurait une élévation positive et négative.
Toutefois, des résultats obtenus en dimension 2 montrent que les ondes solitaires ont toutes des élévations positives (Craig & Sternberg, 1988)

5 Résultats en dimension 2

Théorème 5
Si $h < +\infty$ et (φ, η) est une solution telle que $c^2 > gh$, alors soit pour tout $x \in \mathbb{R}$ $\eta(x) > 0$, soit la solution est identiquement nulle.

Démonstration :
On introduit la fonction conjuguée harmonique du potentiel Φ, on la note Ψ (c'est l'unique fonction réelle – à une constante près – telle que $\chi(x + \boldsymbol{i}y) = \Phi(x, y) + \boldsymbol{i}\Psi(x, y)$ est holomorphe. Ψ est caractérisée par les équations de Cauchy-Riemann). Les équations de Cauchy-Riemann impliquent que $\left|\overrightarrow{\nabla}\Psi\right|^2 = \left|\overrightarrow{\nabla}\Phi\right|^2$; de plus, comme $\Phi \sim cx$ en $+\infty$, on a $\chi \sim cz$, donc $\Psi \sim cy$ en choisissant la bonne constante additive pour Ψ. Les conditions aux limites pour Ψ sont : $\Psi(x, -h) = -ch$ (en effet, ceci est vrai en $\pm\infty$, et $\partial_x \Psi(x, -h) = \partial_y \Phi(x, -h) = 0$) et $\Psi(x, \eta(x)) = 0$ (pour des raisons similaires : $\partial_T \Psi = \partial_N \Phi = 0$ à la surface).
Le principe du maximum sur Ψ implique $-ch < \Psi < 0$ dans le domaine fluide.
Soit $Q = (q, \eta(q))$ un minimum global de Ψ de la surface libre, $\eta(q) = m$ (on a $\partial_x \eta(q) = 0$).
Par l'absurde, supposons $m \leqslant 0$.
Comme la surface libre ne touche pas le fond, on a aussi $m > -h$.
La condition de Bernouilli donne : $\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{\nabla}\Phi(Q)\right|^2 = c^2/2 - gm$
Donc $\left|\overrightarrow{\nabla}\Psi\right|^2$ prend son maximum en Q
Comparons maintenant Ψ avec la fonction linaire $\Psi_0(x, y) = \frac{ch \times (y - m)}{h + m}$. Ψ et Ψ_0 coïncident au fond et au point Q ; de plus, en tout point où $\eta(x) > m$, on a $\Psi(x, \eta(x)) = 0$ tandis que $\Psi_0(x, \eta(x)) > 0$.
Donc $\Psi_0 \geqslant \Psi$ sur $\partial S(\eta)$.
Et par le principe du maximum, $\Psi_0 > \Psi$ dans le domaine fluide (à moins qu'elles ne coïncident, auquel cas η est constante égale à m, ce qui est exclu).
Le lemme de Hopf sur la dérivée sortante au point Q donne $\partial_N \Psi(Q) > \partial_N \Psi_0(Q)$, d'où
$\partial_y \Psi(Q) > \partial_y \Psi_0(Q) = \frac{ch}{h + m}$ (car la normale sortante est verticale en Q)
En utilisant cette inégalité dans la condition de Bernouilli, sachant que $\partial_T \Psi(Q) = -\partial_N \Phi(Q) = 0$, on obtient $\frac{1}{2}\left(\frac{ch}{h + m}\right)^2 < \frac{c^2}{2} - gm$.
En posant $s = m/h \in [-1, 0]$, cette condition s'écrit $\left(\frac{1}{1 + s}\right)^2 + \frac{2gh}{c^2}s < 1$, qui n'a pas de solution

pour $s \in [-1, 0]$, car $\dfrac{c^2}{gh} > 1$.
On obtient ainsi une contradiction, donc $m > 0$, c'est-à-dire que la solution est partout positive.

Solution des équations linéarisées, célérité des vagues de faible amplitude

On se place dans le référentiel fixe, et on cherche la réponse linéaire à une excitation en surface $\Phi(x, y, t) \propto \sin(kx - \omega t)$ (par théorie de Fourier, il suffit de connaître la réponse à de telles excitations). C'est-à-dire, si H est l'amplitude de la vague, la réponse s'exprimera en puissance de H, et on veut la solution au premier ordre en H. On recherche aussi le lien entre ω et k pour qu'il existe une solution (l'équation entre ω et k obtenue est appelée relation de dispersion). On a $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$ où T est la période des vagues, et $k = \dfrac{2\pi}{L}$, où L est la période spatiale ; alors $C = \dfrac{\omega}{k}$ est leur célérité.
On rappelle les équations, linéarisées :

$$\begin{aligned}
\Delta\Phi &= 0 \\
\Phi(x, 0, t) &= \mathrm{Cte.}\sin(kx - \omega t) \\
\partial_y\Phi(x, -h, t) &= 0 \\
\partial_t\eta &= \partial_y\Phi \qquad \text{(condition cinématique linéarisée)} \\
\partial_t\Phi + g\eta &= 0 \qquad \text{(condition de Bernouilli linéarisée)}
\end{aligned}$$

Au premier ordre, la solution est :

$$\begin{aligned}
\Phi(x, y, t) &= \frac{gH}{\omega} \times \frac{\cosh(k(y+h))}{\cosh(kh)} \sin(kx - \omega t) \\
\eta(x, t) &= H\cos(kx - \omega t)
\end{aligned}$$

En effet, on vérifie que Φ est bien harmonique et qu'elle vérifie la condition de Neumann ; l'amplitude de Φ est ajustée pour vérifier la condition de Bernouilli, et la condition cinématique donne la relation de dispersion. Après calcul, on obtient

$$\omega^2 = gk\tanh(kh)$$

Dans la limite des faibles nombres d'onde (par exemple les tsunamis), $L \gg h$, la célérité tend vers $C = \sqrt{gh}$

Conclusion :
Le problème des ondes solitaires en dimension 2 est bien décrit mathématiquement (voir à ce sujet Beale (1977) pour l'existence en profondeur finie, Sun (1997) pour l'inexistence en profondeur infinie, et Craig & Sternberg (1988) pour la positivité, la symétrie par rapport à une ligne de crête et la décroissance monotone de chaque coté de cette crête).
Nous avons ici prouvé la positivité de ces ondes, et partiellement décrit le régime linéaire des équations.
En 3 dimensions, en supposant la positivité, on a prouvé ici l'inexistence d'ondes solitaires localisées et d'énergie finie. Ces résultats mathématiques permettent une meilleure compréhension

du phénomène des ondes de gravité dans l'eau, et reflètent de plus l'intuition physique de la propagation des vagues.

Bibliographie

W. Craig, juin 2006. Mathematical aspect of surface water waves. *Workshop on mathematical hydrodynamics, Steklov Institute Moscow*
W. Craig, 2002. Nonexistence of solitary water waves in three dimensions, *Phil. Trans. Royal Soc. London A 360*
M.H. Protter & H.F. Weinberger, 1984. *Maximum Principles in Differential Equations*
W. Craig, 2006. Surface water waves and tsunamis. *J. Dynamics and Differential Equations*